TEORJA OPERACYJ

OPERACJE LINJOWE

D^R STEFAN BANACH
PROFESOR UNIWERSYTETU JANA KAZIMIERZA WE LWOWIE

TEORJA OPERACYJ

TOM I

OPERACJE LINJOWE

WYDAWNICTWO KASY IM. MIANOWSKIEGO
INSTYTUTU POPIERANIA NAUKI
WARSZAWA — 1931 — PAŁAC STASZICA

DZIEŁO TO
POŚWIĘCAM
MOJEJ ŻONIE

DRUKARNIA M. GARASIŃSKI W WARSZAWIE

PRZEDMOWA.

Teorja operacyj, stworzona przez V. Volterrę, zajmuje się badaniem funkcyj, określonych w przestrzeniach o nieskończenie wielu wymiarach. Niema prawie dziedziny matematyki, gdzieby teorja powyższa nie wnikała w sposób istotny. Dość wspomnieć, że rachunek warjacyjny i teorja równań całkowych okazały się szczególnemi przypadkami ogólnych działów, zawartych w teorji operacyj. Piękność teorji operacyj leży głównie w tem, że w niej łączą się w harmonijną całość metody matematyki klasycznej z metodami matematyki nowożytnej. Teorja operacyj pozwala często interpretować twierdzenia teorji mnogości lub topologji w sposób zupełnie nieoczekiwany. Twierdzenie np. z topologji o stałym punkcie daje się (jak zauważyli Birkhoff i Kellogg), przy pomocy teorji operacyj przetłumaczyć na twierdzenie klasyczne o istnieniu rozwiązań równań różniczkowych. Są działy matematyki, których głębsze zrozumienie możliwe jest tylko przy pomocy znajomości teorji operacyj. Takiemi działami są: teorja funkcyj zmiennej rzeczywistej, równania całkowe, rachunek warjacyjny i t. p.

Jeżeli zwrócimy uwagę na piękno, tkwiące w teorji operacyj, to pomijając nawet jej liczne zastosowania (które są nieistotne dla oceny piękna samej teorji), możemy ją słusznie zaliczyć do najpiękniejszych teorji matematyki.

Po tem wszystkiem nie zdziwi nas zdanie p. J. Hadamarda, że teorja operacyj przedstawia najpotężniejszą metodę badań matematyki nowożytnej.

Tom pierwszy niniejszego dzieła stanowi ustęp z algebry teorji operacyj. W tomie tym zajmuję się badaniem t. zw. operacyj linjowych. Odpowiada to w algebrze badaniu form linjowych kształtu: $a_1 x_1 + a_2 x_2 + \ldots + a_n x_n$.

W odpowiednich ustępach podaję zastosowania, otrzymanych twierdzeń, do rozmaitych dziedzin matematyki jak np. do teorji funkcyj zmiennej rzeczywistej, szeregów ortogonalnych, teorji sumacyj, równań całkowych i t. p. Przy twierdzeniach podaję zawsze autora, o ile tylko jest mi znanym.

Jest tylko kilka dzieł, poświęconych teorji operacyj. Oto najważniejsze:

1. V. Volterra: *Leçons sur les fonctions de lignes,* (Coll. Borel), Gauthier-Villars, Paris, 1913.

2. V. Volterra: *Theory of Functionals,* Blackie, London and Glasgow, 1930.

3. P. Lévy: *Leçons d'analyse fonctionnelle,* (Coll. Borel), Gauthier-Villars, Paris, 1922.

W książce (2) podana jest również literatura.

Przystępuję do miłego obowiązku złożenia podziękowania tym wszystkim, którzy służyli mi radą i pomocą przy redakcji tego tomu, a w szczególności:

p. Dr. H. Auerbachowi za częściową redakcję wstępu,

p. S. Mazurowi za wybitną pomoc użyczoną przy redakcji tej książki, a w szczególności przy redakcji uwag, znajdujących się na końcu tego tomu,

p. Dr. S. Saksowi, Docentowi Uniw. Warszawskiego za cenne uwagi i poprawki, podane w czasie druku, które przyczyniły się do uproszczenia i wyjaśnienia wielu kwestyj, jakoteż do usunięcia wielu błędów i usterek,

Kasie im. Mianowskiego za podjęcie się wydania tego dzieła.

Stefan Banach

Lwów dn. 20. VII. 1931.

WSTĘP.

Podamy tu pewne definicje i twierdzenia, z których w dalszym ciągu będziemy korzystać. Przyjmujemy, że czytelnik posiada znajomość teorji miary i całki Lebesgue'a[1]).

§ 1. *Niektóre twierdzenia z teorji całki Lebesgue'a*[2]).

Jeżeli funkcje mierzalne $x_n(t)$ są wspólnie ograniczone, a ciąg $\{x_n(t)\}$ jest prawie wszędzie zbieżny do funkcji $x(t)$ w $< a, b >$, to

$$\lim_{n\to\infty}\int_a^b x_n(t)\,dt = \int_a^b x(t)\,dt\,.$$

Ogólniej, jeżeli istnieje funkcja całkowalna $\varphi(t) \geqslant 0$, dla której $|x_n(t)| \leqslant \varphi(t)$ $(n = 1, 2, \ldots)$, to funkcja graniczna jest również całkowalna i spełnia powyższy związek.

Jeżeli $\{x_n(t)\}$ jest ciągiem, niemalejącym funkcyj całkowalnych w $< a, b >$, zbieżnym do funkcji $x(t)$, to

$$\lim_{n\to\infty}\int_a^b x_n(t)\,dt = \int_a^b x(t)\,dt,$$

o ile funkcja $x(t)$ jest całkowalna, zaś w przeciwnym razie:

$$\lim_{n\to\infty}\int_a^b x_n(t)\,dt = +\infty\,.$$

---

[1]) Por. np. C. de la Vallée Poussin, Intégrales de Lebesgue. Fonctions d'ensemble. Classes de Baire. Paris. G.-Villars, 1916, lub H. Lebesgue, Leçons sur l'Intégration, 2 éd., Paris, G.-Villars, 1928.

[2]) Por. np. Poussin, l. c., p. 49.

Jeżeli ciąg $\{x_n(t)\}$ funkcyj całkowalnych z p-tą potęgą $(p \geqslant 1)$ jest prawie wszędzie zbieżny do funkcji $x(t)$, a nadto

$$\int_a^b |x_n(t)|^p\, dt < K \qquad (n = 1, 2, \ldots),$$

to również funkcja $x(t)$ jest całkowalna z p-tą potęgą [1].

§ 2. *Nierówności dla funkcyj całkowalnych z p-tą potęgą* [2].

Klasę funkcyj całkowalnych wraz z p-tą potęgą $(p > 1)$, w przedziale $< a, b >$ oznaczamy przez $(L^{(p)})$. Liczbie p przyporządkowujemy liczbę q związaną z nią równaniem $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$, którą nazywamy wykładnikiem sprzężonym do p. Przy $p = 2$ jest również $q = 2$.

Jeżeli $x(t) \subset (L^{(p)})$, $y(t) \subset (L^{(q)})$, to funkcja $x(t) \,.\, y(t)$ jest całkowalna, a dla jej całki zachodzi nierówność następująca:

$$\left|\int_a^b x \,.\, y\, dt\right| \leqslant \left(\int_a^b |x|^p\, dt\right)^{\frac{1}{p}} \left(\int_a^b |y|^q\, dt\right)^{\frac{1}{q}};$$

W szczególności dla $p = 2$ mamy

$$\left|\int_a^b x\, y\, dt\right| \leqslant \left(\int_a^b x^2\, dt\right)^{\frac{1}{2}} \left(\int_a^b y^2\, dt\right)^{\frac{1}{2}}$$

Jeżeli funkcje $x(t), y(t)$ należą do $(L^{(p)})$, to również $x(t) + y(t)$ należy do $(L^{(p)})$ i

$$\left(\int_a^b |x+y|^p\, dt\right)^{\frac{1}{p}} \leqslant \left(\int_a^b |x|^p\, dt\right)^{\frac{1}{p}} + \left(\int_a^b |y|^p\, dt\right)^{\frac{1}{p}}.$$

Tym nierównościom odpowiadają następujące nierówności arytmetyczne:

---

[1]) Por. E. W. Hobson. The Theory of Functions of a real variable etc., 2 wyd., Cambridge, 1921/26, vol. I, p. 300.

[2]) Por. np. Hobson, l. c., I., p. 588.

$$\left|\sum_{v=1}^{n} a_v b_v\right| \leqslant \left(\sum_{v=1}^{n} |a_v|^p\right)^{\frac{1}{p}} \left(\sum_{v=1}^{n} |b_v|^q\right)^{\frac{1}{q}},$$

$$\left(\sum_{v=1}^{n} |a_v + b_v|^p\right)^{\frac{1}{p}} \leqslant \left(\sum_{v=1}^{n} |a_v|^p\right)^{\frac{1}{p}} + \left(\sum_{v=1}^{n} |b_v|^p\right)^{\frac{1}{p}}.$$

Dla $p = 2$ pierwsza z nich daje znaną nierówność Schwarza:

$$\left|\sum_{v=1}^{n} a_v b_v\right| \leqslant \left(\sum_{v=1}^{n} a_v^2\right)^{\frac{1}{2}} \left(\sum_{v=1}^{n} b_v^2\right)^{\frac{1}{2}}$$

Do każdej funkcji $x(t)$ całkowalnej z p-tą potęgą $(p > 1)$ i dowolnego $\varepsilon > 0$ istnieje funkcja ciągła $\varphi(t)$ taka, że

$$\int_a^b |x - \varphi|^p < \varepsilon\ ^{1)}.$$

§ 3. *Zbieżność asymptotyczna.*

Ciąg $\{x_n(t)\}$ funkcyj mierzalnych w pewnym zbiorze nazywamy zbieżnym asymptotycznie, lub zbieżnym wedle miary (en mesure) do funkcji $x(t)$, określonej w tym zbiorze, jeżeli

$$\lim_{n\to\infty} m\,E\,(|x_n(t) - x(t)| > \varepsilon) = 0\ ^{2)}$$

dla każdego $\varepsilon > 0$.

Ciąg $\{x_n(t)\}$ zbieżny asymptotycznie do funkcji $x(t)$ zawiera zawsze ciąg częściowy zbieżny prawie wszędzie (w zwykłem znaczeniu) do tej funkcji.

Na to, by dany ciąg $\{x_n(t)\}$ był zbieżny asymptotycznie do pewnej funkcji, potrzeba i wystarcza, by

$$\lim_{p,\,q\to\infty} m\,E\,(|x_p(t) - x_q(t)| > \varepsilon) = 0$$

przy każdem $\varepsilon > 0$ [3]).

---

[1]) Por. np. Hobson, l. c., II., p. 250.

[2]) $m\,E\,(|x_n(t) - x(t)| > \varepsilon)$ oznacza miarę zbioru wartości t, dla których $|x_n(t) - x(t)| > \varepsilon$. Podobnie niżej.

[3]) Por. np. Hobson l. c. II. p. 242—244.

§ 4. *Zbieżność przeciętna.*

Niech $\{x_n(t)\}$ będzie ciągiem funkcyj całkowalnych z p-tą potęgą $(p \geqq 1)$ w przedziale $< a, b >$. Mówimy, że ciąg ten jest zbieżny przeciętnie z p-tą potęgą do funkcji $x(t)$, również całkowalnej z p-tą potęgą, jeżeli

$$\lim_{n\to\infty} \int_a^b |x_n(t) - x(t)|^p \, dt = 0 .$$

Warunkiem koniecznym i dostatecznym dla istnienia takiej funkcji $x(t)$ jest:

$$\lim_{i,\,k\to\infty} \int_a^b |x_i(t) - x_k(t)|^p \, dt = 0 .$$

Funkcja $x(t)$ jest wówczas określona jednoznacznie, poza zbiorem o mierze zero.

Ciąg zbieżny przeciętnie do jakiejś funkcji jest do niej również asymptotycznie zbieżny, zawiera zatem zawsze ciąg częściowy zbieżny do tej funkcji prawie wszędzie w zwykłem znaczeniu [1].

§ 5. *Całka Stieltjesa* [2].

Oznaczmy przez $x(t)$ funkcję ciągłą, zaś przez $\alpha(t)$ funkcję o wahaniu ograniczonem w przedziale $< a, b >$. Jeżeli podzielimy przedział $< a, b >$ na przedziały częściowe przy pomocy liczb

$$a = t_0 < t_1 < t_2 < \ldots\ldots < t_n = b ,$$

a w każdym z przedziałów częściowych obierzemy dowolną liczbę ϑ_i, to, podobnie jak przy definicji całki Riemanna, możemy utworzyć sumę:

$$S = \sum_{i=1}^{n} x(\vartheta_i)\,[\alpha(t_i) - \alpha(t_{i-1})] \qquad [t_i \geqq \vartheta_i \geqq t_{i-1}],$$

---

[1]) Por. np. Hobson, l. c., II, p. 245.

[2]) Por. np. Lebesgue, Leçons, Chap. XI.

Udowadnia się, że dla każdego ciągu podziałów, dla którego największy przedział częściowy dąży do zera, sumy S posiadają granicę, zawsze tęsamą, którą oznaczamy przez

$$\int_a^b x(t)\, d\alpha(t)$$

i nazywamy całką Stieltjesa.

Całka ta posiada następujące własności:

$$\int_a^b x(t)\, d\alpha(t) = -\int_b^a x(t)\, d\alpha(t),$$

$$\int_a^b x(t)\, d\alpha(t) + \int_b^c x(t)\, d\alpha(t) = \int_a^c x(t)\, d\alpha(t),$$

$$\int_a^b [x_1(t) + x_2(t)]\, d\alpha(t) = \int_a^b x_1(t)\, d\alpha(t) + \int_a^b x_2(t)\, d\alpha(t).$$

Pierwsze twierdzenie o średniej wartości wyraża się tu przez nierówność:

$$\left|\int_a^b x(t)\, d\alpha(t)\right| \leqslant M\, V,$$

przyczem M oznacza górny kres bezwzględnej wartości $|x(t)|$, zaś V całkowite wahanie funkcji $\alpha(t)$ w $< a, b >$.

Jeżeli funkcja $\alpha(t)$ jest absolutnie ciągła, to całkę Stieltjesa można wyrazić przez całkę Lebesgue'a w sposób następujący:

$$\int_a^b x(t)\, d\alpha(t) = \int_a^b x(t)\, \alpha'(t)\, dt.$$

Jeżeli $\alpha(t)$ jest funkcją ściśle rosnącą [t. zn. $\alpha(t') < \alpha(t'')$ dla $a \leqslant t' < t'' \leqslant b$] wówczas, kładąc dla każdego s odcinka $< \alpha(a), \alpha(b) >$:

$\beta(s)$ = górny kres wartości t, dla których $s \geqslant \alpha(t)$, otrzymujemy

$$\int_a^b x(t)\,d\,\alpha(t) = \int_{\alpha(a)}^{\alpha(b)} x[\beta(s)]\,ds$$ [1]

D o w ó d.

Mamy $\qquad \beta[\alpha(t)] = t \qquad\qquad a \leqslant t \leqslant b \qquad . \; . \; . \; . \quad (1)$

Ponieważ funkcja $\beta(s)$ jest funkcją rosnącą i przyjmuje wszystkie wartości przedziału $< \beta[\alpha(a)] = a, \; \beta[\alpha(b)] = b >$, przeto funkcja $\beta(s)$ jest ciągła. Wynika stąd, że funkcja $x[\beta(s)]$ jest również ciągłą.

Utwórzmy dowolny podział (δ) odcinka (a, b) przy pomocy liczb $a = t_0 < t_1 \ldots < t_n = b$. Połóżmy $\alpha(t_i) = \vartheta_i$.

Mamy

$$I_i = \int_{\vartheta_{i-1}}^{\vartheta_i} x[\beta(s)]\,ds = (\vartheta_i - \vartheta_{i-1})\,x(\vartheta_i'),$$

gdzie $\vartheta_i' = \beta(s_i')$, przyczem $\vartheta_{i-1} \leqslant s_i' \leqslant \vartheta_i$.

Oczywiście $\beta(\vartheta_{i-1}) \leqslant \beta(s_i') = \vartheta_i' \leqslant \beta(\vartheta_i)$.

Na mocy (1) $\beta(\vartheta_{i-1}) = \beta[\alpha(t_{i-1})] = t_{i-1}$, oraz analogicznie $\beta(\vartheta_i) = t_i$.

Zatem

$$t_{i-1} \leqslant \vartheta_i' \leqslant t_i\,.$$

A więc

$$I_i = x(\vartheta_i')\,[\alpha(t_i) - \alpha(t_{i-1})]\,.$$

Stąd

$$\int_{\alpha(a)}^{\alpha(b)} x[\beta(s)]\,ds = \sum_{i=1}^{n} I_i = \sum_{i=1}^{n} x(\vartheta_i')\,[\alpha(t_i) - \alpha(t_{i-1})].$$

Ponieważ ostatnia suma zdąża do $\int_a^b x(t)\,d\,\alpha(t)$, gdy maximum długości przedziałów, wchodzących w skład podziału (δ), dąży do zera, przeto

$$\int_{\alpha(a)}^{\alpha(b)} x[\beta(s)]\,ds = \int_a^b x(t)\,d\,\alpha(t).$$

Jeżeli teraz $\alpha(t)$ jest dowolną funkcją o wahaniu ograniczonem, to możemy ją zawsze przedstawić jako różnicę $\alpha_1(t) - \alpha_2(t)$, gdzie

---

[1] Por. L e b e s g u e, l. c. p. 258—260.

$\alpha_1(t)$ i $\alpha_2(t)$ są funkcjami ściśle rosnącemi. Oznaczając, jak poprzednio przez $\beta_1(s)$, $\beta_2(s)$ odpowiednie funkcje, otrzymamy

$$\int_a^b x(t)\,d\,\alpha(t) = \int_a^b x(t)\,d\,\alpha_1(t) - \int_a^b x(t)\,d\,\alpha_2(t) =$$

$$\int_{\alpha_1(a)}^{\alpha_1(b)} x[\beta_1(s)]\,ds - \int_{\alpha_2(a)}^{\alpha_2(b)} x[\beta_2(s)]\,ds.$$

Jeżeli ciąg $\{x_n(t)\}$ funkcyj ciągłych jest wspólnie ograniczony i zdąża wszędzie do funkcji ciągłej $x(t)$, wówczas dla każdej funkcji $\alpha(t)$ o wahaniu ograniczonem mamy

$$\lim_{n\to\infty} \int_a^b x_n(t)\,d\,\alpha(t) = \int_a^b x(t)\,d\,\alpha(t).$$

Jest bowiem

$$\lim_{n\to\infty} \int_{\alpha_1(a)}^{\alpha_1(b)} x_n[\beta_1(s)]\,ds = \int_{\alpha_1(a)}^{\alpha_1(b)} x[\beta_1(s)]\,ds,$$

$$\lim_{n\to\infty} \int_{\alpha_2(a)}^{\alpha_2(b)} x_n[\beta_2(s)]\,ds = \int_{\alpha_2(a)}^{\alpha_2(b)} x[\beta_2(s)]\,ds.$$

ROZDZIAŁ I.

Zbiory i operacje mierzalne (B) w przestrzeniach metrycznych.

§ 1. O danym zbiorze niepustym E powiadamy, że tworzy *przestrzeń metryczną* lub *przestrzeń (D)*, jeśli każdej parze uporządkowanej jego elementów x, y przyporządkowana jest pewna liczba (x, y), spełniająca następujące warunki[1]):

1) $(x, x) = 0$, $(x, y) > 0$ przy $x \neq y$;

2) $(x, y) = (y, x)$;

3) $(x, z) \leqslant (x, y) + (y, z)$.

Liczba (x, y) nazywa się *odległością* punktów (elementów) x, y. Ciąg punktów $\{x_n\}$ określamy jako *zbieżny*[2]), gdy

$$\lim_{p,\, q \to \infty} (x_p,\, x_q) = 0; \tag{1}$$

powiadamy, że jest on *zbieżny do punktu* x_0, pisząc $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = x_0$, skoro

$$\lim_{n \to \infty} (x_n,\, x_0) = 0. \tag{2}$$

---

[1]) Łatwo zauważyć, że warunki 1 — 3 możnaby zastąpić przez warunki: 1* $(x, y) = 0$ wtedy i tylko wtedy gdy $x = y$; 2* $(x, z) \leqslant (x, y) + (z, y)$.

[2]) Ciągi zbieżne nazywa się zwykle ciągami spełniającemi *warunek Cauchy'ego* t. j. warunek (1).

Punkt x_0 nazywamy wtedy *granicą* ciągu $\{x_n\}$.

Łatwo widzieć, że relacja (2) pociąga za sobą (1); mamy bowiem stale

$$(x_p, x_q) \leqslant (x_p, x_0) + (x_q, x_0).$$

Gdy więc dany ciąg punktów jest zbieżny do pewnego punktu, to temsamem jest zbieżny; rozumie się, że niezawsze naodwrót. Przestrzeń (D) o tej własności, że każdy ciąg punktów zbieżny jest zbieżny do pewnego punktu, nazywamy *zupełną*. Przestrzenie euklidesowe stanowią proste przykłady przestrzeni D zupełnych. Wyszczególnimy tu szereg innych ważnych przykładów tego rodzaju.

1. Niech (S) oznacza zbiór funkcyj mierzalnych w przedziale $< 0,1 >$. Przyporządkujmy każdej parze uporządkowanej x, y elementów tego zbioru liczbę [1])

$$(x, y) = \int_0^1 \frac{|x(t) - y(t)|}{1 + |x(t) - y(t)|} dt.$$

Łatwo sprawdzamy, że spełnione są podane poprzednio warunki 1 — 3. Co dotyczy warunków 1 i 2 jest to widoczne (nie rozróżniamy przytem pomiędzy funkcjami różniącemi się jedynie na zbiorze o mierze zero); aby przekonać się o tem, że warunek 3 jest również spełniony, wystarczy zauważyć, że przy dowolnych liczbach a, b

$$\frac{|a+b|}{1+|a+b|} \leqslant \frac{|a|}{1+|a|} + \frac{|b|}{1+|b|}.$$

Zbiór (S) tworzy więc przestrzeń (D); jest ona zupełna. Zbieżność bowiem ciągu punktów $\{x_n\}$ (do punktu x_0) sprowadza się do zbieżności według miary ciągu funkcyj $\{x_n(t)\}$ (do funkcji $x_0(t)$) w $< 0,1 >$.

---

[1]) Kładziemy $x = x(t)$, $y = y(t)$ oraz $x_n = x_n(t)$, $x_0 = x_0(t)$; podobnie w przykładach 2 — 5.

2. Oznaczmy przez (M) zbiór funkcyj mierzalnych i ograniczonych w $< 0,1 >$. Kładąc dla każdych dwóch elementów x, y tego zbioru

$$(x, y) = \max_{0 \leqslant t \leqslant 1} \text{istotne} \, |x(t) - y(t)|,$$

uzyskujemy przestrzeń (D) zupełną. Zbieżność ciągu punktów $\{x_n\}$ (do punktu x_0) oznacza zbieżność jednostajną ciągu funkcyj $\{x_n(t)\}$ (do funkcji $x_0(t)$) prawie wszędzie w $< 0,1 >$.

3. Niech $(L^{(p)})$ $(p \geqslant 1)$ oznacza zbiór funkcyj całkowalnych wraz z p-tą potęgą w przedziale $< 0,1 >$. Kładąc

$$(x, y) = \left[\int_0^1 |x(t) - y(t)|^p \, dt \right]^{\frac{1}{p}},$$

widzimy, że zbiór $(L^{(p)})$ stanowi przestrzeń (D) zupełną. Na to, by ciąg punktów $\{x_n\}$ był zbieżny (do punktu x_0), potrzeba i wystarcza, by ciąg funkcyj $\{x_n(t)\}$ był zbieżny przeciętnie z p-tą potęgą (do funkcji $x_0(t)$) w $< 0,1 >$.

4. Uważajmy zbiór (C) funkcyj ciągłych w $< 0,1 >$ i niech dla każdych dwóch jego elementów x, y

$$(x, y) = \max_{0 \leqslant t \leqslant 1} |x(t) - y(t)|.$$

Zbiór (C) jest przestrzenią (D) zupełną; przytem zbieżność ciągu punktów $\{x_n\}$ (do punktu x_0) sprowadza się do zbieżności jednostajnej ciągu funkcyj $\{x_n(t)\}$ (do funkcji $x_0(t)$) w przedziale $< 0,1 >$.

5. Niech $(C^{(p)})$ (p dowolne naturalne) będzie zbiorem funkcyj posiadających p-tą pochodną ciągłą w przedziale $< 0,1 >$. Kładąc

$$(x, y) = \max_{0 \leqslant t \leqslant 1} |x(t) - y(t)| + \max_{0 \leqslant t \leqslant 1} |x^{(p)}(t) - y^{(p)}(t)|,$$

uzyskujemy przestrzeń (D) zupełną. Warunkiem koniecznym i dostatecznym na to, by ciąg punktów $\{x_n\}$ był zbieżny (do punktu x_0), jest to, by zarówno ciąg funkcyj $\{x_n(t)\}$ jak i $\{x_n^{(p)}(t)\}$ był zbieżny jednostajnie (odpowiednio do funkcji $x_0(t)$, $x_0^{(p)}(t)$) w $< 0,1 >$.

6. Niech (s) oznacza zbiór wszystkich ciągów liczbowych; połóżmy dla każdych dwóch jego elementów x, y [1])

$$(x, y) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n} \cdot \frac{|\xi_n - \eta_n|}{1 + |\xi_n - \eta_n|}.$$

Zbiór (s) stanowi przestrzeń (D) zupełną. Zbieżność ciągu punktów $\{x_n\}$ (do punktu x_0) oznacza, że każdy z ciągów $\{\xi_{n,m}\}$ $(m = 1, 2, \ldots)$ jest zbieżny (do ξ_m), gdzie $x_n = \{\xi_{n,m}\}$ $(x_0 = \{\xi_m\})$.

7. Oznaczmy przez (m) zbiór ciągów ograniczonych i niech

$$(x, y) = \underset{n=1,2,\ldots}{\text{kres górny}} |\xi_n - \eta_n|.$$

Zbiór (m) stanowi widocznie przestrzeń (D) zupełną.

8. Niech $(l^{(p)})$ $(p \geqslant 1)$ będzie zbiorem ciągów liczbowych $\{\xi_n\}$, takich, że szereg $\sum_{n=1}^{\infty} |\xi_n|^p$ jest zbieżny. Kładąc dla każdych dwóch jego elementów x, y

$$(x, y) = \left[\sum_{n=1}^{\infty} |\xi_n - \eta_n|^p\right]^{\frac{1}{p}},$$

uzyskujemy przestrzeń (D) zupełną.

9. Oznaczając przez (c) zbiór ciągów zbieżnych i określając dla każdych dwóch jego elementów x, y liczbę (x, y) tak jak w przypadku zbioru (m), wnioskujemy łatwo, że zbiór (c) stanowi przestrzeń (D) zupełną.

§ **2.** Niech E oznacza jakąkolwiek przestrzeń (D), zaś G będzie jakimś zbiorem punktów tej przestrzeni. Powiadamy, że punkt x_0 jest *punktem skupienia* zbioru G, jeśli istnieje ciąg punktów $\{x_n\}$, taki, że $x_n \subset G$, $x_n \neq x_0$ oraz $\lim_{n \to \infty} x_n = x_0$. Zbiór wszystkich punktów skupienia zbioru G nazywamy jego *pochodną*, oznaczamy ją przez G'; zbiór $\overline{G} = G + G'$ nosi nazwę *domknięcia* zbioru G. Zbiór G określamy jako *zamknięty* gdy $G' \subset G$, jako

---

[1]) Kładziemy $x = \{\xi_n\}$ $y = \{\eta_n\}$; podobnie w przykładach 7 — 9.

doskonały gdy $G' = G$. O zbiorze G powiadamy, że jest *otwarty*, gdy dopełnienie jego jest zbiorem zamkniętym. Każdy zbiór otwarty nazywa się *otoczeniem* każdego swojego punktu.

Zbiór wszystkich punktów x, takich, że

$$(x, x_0) \leq r_0,$$

gdzie x_0 oznacza dany punkt, zaś r_0 liczbę > 0, nazywamy *kulą*; x_0 jest jej *środkiem*, r_0 *promieniem*. Zbiór wszystkich punktów x takich, że

$$(x, x_0) < r_0,$$

przyczem x_0, r_0 mają znaczenie poprzednie, określamy jako *kulę otwartą*; x_0 nazywamy znowu jej środkiem, r_0 promieniem. O zbiorze G powiadamy, że jest *wszędziegęsty*, gdy $\overline{G} = E$; mówimy, że jest *nigdziegęsty*, skoro domknięcie jego nie zawiera żadnej kuli.

Przestrzeń E nazywamy *ośrodkową* [1]), jeżeli zawiera zbiór przeliczalny wszędziegęsty.

Zbiór G nazywa się *pierwszej kategorji*, jeśli jest sumą przeliczalnej mnogości zbiorów nigdziegęstych; w razie przeciwnym powiadamy, że zbiór G jest *drugiej kategorji*. Zbiór G jest *pierwszej kategorji w punkcie* x_0, gdy istnieje otoczenie O punktu x_0 takie, że zbiór GO jest pierwszej kategorji; jeżeli żadne otoczenie punktu x_0 własności takiej nie posiada, to mówimy, że zbiór G jest *drugiej kategorji w punkcie* x_0.

Jest jasne, że, gdy zbiór G jest pierwszej kategorji, to jest pierwszej kategorji w każdym swoim punkcie; co więcej — w każdym punkcie przestrzeni E. Zachodzi również

Twierdzenie 1. *Zbiór G, który jest pierwszej kategorji w każdym swoim punkcie, jest zbiorem pierwszej kategorji.*

Dowód. Uważajmy klasę wszystkich kul otwartych K o tej

---

[1]) Klasę przestrzeni tego rodzaju badał pierwszy p. M. Fréchet; termin „ośrodkowa" podał p. W. Sierpiński, jako polski odpowiednik „séparable".

własności, że zbiór GK jest pierwszej kategorji; ustawmy te kule w ciąg pozaskończony

$$K_0, K_1, \dots K_\xi, \dots \qquad (\xi < \alpha).$$

Niech $P_\xi = GK_\xi$, oraz

$$Q_0 = P_0, \qquad Q_\xi = P_\xi - \sum_{\eta<\xi} K_\eta \quad \text{dla} \quad 0 < \xi < \alpha. \tag{1}$$

Według założenia każdy ze zbiorów P_ξ jest pierwszej kategorji; wobec (1) tę samą własność mają zbiory Q_ξ.

Niech tedy

$$Q_\xi = \sum_{n=1}^{\infty} Q_\xi^{(n)}, \tag{2}$$

gdzie każdy ze zbiorów $Q_\xi^{(n)}$ jest nigdziegęsty; połóżmy

$$G_n = \sum_{\xi<\alpha} Q_\xi^{(n)} \qquad (n = 1, 2, \dots). \tag{3}$$

Łatwo widzieć, że

$$G = \sum_{n=1}^{\infty} G_n; \tag{4}$$

twierdzimy, że każdy ze zbiorów G_n jest nigdziegęsty. Istotnie w przeciwnym razie istniałoby naturalne n_0, takie, że zbiór $\overline{G}_{n_0}$ zawierałby jakąś kulę otwartą K. Niech ξ_0 oznacza najmniejszą liczbę porządkową o tej własności, że

$$KK_{\xi_0} \neq 0;$$

liczba taka istnieje, bo, gdyby stale było $KK_\xi = 0$, to z uwagi na

$$G \subset \sum_{\xi<\alpha} K_\xi,$$

mielibyśmy $GK = 0$, co jest niemożliwe, skoro $K \subset \overline{G}_{n_0}$, a według (4), $G_{n_0} \subset G$. Oznaczmy przez K^* jakąkolwiek kulę otwartą zawartą w zbiorze KK_{ξ_0}. Mamy

$$K^* Q_\xi^{(n_0)} = 0 \quad \text{dla} \quad \xi < \alpha, \ \xi \neq \xi_0. \tag{5}$$

Gdy bowiem $\xi < \xi_0$, to $K K_\xi = 0$, a pozatem $K^* \subset K$ oraz, na mocy (1) i (2), $Q_\xi^{(n_0)} \subset K_\xi$; w przypadku zaś, gdy $\xi > \xi_0$, dostajemy z (1) $K_{\xi_0} Q_\xi = 0$, tak, że wystarczy uwzględnić jeszcze to, że $K^* \subset K_{\xi_0}$ i, wobec (2), $Q_\xi^{(n_0)} \subset Q_\xi$. Z (3) i (5) wynika, że

$$K^* G_{n_0} = K^* Q_{\xi_0}^{(n_0)}$$

oraz

$$\overline{K^* G_{n_0}} \subset \overline{Q_{\xi_0}^{(n_0)}}; \tag{6}$$

z drugiej strony łatwo sprawdzamy, że

$$K^* \subset \overline{K^* G_{n_0}}. \tag{7}$$

Relacje (6), (7) dowodzą, że kula otwarta K^* jest zawarta w zbiorze $\overline{Q_{\xi_0}^{(n_0)}}$; jest to sprzeczne z tem, że zbiór $Q_{\xi_0}^{(n_0)}$ jest nigdziegęsty.

U w a g a 1. *Gdy zbiór G jest drugiej kategorji, to istnieje kula K o tej własności, że w każdym jej punkcie zbiór G jest drugiej kategorji.* Istotnie, niech G_0 oznacza zbiór tych punktów z G, w których zbiór G jest pierwszej kategorji. Na mocy twierdzenia 1 zbiór G_0 jest widocznie pierwszej kategorji; temsamem zbiór $G - G_0$ jest drugiej kategorji. Każda kula K zawarta w domknięciu zbioru $G - G_0$ posiada własność żądaną.

§ 3. Załóżmy, że E jest przestrzenią (D) zupełną. Udowodnimy

Lemmat. *Gdy dany jest ciąg kul $\{K_n\}$, taki, że stale $K_{n+1} \subset K_n$ i przytem $\lim\limits_{n\to\infty} r_n = 0$, gdzie r_n oznacza promień kuli K_n, to istnieje punkt wspólny wszystkim kulom K_n.*

D o w ó d. Niech x_n oznacza środek kuli K_n. Dla $p < q$ mamy

$$x_q \subset K_q \subset K_p,$$

skąd

$$(x_p, x_q) \leqslant r_p, \tag{1}$$

co dowodzi, że ciąg punktów $\{x_n\}$ jest zbieżny. Kładąc $x_0 = \lim\limits_{n\to\infty} x$, mamy przy $p < q$, na mocy (1),

$$(x_p, x_0) \leqslant (x_p, x_q) + (x_q, x_0) \leqslant r_p + (x_q, x_0),$$

a zatem

$$(x_p, x_0) \leqslant r_p;$$

wobec tego, że p jest dowolne, punkt x_0 jest wspólny wszystkim kulom K_n.

Prostym wnioskiem z powyższego lemmatu jest

Twierdzenie 2. *Przestrzeń E jest zbiorem drugiej kategorji,*

Dowód. Przypuśćmy, że

$$E = \sum_{n=1}^{\infty} E_n, \tag{1}$$

przyczem każdy ze zbiorów E_n jest nigdziegęsty. Istnieje widocznie ciąg kul $\{K_n\}$ o własnościach następujących:

a) $K_1 E_1 = 0$, promień kuli K_1 jest < 1;

b) $K_{n+1} \subset K_n$, $K_{n+1} E_{n+1} = 0$, promień kuli K_{n+1} jest $< \frac{1}{n+1}$.

Na mocy lemmatu istnieje punkt x_0, który należy do wszystkich K_n, a więc, który z uwagi na $K_n E_n = 0$ $(n = 1, 2, \ldots)$ nie mógłby należeć do żadnego ze zbiorów E_n. Jest to jednak oczywiście sprzeczne z (1).

§ **4.** Niech E będzie przestrzenią (D), zaś E^* dowolnym niepustym zbiorem punktów tej przestrzeni. Zachowując dla elementów tego zbioru przyjętą w przestrzeni E definicję odległości, uzyskujemy pewną przestrzeń (D). Otóż, gdy zbiór $G \subset E^*$ jest nigdziegęsty, skoro rozpatrujemy go w przestrzeni E^*, to powiadamy, że jest *nigdziegęsty względem (zbioru) E^**; jedynie w tym przypadku, gdy $E^* = E$, zwykło się opuszczać przytem słowa „względem (zbioru) E". Analogicznie postępujemy, gdy chodzi o inne określenia, które wprowadziliśmy w § 2.

Z twierdzenia 1 wynika, że gdy zbiór G jest pierwszej kategorji w każdym swoim punkcie względem zbioru E^*, to jest zbiorem pierwszej kategorji względem E^*. Podobnie z twierdzenia 2 wynika, że, gdy przestrzeń E jest zupełna, a zbiór E^* zamknięty, to zbiór E^* jest drugiej kategorji względem siebie.

§ 5. Niech E oznacza znowu jakąkolwiek przestrzeń (D). Uważajmy najmniejszą klasę K zbiorów w tej przestrzeni, spełniającą warunki następujące:

1) każdy zbiór zamknięty należy do K;

2) suma przeliczalnej mnogości zbiorów, należących do K, należy do K;

3) dopełnienie zbioru, należącego do K, należy do K.

Zbiory klasy K nazywamy zbiorami *mierzalnemi* (B). Pokażemy, że zbiory mierzalne (B) spełniają t. zw. *warunek Baire'a*. O danym zbiorze P powiadamy, że spełnia warunek Baire'a, jeżeli każdy zbiór doskonały $G\,(\neq 0)$ zawiera punkt x_0 o tej własności, że conajmniej jeden ze zbiorów PG, $G-P$ jest pierwszej kategorji w punkcie x_0 względem zbioru G.

Twierdzenie 3. *Każdy zbiór mierzalny* (B) *spełnia warunek Baire'a.*

Dowód. Łatwo zauważyć, że każdy zbiór zamknięty spełnia warunek Baire'a oraz że dopełnienie zbioru, spełniającego warunek Baire'a, spełnia warunek Baire'a. Wystarczy wobec tego jeszcze okazać, że suma przeliczalnej mnogości zbiorów, spełniających warunek Baire'a, spełnia warunek Baire'a. Przypuśćmy, że zbiory ciągu $\{P_n\}$ spełniają warunek Baire'a i niech G oznacza dowolny zbiór doskonały $\neq 0$; niech

$$P=\sum_{n=1}^{\infty} P_n. \tag{1}$$

Jeżeli zbiór PG jest pierwszej kategorji względem G, to w każdym punkcie x_0 zbioru G jest pierwszej kategorji względem G. Załóżmy, że PG jest drugiej kategorji względem G; temsamem, wobec (1), jakiś zbiór GP_{n_0} jest drugiej kategorji względem G. Na mocy uwagi 1, istnieje kula otwarta K względem G, o tej własności, że w każdym jej punkcie zbiór GP_{n_0} jest drugiej kategorji względem G. Z łatwością sprawdzamy, że zbiór $\overline{K}P_{n_0}$ jest drugiej kategorji względem $\overline{K}$ w każdym punkcie należącym do $\overline{K}$. Ponieważ zbiór $\overline{K}$ jest doskonały $(\neq 0)$, zaś zbiór P_{n_0} posiada własność B a i r e'a, wnioskujemy tedy o istnieniu punktu $x_0 \subset \overline{K}$, takiego, że zbiór $\overline{K} - P_{n_0}$ jest pierwszej kategorji w tym punkcie względem $\overline{K}$. Można jednak widocznie założyć, że nietylko $x_0 \subset \overline{K}$, lecz, że i $x_0 \subset K$; temsamem zbiór $G - P_{n_0}$ jest pierwszej kategorji w punkcie x_0 względem G. Ponieważ $G - P \subset G - P_{n_0}$, według (1), widać więc ostatecznie, że zbiór $G - P$ jest pierwszej kategorji w punkcie x_0 względem G. Każdy więc zbiór doskonały $G \neq 0$ zawiera punkt x_0, taki, że conajmniej jeden ze zbiorów PG, $G - P$ jest pierwszej kategorji w tym punkcie względem G; oznacza to, że zbiór P spełnia warunek B a i r e'a.

§ 6. Niech E i E_1 będą dowolnemi zbiorami niepustemi. Jeśli każdemu elementowi $x \subset E$ przyporządkowany jest pewien element $\subset E_1$ to powiadamy, że w zbiorze E określona jest *operacja*; element odpowiadający elementowi x nazywamy *wartością* tej operacji dla elementu x. Zbiór E określamy jako *dziedzinę* uważanej operacji, zbiór zaś wszystkich jej wartości jako jej *przeciwdziedzinę*. W przypadku szczególnym, gdy wartościami danej operacji są liczby, nazywamy ją zwykle *funkcjonałem*.

Załóżmy teraz, że zbiór E stanowi przestrzeń (D), i niech $U(x)$ będzie operacją, której dziedziną jest E, zaś przeciwdziedziną znowu jakaś przestrzeń (D). Powiadamy, że operacja $U(x)$ jest *ciągła w punkcie* x_0, jeżeli dla każdego ciągu punktów $\{x_n\}$ zbieżnego do punktu x_0 zachodzi $\lim\limits_{n \to \infty} U(x_n) = U(x_0)$; mówimy, że operacja $U(x)$ jest *ciągła w* E, gdy jest ciągła w każdym punkcie tej przestrzeni. Gdy dany jest ciąg operacyj $\{U_n(x)\}$ określonych w E, i operacja $U_0(x)$ określona w tej przestrzeni—przyczem przeciwdziedzinami ich są części jakiejś przestrzeni (D)—to powiadamy, że ten ciąg operacji jest *zbieżny w punkcie* x_0 do operacji $U_0(x)$, jeśli ciąg punktów $\{U_n(x_0)\}$ jest zbieżny do punktu $U_0(x_0)$; mówimy, że ciąg operacyj $\{U_n(x)\}$ jest *zbieżny w* E do operacji $U_0(x)$, gdy jest zbieżny w każdym punkcie x tej przestrzeni do $U_0(x)$. Jeśli ciąg operacyj $\{U_n(x)\}$ jest zbieżny w E do operacji $U_0(x)$, to tę ostatnią operację nazywamy *granicą w* E ciągu operacyj $\{U_n(x)\}$.

W przypadku, gdy wiadomo o jakiej przestrzeni mowa, używamy często terminu „operacja ciągła" zamiast „operacja ciągła w E"; analogicznie, jeśli chodzi o pozostałe terminy.

§ 7. Przypuśćmy, że E jest jakąś przestrzenią (D). Niech K będzie najmniejszą klasą operacji, których dziedziną jest E, których przeciwdziedziny zawarte są znowu w pewnej danej przestrzeni (D), i które przytem czynią zadość warunkom:

1) każda operacja ciągła należy do K;

2) granica ciągu zbieżnego operacji, należących do K, należy do K.

Operacje tej klasy noszą nazwę operacji *mierzalnych* (B). O danej operacji $U(x)$, której dziedziną jest przestrzeń E, zaś przeciwdziedziną również pewna przestrzeń (D), powiada się, że spełnia *warunek Baire'a*, jeśli dla każdego zbioru doskonałego niepustego $G \subset E$, będącego drugiej kategorji względem siebie, istnieje część G_0 zbioru G, pierwszej kategorji względem niego i taka, że operacja $U(x)$, rozpatrywana w przestrzeni $G - G_0$, jest w niej ciągła. Udowodnimy, że każda operacja mierzalna (B) spełnia warunek Baire'a.

Przypuśćmy, że w E określone są operacje $U_n(x)$ $(n = 1, 2, ..)$ oraz $U_0(x)$; przeciwdziedziny ich niech mieszczą się w pewnej przestrzeni (D). Udowodnimy

Lemmat. *Jeżeli ciąg operacyj $\{U_n(x)\}$ jest zbieżny do operacji $U_0(x)$, i jeśli dla każdego n istnieje zbiór $E_n \neq E$ pierwszej kategorji, taki, że operacja $U_n(x)$, uważana w $E - E_n$, jest ciągła, wtedy istnieje zbiór E_0 pierwszej kategorji, taki, że*

$$1^0 \qquad E - E_0 \subset E^* = E - \sum_{n-1}^{\infty} E_n, \tag{1}$$

2^0 *warunki*

$$x_i \subset E^* \quad (i = 1, 2, \ldots), \qquad x_0 \subset E - E_0, \qquad \lim_{i \to \infty} x_i = x_0$$

pociągają

$$\lim_{i \to \infty} U_0(x_i) = U_0(x_0).$$

Dowód. Dla każdej pary liczb naturalnych m, n, oznaczmy przez $L_{n,m}$ zbiór wszystkich punktów x, takich, że

$$x \subset E^*, \quad \text{oraz} \quad (U_p(x), U_q(x)) \leqslant \frac{1}{m} \qquad \text{dla } p, q \geqslant n. \tag{2}$$

Z uwagi, że ciąg operacji $\{U_n(x)\}$ jest zbieżny, wynika, że

$$E^* = \sum_{n=1}^{\infty} L_{n,m} \qquad (m = 1, 2, \ldots). \tag{3}$$

Ponieważ, wobec (1), stale $E^* \subset E - E_n$, przeto każda z operacji $U_n(x)$ jest w E^* (o ile zbiór ten jest $\neq 0$) ciągła; ponadto zbiór $L_{n,m}$ był określony jako zbiór tych punktów x, dla których spełnione są relacje (2), więc

$$\overline{L}_{n,m} E^* \subset L_{n,m} \qquad (m, n = 1, 2, \ldots). \tag{4}$$

Niech $K_{n,m}$ oznacza sumę wszystkich kul otwartych, zawartych w zbiorze $\overline{L}_{n,m}$; zbiór $L_{n,m} - K_{n,m}$ jest oczywiście nigdziegęsty. A zatem, jeżeli położymy

$$H_m = \sum_{n=1}^{\infty} L_{n,m} K_{n,m} \qquad (m = 1, 2, \ldots), \tag{5}$$

to, wobec wynikającej z (3) relacji:

$$E^* - H_m \subset \sum_{n=1}^{\infty} (L_{n,m} - K_{n,m}),$$

każdy ze zbiorów $E^* - H_m$ jest pierwszej kategorji. Twierdzimy obecnie, że, jeżeli przy pewnem m_0

$$x_i \subset E^* \; (i = 1, 2, \ldots), \qquad x_0 \subset H_{m_0}, \qquad \lim_{i \to \infty} x_i = x_0 \tag{6}$$

wówczas

$$\overline{\lim_{i \to \infty}} (U_0(x_i), U_0(x_0)) \leqslant \frac{2}{m_0}. \tag{7}$$

Istotnie, z (5), (6) wynika przedewszystkiem, że przy pewnem n_0 naturalnem $x_0 \subset L_{n_0,m_0} K_{n_0,m_0}$; ponieważ $x_0 \subset K_{n_0,m_0}$ i K_{n_0,m_0} jest zbiorem otwartym, a pozatem według (6), $\lim\limits_{i \to \infty} x_i = x_0$, przeto istnieje liczba N, taka, że przy $i \geqslant N$ jest $x_i \subset K_{n_0, m_0}$. Ponieważ dalej $K_{n_0, m_0} \subset \overline{L}_{n_0, m_0}$ i $x_i \subset E^*$, przeto z (4) wnioskujemy, że

$$x_i \subset L_{n_0, m_0} \text{ dla } i \geqslant N. \tag{8}$$

Mamy

$$(U_0(x_i), U_0(x_0)) \leqslant (U_0(x_i), U_{n_0}(x_i)) + (U_{n_0}(x_i), (U_{n_0}(x_0)) + (U_{n_0}(x_0), U_0(x_0));$$

stąd wobec (8) oraz uwagi, że według (2),

$$(U_{n_0}(x), U_0(x)) \leqslant \frac{1}{m_0} \quad \text{dla } x \subset L_{n_0, m_0},$$

dostajemy

$$(U_0(x_i), U_0(x_0)) \leqslant \frac{2}{m_0} + (U_{n_0}(x_i), U_{n_0}(x_0)) \text{ dla } i \geqslant N;$$

lecz $x_0 \subset L_{n_0, m_0} \subset E^*$ więc, wobec (6), oraz ciągłości operacji $U_{n_0}(x)$ w zbiorze E^*, ostatnie nierówności dowodzą prawdziwości relacji (7). Niech

$$E_0 = E - \prod_{m=1}^{\infty} H_m; \tag{9}$$

okażemy, że określony przez powyższy wzór zbiór E_0 posiada własności żądane. Dla dowodu zauważmy przedewszystkiem, że, wobec (1), zbiór $E - E^*$ jest pierwszej kategorji; ponieważ każdy ze zbiorów $E^* - H_m$ jest pierwszej kategorji, a pozatem — jak to wynika z (9) —

$$E^* - (E - E_0) \subset \sum_{m=1}^{\infty} (E^* - H_m),$$

przeto również zbiór $E^* - (E - E_0)$ jest pierwszej kategorji. Wystarczy teraz zauważyć, że

$$E_0 \subset (E - E^*) + [E^* - (E - E_0)],$$

aby stwierdzić że zbiór E_0 jest pierwszej kategorji. Przypuśćmy, że $x_i \subset E^*$, $x_0 \subset E - E_0$, $\lim\limits_{i \to \infty} x_i = x_0$; wobec (9), $x_0 \subset H_m$ $(m = 1, 2, \ldots)$, a ponieważ — jak wiemy — relacje (6) implikują (7), więc $\lim_{i\to\infty} U_0(x_i) = U_0(x_0)$. Pozatem, z uwagi na (3), (5) i (9), mamy $E - E_0 \subset E^*$.

Twierdzenie 4. *Każda operacja mierzalna* (B) *spełnia warunek Baire'a.*

Dowód. Jest jasne, że każda operacja ciągła spełnia warunek Baire'a. Wystarczy zatem dowieść jeszcze tylko, że granica zbieżnego ciągu operacyj, spełniających warunek Baire'a, spełnia warunek Baire'a. Niech więc dany będzie ciąg operacyj $\{U_n(x)\}$, spełniających warunek Baire'a, zbieżny do operacji $U_0(x)$; załóżmy, że zbiór G jest doskonały, niepusty, drugiej kategorji względem siebie. Dla każdego n istnieje część G_n zbioru G o tej własności, że jest pierwszej kategorji względem G i że operacja $U_n(x)$ rozpatrywana w $G - G_n$ jest ciągła. Na mocy lemmatu (przyjmując $G = E$ oraz $G_n = E_n$) istnieje część G_0 zbioru G pierwszej kategorji względem niego, taka, że operacja $U_0(x)$ jest w $G - G_0$ ciągła.

Zauważmy, że z dowiedzionego lemmatu wynika również

Twierdzenie 5. *Gdy operacja* $U_0(x)$ *jest granicą ciągu operacyj ciągłych* $\{U_n(x)\}$, *to istnieje zbiór* E_0 *pierwszej kategorji, taki, że w każdym punkcie* $x_0 \subset E - E_0$ *operacja* $U_0(x)$ *jest ciągła.*

Dowód. Istotnie można przyjąć $E_n = 0$ $(n = 1, 2, \ldots)$; wówczas $E^* = E$.

§ 8. Podamy obecnie pewien związek między zbiorami oraz operacjami mierzalnemi (B). Zakładamy stale, że chodzi o operacje określone w pewnej przestrzeni (D) — oznaczymy ją przez E —, których wartościami są elementy pewnej przestrzeni E^*, również (D).

Twierdzenie 6. *Gdy operacja* $U(x)$ *jest mierzalna* (B), *to dla każdego zbioru* $G^* \subset E^*$ *mierzalnego* (B), *zbiór* G *tych punktów* x, *w których* $U(x) \subset G^*$, *jest mierzalny* (B).

Dowód. Przypuśćmy naprzód, że zbiory G^* są zamknięte. O ile operacja $U(x)$ jest ciągła, to, jak łatwo widzieć, odpowiednie zbiory G są także zamknięte. Załóżmy tedy, że ciąg operacyj $\{U_n(x)\}$ jest zbieżny do operacji $U_0(x)$ i że dla każdego

n oraz każdego zbioru zamkniętego G^* zbiór tych punktów x, w których $U_n(x) \subset G^*$, jest mierzalny (B). Niech $\{\varepsilon_n\}$ będzie ciągiem liczb dodatnich, zbieżnym do 0. Oznaczmy, dla danego zbioru zamkniętego G_0^*, przez G_n^* zbiór tak określony: jeśli $y \subset E^* - G_n^*$, wówczas kula o środku y oraz promieniu ε_n mieści się w zbiorze $E^* - G_0^*$. Każdy ze zbiorów G_n^* jest widocznie zamknięty, a przytem

$$G_0^* = \prod_{n=1}^{\infty} G_n^* .$$

Niech $G_{m,n}$ $(m, n = 1, 2 \ldots)$ będzie zbiorem tych punktów x, dla których $U_n(x) \subset G_m^*$; wedle założenia zbiory $G_{m,n}$ są mierzalne (B). Z łatwością sprawdzamy, że zbiór G_0 tych punktów x, dla których $U_0(x) \subset G_0^*$, można określić przez wzór

$$G_0 = \prod_{p=1}^{\infty} \prod_{n=1}^{\infty} \sum_{q=n}^{\infty} G_{p,q} ;$$

temsamem zbiór G_0 jest mierzalny (B). Widać obecnie, że, gdy G^* jest zbiorem zamkniętym, to odpowiedni zbiór G jest w każdym przypadku mierzalny (B). Lecz, gdy, dla pewnego zbioru G^* oraz pewnej operacji $U(x)$, G jest zbiorem tych punktów x, dla których $U(x) \subset G^*$, to zbiór punktów x o tej własności, że $U(x) \subset E^* - G^*$, jest identyczny ze zbiorem $E - G$; podobnie, gdy przy pewnym ciągu zbiorów $\{G_n^*\}$ oraz pewnej operacji $U(x)$, G_n jest zbiorem tych punktów x, dla których $U(x) \subset G_n^*$, to zbiór tych punktów x, dla których $U(x) \subset \sum_{n=1}^{\infty} G_n^*$, jest identyczny ze zbiorem $\sum_{n=1}^{\infty} G_n$. Z poprzedniego i powyższych uwag wynika prawdziwość naszego twierdzenia.

Udowodnimy teraz

Twierdzenie 7. *Jeśli operacje $U'(x)$, $U''(x)$ są mierzalne (B), wówczas funkcjonał $(U'(x), U''(x))$ jest też mierzalny (B).*

Dowód wynika wprost z uwagi, że, gdy operacje $U'(x)$, $U''(x)$ są ciągłe, to funkcjonał $(U'(x), U''(x))$ jest ciągły, oraz że dla każdego punktu $y_0 \subset E^*$ funkcjonał $(y, y_0) \equiv (y_0, y)$ jest w E^* ciągły.

Z twierdzeń 6 i 7 wynika

Twierdzenie 8. *Jeśli $\{U_n(x)\}$ jest ciągiem operacyj mierzalnych (B), wówczas zbiór G tych punktów, w których ciąg ten jest zbieżny, jest mierzalny (B).*

Dowód. Dla każdych naturalnych p, q, r oznaczmy przez $G_{p,q,r}$ zbiór tych punktów x, dla których

$$(U_p(x), U_q(x)) \leqslant \frac{1}{r};$$

wobec twierdzeń 6, 7 zbiory $G_{p,q,r}$ są mierzalne (B). Lecz

$$G = \prod_{r=1}^{\infty} \sum_{p=1}^{\infty} \prod_{q=p}^{\infty} G_{p,q,r};$$

temsamem zbiór G jest mierzalny (B).

Zauważymy jeszcze, że zachodzi

Twierdzenie 9. *Gdy $\{U_n'(x)\}$, $\{U_n''(x)\}$ są ciągami operacyj mierzalnych (B) i przytem stale $\overline{\lim\limits_{n\to\infty}} (U_n'(x), U_n''(x)) < +\infty$, to funkcjonał $\overline{\lim\limits_{n\to\infty}} (U_n'(x), U_n''(x))$ jest mierzalny (B).*

Dowód. Niech dla każdej pary liczb naturalnych p, q oraz dla każdego punktu x

$$F_{p,q}(x) = \operatorname*{Max}_{n=p,\, p+1, \dots\, p+q-1} (U_n'(x), U_n''(x)).$$

Jest widocznie dla każdego x

$$\overline{\lim_{n\to\infty}} (U_n'(x), U_n''(x)) = \lim_{p\to\infty} \lim_{q\to\infty} F_{p,q}(x);$$

wystarczy jeszcze pokazać, że każdy z funkcjonałów $F_{p,q}(x)$ jest mierzalny (B). Według twierdzenia 7 każdy z funkcjonałów $F_{p,1}(x) = (U_p'(x), U_p''(x))$ jest mierzalny (B); ponieważ stale

$$2\, F_{p,q+1}(x) = F_{p,q}(x) + F_{p+q,1}(x) + | F_{p,q}(x) - F_{p+q,1}(x) |,$$

przeto przez indukcję wnioskujemy, korzystając znowu z tw. 7, że funkcjonały $F_{p,q}(x)$ są mierzalne (B).

ROZDZIAŁ II.

Ogólne przestrzenie wektorjalne.

§ 1. Niech E oznacza jakiś zbiór niepusty. Przypuśćmy, że każdej parze uporządkowanej x, y elementów tego zbioru przyporządkowany jest pewien element $x+y$, należący do niego — nazwiemy go *sumą* elementów x, y; załóżmy dalej, że dla każdej liczby t oraz każdego elementu x zbioru E określony jest pewien element tx tego zbioru; nazwiemy go *iloczynem* liczby t oraz elementu x. Niech dla tych działań, *dodawania elementów* i *mnożenia liczb przez elementy,* spełnione będą następujące warunki (gdzie x, y, z oznaczają dowolne elementy zbioru E, zaś a, b — liczby):

1) $x+y=y+x$;

2) $x+(y+z)=(x+y)+z$;

3) $x+y=x+z$ pociąga $y=z$;

4) $a(x+y)=ax+ay$;

5) $(a+b)x=ax+bx$;

6) $a(bx)=(ab)x$;

7) $1x=x$.

Przy powyższych założeniach powiadamy, że zbiór E stanowi *przestrzeń wektorjalną.* Łatwo widzieć, że wtedy istnieje dokładnie jeden element, oznaczymy go przez Θ, taki, że stale $x+\Theta=x$; równość $ax=bx$ przy $x\neq\Theta$ daje $a=b$, pozatem z równości $ax=ay$, przy $a\neq 0$, wynika $x=y$. Definjujemy dalej:

$$-x=(-1)\,x;$$

$$x-y=x+(-y).$$

Gdy $x\neq y$, to przez *odcinek* łączący elementy x, y rozumiemy zbiór wszystkich elementów postaci $tx+(1-t)y$, gdzie t oznacza dowolną liczbę przedziału $<0,1>$. O danym zbiorze $G\subset E$ powiada się, że jest *wypukły*, jeśli zawiera każdy odcinek, łączący dwa dowolne jego elementy.

Podane w § 1 rozdziału I przykłady 1 — 9 przestrzeni (D) stanowią widocznie zarazem przykłady przestrzeni wektorjalnych, przy zwykłych definicjach dodawania elementów oraz mnożenia liczb przez elementy.

§ 2. Niech E, E^* oznaczają jakieś przestrzenie wektorjalne; przypuśćmy, że $f(x)$ jest operacją określoną w E, której przeciwdziedzina mieści się w E^*. Powiadamy, że operacja $f(x)$ jest *addytywna*, gdy dla każdej pary elementów x, y jest

$$f(x+y)=f(x)+f(y);$$

nazywamy ją *jednorodną*, skoro dla każdego elementu x oraz każdej liczby t

$$f(tx)=t\,f(x).$$

Twierdzenie 1.[1]) *Jeśli $p(x)$ jest funkcjonałem określonym w E, takim, że stale*

$$p(x+y)\leqslant p(x)+p(y), \qquad p(tx)=t\,p(x) \quad dla \quad t\geqslant 0$$

i jeśli w pewnej przestrzeni wektorjalnej[2]) *$G\subset E$ dany jest funkcjonał addytywny oraz jednorodny $f(x)$, o tej własności, że zawsze*

$$f(x)\leqslant p(x),$$

---

[1]) Zob.; S. Banach, Sur les fonctionnelles linéaires II, Stud. Math., I, (1929), p. 223 — 239, w szczeg. p. 226.

[2]) Rozumie się, przy przyjętych w przestrzeni E definicjach działań.

to istnieje funkcjonał addytywny i jednorodny $F(x)$ w E, dla którego stale

$$F(x) \leqslant p(x)$$

oraz

$$F(x) = f(x), \text{ jeśli } x \subset G.$$

D o w ó d. Można założyć, że $G \neq E$; niech $x_0 \subset E - G$. Gdy $x', x'' \subset G$, to

$$f(x'') - f(x') = f(x'' - x') \leqslant p(x'' - x') =$$

$$p[(x'' + x_0) + (-x' - x_0)] \leqslant p(x'' + x_0) + p(-x' - x_0),$$

i temsamem

$$-p(-x' - x_0) - f(x') \leqslant p(x'' + x_0) - f(x'').$$

Niech m oznacza kres górny liczb $-p(-x - x_0) - f(x)$, zaś M kres dolny liczb $p(x + x_0) - f(x)$ dla $x \subset G$; według poprzedniego m, M są skończone i przytem $m \leqslant M$. Weźmy jakąkolwiek liczbę r_0, taką, że $m \leqslant r_0 \leqslant M$; wówczas dla każdego $x \subset G$

$$-p(-x - x_0) - f(x) \leqslant r_0 \leqslant p(x + x_0) - f(x). \tag{1}$$

Uważajmy zbiór G_0 wszystkich elementów y postaci

$$y = x + t\,x_0, \quad \text{gdzie } x \subset G, \text{ a } t \text{ jest liczbą;} \tag{2}$$

G_0 stanowi oczywiście przestrzeń wektorjalną. Połóżmy

$$\varphi(y) = f(x) + t\,r_0, \tag{3}$$

gdzie element y jest określony przez wzór (2); ponieważ $x_0 \subset E - G$, przeto każdy element $y \subset G_0$ posiada dokładnie jedno przedstawienie postaci (2), skąd wynika, że funkcjonał $\varphi(y)$ jest w G_0 określony jednoznacznie. Widać pozatem, że jest on addytywny i jednorodny oraz pokrywa się z funkcjonałem $f(x)$ w G; pokażemy teraz, że

$$\varphi(y) \leqslant p(y) \quad \text{przy} \quad y \subset G_0. \tag{4}$$

Istotnie, pisząc y w postaci (2), można założyć, że $t \neq 0$. Biorąc w nierówności (1) $\frac{x}{t}$ zamiast x oraz mnożąc prawą, wzgl.

lewą, jej stronę przez t, zależnie od tego czy $t > 0$ czy też $t < 0$, dostajemy

$$t\, r_0 \leqslant p(x + t\, x_0) - f(x);$$

wobec (3) wynika stąd relacja (4).

Widać, że wystarczy dobrze uporządkować wszystkie elementy zbioru $E - G$, aby rozszerzając kolejno funkcjonał $f(x)$ przy pomocy metody wyżej podanej, uzyskać w końcu funkcjonał $F(x)$ w E, spełniający żądane warunki.

Uwaga 1. *Jeśli $p(x)$ jest funkcjonałem określonym w E, przyczem stale*

$$p(x + y) \leqslant p(x) + p(y), \qquad p(t\, x) = t\, p(x) \quad dla \quad t \geqslant 0,$$

wówczas istnieje w tej przestrzeni funkcjonał addytywny i jednorodny $F(x)$, taki, że stale

$$F(x) \leqslant p(x).$$

Niech bowiem $x_0 \subset E$ i weźmy zbiór G wszystkich elementów postaci $t\, x_0$, gdzie t jest dowolną liczbą; G stanowi przestrzeń wektorjalną. Połóżmy w niej

$$f(t\, x_0) = t\, p(x_0).$$

Wówczas stale

$$f(t\, x_0) \leqslant p(t\, x_0).$$

Istotnie przy $t \geqslant 0$ mamy $t\, p(x_0) = p(t\, x_0)$, zaś przy $t < 0$ dostajemy kolejno $0 = p(0) \leqslant p(x_0) + p(-x_0)$, $p(x_0) \geqslant -p(-x_0)$, $t\, p(x_0) \leqslant -t\, p(-x_0) = p(t\, x_0)$. Wystarczy teraz uwzględnić twierdzenie 1, aby przekonać się o prawdziwości uwagi.

3. Omówimy tu kilka interesujących zastosowań twierdzenia 1 i uwagi 1.

1. Niech E będzie zbiorem wszystkich funkcji rzeczywistych ograniczonych $x(s)$, określonych na brzegu pewnego koła o obwodzie 1; s niech oznacza przytem łuk liczony od pewnego punktu tego okręgu w umówionym zwrocie. Przy zwykłych definicjach działań zbiór E stanowi przestrzeń wektorjalną. Dla każdego jej

elementu x określmy $p(x)$ jako kres dolny wszystkich liczb $M(x; \alpha_1, \alpha_2, \dots \alpha_n)$ postaci [1])

$$M(x; \alpha_1, \alpha_2, \dots \alpha_n) = \underset{(-\infty < s < +\infty)}{\text{kres górny}} \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} x(s + \alpha_k),$$

gdzie $\alpha_1, \alpha_2, \dots \alpha_n$ jest dowolnym układem liczb. Funkcjonał $p(x)$ spełnia wszystkie warunki uwagi 1. Przedewszystkiem jest widocznie stale $p(tx) = t\,p(x)$ przy $t \geqslant 0$.

Niech x, y będą elementami E, zaś ε dowolną liczbą > 0. Istnieją układy liczb $\alpha_1, \alpha_2, \dots \alpha_p$ oraz $\beta_1, \beta_2, \dots \beta_q$ takie, że

$$M(x; \alpha_1, \alpha_2, \dots \alpha_p) \leqslant p(x) + \varepsilon, \quad M(y; \beta_1, \beta_2, \dots \beta_q) \leqslant p(y) + \varepsilon. \quad (1)$$

Ustawiając wszystkie liczby $\alpha_k + \beta_l$ $(k = 1, 2, \dots, p;\ l = 1, 2, \dots, q)$ dowolnie w ciąg $J_1, J_2, \dots J_{pq}$, mamy

$$p(x+y) \leqslant M(x+y; J_1, J_2, \dots J_{pq}), \quad (2)$$

przyczem łatwo sprawdzamy, że

$$M(x+y; J_1, J_2 \dots J_{pq}) \leqslant M(x; \alpha_1, \alpha_2, \dots \alpha_p) + M(y; \beta_1, \beta_2, \dots \beta_q). \quad (3)$$

Z (1), (2) i (3) wynika, że $p(x+y) \leqslant p(x) + p(y) + 2\varepsilon$; wobec dowolności liczby dodatniej ε, dowodzi to, że $p(x+y) \leqslant p(x) + p(y)$. Na mocy uwagi 1 istnieje w przestrzeni E funkcjonał addytywny i jednorodny $F(x)$, taki, że stale $F(x) \leqslant p(x)$. Gdy $x(s) = 1$, to $p(x) = 1$ i $p(-x) = -1$, a ponieważ $F(x) \leqslant p(x)$ oraz $F(x) = -F(-x) \geqslant -p(-x)$, przeto ostatecznie $F(x) = 1$. Gdy $x(s) \geqslant 0$, to $F(x) \geqslant 0$; mamy bowiem $p(-x) \leqslant 0$, a z drugiej strony znowu $F(x) = -F(-x) \geqslant -p(-x)$. Funkcjonał $F(x)$ posiada pozatem jeszcze tę własność, że, gdy s_0 jest dowolną liczbą, to $F[x(s+s_0)] = F[x(s)]$. Istotnie, kładąc $y(s) = x(s+s_0) - x(s)$ oraz $\alpha_k = (k-1)\,s_0$ $(k = 1, 2, \dots)$, mamy, przy wszelkiem n:

$$p(y) \leqslant M(y; \alpha_1, \alpha_2, \dots \alpha_n) = \frac{1}{n} \underset{(-\infty, +\infty)}{\text{kres górny}} [x(s + n\,s_0) - x(s)],$$

i temsamem $p(y) \leqslant 0$; analogicznie wynika, że $p(-y) \leqslant 0$. Lecz

---

[1]) Kładziemy $x = x(s)$ oraz $y = y(s)$.

$F(y) \leqslant p(y)$ i $F(y) = -F(-y) \geqslant -p(-y)$, więc $F(y) = 0$. Oznaczając symbolem $\int x(s)\,ds$ funkcjonał $\frac{1}{2}[F(x(s)) + F(x(1-s))]$ dostajemy twierdzenie:

Każdej funkcji $x(s)$ klasy E przyporządkować można liczbę $\int x(s)\,ds$, tak by spełnione były warunki (gdzie $x(s), y(s)$ są dowolnemi funkcjami klasy E, zaś a, b, s_0 — liczbami):

1) $\int [a\,x(s) + b\,y(s)]\,ds = a\int x(s)\,ds + b\int y(s)\,ds$;

2) $\int x(s)\,ds \geqslant 0$ gdy $x(s) \geqslant 0$;

3) $\int x(s+s_0)\,ds = \int x(s)\,ds$;

4) $\int x(1-s)\,ds = \int x(s)\,ds$;

5) $\int 1\,ds = 1$.

Łatwo sprawdzić, że funkcjonał $\int x(s)\,ds$, spełniając warunki 1 — 5, zawarty jest stale między całką dolną oraz górną funkcji $x(s)$ w sensie Riemann'a; temsamem więc dla każdej funkcji całkowalnej (R) pokrywa się z jej całką. Dla funkcyj całkowalnych (L) nie pokrywa się naogół z ich całkę (L); lecz gdy wyjdziemy z przestrzeni wektorjalnej G, jaką stanowi ta właśnie klasa funkcji i określimy w niej funkcjonał $f(x)$ jako całkę (L) funkcji $x(s)$, to uzyskamy przy pomocy twierdzenia 1 w przestrzeni E funkcjonał $F(x)$, posiadający oczywiście tę własność, że funkcjonał $\int x(s)\,ds = \frac{1}{2}[F(x(s)) + F(x(1-s))]$ spełnia wszystkie warunki 1 —5, a przytem dla każdej funkcji całkowalnej (L) pokrywa się z jej całką.

Uważajmy teraz klasę K wszystkich zbiorów na okręgu koła, o którem mowa, sam zaś okrąg oznaczymy przez A_0. Kładąc dla każdego zbioru A tej klasy $\mu(A)=\int x(s)\,ds$, gdzie $x(s)$ jest funkcją charakterystyczną zbioru A, otrzymujemy twierdzenie:

Każdemu zbiorowi A klasy K można przypisać liczbę $\mu(A)$, tak by spełnione były warunki (gdzie A, B są dowolnemi zbiorami klasy K):

1) $\mu(A+B)=\mu(A)+\mu(B)$, *jeśli* $AB=0$;

2) $\mu(A)\geqslant 0$;

3) $\mu(A)=\mu(B)$ *dla* $A\cong B$;

4) $\mu(A_0)=1$.

Funkcjonał $\mu(A)$, który spełnia warunki 1 — 4, zawiera się między miarą wewnętrzną i zewnętrzną zbioru A w sensie Jordana; dla każdego zbioru mierzalnego (J) pokrywa się tedy z jego miarą. Dla dowolnych zbiorów mierzalnych (L) nie pokrywa się naogół z ich miarą (L); lecz tak jak poprzednio można uzyskać i to, aby warunek ten dodatkowy był spełniony [1]).

2. Niech E będzie zbiorem wszystkich funkcyj rzeczywistych ograniczonych $x(s)$ określonych w $(0,+\infty)$; przy zwykłych definicjach działań stanowi on przestrzeń wektorjalną. Dla każdego jego elementu x oznaczymy przez $p(x)$ kres dolny wszystkich liczb [2]):

$$\overline{\lim_{s\to\infty}}\,\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}x(s+\alpha_k),$$

gdzie $\alpha_1, \alpha_2, \ldots \alpha_n$ jest dowolnym układem liczb dodatnich. Z łatwością sprawdzamy, że określony tak w przestrzeni E funkcjonał $p(x)$ spełnia warunki uwagi 1; istnieje więc w E funkcjonał addytywny i jednorodny $F(x)$ o tej własności, że stale $F(x)\leqslant p(x)$. Oznaczając funkcjonał $F(x)$ symbolem $\operatorname*{Lim}_{s\to\infty} x(s)$ [3]) dochodzimy do twierdzenia:

---

[1]) Por.: S. Banach, Sur le probléme de la mesure, Fund. Math., IV, (1923), p. 7 — 33.

[2]) Kładziemy $x=x(s)$.

[3]) Symbol „Lim" oznacza tedy pewną „granicę" uogólnioną; znak „lim" zachowujemy natomiast dla granicy w sensie zwykłym.

Każdej funkcji $x(s) \subset E$ *przypisać można liczbę* $\operatorname*{Lim}_{s\to\infty} x(s)$, *tak by spełnione były warunki* (*gdzie* $x(s), y(s)$ *są dowolnemi funkcjami z* E, *zaś* a, b, s_0 — *liczbami, przyczem* $s_0 \geqslant 0$):

1) $\operatorname*{Lim}_{s\to\infty} [a\,x(s) + b\,y(s)] = a \operatorname*{Lim}_{s\to\infty} x(s) + b \operatorname*{Lim}_{s\to\infty} y(s)$;

2) $\operatorname*{Lim}_{s\to\infty} x(s) \geqslant 0$, *jeśli* $x(s) \geqslant 0$;

3) $\operatorname*{Lim}_{s\to\infty} x(s+s_0) = \operatorname*{Lim}_{s\to\infty} x(s)$;

4) $\operatorname*{Lim}_{s\to\infty} 1 = 1$.

Funkcjonał $\operatorname*{Lim}_{s\to\infty} x(s)$, spełniając warunki 1 — 4, zawiera się stale między $\varliminf_{s\to\infty} x(s)$ oraz $\varlimsup_{s\to\infty} x(s)$; pokrywa się tedy z $\lim_{s\to\infty} x(s)$, o ile tylko granica ta w zwykłym sensie istnieje.

3. Niech $\{\xi_n\}$ będzie dowolnym ciągiem ograniczonym. Określimy w przedziale $(0, +\infty)$ funkcję $x(s)$ zapomocą umowy: $x(s) = \xi_n$ dla $n-1 < s \leqslant n$ $(n = 1, 2, \ldots)$. Funkcja $x(s)$ należy do zbioru E, o którym mówiliśmy w ustępie 2. Kładąc $\operatorname*{Lim}_{n\to\infty} \xi_n = \operatorname*{Lim}_{s\to\infty} x(s)$, gdzie $\operatorname*{Lim}_{s\to\infty} x(s)$ posiada sens tam określony, dostajemy twierdzenie:

Każdemu ciągowi ograniczonemu $\{\xi_n\}$ *można przyporządkować liczbę* $\operatorname*{Lim}_{n\to\infty} \xi_n$, *tak by spełnione były warunki* (*gdzie* $\{\xi_n\}, \{\eta_n\}$ *są dowolnemi ciągami ograniczonemi*, a, b — *liczbami*):

1) $\operatorname*{Lim}_{n\to\infty} [a\,\xi_n + b\,\eta_n] = a \operatorname*{Lim}_{n\to\infty} \xi_n + b \operatorname*{Lim}_{n\to\infty} \xi_n$;

2) $\operatorname*{Lim}_{n\to\infty} \xi_n \geqslant 0$, *gdy stale* $\xi_n \geqslant 0$;

3) $\operatorname*{Lim}_{n\to\infty} \xi_{n+1} = \operatorname*{Lim}_{n\to\infty} \xi_n$;

4) $\operatorname*{Lim}_{n\to\infty} 1 = 1$.

Z warunków 1 — 4 wynika z kolei, że funkcjonał $\operatorname*{Lim}_{n\to\infty} \xi_n$ zawiera się stale między $\varliminf_{n\to\infty} \xi_n$ oraz $\varlimsup_{n\to\infty} \xi_n$; dla każdego ciągu zbieżnego pokrywa się tedy z jego granicą [1]).

[1]) Por.: S. Mazur, O metodach sumowalności, Księga pamiątkowa pierwszego polskiego Zjazdu matematycznego, Kraków, 1929, p. 102—107, w szczeg. p. 103.

ROZDZIAŁ III A.

O przestrzeniach typu (F).

§ 1. Niech E będzie jakąś przestrzenią (D) wektorjalną, spełniającą warunki następujące:

1) $(x, y) = (x - y, \Theta) \qquad (x, y \subset E)$;

2) $\lim\limits_{n\to\infty} h_n = 0$ (h_n — liczby) pociąga $\lim\limits_{n\to\infty} h_n x = \Theta \quad (x \subset E)$;

3) $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = \Theta \quad (x_n \subset E)$ pociąga $\lim\limits_{n\to\infty} h x_n = \Theta$ (h — liczba).

Z powyższych założeń wynikają odrazu następujące własności granicy:

a) Gdy $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = x$, $\lim\limits_{n\to\infty} y_n = y$, gdzie $x_n, x, y_n, y \subset E$, wówczas $\lim\limits_{n\to\infty} (x_n + y_n) = x + y$.

Dla dowodu wystarczy zauważyć, że zawsze $(x_n + y_n, x + y) = (x_n + y_n - x - y, \Theta) \leqslant (x_n - x + y_n - y, y_n - y) + (y_n - y, \Theta) = (x_n - x, \Theta) + (y_n - y, \Theta) = (x_n, x) + (y_n, y)$.

b) Gdy $\lim\limits_{n} h_n = h$ (h_n, h liczby), to $\lim\limits_{n} h_n x = h x \quad (x \subset E)$.

Istotnie mamy stale $(h_n x, h x) = ((h_n - h) x, \Theta)$.

Kładąc dalej, dla skrócenia,

$$|x| = (x, \Theta),$$

łatwo sprawdzamy, że zachodzą relacje (przyczem x, y są dowolnemi punktami uważanej przestrzeni):

a) $(x, y) = |x - y|$;

b) $|x| > 0$, gdy $x \neq \Theta$; $|\Theta| = 0$;

c) $|-x| = |x|$;

d) $|x| - |y| \leqslant |x + y| \leqslant |x| + |y|$.

Pozatem widoczne jest, że przestrzeń E jest doskonała oraz *spójna*, t. zn. nie jest sumą dwóch zbiorów zamkniętych rozłącznych i niepustych.

Gdy dany jest ciąg punktów $\{x_n\}$, to powiadamy, że *szereg* $\sum_{i=1}^{\infty} x_i$ jest *zbieżny*, skoro ciąg $\left\{\sum_{i=1}^{n} x_i\right\}$ jest zbieżny; mówimy, że jest on *zbieżny do punktu* x, albo, że punkt x jest jego *sumą* — pisząc $\sum_{i=1}^{\infty} x_i = x$, — gdy ciąg $\left\{\sum_{i=1}^{n} x_i\right\}$ jest zbieżny do x [1]).

Uwaga 1. *Gdy* $\sum_{i=1}^{\infty} x_i = x$, *to* $|x| \leqslant \sum_{i=1}^{\infty} |x_i|$. Gdy bowiem ε jest liczbą > 0, to istnieje wskaźnik n taki, że $\left|x - \sum_{i=1}^{n} x_i\right| < \varepsilon$. Temsamem $|x| - \left|\sum_{i=1}^{n} x_i\right| < \varepsilon$ oraz $|x| < \varepsilon + \left|\sum_{i=1}^{n} x_i\right|$; ponieważ zaś $\left|\sum_{i=1}^{n} x_i\right| \leqslant \sum_{i=1}^{n} |x_i| \leqslant \sum_{i=1}^{\infty} |x_i|$, przeto $|x| < \varepsilon + \sum_{i=1}^{\infty} |x_i|$, co wobec dowolności liczby dodatniej ε dowodzi prawdziwości uwagi.

Uwaga 2. *Gdy* $\sum_{i=1}^{\infty} |x_i| < +\infty$, *to szereg* $\sum_{i=1}^{\infty} x_i$ *jest zbieżny.*

---

[1]) Jest jasne, jaki sens należy nadać przytem symbolowi $\sum_{i=1}^{n} x_i$.

Kładąc bowiem $S_n = \sum_{i=1}^{n} x_i$ $(n = 1, 2 \ldots)$, mamy, dla $p < q$, $|S_p - S_q| = |\sum_{i=p+1}^{q} x_i| \leqslant \sum_{i=p+1}^{q} |x_i|$; widać stąd, że $\lim_{p, q \to \infty} |S_p - S_q| = 0$, a więc, że szereg $\sum_{i=1}^{\infty} x_i$ jest zbieżny.

Z uwagi 2 wynika, że gdy przestrzeń E jest zupełna, wówczas każdy szereg $\sum_{i=1}^{\infty} x_i$, dla którego $\sum_{i=1}^{\infty} |x_i| < +\infty$, jest zbieżny do pewnego punktu tej przestrzeni; pokażemy, że naodwrót zachodzi

Twierdzenie 1. *Jeżeli każdy szereg* $\sum_{i=1}^{\infty} x_i$ *taki, że* $\sum_{i=1}^{\infty} |x_i| < +\infty$, *jest zbieżny do pewnego punktu, wówczas przestrzeń E jest zupełna.*

Dowód. Niech dany będzie jakiś ciąg punktów $\{y_n\}$ zbieżny. Weźmy ciąg liczb dodatnich $\{\varepsilon_n\}$ o tej własności, że szereg $\sum_{n=1}^{\infty} \varepsilon_n$ jest zbieżny. Połóżmy $n_0 = 1$ i dobierzmy ciąg liczb naturalnych $\{n_i\}$, tak by stale

$$n_i \geqslant n_{i+1}, \qquad |y_p - y_q| \leqslant \varepsilon_i \quad \text{dla} \quad p, q \geqslant n_i. \tag{1}$$

Niech

$$x_1 = y_{n_1}, \qquad x_i = y_{n_i} - y_{n_{i-1}} \quad \text{dla} \quad i = 2, 3, \ldots;$$

wówczas wobec (1), $|x_i| = |y_{n_i} - y_{n_{i-1}}| \leqslant \varepsilon_{i-1}$ dla $i > 1$, i temsamem $\sum_{i=1}^{\infty} |x_i| \leqslant |y_{n_1}| + \sum_{i=1}^{\infty} \varepsilon_i$. Szereg $\sum_{i=1}^{\infty} x_i$ jest zbieżny na mocy uwagi 2, ponieważ $\sum_{i=1}^{\infty} |x_i| < +\infty$; niech y będzie jego sumą. Dla $n \geqslant n_i$ $(i = 2, 3, \ldots)$ mamy

$$|y - y_n| \leqslant |y - \sum_{j=1}^{i} x_j| + |\sum_{j=1}^{i} x_j - y_n|, \tag{2}$$

a ponieważ $\sum_{=1}^{i} x_j = y_{n_i}$, przeto, według (1),

$$\left|\sum_{j=1}^{i} x_j - y_n\right| \leqslant \varepsilon_i. \tag{3}$$

Z (2) i (3) wynika natychmiast, że

$$\overline{\lim_{n\to\infty}} |y - y_n| \leqslant \varepsilon_i \qquad (i = 2, 3 \ldots);$$

lecz $\lim\limits_{n\to\infty} \varepsilon_n = 0$, a więc temsamem ciąg $\{y_n\}$ jest zbieżny do y.

W dalszym ciągu ograniczać się będziemy stale do rozpatrywania przestrzeni E, które poza własnościami, o których mówiliśmy na początku tego §, posiadają jeszcze i tę, że są zupełne; nazywamy je *przestrzeniami* (F).

Podane w § 1 rozdziału I przykłady 1 — 9 przestrzeni (D) zupełnych, stanowią — jak zauważyliśmy w rozdziale II — przy zwykłych definicjach działań, przestrzenie wektorjalne; ponieważ zaś w przypadku tych przestrzeni spełnione są sformułowane poprzednio warunki 1 — 3, przeto są one przestrzeniami (F).

§ 2. Niech E będzie jakąś przestrzenią (F), i x_0 jej punktem. Operacja $U(x) = x + x_0$ określa pewne odwzorowanie wzajemnie jednoznaczne przestrzeni E na siebie; odwzorowania tego typu noszą nazwę *przesunięcia*. Łatwo widzieć, że obrazem kuli (kuli otwartej) przy przesunięciu jest kula (kula otwarta) o tym samym promieniu; podobnie zbiory zamknięte, doskonałe, otwarte, mierzalne (B), wszędziegęste, nigdziegęste, pierwszej, względnie drugiej, kategorji przechodzą na zbiory o tych samych odpowiednio własnościach. Niech teraz h oznacza daną liczbę $\neq 0$. Operacja $U(x) = hx$ określa znowu pewne odwzorowanie wzajemnie jednoznaczne pzzestrzeni E na siebie. Przy odwzorowaniach tego rodzaju również zbiory zamknięte, doskonałe, otwarte, mierzalne (B), wszędziegęste, nigdziegęste, pierwszej, względnie drugiej, kategorji przechodzą na zbiory o tych samych własnościach.

Twierdzenie 2. *Przestrzeń wektorjalna $L \subset E$, mierzalna (B) oraz drugiej kategorji, jest identyczna z E.*

D o w ó d. Na mocy twierdzenia 1 rozdziału I istnieje punkt $y_0 \subset L$, taki, że w punkcie y_0 zbiór L jest drugiej kategorji. Niech $y \subset L$ i przypuśćmy, że w tym punkcie L jest kategorji pierwszej; istnieje zatem kula G o środku y, taka, że zbiór LG jest pierwszej kategorji. Niech G_0 oznacza kulę, w jaką przechodzi kula G przy przesunięciu $U(x) = x + (y_0 - y)$; środkiem kuli G_0 jest oczywiście punkt y_0. Łatwo widzieć, że przy omawianem przesunięciu zbiór LG przechodzi w zbiór LG_0; wystarczy zauważyć, że, gdy $x \subset L$, to $U(x) \subset L$, bo $y_0 - y \subset L$. Zbiór LG_0 jest więc kategorji pierwszej; jest to sprzeczne z tem, że w punkcie y_0 zbiór L jest drugiej kategorji. Pokazaliśmy w ten sposób, że zbiór L jest drugiej kategorji w każdym swoim punkcie; aby dowieść teraz, że jest on drugiej kategorji w każdym wogóle punkcie, wystarczy oczywiście stwierdzić jeszcze, że jest wszędziegęsty. Pochodna zbioru L zawiera pewną kulę G; można założyć, że środek jej $y \subset L$. Kula G_0 w jaką przechodzi kula G przy przesunięciu $U(x) = x - y$ zawiera się w L' i przytem Θ jest jej środkiem. Gdy x jest dowolnym punktem, to, z uwagi na to, że $\lim\limits_{n \to \infty} \frac{1}{n} x = \Theta$, istnieje naturalne n_0, takie, że $\frac{1}{n_0} x \subset G_0$. Można dobrać punkty $x_n \subset L$ w ten sposób, by $\lim\limits_{n \to \infty} x_n = \frac{1}{n_0} x$; temsamem $\lim\limits_{n \to \infty} n_0 x_n = x$, co dowodzi tego, że $x \subset L'$. Widać ostatecznie, że zbiór L jest drugiej kategorji w każdym punkcie przestrzeni. Ponieważ zbiór L, jako mierzalny (B), spełnia na mocy twierdzenia 3 rozdziału I warunek B a i r e'a, przeto zbiór $E - L$ jest w pewnym punkcie y_0 pierwszej kategorji; temsamem jednak jest pierwszej kategorji w każdym swoim punkcie. Załóżmy bowiem, że $y \subset E - L$ oraz że zbiór $E - L$ jest w punkcie y drugiej kategorji. Niech G_0 będzie kulą otwartą o środku y_0. Weźmy ciąg punktów $\{l_n\}$, należących do L, zbieżny do $y_0 - y$; ponieważ $\lim\limits_{n \to \infty} (y + l_n) = y_0$, istnieje więc wskaźnik n_0 taki, że $y + l_{n_0} \subset G_0$. Istnieje dalej kula G_0^* o środku $y + l_{n_0}$, zawarta w G_0; niech G oznacza kulę, w jaką przechodzi kula G_0^* przy przesunięciu $U(x) = x - l_{n_0}$. Środkiem kuli G jest punkt y, a więc zbiór $(E - L)\,G$ jest drugiej kategorji. Ponieważ zaś zbiór $(E - L)\,G$ powstaje, jak łatwo widzieć, przez translację $U(x)$ ze zbioru $(E - L)\,G_0^*$, przeto i ten ostatni jest drugiej kategorji; tembardziej zbiór $(E - L)\,G_0$ jest drugiej kategorji, co — wobec tego, że G_0 może być dowolną kulą otwartą o środku y_0 — oznacza, że zbiór $E - L$ jest w punkcie y_0 drugiej kategorji, wbrew założeniu. Zbiór $E - L$, będąc pierwszej kategorji w każdym swoim punkcie, jest pierwszej kategorji. Przypuśćmy, że $y_0 \subset E - L$. Zbiór L^* powstały przez przesunięcie $U(x) = x + y_0$ ze zbioru L zawarty jest w $E - L$; zbiór L jest drugiej, zaś $E - L$ pierwszej kategorji. Powstała sprzeczność dowodzi tego, że $E - L = 0$, o co chodziło.

§ 3. W ustępie tym zakładać będziemy, że E, E^* są przestrzeniami (F), i zajmiemy się operacjami określonemi w E, których przeciwdziedziny mieszczą się w E^*. Daną operację $U(x)$ nazywać będziemy *linjową* w przypadku, gdy jest addytywna oraz ciągła [1]).

Twierdzenie 3. *Operacja linjowa jest jednorodna.*

D o w ó d. Widoczne jest, iż dla każdej liczby wymiernej w oraz każdego punktu x, $U(wx) = wU(x)$, gdy $U(x)$ jest operacją linjową. Jeśli t jest daną liczbą, zaś $\{w_n\}$ ciągiem liczb wymiernych zbieżnym do t, to $\lim\limits_{n\to\infty} w_n x = tx$ i temsamem $\lim\limits_{n\to\infty} U(w_n x) = U(tx)$; ponieważ zaś stale $U(w_n x) = w_n U(x)$, przeto $\lim\limits_{n\to\infty} U(w_n x) = \lim\limits_{n\to\infty} w_n U(x) = t\,U(x)$.

Twierdzenie 4. *Operacja addytywna, ciągła w pewnym punkcie, jest linjowa.*

---

[1]) Twierdzenia 3 — 5 w przypadku specjalnej klasy przestrzeni (F), a mianowicie rozpatrywanych w rozdziale V przestrzeni (B), znajdują się w pracy: S. B a n a c h, Sur les opérations dans les ensembles abstraits et leur applications aux équations intégrales, Fund. Math., III, (1922), p. 133—181, w szczeg. p. 152—153.

Dowód. Załóżmy, że operacja addytywna $U(x)$ jest ciągła w punkcie x_0. Niech x będzie dowolnym punktem, oraz $\{x_n\}$ ciągiem punktów zbieżnym do x. Wówczas $\lim_{n\to\infty}(x_n - x + x_0) = x_0$, skąd $\lim_{n\to\infty} U(x_n - x + x_0) = U(x_0)$ oraz $\lim_{n\to\infty} U(x_n) = U(x)$.

Twierdzenie 5. *Operacja addytywna, będąca granicą ciągu zbieżnego operacji ciągłych, jest linjowa.*

Dowód. Na mocy twierdzenia 2 oraz 5 rozdziału I, operacja, o którą chodzi, jest ciągła w pewnym punkcie; wystarczy wobec tego uwzględnić jeszcze tylko twierdzenie 4.

Ostatnie twierdzenie zawiera się w następującem ogólnem twierdzeniu:

Twierdzenie 6. *Operacja addytywna oraz mierzalna* (B) *jest linjowa.*

Dowód. Przypuśćmy, że operacja $U(x)$ jest addytywna oraz mierzalna (B). Na mocy twierdzeń 2 i 4 rozdziału I istnieje zbiór H pierwszej kategorji, taki, że w zbiorze $E - H$ operacja $U(x)$ jest ciągła. Niech $\{x_n\}$ będzie ciągiem punktów zbieżnym do Θ. Przyjmijmy $H_0 = H$ i oznaczmy pozatem, dla każdej liczby naturalnej n, przez H_n zbiór powstały z H przez przesunięcie $U_n(x) = x + x_n$; każdy ze zbiorów H_n jest pierwszej kategorji i temsamem własność tę ma zbiór $\sum_{n=0}^{\infty} H_n$. Według wspomnianego już twierdzenia 2 rozdziału I zbiór $E - \sum_{n=0}^{\infty} H_n$ jest niepusty (drugiej kategorji); załóżmy, że pewien punkt x_0 należy do wszystkich zbiorów $E - H_n$. Wówczas $x_0 \subset E - H$, $x_0 - x_n \subset E - H$ $(n = 1, 2, \ldots)$, skąd, ponieważ $\lim_{n\to\infty}(x_0 - x_n) = x_0$, mamy $\lim_{n\to\infty} U(x_0 - x_n) = U(x_0)$ oraz $\lim_{n\to\infty} U(x_n) = \Theta$. Operacja $U(x)$ jest ciągła w punkcie Θ; wobec twierdzenia 4 jest więc linjowa.

Twierdzenie 7. *Zbiór punktów zbieżności ciągu operacyj linjowych jest albo pierwszej kategorji albo identyczny z* E.

Dowód[1]) wynika bezpośrednio z twierdzenia 8 rozdziału I oraz twierdzenia 2.

Twierdzenie 8. *Jeśli* $\{U_{p,q}(x)\}$ *jest ciągiem podwójnym operacyj linjowych i istnieje ciąg punktów* $\{x_p\}$, *taki, że dla żadnego* p *ciąg* $\{U_{p,q}(x_p)\}$ *nie jest zbieżny, wówczas zbiór tych wszystkich punktów* x_0, *dla których choćby jeden z ciągów* $\{U_{p,q}(x)\}$ $(p=1,2,\ldots)$ *jest zbieżny, jest pierwszej kategorji.*

Dowód. Dla każdej liczby naturalnej p oznaczmy przez H_p zbiór punktów zbieżności ciągu $\{U_{p,q}(x)\}$. Wobec twierdzenia 7 zbiory U_p są pierwszej kategorji; tę samę własność ma więc zbiór

$$\sum_{p=1}^{\infty} H_p .$$

Twierdzenie 9. *Jeśli dla ciągu* $\{U_n(x)\}$ *operacyj ciągłych jest* $\lim\limits_{n\to\infty} |U_n(x)| < +\infty$ *na pewnym zbiorze* H *drugiej kategorji, wówczas istnieje kula* K *oraz taka liczba* N, *że* $|U_n(x)| \leqslant N$ *w każdym punkcie* $x \subset K$ $(n=1,2,\ldots)$.

Dowód. Niech H_n będzie zbiorem tych punktów x, dla których $|U_i(x)| \leqslant n$ $(i=1,2,\ldots)$. Ponieważ $H \subset \sum\limits_{n=1}^{\infty} H_n$, więc jakiś zbiór H_N jest drugiej kategorji; z uwagi na to, że każdy ze zbiorów H_n jest zamknięty, zbiór H_N zawierać musi pewną kulę, która spełnia widocznie żądane warunki.

Twierdzenie 10. *Przeciwdziedzina operacji linjowej jest albo zbiorem pierwszej kategorji, albo identyczna z* E^*.

Dowód. Załóżmy, że przeciwdziedzina H operacji linjowej $U(x)$ jest drugiej kategorji. Pokażemy naprzód, że do każdej liczby $\varepsilon > 0$ można dobrać liczbę $\eta > 0$ o tej własności, że obraz kuli otwartej $|x| < \varepsilon$, przy odwzorowaniu określonem zapomocą operacji $U(x)$, zawiera kulę otwartą $|y| < \eta$. Niech ε będzie liczbą > 0. Dla każdego n naturalnego oznaczmy przez E_n zbiór wszyst-

---

[1]) Dla przypadku przestrzeni (B) twierdzenia 7, 9 znajdują się w pracy S. Banach et H. Steinhaus, Sur les principe de la condensation de singularités, Fund. Math., IX, (1927), p. 50 — 61, w szczeg. p. 53 — 55.

kich punktów x postaci $x = nx'$, gdzie $|x'| < \frac{\bar{\varepsilon}}{2}$; H_n niech będzie obrazem zbioru E_n przy wspomnianem wyżej odwzorowaniu, a więc zbiorem wszystkich punktów y, takich, że $y = U(x)$, gdzie $x \subset E_n$. Gdy x jest dowolnym punktem, to $\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} x = \Theta$, istnieje więc naturalne n, dla którego $\left|\frac{1}{n} x\right| < \frac{\bar{\varepsilon}}{2}$ i temsamem $x \subset E_n$. Wynika stąd, że $E = \sum_{n=1}^{\infty} E_n$ oraz $H = \sum_{n=1}^{\infty} H_n$. Ponieważ zbiór H jest drugiej kategorji, przeto pewien zbiór H_{n_0} posiada również tę własność. Niech G_1 będzie kulą otwartą o środku y_1 oraz promieniu $\bar{\eta}$, zawartą w zbiorze H_{n_0}'. Łatwo widzieć, że kula otwarta G_2 o środku $\frac{1}{n_0} y_1$ i promieniu $\frac{1}{n_0} \bar{\eta}$ zawiera się w zbiorze H_1'. Istotnie niech $y \subset G_2$, t.j. $\left|y - \frac{1}{n_0} y_1\right| < \frac{1}{n_0} \bar{\eta}$; wtedy $n_0 y \subset G_2$, bowiem $|n_0 y - y_1| = \left|n_0 \left(y - \frac{1}{n_0} y_1\right)\right| \leqslant n_0 \left|y - \frac{1}{n_0} y_1\right| < \bar{\eta}$. Istnieją punkty $\bar{y}_n \subset H_{n_0}$, takie, że $\lim_{n\to\infty} \bar{y}_n = n_0 y$, temsamem $\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n_0} \bar{y}_n = y$ oraz $\frac{1}{n_0} \bar{y}_n \subset H_1$, skąd $y \subset H_1'$. Niech G_3 będzie dowolną kulą otwartą, zawartą w G_2, o środku $y_3 \subset H_1$ i promieniu ρ. Zbiór punktów $y_3 - y$ przy $y \subset H_1$ posiada tę własność, że jego skupieniem jest każdy punkt kuli otwartej $|y| < \bar{\eta}$. Gdy $y_3 = U(x_3)$, $y = U(x)$, $x_3, x \subset E_1$, to $|x_3 - x| \leqslant |x_3| + |x| < \bar{\varepsilon}$ oraz $U(x_3 - x) = y_3 - y$. Udowodniliśmy w ten sposób, że pochodna obrazu kuli otwartej $|x| < \bar{\varepsilon}$ zawiera kulę otwartą $|y| < \bar{\eta}$. Niech teraz $\varepsilon_i = \frac{\varepsilon}{2^i}$ $(i = 1, 2...)$. Według poprzedniego dobrać można ciąg liczb dodatnich η_i — nie przedstawia to ograniczenia, jeżeli przypuścimy, że jest on zbieżny do 0 — o tej własności, że pochodna obrazu kuli otwartej $|x| < \varepsilon$ zawiera kulę otwartą $|y_i| < \eta_i$. Niech $|y| < \eta_i = \eta$; określimy przez indukcję ciąg punktów $\{y_i\}$ w sposób następujący:

a) y_1 jest dowolnym punktem takim, że $|y-y_1|<\eta_2$, istnieje taki punkt x_1, iż $U(x_1)=y_1$, $|x_1|<\varepsilon_1$;

b) y_n jest dowolnym punktem takim, że $|y-\sum_{k=1}^{\infty} y_k|<\eta_{n+1}$, istnieje punkt x_n taki, że $U(x_n)=y_n$, $|x_n|<\varepsilon_n$ $(n=2,3,\ldots)$.

Mamy przedewszystkiem

$$\sum_{n=1}^{\infty} y_n = y. \tag{1}$$

Ponieważ stale $|x_n|<\varepsilon_n=\frac{\varepsilon}{2^n}$, przeto

$$\sum_{n=1}^{\infty}|x_n| < \sum_{n=1}^{\infty}\frac{\varepsilon}{2^n}=\varepsilon; \tag{2}$$

z uwagi 2 wynika, że szereg $\sum_{n=1}^{\infty} x_n$ jest zbieżny. Oznaczając sumę jego przez x, mamy, wobec (2) oraz uwagi 1, $|x|<\varepsilon$, a przytem $U(x)=\sum_{n=1}^{\infty}U(x_n)=\sum_{n=1}^{\infty}y_n=y$, według (1). Widać więc, że obraz kuli otwartej $|x|<\varepsilon$ zawiera kulę $|y|<\eta$. Gdy $y\subset E^*$, to, ponieważ $\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}y=\Theta$, istnieje naturalne n, dla którego $|\frac{1}{n}y|<\eta$; można znaleźć więc x o tej własności, że $U(x)=\frac{1}{n}y$ i temsamem $U(nx)=y$. Oznacza to, że $H=E^*$, zgodnie z twierdzeniem.

Twierdzenie 11. *Jeśli operacja linjowa $U(x)$ odwzorowuje E na E^*, wówczas dla każdego ciągu punktów $\{y_n\}$ zbieżnego do $y_0=U(x_0)$ istnieje ciąg punktów $\{x_n\}$ zbieżny do x_0, taki, że stale $U(x_n)=y_n$.*

Dowód. Niech $\{\varepsilon_n\}$ będzie ciągiem liczb >0, zbieżnym do 0. Według wyniku uzyskanego przy dowodzie ostatniego twierdzenia obraz kuli otwartej $|x|<\varepsilon_n$ zawiera pewną kulę otwartą $|y|<\eta_n$ $(n=1,2\ldots)$.

Weźmy naturalne m_0 tak, by dla każdego wskaźnika $m > m_0$ istniało naturalne n, dla którego $|y_m - y_0| < \eta_n$. Przy $m \leqslant m_0$ weźmiemy za x_m jakikolwiek punkt, dla którego $U(x_m) = y_m$. O ile $m > m_0$ lub $y_m = y_0$, to niech $x_m = x_0$. Gdy w końcu $m > m_0$ i $y_m \neq y_0$, to, oznaczając przez n_m największą liczbę naturalną n, dla której $|y_m - y_0| < \eta_n$, weźmiemy za x_m dowolny punkt kuli $|x - x_0| < \varepsilon_{n_m}$, dla którego $y_m = U(x_m)$. Łatwo sprawdzamy, że tak określony ciąg punktów $\{x_n\}$ posiada własności żądane.

Twierdzenie 12. *Jeżeli operacja linjowa odwzorowuje w sposób jedno-jednoznaczny E na E^*, wówczas odwzorowanie to jest obustronnie ciągłe.*

Dowód wynika bezpośrednio z twierdzenia poprzedniego [1]).

Twierdzenie 13. *Jeżeli przestrzeń wektorjalna E jest przestrzenią (F) zarówno przy pewnej definicji odległości (x, y), jak i przy pewnej innej definicji odległości $(xy)_1$, i jeżeli*

$$\lim_{n \to \infty} (x_n, x) = 0 \text{ pociąga zawsze } \lim_{n \to \infty} (x_n, x)_1 = 0,$$

wówczas także

$$\lim_{n \to \infty} (x_n, x)_1 = 0 \text{ pociąga zawsze } \lim_{n \to \infty} (x_n, x) = 0;$$

innemi słowy przy powyższych założeniach pojęcie granicy w obu wypadkach jest to samo.

Dowód. Dowód wynika z poprzedniego twierdzenia, jeżeli za E^* obierzemy E, z odległością $(xy)_1$, zaś operację linjową $y = U(x)$ zdefinjujemy przez związek $y = x$.

Twierdzenie 14. *Jeżeli operacja addytywna $y = U(x)$ spełnia warunek:*

$$\lim_{n \to \infty} x^n = x_0 \text{ i } \lim_{n \to \infty} U(x_n) = y_0 \text{ pociąga } y_0 = U(x_0),$$

wówczas $U(x)$ jest operacją linjową.

---

[1]) Dla przypadku przestrzeni (B) twierdzenie to, łącznie z twierdzeniem 13 jako wnioskiem, znajduje się w pracy cytowanej na str. 26 pod [1]) (p. 238—239). Podany tam dowód przebiega odmiennie.

D o w ó d. Wprowadzimy nowe pojęcie odległości w przestrzeni E, przyjmując

$$(x', x'')_1 = (x', x'') + (y', y''),$$

gdzie $y' = U(x')$, $y'' = U(x'')$, a (y', y'') oznacza odległość elementów y' i y'' w E^*. Łatwo sprawdzić, że E, przy tak określonej odległości jest przestrzenią (F); sprawdzamy w szczególności, że jest przestrzenią zupełną. Przypuśćmy bowiem, że ciąg punktów $\{x_n\}$ spełnia warunek

$$\lim_{p,\,q\to\infty} (x_p, x_q)_1 = 0.$$

Mamy zatem

$$\lim_{p,\,q\to\infty} (x_p, x_q) = \lim_{p,\,q\to\infty} (y_p, y_q) = 0,$$

istnieją więc elementy x_0 i y_0 takie, że

$$\lim_{n\to\infty} (x_n, x_0) = 0 \quad \text{i} \quad \lim_{n\to\infty} (y_n, y_0) = 0;$$

na mocy tedy założenia $y_0 = U(x_0)$, skąd

$$\lim_{n\to\infty} (x_n, x_0)_1 = 0.$$

Ponieważ, jak łatwo widać, stale

$$(x', x'')_1 \geqslant (x', x''),$$

więc $\lim\limits_{n\to\infty} (x_n, x)_1 = 0$ pociąga $\lim\limits_{n\to\infty} (x_n, x) = 0$.

Stąd, na mocy twierdzenia 13, $\lim\limits_{n\to\infty} (x_n, x) = 0$ pociąga za sobą $\lim\limits_{n\to\infty} (x_n, x)_1 = 0$, a zatem pociąga $\lim\limits_{n\to\infty} U(x_n) = U(x)$. Operacja $U(x)$ jest więc ciągła.

Lemmat 1. *Niechaj $U_1(x)$, $U_2(y)$ będą operacjami linjowemi, określonemi odpowiednio w przestrzeniach E_1 i E_2 typu (F), przeciwdziedziny tych operacyj niechaj się mieszczą w przestrzeni E_3 również typu (F).*

Jeżeli równanie

$$U_1(x) = U_2(y)$$

ma dla każdego x jedno dokładnie rozwiązanie $y = U(x)$, wówczas operacja $U(x)$ jest operacją linjową.

D o w ó d wynika z twierdzenia 14, gdyż, jak łatwo zauważyć, $\lim_{n\to\infty} x_n = x_0$, $\lim_{n\to\infty} U(x_n) = U(x_0)$ pociąga za sobą $y_0 = U(x_0)$.

Lemmat 2. *Jeżeli $y = U(x)$ jest operacją addytywną, a $z = V(y)$ operacją linjową, przyczem $V(y) = \Theta$, pociąga $y = \Theta$, wówczas, jeżeli $VU(x)$ jest operacją linjową, to $U(x)$ jest również operacją linjową.*

D o w ó d. Równanie $VU(x) = V(y)$ ma dla każdego x jedno-jedyne rozwiązanie $y = U(x)$. Zatem na mocy twierdzenia poprzedniego operacja $U(x)$ jest linjowa.

Jeżeli zbiór L operacyj linjowych $V(x)$ [określonych w przestrzeni E typu (F)] ma tę własność, że warunki

$$V(x) = 0 \quad \text{dla} \quad V \subset L$$

pociągają za sobą $x = \Theta$, wówczas zbiór L nazywa się zbiorem *pełnym* operacyj.

Twierdzenie 15. *Jeżeli $y = U(x)$ jest operacją addytywną, L zaś zbiorem pełnym operacyj linjowych określonych w E^*, i jeżeli wyrażenie*

$$VU(x)$$

jest dla każdego $V \subset L$ operacją linjową, wówczas $U(x)$ jest operacją linjową.

D o w ó d. Przypuśćmy, że $\lim_{n\to\infty} x_n = x_0$, $\lim_{n\to\infty} y_n = y_0$ $[y_n = U(x_n)]$. Mamy, dla $V \subset L$, $\lim_{n\to\infty} VU(x_n) = \lim_{n\to\infty} V(y_n) = V(y_0)$ oraz $\lim_{n\to\infty} VU(x_n) = VU(x_0)$, gdyż operacja $VU(x)$ jest linjowa. Zatem $VU(x_0) - V(y_0) = 0$, czyli $V[U(x_0) - y_0] = 0$ dla $V \subset L$, a więc $U(x_0) = y_0$. Na mocy więc twierdzenia 14 operacja $U(x)$ jest operacją linjową.

Twierdzenie 16. *Jeżeli $\{U_i\}$ i $\{V_i\}$ są ciągami operacyj linjowych, określonych odpowiednio w przestrzeniach E_1 (x-ów) i E_2 (y-ów), i jeżeli układ równań*

$$U_i(x) = V_i(y) \qquad (i = 1, 2, \ldots)$$

ma dla każdego x jedno-jedyne rozwiązanie $y = U(x)$, wówczas operacja $y = U(x)$ jest operacją linjową.

O przeciwdziedzinach operacyj U_i, V_i zakładamy oczywiście, że mieszczą się w tej samej przestrzeni typu (F).

D o w ó d. Jeżeli bowiem $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = x_0$, a dla ciągu odpowiedniego $\{y_n\}$ zachodzi $\lim\limits_{n\to\infty} y_n = y_0$, wówczas z ciągłości operacyj $\{U_i\}$ i $\{V_i\}$ wynika:

$$U_i(x_0) = V_i(y_0) \qquad (i = 1, 2, \ldots),$$

czyli

$$y_0 = U(x_0).$$

Stąd na mocy twierdzenia 14 wynika ciągłość operacji $y = U(x)$.

ROZDZIAŁ III B.

O przestrzeniach typu (F).

(ciąg dalszy)

§ 1. Niech E będzie dowolną przestrzenią (F), a $E_0 \subset E$ przestrzenią wektorjalną zamkniętą.

Nazwiemy dwa elementy $x_1, x_2 \subset E$ *równoważnemi*, pisząc $x_1 \equiv x_2$, jeśli $x_1 - x_2 \subset E_0$.

Niechaj X oznacza dowolną klasę elementów, spełniającą warunki:

a) jeżeli $x_1 \subset X$ i $x_2 \subset X$, wówczas $x_1 \equiv x_2$;

b) jeżeli $x_1 \subset X$ i $x_1 \equiv x_2$, wówczas $x_2 \subset X$.

Niechaj $\overline{E}$ oznacza zbiór wszystkich klas X, spełniających warunki a), b).

W zbiorze E określimy dodawanie i mnożenie przez liczbę h w następujący sposób:

1. Jeżeli $X_1 \subset \overline{E}$ i $X_2 \subset \overline{E}$, wówczas $X_1 + X_2$ oznacza tę klasę $X \subset \overline{E}$, która zawiera element $x = x_1 + x_2$, gdzie x_1 i x_2 są dowolnemi elementami, należącemi odpowiednio do klas X_1 i X_2;

2. $h\, X_1$ oznaczą tę klasę $X \subset \overline{E}$, która zawiera element $x = h x_1$, gdzie x_1 jest dowolnym elementem klasy X_1.

Łatwo sprawdzamy, że przy tych umowach $\overline{E}$ stanowi przestrzeń wektorjalną.

Określimy teraz w przestrzeni $\overline{E}$ pojęcie odległości. Jeśli $X, Y \subset \overline{E}$, wówczas (X, Y) jest kresem dolnym liczb $|x - y|$, gdzie $x \subset X$, $y \subset Y$.

Określona tak odległość spełnia zwykłe warunki:

I. Jeżeli $(X, Y) = 0$, wówczas $X = Y$.

W samej rzeczy, jeśli $(X, Y)=0$, wówczas istnieją dwa ciągi elementów $\{x_n\}$, $\{y_n\}$, należące odpowiednio do X, Y, takie, że

$$\lim_{n\to\infty} |x_n - y_n| = 0. \tag{1}$$

Zauważmy, że stale $x_n - x_1 \equiv y_n - y_1 \equiv \Theta$, a zatem $x_n - x_1 - y_n + y_1 \subset E_0$.

Ponieważ E_0 jest przestrzenią wektorjalną zamkniętą, a na mocy (1),

$$\lim_{n\to\infty} (x_n - x_1 - y_n + y_1) = y_1 - x_1,$$

zatem $\quad y_1 - x_1 \subset E_0$, skąd $x_1 \equiv y_1$, lub $X = Y$.

II. $\qquad (X, Z) \leqslant (X, Y) + (Y, Z)$.

Gdy ε jest liczbę > 0, to istnieją elementy x, y, y', z, takie, że $x \subset X$, $\quad y, y' \subset Y$, $\quad z \subset Z$, oraz

$$(X, Y) > |x - y| - \varepsilon, \quad (Y, Z) > |y' - z| - \varepsilon.$$

Ponieważ $-y + y' \subset E_0$, więc $x - y + y' \subset X$, zatem $|x - y + y' - z| \geqslant (X, Z)$; mamy $(X, Z) < (X, Y) + (Y, Z) + 2\varepsilon$, co dowodzi twierdzenia.

Mamy dalej:

a) $(X, Y) = (X - Y, \Theta)$,

b) $\lim\limits_{n\to\infty} (h_n X, \Theta) = 0$, jeżeli $\lim\limits_{n\to\infty} h_n = 0$ (h_n — liczby).

W rzeczy samej, jeżeli $x \subset X$, wówczas $h_n x \subset h_n X$, zatem $(h_n X, \Theta) \leqslant |h_n x|$, a więc $\lim\limits_{n\to\infty} (h_n X, \Theta) \leqslant \lim\limits_{n\to\infty} |h_n x| = 0$.

c) $\lim\limits_{n\to\infty} (h X_n, \Theta) = 0$, jeśli $\lim\limits_{n\to\infty} X_n = 0$.

Niechaj bowiem x^n oznacza element, należący do X_n, przyczem $|x_n| \leqslant 2(X_n, \Theta)$. Zatem $h x_n \subset h X_n$, a więc $(h X_n, \Theta) \leqslant |h x_n|$. Ponieważ zaś $\lim\limits_{n\to\infty} X_n = \Theta$, więc $\lim\limits_{n\to\infty} |h x_n| = 0$, skąd również $\lim\limits_{n\to\infty} (h X_n, \Theta) = 0$.

Pokażemy jeszcze, że $\overline{E}$ jest przestrzenią zupełną.

Przypuśćmy bowiem, że $\sum_{n=1}^{\infty} |X_n| < +\infty$ $[|X_n| = (X_n, \Theta)]$.

Każdemu X_n przyporządkować możemy element x_n taki, że $x_n \subset X_n$ i $|X_n| \geqslant \frac{1}{2}|x_n|$. Mamy:

$$\sum_{n=1}^{\infty} |x_n| \leqslant 2 \sum_{n=1}^{\infty} |X_n| < +\infty,$$

szereg $\sum_{n=1}^{\infty} x_n$ jest tedy zbieżny.

Niech $x = \sum_{n=1}^{\infty} x_n$. Oznaczymy przez X tę klasę, która zawiera element x. Ponieważ $\sum_{i=1}^{n} x_i \subset S_n$, gdzie $S_n = \sum_{i=1}^{n} X_i$, zatem $x - \sum_{i=1}^{n} x_i \subset X - S_n$ (dodawanie i odejmowanie rozumiane tu jest w znaczeniu wektorjalnem, określonem poprzednio). A więc

$$|X - S_n| \leqslant |x - \sum_{i=1}^{n} x_i|, \text{ zatem } \lim_{n \to \infty} |X - S_n| = 0.$$

Na mocy twierdzenia 1 rozdziału III A, przestrzeń E jest tedy zupełna, jest zatem *przestrzenią* (F).

§ 2. Z twierdzenia 5 rozdziału III A, łatwo wynika istnienie *funkcji ciągłej, nie mającej w zbiorze o mierze dodatniej pochodnej* [1]).

---

[1]) Twierdzenie to znajduje się w pracy: S. Banach, Sur la convergence presque partout de fonctionnelles linéaires, Bull. des Sciences math., 2⁰ série, t. L (1926), p. 27—32 oraz p. 36—43, w szczeg p. 43. Zastosowaną tu metodę rozwinęli, używając jej przy traktowaniu różnych problemów teorji funkcyj pp. S. Saks i H. Steinhaus. Zob.: S. Saks, Sur les fonctionnelles de M. Banach et leur application aux développements des fonctions, Fund. Math., X (1927), p. 186—196; H. Steinhaus, Anwendungen der Funktionalanalysis auf einige Fragen der reellen Funktionentheorie, Stud. Math., I (1929), p. 51—81.

Niech (C') oznacza zbiór funkcyj ciągłych perjodycznych, o perjodzie 1, i niech, dla każdej pary funkcyj $x(t) \subset C'$ oraz $x_1(t) \subset C'$,

$$(x(t),\quad x_1(t)) = \max_{<0,1>} |x(t) - x_1(t)|.$$

Jak łatwo sprawdzić, (C') jest przestrzenią typu (F). Niech $h \neq 0$ będzie dowolną liczbą i niech

$$y(t) = \frac{x(t+h) - x(t)}{h}, \qquad 0 \leqslant t \leqslant 1. \tag{1}$$

Przyjmijmy, że $y(t) \subset (S')$ [(S') oznacza zbiór funkcyj mierzalnych]. Zbiór (S') jest zbiorem typu (F).

Wyrażenie (1) określa, jak łatwo zauważyć, operację linjową, której dziedziną jest (C'), przeciwdziedzina zaś mieści się w (S').

Niech $\lim\limits_{n\to\infty} h_n = 0$, $\quad (h_n \neq 0)$, i niech

$$U_n(x) = \frac{x(t+h_n) - x(t)}{h_n}, \qquad 0 \leqslant t \leqslant 1. \tag{2}$$

Gdyby każda funkcja ciągła miała prawie wszędzie pochodną, wówczas granica wyrażenia (2) istniałaby dla prawie każdej wartości t, a zatem, dla każdego $x \subset C'$, istniałaby granica

$$\lim_{n\to\infty} U_n(x),$$

będąc zarazem granicą, określoną w polu (S'), t. j. granicą według miary.

Przyjmując $U(x) = \lim\limits_{n\to\infty} U_n(x)$, otrzymujemy operację addytywną $U(x)$, która nadto jest na mocy tw. 5 rozdz. III A — linjowa.

Oczywiście $U(x)$ oznacza pochodną funkcji $x(t)$.

Z ciągłości operacji $U(x)$ wynika, że, jeżeli $\lim\limits_{n\to\infty} x_n(t) = 0$ jednostajnie, wówczas $\lim\limits_{n\to\infty} x_n'(t) = 0$ wedle miary.

Jeśli jednak $x_n(t) = \dfrac{1}{n} \sin \dfrac{nt}{2\pi}$, wówczas $\lim\limits_{n\to\infty} x_n(t) = 0$ jednostajnie, podczas gdy ciąg pochodnych $\left\{\dfrac{1}{2\pi} \cos n \dfrac{t}{2\pi}\right\}$ nie dąży do zera wedle miary. Istnieją zatem funkcje, nie mające pochodnej w zbiorze o mierze dodatniej.

§ 3. Niech $F(x) = 0$ będzie równaniem różniczkowem linjowem cząstkowem, np. równaniem rzędu drugiego

$$F(x) \equiv a_1 \frac{\partial^2 x}{\partial u^2} + a_2 \frac{\partial^2 x}{\partial u \, \partial v} + a_3 \frac{\partial^2 x}{\partial v^2} + a_4 \frac{\partial x}{\partial u} + a_5 \frac{\partial x}{\partial v} + a_6 x = 0. \quad (1)$$

Funkcje a_i niech będą funkcjami ciągłemi zmiennych u, v w obszarze domkniętym G, którego brzegiem jest krzywa zamknięta C bez punktów podwójnych.

Może się zdarzyć, że przy pewnym charakterze warunków brzegowych równanie (1) ma zawsze jedno tylko rozwiązanie $x(u, v)$ ciągłe w obszarze domkniętym $\overline{G}$, wraz z pochodnemi cząstkowemi aż do rzędu drugiego wewnątrz obszaru $\overline{G}$.

Warunki brzegowe mogą być rozmaitego rodzaju. Polegać mogą np. na podaniu wartości funkcji na krzywej C (typ eliptyczny), wartości funkcji na części krzywej C (typ hyperboliczny, paraboliczny), wartości pochodnej wzdłuż normalnej na całej krzywej C, i t. p.

Załóżmy, że, jeśli t jest parametrem bieżącym na krzywej C, wówczas do każdej funkcji $\xi(t)$ ciągłej wraz z kilkoma pochodnemi np. do rzędu r, istnieje rozwiązanie równania $F(x) = 0$, redukujące się na krzywej C do funkcji $\xi(t)$. O rozwiązaniu $x(u, v)$ zakładamy, że jest ciągłe w $\overline{G}$, o pochodnych cząstkowych (tych, które występują w równaniu $F(x) = 0$), iż są ciągłe wewnątrz obszaru $\overline{G}$.

Pokażemy, że, *jeżeli ciąg* $\{\xi_n(t)\}$ *spełnia warunki wyżej podane* (dla $\xi(t)$) *i jeżeli* $\lim\limits_{n\to\infty} \xi_n(t) = 0$ *oraz* $\lim\limits_{n\to\infty} \xi_n^{(i)}(t) = 0$ $(i = 1, 2, \ldots r)$ (granice powyższe oznaczają zbieżność jednostajną), *wówczas, oznaczając przez* $\{x_n(u, v)\}$ *ciąg odpowiednich rozwiązań równania* (1), *mamy*: $\lim\limits_{n\to\infty} x_n(u, v) = 0$ *jednostajnie w* $\overline{G}$, *oraz* $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{\partial^2 x_n}{\partial u^2} = 0$,

$\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{\partial^2 x_n}{\partial v^2} = 0$ . . . *i t. d. jednostajnie w każdym obszarze domknię-*

tym zawartym wewnątrz krzywej C. Stosuje się to do tych pochodnych cząstkowych, które występują w równaniu (1)).

D o w ó d. Oznaczmy przez E zbiór wszystkich funkcyj $x(u,v)$, spełniających równanie (1), ciągłych w $\overline{G}$ i posiadających pochodne cząstkowe (te, które występują w równaniu (1)) ciągłe wewnątrz $\overline{G}$. W polu E określimy odległość w następujący sposób: Niechaj $\{\overline{G}_n\}$ będzie ciągiem obszarów domkniętych, położonych wewnątrz G i takich, że $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \overline{G}_n = G$ (gdzie G jest wnętrzem C).

Jeżeli $x(u,v) \subset E$, $y(u,v) \subset E$, wówczas określamy (x,y) jako

$$\max_{u,v \subset \overline{G}} |x(u,v) - y(u,v)| + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n} \frac{\max\limits_{u,v \subset \overline{G}_n} \left| \frac{\partial^2 x}{\partial u^2} - \frac{\partial^2 y}{\partial u^2} \right| + \ldots}{1 + \max\limits_{u,v \subset \overline{G}_n} \left| \frac{\partial^2 x}{\partial u^2} - \frac{\partial^2 y}{\partial u^2} \right| + \ldots}.$$

We wzorze powyższym znajdują się różnice tych pochodnych, które występują w równaniu (1).

Łatwo można sprawdzić, że E jest przy takiem określeniu odległości przestrzenią typu (F), związek $\lim\limits_{n \to \infty} x_n = x$ (wedle odległości) oznacza, że ciąg $\{x_n\}$ zdąża w $\overline{G}$ jednostajnie do x, pochodne cząstkowe $\frac{\partial^2 x}{\partial u^2}, \ldots$ (występujące w równaniu (1)) zdążają jednostajnie do odpowiednich pochodnych cząstkowych funkcji x w każdym obszarze domkniętym $\overline{G}_n$.

Oznaczmy przez E_1 zbiór funkcyj $\xi(t)$ (t parametr bieżący na krzywej C) ciągłych wraz z pochodnemi aż do rzędu r. Jeżeli $\xi(t) \subset E_1$ i $\eta(t) \subset E_1$, to połóżmy

$$(\xi, \eta) = \max |\xi(t) - \eta(t)| + \sum_{n=1}^{r} \max |\xi^{(n)}(t) - \eta^{(n)}(t)|.$$

Oznaczymy teraz przez $\xi = U(x)$ operację, która każdej funkcji $x = x(u,v) \subset E$ przyporządkowuje funkcję $\xi = \xi(t)$, do jakiej redukuje się funkcja $x(u, v)$ na brzegu C. Określona tak operacja $U(x)$ jest oczywiście addytywna i ciągła.

Ponieważ, na mocy założenia, istnieje operacja odwrotna $x = U^{-1}(\xi)$ i ponieważ przeciwdziedzina operacji $U(x)$ jest przestrzenią typu (F), zatem operacja $x = U^{-1}(\xi)$ jest operacją ciągłą (na mocy twierdzenia 12 rozdziału IIIA). Z ciągłości operacji $U^{-1}(\xi)$ wynika wyżej wypowiedziane twierdzenie.

UWAGA. Gdybyśmy nie założyli jednoznaczności rozwiązania równania (1), wówczas, opierając się na twierdzeniu 11 rozdziału III, otrzymujemy wniosek, że, jeżeli $\{\xi_n(t)\}$ ma znaczenie poprzednie, to istnieje ciąg $\{x_n(u, v)\}$ funkcyj, spełniających równanie (1) i redukujących się na C do $\xi_n(t)$, przyczem $\lim\limits_{n\to\infty} x_n(u, v) = 0$ jednostajnie w G, $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{\partial^2 x_n}{\partial v^2} = 0$, i t. d. — jednostajnie w każdym obszarze domkniętym wewnątrz C.

§ 4. Niech $\{a_i\}$ będzie dowolnym ciągiem elementów pewnej przestrzeni typu (F). Niech E oznacza zbiór wszystkich ciągów liczb $\{\xi_i\}$, dla których szereg $\sum\limits_{i=1}^{\infty} \xi_i a_i$ jest zbieżny. Zbiór E jest przestrzenią wektorjalną.

Jeżeli x oznacza ciąg $\{\xi_i\} \subset E$, a y ciąg $\{\eta_i\} \subset E$, wówczas niech

$$(x, y) = \underset{n=1,2\ldots}{\text{kres górny}} \left| \sum_{i=1}^{n} (\xi_i - \eta_i)\, a_i \right|.$$

Jeżeli $a_i \neq \Theta$ $(i = 1, 2, \ldots)$, wówczas łatwo można pokazać, że E jest przestrzenią zupełną.

Jeżeli bowiem $\lim\limits_{p,q\to\infty} (x_p, x_q) = 0$ $(x_n \subset E,\ x_n = \{\xi_i^{(n)}\})$, wówczas: $\lim\limits_{p,q\to\infty} |a_1(\xi_1^{(p)} - \xi_1^{(q)})| = 0$, zatem $\lim\limits_{p,q\to\infty} |\xi_1^{(p)} - \xi_1^{(q)}| = 0$, a więc istnieje $\lim\limits_{n\to\infty} \xi_1^{(n)} = \xi_1$.

Przy pomocy indukcji udowodniamy łatwo, że istnieją ogólnie wszystkie granice $\lim\limits_{n\to\infty} \xi_i^{(n)} = \xi_i$ $(i = 1, 2, \ldots)$. Jeżeli $\varepsilon > 0$, wówczas, dla $p, q > N_1$, mamy $(x_p, x_q) < \varepsilon$, czyli

$$\left| \sum_{i=1}^{n} (\xi_i^{(p)} - \xi_i^{(q)})\, a_i \right| \leqslant \varepsilon \quad (n = 1, 2, \ldots),$$

skąd

$$\left| \sum_{i=1}^{n} (\xi_i^{(p)} - \xi_i)\, a_i \right| \leqslant \varepsilon \quad (n = 1, 2, \ldots). \tag{1}$$

Ponieważ szereg $\sum_{i=1}^{\infty} \xi_i^{(p)} a_i$ jest zbieżny, przeto istnieje taka liczba N_2, że, dla $r \geqslant s > N_2$,

$$\left| \sum_{i=s}^{r} \xi_i^{(p)} a_i \right| < \varepsilon. \tag{2}$$

Lecz, dla $r \geqslant s > 1$,

$$\left| \sum_{i=s}^{r} \xi_i a_i \right| \leqslant \left| \sum_{i=s}^{r} (\xi_i - \xi_i^{(p)}) a_i \right| + \left| \sum_{i=s}^{r} \xi_i^{(p)} a_i \right| \leqslant$$

$$\leqslant \left| \sum_{i=1}^{r} (\xi_i - \xi_i^{(p)}) a_i \right| + \left| \sum_{i=1}^{s-1} \xi_i^{(p)} a_i \right| + \left| \sum_{i=1}^{r} \xi_i^{(p)} a_i \right|.$$

Zatem dla $r \geqslant s > N = \max(N_1, N_2)$, wobec (1) i (2),

$$\left| \sum_{i=s}^{r} \xi_i a_i \right| \leqslant 3\, \varepsilon.$$

Szereg $\sum_{i=1}^{\infty} \xi_i a_i$ jest tedy zbieżny, a więc $\{\xi_i\} \subset E$. Łatwo już można sprawdzić, że E jest *przestrzenią typu (F)*. Mamy:

$$|x| = \operatorname*{kres\ górny}_{n=1,2,\ldots} \left| \sum_{i=1}^{n} \xi_i a_i \right|.$$

§ 5. Niech (a_{ik}) $(i, k = 1, 2, \ldots)$ będzie dowolną tablicą liczb rzeczywistych. Niech E_1 będzie przestrzenią typu (F), której elementami są ciągi liczbowe.

Jeżeli dla każdego ciągu $y = \{\eta_i\} \subset E_1$ *układ równań*

$$\sum_{k=1}^{\infty} a_{ik}\xi_k = \eta_i \quad (i = 1, 2, \ldots) \tag{I}$$

ma zawsze dokładnie jedno rozwiązanie $\{\xi_k\}$, *wówczas istnieją funkcjonały linjowe w polu* E_1

$$\xi_k = f_k(y) \quad (k = 1, 2, \ldots),$$

spełniające związki

$$\sum_{k=1}^{\infty} a_{ik} f_k(y) = \eta_i \quad \textit{dla} \quad y \subset E_1 \quad (i = 1, 2, \ldots).$$

Dowód. Oznaczmy przez E zbiór wszystkich ciągów $x = \{\xi_k\}$, spełniających warunki:

a) szereg $\sum\limits_{k=1}^{\infty} a_{ik}\,\xi_k$ jest szeregiem zbieżnym dla $i = 1, 2, \ldots$;

b) ciąg $\{\eta_i\} = \left\{\sum\limits_{k=1}^{\infty} a_{ik}\,\xi_k\right\}$ należy do E_1.

Jeśli $x' = \{\xi_k'\} \subset E$, $\quad x'' = \{\xi_k''\} \subset E$, wówczas przyjmiemy

$$(x', x'')_i = \text{kres górny}_{n=1,2,\ldots} \left| \sum_{k=1}^{n} a_{ik}\,(\xi_k' - \xi_k'') \right|,$$

a przez $(x', x'')_0$ oznaczymy odległość w E_1 ciągów $\left\{\sum\limits_{k=1}^{\infty} a_{i,k}\,\xi_k'\right\}$, $\left\{\sum\limits_{k=1}^{\infty} a_{ik}\,\xi_k''\right\}$.

Określimy teraz odległość elementów x' i x'' przez wzór

$$(x', x'') = \sum_{i=0}^{\infty} \frac{1}{2^i} \frac{(x', x'')_i}{1 + (x', x'')_i}.$$

Zbiór E jest przestrzenią wektorjalną i, jak łatwo z poprzedniego ustępu wynika, przestrzenią typu (F).

Zauważmy, że, jeżeli $x_n = \{\xi_k^{(n)}\} \subset E$ i $\lim_{n\to\infty} x_n = \Theta$, wówczas $\lim_{n\to\infty} \xi_k^{(n)} = 0$ $(k = 1, 2, \ldots)$. Na mocy bowiem jednoznaczności rozwiązań systemu równań (I) w kolumnie k-tej jeden przynajmniej wyraz $a_{ik} \neq 0$. Przypuśćmy więc, że $a_{i_k, k} \neq 0$ $(i = 1, 2, \ldots)$. Ponieważ $\lim_{n\to\infty} x_n = \Theta$, więc $\lim_{n\to\infty} (x_n, \Theta)_{i_1} = 0$, zatem $\lim_{n\to\infty} \xi_1^{(n)} = 0$, gdyż $a_{i_1, 1} \neq 0$.

Przez indukcję można teraz pokazać łatwo, że ogólnie

$$\lim_{n\to\infty} \xi_k^{(n)} = 0 \quad (k = 1, 2, \ldots).$$

Jeżeli ciągi $x = \{\xi_k\} \subset E$ i $y = \{\eta_i\} \subset E_1$ spełniają równania (I), wówczas przyjmiemy

$$y = U(x).$$

Mamy, jak łatwo zauważyć,

$$(y, \Theta) = (x, \Theta)_0 \leqslant (x, \Theta) \tag{1}$$

Oczywiście (y, Θ) oznacza tu odległość w E_1, (x, Θ) — odległość w E.

Na mocy (1) $\lim_{n\to\infty} x_n = \Theta$ pociąga $\lim_{n\to\infty} U(x_n) = \Theta$. Operacja $y = U(x)$ jest zatem operacją linjową. Ponieważ operacja linjowa $y = U(x)$ odwzorowuje w sposób jednoznaczny zbiór E na E_1, przeto, na mocy twierdzenia 12 rozdziału IIIA, operacja odwrotna $x = U^{-1}(y)$ jest również linjowa.

Jeżeli $x = U^{-1}(y)$, wówczas niech: $\xi_k = f_k(y)$ $(k = 1, 2, \ldots)$.

Z tego, co wyżej było powiedziane, wynika, że, jeżeli $\lim_{n\to\infty} y_n = \Theta$, a $x_n = U^{-1}(y_n) = \{\xi_k^{n}\}$, wówczas $\lim_{n\to\infty} x_n = \Theta$, a więc $\lim_{n\to\infty} \xi_k^{(n)} = 0$.

Funkcjonały addytywne $f_k(y)$ są tedy funkcjonałami linjowemi w E_1.

Z twierdzenia powyższego wynika następujące twierdzenie [1]).

Jeżeli układ równań (I) *ma dokładnie jedno rozwiązanie dla każdego ciągu* $\{\eta_i\}$, *należącego do:*

a) *przestrzeni ciągów zbieżnych do zera,*

b) „ (s),

c) „ (l),

d) „ $(l^{(p)})$, $p > 1$;

wówczas istnieje tablica $\{b_{ki}\}$ *taka, że*

$$\xi_k = \sum_{i=1}^{\infty} b_{ki}\,\eta_i \qquad (k = 1, 2, \ldots),$$

gdzie ($\{\xi_k\}$ i $\{\eta_i\}$ *są ciągami, spełniającemi równania* (I), *przyczem w przypadkach* a), b), c), d) *mamy odp.*

a) $\sum_{i=1}^{\infty} |b_{ki}| < \infty \qquad (k = 1, 2, \ldots);$

b) *tablica* (b_{ki}) *ma wiersze skończone, t. zn. istnieje ciąg liczb* N_k *taki, że* $b_{ki} = 0$ *dla* $i > N_k$;

c) $|b_{ki}| < M_k$ $(k = 1, 2, \ldots)$, *gdzie* $\{M_k\}$ *jest pewnym ciągiem liczb*;

d) $\sum_{i=1}^{\infty} |b_{ki}|^{\frac{p}{p-1}} < +\infty \qquad (k = 1, 2, \ldots).$

UWAGA. Jeżeli założymy, że dla każdego ciągu zbieżnego $\{\eta_i\}$ istnieje dokładnie jedno rozwiązanie równań (I), wówczas istnieje ciąg ograniczony $\{C_k\}$ i tablica $\{b_{ki}\}$, spełniająca warunki pod a), przyczem:

$$\xi_k = C_k \lim_{i\to\infty} \eta_i + \sum_{i=1}^{\infty} b_{ki}\,\eta_i \qquad (k = 1, 2, \ldots).$$

---

[1]) Pominąwszy przypadek d), twierdzenie to było dotąd nieznane (por. F. Riesz, Les systèmes d'équations linéaires à une infinité d'inconnues, Paris, 1913).

Twierdzenia powyższe wynikają z twierdzenia, podanego na początku tego ustępu i z odpowiedniego przedstawienia funkcjonału linjowego w poszczególnych przestrzeniach (ob. twierdzenie 1 § 6, oraz ustępy 3 i 4 § 4 rozdziału IV).

§ 6. Podamy tu szereg własności przestrzeni (s) (ob. rozdział I, § 1) oraz przestrzeni (σ). Przestrzeń (σ) jest to zbiór wszystkich ciągów liczbowych $x = \{\xi_n\}$ skończonych w tym sensie, że prawie wszystkie wyrazy ich są równe zeru. Przy zwykłych definicjach działań zbiór ten stanowi pewną przestrzeń wektorjalną. Określimy w przestrzeni tej nie pojęcie odległości, lecz jedynie pojęcie granicy w sposób następujący: powiadamy, że $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = x$ $(x_n = \{\xi_i^{(n)}\},\ x = \{\xi_i\})$, gdy spełnione są warunki:

1) istnieje N takie, że $\xi_i^{(n)} = 0$ dla $i > N$, $n = 1, 2, \ldots$;

2) $\lim\limits_{n\to\infty} \xi_i^{(n)} = \xi_i$ $(i = 1, 2, \ldots)$.

Łatwo spostrzec, że uzyskujemy w ten sposób pewną przestrzeń (L) w sensie *Fréchet'a*. Pozatem:

1) Jeżeli $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = x$, $\lim\limits_{n\to\infty} y_n = y$, to $\lim\limits_{n\to\infty} (x_n + y_n) = x + y$;

2) Jeżeli $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = x$, $\lim\limits_{n\to\infty} t_n = t$ (t_n—liczby), to $\lim\limits_{n\to\infty} t_n x_n = tx$;

3) Jeżeli $\lim\limits_{p,q\to\infty} (x_p - x_q) = 0$, to istnieje x takie, że $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = x$.

Wychodząc z definicji granicy, można oczywiście określić, jak w § 2 rozdziału I, zbiory zamknięte, otwarte i t. d.

Twierdzenie 1. *Każdy funkcjonał linjowy $f(x)$ w przestrzeni (s) jest postaci:*

$$f(x) = \sum_{i=1}^{N} \alpha_i \xi_i,$$

gdzie N jest liczbą naturalną zależną od f.

Dowód. Niechaj $\{x_n\} = \{\xi_i^{(n)}\}$, gdzie $\xi_i^{(n)} = 0$ dla $i \neq n$, oraz $\xi_n^{(n)} = 1$. Przyjmijmy $f(x_n) = \alpha_n$. Ponieważ, dla każdego ciągu $x = \{\xi_n\}$, mamy $x = \sum\limits_{n=1}^{\infty} \xi_n x_n$, więc

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \xi_n f(x_n) = \sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n \xi_n.$$

Ponieważ szereg ten ma być dla każdego ciągu $\{\xi_n\}$ zbieżny, więc istnieje liczba naturalna N taka, że $\alpha_n = 0$ dla $n > N$. Zatem

$$f(x) = \sum_{i=1}^{N} \alpha_i \xi_i .$$

Lemmat. *Jeżeli $G \subset (s)$ jest przestrzenią wektorjalną zamkniętą, a $x_0 = \{\xi_i^{(0)}\}$ do G nie należy, wówczas istnieje funkcjonał linjowy $f(x)$, określony w przestrzeni (s) i spełniający warunki:*

$$f(x_0) \neq 0, \quad \textit{oraz} \quad f(x) = 0 \quad \textit{dla} \quad x \subset G.$$

D o w ó d. Jeżeli x_0 nie należy do G, wówczas istnieje liczba $N > 0$ taka, że

$$\sum_{i=1}^{N} | \xi_i - \xi_i^{(0)} | \neq 0 \quad \text{dla} \quad \{\xi_i\} \subset G, \tag{1}$$

w przeciwnym bowiem razie istniałby ciąg $\{x_n\} = \{\xi_i^{(n)}\}$, spełniający warunki:

$$\sum_{i=1}^{n} | \xi_i^{(n)} - \xi_i^{(0)} | = 0 \quad (n = 1, 2, \ldots),$$

i mielibyśmy $\lim\limits_{n \to \infty} x_n = x_0$. To zaś jest niemożliwe, gdyż G jest zbiorem zamkniętym, a x_0 nie należy do G.

Na mocy (1) istnieją zatem liczby $\alpha_1, \alpha_2, \ldots \alpha_N$, dla których

$$\sum_{i=1}^{N} \alpha_i \xi_i^{(0)} = 1, \quad \text{oraz} \quad \sum_{i=1}^{N} \alpha_i \xi_i = 0, \quad \text{jeśli} \quad \{\xi_i\} \subset G.$$

Jeżeli więc $f(x)$ oznacza funkcjonał, określony przez równość $f(x) = \sum\limits_{i=1}^{N} \alpha_i \xi_i$, wówczas $f(x) = 0$ dla $x \subset G$, i $f(x_0) = 1$.

Twierdzenie 2. *Każda przestrzeń wektorjalna zamknięta $G \subset (s)$ jest zbiorem wszystkich ciągów $x = \{\xi_k\}$, spełniających nieskończenie wiele równań:*

$$\sum_{k=1}^{\infty} a_{ik}\,\xi_k = 0 \qquad (i = 1, 2, \ldots),$$

gdzie $\{a_{ik}\}$ *zależą od zbioru* (G), *przyczem istnieje ciąg liczb* $\{N_i\}$ *taki, że* $a_{ik} = 0$ *dla* $k > N_i$ $(i = 1, 2, \ldots)$.

Dowód. Niech H oznacza zbiór wszystkich ciągów skończonych $\{\alpha_i\}$, spełniających warunek

$$\sum_{i=1}^{\infty} \alpha_i\,\xi_i = 0$$

dla $\{\xi_i\} \subset G$.

Przypuśćmy, że ciąg $x_0 = \{\xi_i^{(0)}\}$ nie należy do G.

Na mocy lemmatu istnieją zatem liczby $\alpha_1^0, \alpha_2^0, \ldots \alpha_N^0$, dla których:

$$\sum_{i=1}^{N} \alpha_i^0\,\xi_i = 0 \quad \text{jeśli} \quad \{\xi_i\} \subset G, \qquad \sum_{i=1}^{N} \alpha_i^0\,\xi_i^{(0)} = 1\,.$$

Mamy więc $\{\alpha_i^0\} \subset H$ i widzimy, że zbiór G jest zbiorem wszystkich ciągów $\{\xi_i\}$, spełniających związki

$$\sum_{i=1}^{\infty} \alpha_i\,\xi_i = 0 \quad \text{dla} \quad \{\alpha_i\} \subset H\,.$$

Niech H_n oznacza zbiór ciągów $\{\alpha_i\} \subset H$, dla których $\alpha_n \neq 0$, oraz $\alpha_i = 0$ dla $i > n$. Zbiór H_n zawiera conajwyżej n linjowo niezależnych ciągów $\{\alpha_i\}$. Oznaczmy je symbolami $A_1^{(n)}, A_2^{(n)}, \ldots A_{i_n}^{(n)}$.

Oczywiście każdy ciąg $\{\alpha_i\} \subset H$ jest linjową kombinacją ciągów $A_j^{(n)}$. Wypisując ciągi $A_j^{(n)}$ kolejno w postaci $\{a_{ik}\}$ widzimy, że G jest zbiorem rozwiązań nieskończenie wielu równań

$$\sum_{k=1}^{\infty} a_{ik}\,\xi_k = 0 \qquad (i = 1, 2, \ldots),$$

gdzie $\{a_{ik}\}$ jest dla każdego i ciągiem skończonym.

Twierdzenie 3. *Jeżeli w przestrzeni $G \subset (s)$ wektorjalnej zamkniętej, określony jest funkcjonał linjowy $f(x)$, wówczas istnieje funkcjonał linjowy $F(x)$, określony w całej przestrzeni (s) i spełniający warunek*

$$f(x) = F(x) \quad \textit{dla} \quad x \subset G.$$

Dowód. Oznaczmy przez H zbiór wszystkich ciągów x, spełniających warunek

$$f(x) = 0, \quad x \subset G.$$

Niech
$$x_0 \subset G \quad \text{i} \quad f(x_0) = 1. \tag{1}$$

Zbiór H jest zbiorem linjowym zamkniętym, jest tedy zbiorem wszystkich rozwiązań pewnego nieskończonego układu równań linjowych:

$$\sum_{k=1}^{N_i} a_{ik}\,\xi_k = 0 \qquad (i = 1, 2, \ldots).$$

Ponieważ x_0 nie należy do H, istnieje taka liczba j, że

$$\sum_{k=1}^{N_j} a_{jk}\,\xi_k^{(0)} = \alpha \neq 0, \qquad (\text{gdzie } \{\xi_k^{(0)}\} = x_0).$$

Niech teraz, dla każdego ciągu $x = \{\xi_i\}$,

$$F(x) = \frac{1}{\alpha} \sum_{k=1}^{N_j} a_{jk}\,\xi_k.$$

Mamy $f(x_0) = F(x_0) = 1$, oraz $F(x) = 0$ dla $x \subset H$.

Jeżeli $x \subset G$, wówczas, przyjmując $x - f(x)\,x_0 = y$, mamy:

$$x = y + f(x)\,x_0. \tag{2}$$

Ponieważ $f(y) = f(x) - f(x)\,f(x_0) = 0$, więc $y \subset H$, zatem $F(y) = 0$.

Przeto, na mocy (2),

$$F(x) = F(y) + f(x)\,F(x_0) = f(x).$$

Twierdzenie 4. *Każdy funkcjonał linjowy w przestrzeni* (σ) *jest kształtu:*

$$f(x) = \sum_{i=1}^{\infty} \alpha_i \xi_i .$$

D o w ó d przedstawia się podobnie, jak dla odpowiedniego twierdzenia w przestrzeni (s).

Twierdzenie 5. *Każda przestrzeń wektorjalna* $G \subset (\sigma)$ *jest przestrzenią zamkniętą.*

D o w ó d wynika z następującej uwagi: Jeżeli $\lim_{n\to\infty} x_n = x_0$ ($x_n \subset (\sigma)$, $x_0 \subset (\sigma)$), wówczas x_n i x_0 uważać możemy za wektory pewnej przestrzeni N-wymiarowej. Ponieważ $\lim_{n\to\infty} x_n = x_0$, zatem x_0 jest kombinacją linjową pewnych N wektorów ciągu $\{x_n\}$. Zatem $x_0 \subset G$.

Twierdzenie 6. *Każdy funkcjonał addytywny i jednorodny, określony w przestrzeni* (σ), *jest linjowy.*

D o w ó d wynika wprost z uwagi podanej przy dowodzie twierdzenia poprzedniego.

Twierdzenie 7. *Jeżeli w przestrzeni wektorjalnej* $G \subset (\sigma)$ *określony jest funkcjonał linjowy* $f(x)$, *wówczas istnieje funkcjonał linjowy* $F(x)$, *określony w* (σ) *i spełniający warunek:*

$$f(x) = F(x), \quad \text{jeśli} \quad x \subset G.$$

D o w ó d. Niech x_0 nie należy do G. Oznaczmy przez G zbiór elementów x kształtu $x = x' + \alpha x_0$, gdzie $x' \subset G$. Połóżmy $\varphi(x) = f(x') + \alpha$. Funkcjonał $\varphi(x)$ jest addytywny w G, i spełnia warunek $\varphi(hx) = h\varphi(x)$, oraz $\varphi(x) = f(x)$ dla $x \subset G$.

Rozszerzając w powyższy sposób stopniowo funkcjonał $f(x)$, otrzymamy w końcu funkcjonał addytywny $F(x)$, określony dla wszystkich elementów zbioru (σ) i spełniający warunki:

$$F(x) = f(x) \quad \text{dla} \quad x \subset G, \qquad F(hx) = hF(x).$$

Z ostatniego związku wynika, na mocy twierdzenia 6, ciągłość funkcjonału $F(x)$.

Niech teraz dany będzie układ równań:

$$\sum_{k=i}^{\infty} a_{ik}\,\xi_k = \eta_i \quad (i = 1, 2, \ldots) \tag{I}$$

(a_{ik}, η_i — dane, ξ_k — niewiadome), z których każde posiada jednak skończoną tylko liczbę N_i spółczynników różnych od zera. (Liczby N_i mogą oczywiście wzrastać nieograniczenie wraz z i).

Twierdzenie 8. *Na to, aby istniał ciąg liczb* $\{\xi_k\}$, *spełniający równania* (I), *konieczne jest i wystarcza, by dla każdego skończonego układu liczb* $h_1, h_2, \ldots h_r$ *warunek*

$$\sum_{i=1}^{r} h_i\,a_{ik} = 0 \quad (k = 1, 2, \ldots)$$

pociągał za sobą

$$\sum_{i=1}^{r} h_i\,\eta_i = 0\,.$$

D o w ó d [1]). Konieczność warunku wynika wprost ze związku:

$$\sum_{i=1}^{r} h_i\,\eta_i = \sum_{i=1}^{r} h_i \sum_{k=1}^{\infty} a_{ik}\,\xi_k = \sum_{k=1}^{\infty} \xi_k \sum_{i=1}^{r} h_i\,a_{ik}\,.$$

Wystarczy pokazać tedy tylko, że podany warunek jest wystarczający.

Oznaczmy przez x_i ciąg skończony $\{a_{ik}\}$. Elementy x_i uważać możemy za elementy przestrzeni (σ).

Niech G oznacza zbiór linjowy wszystkich elementów x typu

$$x = \sum_{i=1}^{r} h_i\,x_i\,, \tag{1}$$

gdzie $h_1, h_2, \ldots h_r$ oznacza dowolny system skończony liczb.

[1]) Twierdzenie to udowodnił po raz pierwszy p. O. T o e p l i t z. Ob. O. T o e p l i t z, Über die Auflösung unendlichvieler linearer Gleichungen mit unendlichvielen Unbekannten, Palermo Rendiconti, 28 (1909), p. 88 — 96.

Jeżeli $\sum_{i=1}^{r} h_i x_i = \sum_{i=1}^{r'} h_i' x_i$, wówczas $\sum_{i=1}^{r} h_i a_{ik} = \sum_{i=1}^{r'} h_i' a_{ik}$,

zatem $\sum_{i=1}^{r} h_i \eta_i = \sum_{i=1}^{r'} h_i' \eta_i$. (2)

Niech teraz, dla elementów x postaci (1),

$$f(x) = \sum_{i=1}^{r} h_i \eta_i . \tag{3}$$

Funkcjonał $f(x)$ jest w ten sposób (jak to wynika z (2)) jednoznacznie określony w zbiorze G, addytywny i jednorodny.

Zatem, w myśl twierdzenia 6, funkcjonał $f(x)$ jest linjowy, a na zasadzie twierdzenia 7, istnieje funkcjonał linjowy $F(x)$, określony w (σ) i taki, że

$$F(x) = f(x), \quad \text{jeśli} \quad x \subset G.$$

Na mocy więc twierdzenia 4, istnieje ciąg liczb $\{\alpha_k\}$, taki, że dla każdego elementu $x = \{\xi_k\} \subset (\sigma)$ spełniona jest równość

$F(x) = \sum_{k=1}^{\infty} \alpha_k \xi_k$. Ponieważ $F(x_i) = f(x_i) = \eta_i$, zatem

$$\sum_{k=1}^{\infty} a_{ik} \xi_k = \eta_i \quad (i = 1, 2, \ldots),$$

co należało udowodnić.

Twierdzenie 9. *Jeżeli układ równań*

$$\sum_{i=1}^{\infty} a_{ik} \xi_k = \eta_i \quad (i = 1, 2, \ldots) \tag{1}$$

posiada dla każdego ciągu $\{\eta_i\}$ dokładnie jedno rozwiązanie, wówczas dla każdego i istnieje liczba N_i taka, że

$$a_{ik} = 0 \quad \textit{dla} \quad k > N_i \quad (i = 1, 2, \ldots).$$

Dowód. Oznaczmy przez y ciąg $\{\eta_i\}$, i niech $\xi_k = f_k(y)$, jeżeli

$$\sum_{k=1}^{\infty} a_{ik}\,\xi_k = \eta_i \qquad (i = 1, 2, \ldots).$$

Na mocy twierdzenia § 5, funkcjonał $f_k(y)$ jest funkcjonałem linjowym w przestrzeni (s). Istnieje zatem, dla każdego k, skończony układ liczb $\alpha_{1,k}, \alpha_{2,k}, \ldots, \alpha_{N_k,k}$,

$$f_k(y) = \sum_{i=1}^{N_k} \alpha_{ik}\,\eta_i = \xi_k\,. \tag{2}$$

Układ (1) jest linjowo niezależny.

Przypuśćmy bowiem, że istnieje skończony ciąg liczb $\{h_k\}$ $(k = 1, 2, \ldots r)$, taki, iż

$$\sum_{k=1}^{r} h_i\,a_{ik} = 0 \qquad (i = 1, 2, \ldots).$$

Mamy wówczas, w myśl (2),

$$\sum_{k=1}^{r} h_k\,\xi_k = \sum_{k=1}^{r} h_k\,f_k(y) = 0 \tag{3}$$

dla każdego ciągu $y = \{\eta_i\}$. Przyjmując $\eta_i^0 = a_{ij}$, gdzie j jest dowolnie ustaloną liczbą naturalną $\leqslant r$, stwierdzamy natychmiast, iż dla odpowiedniego rozwiązania $\{\xi_k^0\}$ układu (1) mamy

$$\xi_k^0 = 0 \quad \text{dla} \quad k \neq j, \quad \text{oraz} \quad \xi_j^0 = 1.$$

Podstawiając wartości te w (3), otrzymujemy $h_j = 0$, skąd wynika, iż wszystkie spółczynniki h_k muszą żnikać, a więc, iż układ (2) jest niezależny, i temsamem, iż w myśl twierdzenia 8 dla każdego ciągu $\{\xi_k\}$ istnieje ciąg liczb $\{\eta_i\}$, spełniających równania (2).

Wynika stąd, że szereg

$$\sum_{k=1}^{\infty} a_{ik}\,\xi_k$$

jest dla każdego ciągu $\{\xi_k\}$ zbieżny, a więc, iż dla każdego i istnieje liczba N_i taka, że

$$a_{ik} = 0 \quad \text{dla} \quad k > N_i.$$

Uwaga. *Jeżeli w twierdzeniu powyższem nie założymy, że istnieje tylko jedno rozwiązanie, wówczas twierdzenie przestaje być prawdziwe.*

Jeżeli bowiem $\{\eta_j\}$ jest dowolnym ciągiem, wówczas istnieje szereg potęgowy o spółczynnikach rzeczywistych ξ_k, $\sum_{k=1}^{\infty} \xi_k z^k$, spełniając warunki:

$$\sum_{k=0}^{\infty} \xi_k j^k = \eta_j \qquad (j = 1, 2, \ldots).$$

Układ powyższy ma zatem dla każdego ciągu $\{\eta_i\}$ rozwiązanie — oczywiście nie jedno, gdyż istnieje szereg potęgowy różny od zera taki, że

$$\sum_{k=0}^{\infty} \xi_k j^k = 0 \qquad (i = 1, 2, \ldots).$$

§ 7. Dwie przestrzenie E i E_1 typu (F) nazywają się *izomorficzne*, jeśli istnieje operacja linjowa $y = U(x)$ $[x \subset E, y \subset E_1]$, odwzorowująca w sposób jedno-jednoznaczny i ciągły E na E_1.

Na mocy twierdzenia 12 rozdziału III, operacja $y = U(x)$ odwzorowuje w sposób jedno-jednoznaczny i obustronnie ciągły E na E_1.

Przestrzenie E, E_1 typu (F) nazywamy *równoważnemi*, jeżeli istnieje operacja linjowa $y = U(x)$, odwzorowująca w ten sposób jedno-jednoznacznie E na E_1, iż

$$|y| = |x|, \quad \text{jeśli} \quad y = U(x).$$

Oczywiście dwie przestrzenie równoważne są izomorficzne, niekoniecznie wszakże dwie przestrzenie izomorficzne muszą być równoważne.

Przykłady.

1. Zbiór funkcjonałów linjowych w przestrzeni $(L^{(p)})$ $(p \geqslant 1)$, jest równoważny przestrzeni $\left(L^{\left(\frac{p}{p-1}\right)}\right)$ dla $p > 1$, oraz przestrzeni (M) dla $p = 1$.

2. Zbiór funkcjonałów linjowych w $(l^{(p)})$ $(p \geqslant 1)$ jest równoważny przestrzeni $\left(l^{\left(\frac{p}{p-1}\right)}\right)$ dla $p > 1$, oraz przestrzeni (m) dla $p = 1$.

ROZDZIAŁ IV A.

Przestrzenie unormowane.

§ 1. Przestrzeń wektorjalną E nazywamy *unormowaną*, jeżeli istnieje dla niej funkcjonał — który nazywamy *normą*, oznaczając go przez $|x|$ lub też $\|x\|$ — spełniający warunki następujące:

1) $|x| > 0$ gdy $x \neq \Theta$, $|\Theta| = 0$;

2) $|x+y| \leqslant |x| + |y|$;

3) $|tx| = |t|\,|x|$ (t — liczba).

Jeśli odległość dwóch elementów x, y przestrzeni E określimy przez wzór

$$(x, y) = |x - y|,$$

wówczas otrzymujemy oczywiście pewną przestrzeń metryczną. W przypadku, gdy przestrzeń ta jest zupełna (t. j. gdy warunek $\lim\limits_{p,q\to\infty} |x_p - x_q| = 0$ pociąga za sobą istnienie elementu x, takiego, że $\lim\limits_{p\to\infty} |x_p - x| = 0$), przestrzeń tę nazywamy przestrzenią (B) [1]. Jest jasne, że każda przestrzeń typu (B) jest przestrzenią (F); twierdzenie odwrotne byłoby fałszywe, jak widać choćby na przy-

[1]) Ta klasa przestrzeni traktowana była ogólnie poraz pierwszy w pracy cytowanej pod [1]) na str. 38.

kładzie przestrzeni (s). Określone w § 1 rozdziału I przestrzenie, z wyjątkiem przestrzeni (s) oraz (S), są oczywiście typu (B).

§ 2. W ustępie tym zajmiemy się narazie przestrzeniami unormowanemi, niekoniecznie jednak zupełnemi. Przez E oznaczać będziemy rozważaną przestrzeń unormowaną.

Twierdzenie 1. *Warunkiem koniecznym i wystarczającym na to, by funkcjonał addytywny, określony w przestrzeni wektorjalnej $G \subset E$, był linjowy, jest istnienie takiej liczby M, że*

$$|f(x)| \leqslant M|x|, \text{ jeśli } x \subset G.$$

Dowód[1]). Warunek jest konieczny. Przypuśćmy bowiem, że niema liczby M, spełniającej powyższy warunek; istnieje wówczas ciąg $\{x_n\}$ taki, że

$$|f(x_n)| > M_n|x_n| \quad \text{i} \quad \lim_{n\to\infty} M_n = +\infty.$$

Kładąc $Y_n = \dfrac{1}{M_n|x_n|} \cdot x_n$, mielibyśmy $|Y_n| = \dfrac{1}{M_n}$, a więc $\lim\limits_{n\to\infty} Y_n = \Theta$; zatem $\lim\limits_{n\to\infty} f(Y_n) = 0$, co jest niemożliwe, gdyż

$$|f(Y_n)| = \frac{1}{M_n|x_n|} \cdot |f(x_n)| > 1.$$

Warunek jest wystarczający. Jeżeli bowiem $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = x$, gdzie $x_n \subset E$, $x \subset E$, wówczas $\lim\limits_{n\to\infty} |x - x_n| = 0$, zatem $\lim\limits_{n\to\infty} |f(x_n) - f(x)| = \lim\limits_{n\to\infty} |f(x - x_n)| \leqq \lim\limits_{n\to\infty} M|x - x_n| = 0$ oraz $\lim\limits_{n\to\infty} f(x_n) = f(x)$.

Jeżeli funkcjonał linjowy $f(x)$ określony jest w przestrzeni wektorjalnej G, wówczas *normą* funkcjonału $f(x)$ w zbiorze G nazywamy najmniejszą liczbę M, spełniającą nierówność

$$|f(x)| \leqslant M|x| \quad \text{dla} \quad x \subset G.$$

[1]) Praca cytowana pod [1]) na str. 38 (p. 51 — 53).

Normę funkcjonału $f(x)$ w zbiorze G oznaczać będziemy symbolem

$$|f|_G.$$

Jeżeli $G = E$, wówczas zamiast $|f|_E$ piszemy wprost $|f|$.

Mamy więc $|f(x)| \leqslant |f|_G . |x|$ dla $x \subset G$.

Łatwo zauważyć, że

$$|f|_G = \underset{x \subset G,\ |x| \leqslant 1}{\text{kres górny}} |f(x)|.$$

Nasuwa się pytanie, czy w każdej przestrzeni wektorjalnej, unormowanej istnieje funkcjonał linjowy nieznikający tożsamościowo.

Aby na pytanie to odpowiedzieć, zauważmy, że z twierdzenia 1 rozdziału II wynika twierdzenie następujące:

Twierdzenie 2. *Jeżeli w zbiorze G określony jest funkcjonał linjowy $f(x)$, wówczas istnieje funkcjonał linjowy $F(x)$ określony w E taki, że*

$$F(x) = f(x) \quad dla \quad x \subset G$$

oraz

$$|F| = |f|_G.$$

Dowód [1]). Twierdzenie powyższe wynika z tw. 1 rozdziału II, jeżeli przyjmiemy tam

$$p(x) = |x| . |f|_G.$$

Łatwo stąd otrzymujemy

Twierdzenie 3. *Dla każdego elementu $x_0 \subset E$ istnieje funkcjonał linjowy $F(x)$ taki, że*

$$F(x_0) = |x|, \quad |F| = 1.$$

Dowód [2]). Twierdzenie powyższe wynika z poprzedniego,

---

[1]) Zob.: S. Banach, Sur les fonctionelles linéaires, Stud. Math. I. (1929) p. 211—216, w szczeg. théorème 2.

[2]) l. c., uwaga po Théorème 2.

jeżeli za zbiór G uważać będziemy zbiór elementów postaci $h\,x_0$ (h — dowolna liczba) i przyjmiemy

$$f(h\,x_0) = h\,.\,|\,x_0\,|\,.$$

Otrzymujemy stąd, w szczególności, że w każdem polu wektorjalnem i unormowanem istnieje funkcjonał linjowy nieznikający tożsamościowo.

Twierdzenie 4. *Jeśli $f(x)$ jest funkcjonałem, określonym w pewnym zbiorze W, wówczas na to, by istniał funkcjonał linjowy $F(x)$, określony w E i spełniający warunki*

1^0 $f(x) = F(x)$ *dla* $x \subset W$,

2^0 $|\,F\,| \leqslant M$, *gdzie M jest daną liczbą dodatnią, konieczne jest i wystarcza, by nierówność*

$$\Big|\sum_{i=1}^{r} h_i\,f(x_i)\Big| \leqslant M\,\Big|\sum_{i=1}^{r} h_i\,x_i\Big|$$

spełniona była dla każdego skończonego układu elementów $x_1, x_2, \ldots, x_r$ zbioru W oraz każdego skończonego układu liczb rzeczywistych $h_1, h_2, \ldots, h_r$.

D o w ó d [1]. Warunek jest k o n i e c z n y. Jeżeli bowiem istnieje żądany funkcjonał linjowy $F(x)$, wówczas

$$\Big|\,F\Big(\sum_{i=1}^{r} h_i\,x_i\Big)\Big| \leqslant |\,F\,|\,.\,\Big|\sum_{i=1}^{r} h_i\,x_i\Big|, \quad \text{zatem}$$

$$\Big|\sum_{i=1}^{r} h_i\,F(x_i)\Big| \leqslant M\,.\,\Big|\sum_{i=1}^{r} h_i\,x_i\Big|\,.$$

---

[1]) l. c. p. 214. W przypadku pewnych przestrzeni specjalnych udowodnił twierdzenie to p. F. R i e s z. Ob.: F. R i e s z, Untersuchungen über Systeme integrierbarer Funktionen, Math. Ann., 69, (1910), p. 449—497. Ogólniejsze uzyskał p. E. H e l l y: E. H e l l y, Über lineare Funktionaloperationen, Wiener Berichte 121 (1912), p. 265 — 297.

Jeżeli $x_i \subset W$, wówczas $F(x_i) = f(x_i)$, a stąd otrzymujemy podany warunek.

Warunek jest wystarczający. Oznaczmy przez G przestrzeń wektorjalną elementów z kształtu $z = \sum_{i=1}^{r} h_i x_i$, gdzie $x_i \subset W$, h_i — liczby, r — dowolna liczba naturalna, i przyjmijmy

$$\varphi(z) = \sum_{i=1}^{r} h_i f(x_i). \tag{1}$$

Jeżeli $z = \sum_{i=1}^{r} h_i x_i = \sum_{i=1}^{s} h_i' x_i'$, wówczas, na mocy założenia,

$$\left| \sum_{i=1}^{r} h_i f(x) - \sum_{i=1}^{s} h_i' f(x_i') \right| \leqslant M . \left| \sum_{i=1}^{r} h_i x_i - \sum_{i=1}^{s} h_i' x_i' \right| = 0 .$$

Funkcjonał $\varphi(z)$ jest zatem jednoznacznie określony w G i jest przytem, jak łatwo widać, addytywny. Ponieważ zaś

$$|\varphi(z)| = \left| \sum_{i=1}^{r} h_i f(x_i) \right| \leqslant M \left| \sum_{i=1}^{r} h_i x_i \right|,$$

zatem

$$|\varphi|_G \leqslant M$$

i na mocy twierdzenia 2 istnieje żądany funkcjonał linjowy $F(x)$.

W szczególności, jeżeli W będzie ciągiem elementów $\{x_n\}$, a wartości funkcjonału $f(x)$ oznaczymy odpowiednio przez C_n, wówczas otrzymamy

Twierdzenie 5. *Na to, aby istniał funkcjonał linjowy $F(x)$, spełniający warunki:*

1) $F(x_n) = C_n \quad (n = 1, 2, \ldots)$,

2) $|F| \leqslant M$

(x_n — *dany ciąg elementów*, C_n — *dane liczby rzeczywiste*, M — *dana liczba dodatnia*), *konieczne jest i wystarcza, by nierówność*

$$\left|\sum_{i=1}^{r} h_i C_i\right| \leqslant M \left|\sum_{i=1}^{r} h_i x_i\right|$$

spełniona była dla każdego skończonego układu liczb rzeczywistych $h_1, h_2, \ldots h_r$.

§ 3. Zajmiemy się teraz zagadnieniami, które w teorji przestrzeni unormowanych grają podobną rolę, jak twierdzenie Weierstrass'a o przybliżaniu funkcyj ciągłych przez wielomiany, w teorji funkcyj zmiennej rzeczywistej.

Lemmat. *Jeżeli* G *jest przestrzenią wektorjalną, odległość zaś elementu* y_0 *od* G *jest* $d > 0$, *wówczas istnieje funkcjonał linjowy* $f(x)$, *określony w* E *i spełniający następujące warunki:*

$$1)\quad f(x) = 0 \quad dla \quad x \subset G, \qquad 2)\quad f(y_0) = 1,$$

$$3)\quad |f| = \frac{1}{d}.$$

Dowód[1]). Niechaj G_1 oznacza zbiór x-ów kształtu

$$x = x' + \alpha y_0, \quad \text{gdzie } x' \subset G, \quad \alpha \text{ — dowolna liczba.} \tag{1}$$

Oczywiście G_1 jest zbiorem linjowym, a ponieważ $d > 0$, zatem przedstawienie (1) elementu x jest jedyne.

Określamy w G_1 funkcjonał addytywny $F(x)$, przyjmując $F(x) = \alpha$, jeżeli x jest postaci (1).

Mamy:

$$|x| = |x' + \alpha y_0| = |\alpha| \cdot \left|\frac{x'}{\alpha} + y_0\right| \geqslant |\alpha| \cdot d,$$

zatem

$$|F(x)| = |\alpha| \leqslant \frac{1}{d}\,|x|.$$

[1]) l. c. Théorème 4. Twierdzenie 6 — tam również jako Théorème 6.

Wynika stąd, że

$$|F|_{G_1} \leqslant \frac{1}{d}. \tag{2}$$

Zauważmy teraz, że, jeżeli

$$x_n \subset G \quad \text{i} \quad \lim_{n\to\infty} |x_n - y_0| = d,$$

wówczas

$$|F(x_n - y_0)| = 1 \leqslant |x_n - y_0| \,.\, |F|_{G_1},$$

a więc

$$1 \leqslant d \,.\, |F|_{G_1}, \quad \text{lub} \quad \frac{1}{d} \leqslant |F|_{G_1},$$

skąd, na mocy (2), $|F|_{G_1} = \frac{1}{d}$.

W myśl więc twierdzenia 2 istnieje funkcjonał linjowy $f(x)$, określony w E taki, że

$$f(x) = F(x), \text{ jeśli } x \subset G_1, \text{ oraz } |f| = |F|_{G_1} = \frac{1}{d}.$$

W szczególności więc $f(x) = 0$ dla $x \subset G$, oraz $f(y_0) = 1$.

Jeśli dane są jakieś elementy $x_1, x_2, \ldots x_n$, wówczas każdy element x postaci $x = \sum_{k=1}^{n} c_k x_k$, gdzie $c_1, c_2, \ldots c_n$ są liczbami, nazywamy *kombinacją linjową* elementów $x_1, x_2, \ldots x_n$.

Twierdzenie 6. *Jeśli W jest dowolnym zbiorem elementów, oraz y_0 dowolnym elementem, wówczas na to, by istniał ciąg $\{w_n\}$ kombinacyj linjowych elementów zbioru W takich, że*

$$\lim_{n\to\infty} w_n = y_0,$$

konieczne jest i wystarcza, by dla każdego funkcjonału linjowego $f(x)$ warunek $f(x) = 0$ dla $x \subset W$ pociągał za sobą $f(y_0) = 0$.

Dowód. Konieczność warunku jest oczywista.

Jeżeli bowiem $\lim_{n\to\infty} w_n = y_0$ i $f(x) = 0$, $x \subset W$, wówczas $f(w_n) = 0$, a zatem $f(y_0) = 0$.

Dostateczność wynika z poprzedniego lemmatu, jeżeli przez G oznaczymy zbiór wszystkich kombinacyj linjowych elementów zbioru W.

Zbiór elementów G nazywa się *podstawowy*, jeżeli zbiór wszystkich kombinacyj linjowych elementów zbioru G jest wszędziegęsty w E.

Zbiór elementów G nazywa się *pełny*, jeżeli dla każdego funkcjonału linjowego $f(x)$ warunek $f(x) = 0$ dla $x \subset G$ pociąga za sobą $f(x) = 0$ dla każdego $x \subset E$.

Twierdzenie 7. *Na to, aby zbiór G był podstawowy, konieczne jest i wystarcza, aby był zbiorem pełnym.*

Dowód wynika łatwo z twierdzenia poprzedniego.

Powiadamy, że funkcjonał linjowy $f(x)$ jest *ortogonalny* względem elementu x_0, jeżeli $f(x_0) = 0$. Z lemmatu, podanego na początku tego §, wynika: jeżeli zbiór G linjowy zamknięty nie obejmuje całej przestrzeni, wówczas istnieje w tej przestrzeni funkcjonał linjowy ortogonalny do G (t. zn. ortogonalny do każdego elementu zbioru G).

§ **4.** Zajmiemy się tu ustaleniem postaci ogólnej funkcjonałów linjowych w poszczególnych przestrzeniach (B).

1. *Przestrzeń* (C). Przypuśćmy, że w przestrzeni (C) dany jest funkcjonał linjowy $f(x)$. Ponieważ norma, określona w przestrzeni (M), pokrywa się w przypadku funkcyj ciągłych z normą w przestrzeni (C), przeto (C) uważać można za przestrzeń wektorjalną w (M).

Z twierdzenia 2 wynika więc, że istnieje funkcjonał linjowy $F(z)$, określony w (M) i spełniający związki

$$F(z) = f(z) \quad \text{dla} \quad z \subset C, \qquad |F| = |f|,$$

gdzie $|F|$ oznacza normę $F(z)$ w (M), a $|f|$ normę $f(z)$ w (C).

Niech

$$\xi_t(u) = \begin{cases} 1 & \text{dla } 0 \leqslant u \leqslant t, \\ \\ 0 & \text{dla } t < u \leqslant 1. \end{cases} \tag{1}$$

Oznaczając, dla skrócenia, przez ξ_t funkcję $\xi_t(u)$, przyjmijmy

$$F(\xi_t) = g(t). \tag{2}$$

Pokażemy, że funkcja $g(t)$ jest funkcją o wahaniu ograniczonem.

W rzeczy samej, niechaj $t_0, t_1, \ldots t_n$ oznacza ciąg punktów $(a = t_0 < t_1 < \ldots < t_n = b)$ i niech

$$\varepsilon_i = \text{sign.}\,\{g(t_i) - g(t_{i-1})\} \qquad (i = 1, 2, \ldots n).$$

Mamy:

$$\sum_{i=1}^{n} |g(t_i) - g(t_{i-1})| = \sum_{i=1}^{n} \{g(t_i) - g(t_{i-1})\}\,\varepsilon_i =$$

$$= F\left[\sum_{1}^{n} \{\xi_{t_i} - \xi_{t_{i-1}}\}\,\varepsilon_i\right] \leqslant |F| \,.\, \left\| \sum_{1}^{n} \{\xi_{t_i} - \xi_{t_{i-1}}\}\,\varepsilon_i \right\|.$$

Ponieważ, jak łatwo zauważyć, norma powyższej sumy jest równa 1 i $|F| = |f|$, zatem

$$\underset{a \leqslant t \leqslant b}{\text{wahanie}}\; g(t) \leqslant |f|. \tag{3}$$

Niechaj $x(t) \subset C$ i niech

$$z_n(u) = \sum_{r=1}^{n} x\left(\frac{r}{n}\right)\left[\xi_{\frac{r}{n}}(u) - \xi_{\frac{r-1}{n}}(u)\right]. \tag{4}$$

Funkcja $z_n(u)$ jest więc funkcją, która w przedziałach

$$\frac{r-1}{n} < u \leqslant \frac{r}{n}$$

przyjmuje odp. wartości $x\left(\frac{r}{n}\right)$.

Ponieważ $x(u)$ jest funkcją ciągłą, zatem

$$\lim_{n\to\infty} \|x - z_n\| = 0, \text{ skąd } \lim_{n\to\infty} F(z_n) = F(x) = f(x). \tag{5}$$

Na mocy (2), (4) mamy:

$$F(z_n) = \sum_{r=1}^{n} x\left(\frac{r}{n}\right)\left[g\left(\frac{r}{n}\right) - g\left(\frac{r-1}{n}\right)\right],$$

zatem

$$\lim_{n\to\infty} F(z_n) = \int_0^1 x(t)\,dg,$$

gdyż $x(t) \subset C$, a $g(t)$ jest funkcją o wahaniu ograniczonem. Z (5) wynika, że

$$f(x) = \int_0^1 x(t)\,dg \quad \text{dla} \quad x(t) \subset C.$$

Ponieważ

$$|f(x)| = \left|\int_0^1 x(t)\,dg\right| \leqslant \underset{a \leqslant t \leqslant b}{\text{wahanie}}\, g(t) \,.\, \max_{a \leqslant t \leqslant b} |x(t)|, \qquad (6)$$

zatem, na mocy (3) i określenia symbolu $|f|$, dostajemy

$$\underset{a \leqslant t \leqslant b}{\text{wahanie}}\, g(t) = |f|.$$

Otrzymaliśmy więc twierdzenie [1]):

Każdy funkcjonał linjowy $f(x)$, określony w przestrzeni (l), jest kształtu

$$f(x) = \int_0^1 x(t)\,dg,$$

gdzie $g(t)$ jest pewną funkcją, niezależną od $x(t)$, o wahaniu równem $|f|$.

Odwrotnie, jeżeli $g(t)$ jest funkcją o wahaniu ograniczonem, to oczywiście

---

[1]) Twierdzenie to w tej formie udowodnił pierwszy p. F. Riesz. Zob.: F. Riesz, Sur les opérations fonctionnelles linéaires, C. R. 149 (1909), p. 974 — 977.

$$f(x) = \int_0^1 x(t)\, dg \quad \text{dla} \quad x(t) \subset C$$

jest funkcjonałem linjowym, jak to wynika z (6).

2. *Przestrzeń* ($L^{(r)}$) ($r \geqslant 1$). Załóżmy, że w przestrzeni $L^{(r)}$ określony jest funkcjonał linjowy $f(x)$. Niech:

$$\xi_t(u) = \begin{cases} 1 & \text{dla } 0 \leqslant u \leqslant t, \\ 0 & \text{dla } t < u \leqslant 1. \end{cases}$$

Oznaczając, dla skrócenia, przez ξ_t funkcję $\xi_t(u)$, przyjmijmy

$$f(\xi_t) = g(t).$$

Pokażemy, że funkcja $g(t)$ jest funkcją bezwzględnie ciągłą. W rzeczy samej, niechaj $\delta_1, \delta_2, \ldots \delta_n$ oznacza zbiór przedziałów, nie zachodzących na siebie, o końcach odpowiednio t_i, t_i' $(t_i < t_i')$. Kładąc $\varepsilon_i = \text{sign.}\,[g(t_i') - g(t_i)]$, mamy

$$\sum_{i=1}^{n} |g(t_i') - g(t_i)| = \sum_{i=1}^{n} \{g(t_i') - g(t_i)\}\, \varepsilon_i =$$

$$= f\left(\sum_{i=1}^{n} \{\xi_{t_i'} - \xi_{t_i}\}\, \varepsilon_i\right) \leqslant |f| \,.\, \left\| \sum_{i=1}^{n} \{\xi_{t_i'} - \xi_{t_i}\}\, \varepsilon_i \right\|. \tag{1}$$

Wyrażenie $(\xi_{t_i'} - \xi_{t_i})\, \varepsilon_i$ oznacza funkcję, która w przedziale δ_i przyjmuje wartość $\varepsilon_i = \pm 1$, a pozatem zero. Z uwagi więc na to, że przedziały δ_i nie zachodzą na siebie, otrzymujemy

$$\left\| \sum_{i=1}^{n} \{\xi_{t_i'} - \xi_{t_i}\}\, \varepsilon_i \right\| = \sqrt[r]{\sum_{i=1}^{n} |\delta_i|},$$

gdzie $|\delta_i|$ oznacza długość przedziału δ_i.

Z (1) wynika więc

$$\sum_{i=1}^{n} |g(t_i') - g(t_i)| \leqslant |f| \,.\, \sqrt[r]{\sum_{i=1}^{n} |\delta_i|}.$$

Funkcja $g(t)$ jest przeto bezwzględnie ciągła. Przyjmijmy $g'(t)=\alpha(t)$. Funkcja $\alpha(t)$ jest funkcją całkowalną. Mamy oczywiście

$$f(\xi_t)=\int_0^t \alpha(t)\,dt,$$

gdyż $\xi_0=0$, a więc

$$f(\xi_t)=\int_0^1 \xi_t(u)\,\alpha(u)\,du\,. \tag{2}$$

Niechaj $0\leqslant t_0<t_1\ldots<t_n=1$, $c_1, c_2, \ldots c_n$ niech będą dowolnemi liczbami, i niech

$$x(t)=C_i \quad \text{dla} \quad t_{i-1}\leqslant t<t_i \quad (i=1,2\ldots,n).$$

Oczywiście

$$x(t)=\sum C_i\,.\{\xi_{t_i}-\xi_{t_{i-1}}\},$$

zatem, na mocy (2),

$$f(x)=\int_0^1 x(t)\,\alpha(t)\,dt\,. \tag{3}$$

Widzimy więc, że dla każdej funkcji $\alpha(t)$ schodkowej spełniona jest relacja (3).

Jeżeli teraz $x(t)$ jest dowolną funkcją mierzalną, ograniczoną, wówczas istnieje ciąg $\{x_n(t)\}$ funkcyj schodkowych wspólnie ograniczonych, zdążających prawie wszędzie do $x(t)$.

Temsamem

$$\lim_{n\to\infty}\int_0^1 |x_n(t)-x(t)|^r\,dt=0,$$

a więc $\lim\limits_{n\to\infty}\|x_n-x\|=0$ i, na mocy (3),

$$f(x)=\lim_{n\to\infty}\int_0^1 x_n(t)\,\alpha(t)\,dt=\int_0^1 x(t)\,\alpha(t)\,dt\,.$$

Związek (3) zachodzi więc dla każdej funkcji $x(t)$ mierzalnej ograniczonej.

Załóżmy teraz, że $r > 1$.

Przyjmijmy:

$$x_n(t) = \begin{cases} |\alpha(t)|^{s-1} \operatorname{sign.} \alpha(t), & \text{jeżeli } |\alpha(t)|^{s-1} \leqslant n, \\ n \operatorname{sign.} \alpha(t), & \text{jeżeli } |\alpha(t)|^{s-1} > n, \end{cases}$$

gdzie $\dfrac{1}{r} + \dfrac{1}{s} = 1$.

Mamy:

$$|f(x_n)| = \left|\int_0^1 x_n(t)\,\alpha(t)\,dt\right| \leqslant |f| \sqrt[r]{\int_0^1 |x_n(t)|^r dt}.$$

Ponieważ

$$x_n(t)\,\alpha(t) = |x_n(t)|\,.\,|\alpha(t)| \geqslant |x_n(t)|\,.\,|x_n(t)|^{\frac{1}{s-1}},$$

więc

$$\int_0^1 |x_n(t)|^{\frac{s}{s-1}} \leqslant |f| \sqrt[r]{\int_0^1 |x_n(t)|^r dt}.$$

skąd, ponieważ $\dfrac{s}{s-1} = r$,

$$\left\{\int_0^1 |x_n(t)|^r dt\right\}^{1-\frac{1}{r}} \leqslant |f|.$$

Ponieważ nierówność powyższa spełniona jest dla każdego n i ponieważ

a) $|x_n(t)|^r \leqslant |\alpha(t)|^{rs-r} = |\alpha(t)|^s$,

b) $\lim\limits_{n\to\infty} |x_n(t)|^r = |\alpha(t)|^s$ prawie wszędzie,

więc

$$\sqrt[s]{\int_0^1 |\alpha(t)|^s dt} \leqslant |f|. \tag{4}$$

Funkcja $\alpha(t)$ jest tedy całkowalna w potędze s.

Jeżeli więc $x(t)$ jest dowolną funkcją mierzalną całkowalną w r-tej potędze, to oczywiście iloczyn $x(t)\,\alpha(t)$ jest funkcją całkowalną.

Określimy teraz ciąg $\{x_n(t)\}$, przyjmując:

$$x_n(t) = \begin{cases} |x(t)| \operatorname{sign} x(t), & \text{jeżeli } |x(t)| \leqslant n, \\ n \operatorname{sign} x(t), & \text{jeżeli } |x(t)| > n; \end{cases} \tag{5}$$

wówczas

$$\|x - x_n\| = \sqrt[r]{\int_0^1 |x(t) - x_n(t)|^r\, dt} \to 0, \tag{6}$$

a więc

$$\left| \int_0^1 x(t)\,\alpha(t)\,dt - f(x_n) \right| = \left| \int_0^1 [x(t) - x_n(t)]\,\alpha(t)\,dt \right| \leqslant$$

$$\leqslant \sqrt[r]{\int_0^1 |x(t) - x_n(t)|^r\, dt}\, .\, \sqrt[s]{\int_0^1 |\alpha(t)|^s\, dt}$$

i na mocy (6),

$$f(x) = \lim_{n\to\infty} f(x_n) = \int_0^1 x(t)\,\alpha(t)\,dt;$$

skoro tedy

$$|f(x)| = \left| \int_0^1 x(t)\,\alpha(t)\,dt \right| \leqslant \sqrt[r]{\int_0^1 |\alpha(t)|^s\, dt}\, .\, \|x\|,$$

zatem, na mocy (4),

$$|f| = \sqrt[s]{\int_0^1 |\alpha(t)|^s\, dt}.$$

Udowodniliśmy więc twierdzenie [1]):

Wszelki funkcjonał linjowy $f(x)$, określony w $(L^{(r)})$ $(r > 1)$, jest kształtu

$$f(x) = \int_0^1 x(t)\,\alpha(t)\,dt,$$

gdzie $\alpha(t) \subset (L^{(s)})$, *przyczem*

$$|f| = \sqrt[s]{\int_0^1 |\alpha(t)|^s\,dt}.$$

Przypuśćmy teraz, że $r = 1$. Niechaj $0 \leqslant u < u + h \leqslant 1$, i niech

$$x(t) = \begin{cases} \dfrac{1}{h}, & \text{jeśli } u \leqslant t \leqslant u + h, \\ 0, & \text{jeśli } 0 \leqslant t < u \text{ lub } u + h < t \leqslant 1. \end{cases}$$

Mamy, na mocy (3),

$$|f(x)| = \left|\int_0^1 x(t)\,\alpha(t)\,dt\right| = \frac{1}{h}\left|\int_u^{u+h} \alpha(t)\,dt\right|,$$

ponieważ zaś

$$|f(x)| \leqslant |f| \,.\, \|x\| = |f| \,.\, 1,$$

przeto

$$\left|\int_u^{u+h} \alpha(t)\,dt\right| \leqslant |f| \,.\, h.$$

Funkcja $g(u) = \int_0^u \alpha(t)\,dt$ spełnia więc warunek Lipschitz'a,

---

[1]) Dla $p = 2$ twierdzenie to udowodnił pierwszy p. M. Fréchet. Zob. M. Fréchet, Sur les ensembles de fonctions et les opérations linéaires, Paris, C. R., 144 (1907), p. 1414 — 1416. W przypadku ogólnym znajduje się w pracy p. F. Riesz'a cytowanej na str, 71 (p. 475).

a ponieważ prawie wszędzie $g'(t) = \alpha(t)$, więc

$$|\alpha(t)| \leqslant |f| \quad \text{prawie wszędzie.} \tag{7}$$

Jeżeli teraz $x(t)$ jest dowolną funkcją całkowalną, wówczas, określając ciąg $\{x_n(t)\}$ tak jak w (5), mamy

$$\|x - x_n\| = \int_0^1 |x(t) - x_n(t)|\, dt \to 0,$$

skąd

$$f(x) = \lim_{n\to\infty} f(x_n) = \lim_{n\to\infty} \int_0^1 x_n(t)\,\alpha(t)\,dt = \int_0^1 x(t)\,\alpha(t)\,dt,$$

gdyż

$$|x_n(t)\,\alpha(t)| \leqslant |x(t)\,\alpha(t)|.$$

Zauważmy jeszcze, że

$$\left|\int_0^1 x(t)\,\alpha(t)\right| \leqslant \int_0^1 |x(t)|\,dt \,.\, \underset{0\leqslant t\leqslant 1}{\text{max istotne}}\, |\alpha(t)|.$$

Na mocy więc (7)

$$|f| = \underset{0\leqslant t\leqslant 1}{\text{max istotne}}\, |\alpha(t)|.$$

Udowodniliśmy w ten sposób twierdzenie [1]):

Każdy funkcjonał linjowy określony w (L) *jest postaci*

$$f(x) = \int_0^1 x(t)\,.\,\alpha(t)\,dt,$$

gdzie $\alpha(t)$ *jest funkcją prawie wszędzie ograniczoną, przyczem*

$$|f| = \underset{0\leqslant t\leqslant 1}{\text{max istotne}}\, |x(t)|.$$

---

[1]) Twierdzenie to udowodnił pierwszy p. H. Steinhaus. Zob.: H. Steinhaus, Additive und stetige Funktional-operationen, Math. Zeitschr., 5, (1918), p. 186—221.

3. *Przestrzeń* (c). Przypuśćmy, że w (c) określony jest funkcjonał linjowy $f(x)$. Niech

$$\xi_i^n = \begin{cases} 1 \text{ dla } n = i, \\ 0 \text{ dla } n \neq i. \end{cases}$$

Oznaczmy przez x_n ciąg $\{\xi_i^n\}$, przez x' — ciąg $\{\xi_i^i\}$. Niechaj

$$f(x_n) = C_n, \quad f(x') = C',$$

i niech x oznacza ciąg $\{\xi_n\} \subset (c)$, oraz $\alpha = \lim_{n \to \infty} \xi_n$.

Zauważmy, że

$$\left\| x - \alpha x' - \sum_{n=1}^{r} (\xi_n - \alpha) x_n \right\| = \text{górny kres}_{n > r} |\xi_n - \alpha|.$$

Zatem

$$x = \alpha x' + \lim_{r \to \infty} \sum_{n=1}^{r} (\xi_n - \alpha) x_n, \quad \text{czyli}$$

$$x = \alpha x' + \sum_{n=1}^{\infty} (\xi_n - \alpha) x_n.$$

Mamy więc

$$f(x) = \alpha f(x') + \sum_{n=1}^{\infty} (\xi_n - \alpha) f(x_n),$$

skąd

$$f(x) = \alpha C' + \sum_{n=1}^{\infty} (\xi_n - \alpha) C_n.$$

Niechaj teraz x oznacza ciąg $\{\xi_n\}$, gdzie

$$\xi_n = \begin{cases} \operatorname{sign} C_n, & \text{dla } n \leqslant r, \\ 0, & \text{dla } n > r. \end{cases}$$

Wówczas $\| x \| = 1$, $\alpha = \lim_{n \to \infty} \xi_n = 0$, $f(x) = \sum_{n=1}^{r} | C_n |$, ponieważ zaś $|f(x)| \leqslant |f| . \| x \|$, więc

$$\sum_{n=1}^{r} | C_n | \leqslant | f |,$$

i z uwagi na to, że r jest liczbą dowolną, szereg $\sum_{n=1}^{\infty} | C_n |$ jest zbieżny.

Niech

$$C' - \sum_{n=1}^{\infty} C_n = C.$$

Mamy ogólnie

$$f(x) = \alpha C + \sum_{n=1}^{\infty} C_n \xi_n.$$

Jeśli tu przyjmiemy

$$\xi_n = \begin{cases} \text{sign } C_n & \text{dla } \quad n \leqslant r, \\ \text{sign } C & \text{dla } \quad n > r, \end{cases}$$

wówczas: $\| x \| = 1$, $\alpha = \lim\limits_{n \to \infty} \xi_n = \text{sign } C$ oraz

$$f(x) = |C| + \sum_{n=1}^{r} | C_n | + \sum_{n=r+1}^{\infty} C_n \,\text{sign } C \leqslant |f|.$$

Ponieważ ostatnia nierówność zachodzi dla każdego r, zatem

$$|C| + \sum_{n=1}^{\infty} | C_n | \leqslant |f|.$$

Z drugiej strony, $f(x) \leqslant \{ |C| + \sum_{n=1}^{\infty} |C_n| \} \, |x|$, a więc, łącznie z poprzednią nierównością, mamy

$$|C| + \sum_{n=1}^{\infty} | C_n | = |f|.$$

Udowodniliśmy więc twierdzenie:

Wszelki funkcjonał linjowy $f(x)$ określony w (c) ma kształt

$$f(x) = C \lim_{n \to \infty} \xi_n + \sum_{n=1}^{\infty} C_n \xi_n,$$

przyczem

$$|C| + \sum_{n=1}^{\infty} |C_n| = |f|$$

(ξ_n *są tu wyrazami ciągu* x).

4. *Przestrzeń* $(l^{(r)})$ $(r \geqslant 1)$. Oznaczmy, jak poprzednio, przez x_n ciąg $\{\xi_i^n\}$, gdzie

$$\xi_i^{(n)} = \begin{cases} 1 & \text{dla } n = i, \\ 0 & \text{dla } n \neq i. \end{cases}$$

Jeżeli x oznacza dowolny ciąg $\{\xi_i\} \subset (l^{(r)})$, wówczas

$$\| x - \sum_{i=1}^{n} \xi_i x_i \| = \sqrt[r]{\sum_{i=n+1}^{\infty} |\xi_i|^r} \to 0,$$

a zatem

$$x = \sum_{i=1}^{\infty} \xi_i x_i . \tag{1}$$

Przypuśćmy, że w $(l^{(r)})$ określony jest funkcjonał linjowy $f(x)$. Niech

$$f(x_i) = C_i .$$

Mamy na mocy (1)

$$f(x) = \sum_{i=1}^{\infty} \xi_i C_i . \tag{2}$$

Przypuśćmy najpierw, że $r = 1$.

Niech

$$\xi_n = \text{sign } C_n,$$

$$\xi_i = 0 \quad \text{dla} \quad i \neq n .$$

Mamy wówczas $f(x) = |C_n| \leqslant |f|$.

Z drugiej strony, dla każdego ciągu $x = \{\xi_i\} \subset (l)$,

$$|f(x)| \leqslant \left(\sum_{i=1}^{\infty} |\xi_i|\right) . \underset{i=1,2,\ldots}{\text{górny kres}} \ |C_i|,$$

a zatem

$$|f| = \underset{i=1,2,\ldots}{\text{górny kres}} |C_i| .$$

Udowodniliśmy tedy twierdzenie:

Każdy funkcjonał linjowy $f(x)$, określony w (l), jest postaci

$$f(x) = \sum_{i=1}^{\infty} C_i \xi_i,$$

gdzie $|f| = \underset{i=1,2,\ldots}{\text{górny kres}} \{|C_i|\}$ (ξ_i *są wyrazami ciągu* x).

Przypuśćmy teraz, że $r > 1$. Niechaj $x^0 = \{\xi_i^0\}$, gdzie

$$\xi_i^0 = \begin{cases} |C_i|^{s-1} \operatorname{sign.} C_i & \text{dla } i \leqslant n \\ 0 & \text{dla } i > n. \end{cases} \quad \left(\frac{1}{r} + \frac{1}{s} = 1\right),$$

Mamy

$$\|x^0\| = \sqrt[r]{\sum_{i=1}^{n} |C_i|^{rs-s}} = \sqrt[r]{\sum_{i=1}^{n} |C_i|^s} .$$

Zatem, na mocy (2),

$$f(x^0) = \sum_{i=1}^{n} |C_i|^s \leqslant |f| \sqrt[r]{\sum_{i=1}^{n} |C_i|^s},$$

skąd

$$\sqrt[s]{\sum_{i=1}^{n} |C_i|^s} \leqslant |f|,$$

a że n jest liczbą dowolną, więc

$$\sqrt[s]{\sum_{i=1}^{\infty} |C_i|^s} \leqslant |f| .$$

Z drugiej strony, dla każdego ciągu $x = \{\xi_i\} \subset (l^{(r)})$,

$$f(x) = \left| \sum_{i=1}^{\infty} \xi_i C_i \right| \leqslant \sqrt[r]{\sum_{i=1}^{\infty} |\xi_i|^r} \cdot \sqrt[s]{\sum_{i=1}^{\infty} |C_i|^s},$$

a więc ostatecznie
$$|f| = \sqrt[s]{\sum_{i=1}^{\infty} |C_i|^s}.$$

Udowodniliśmy przeto twierdzenie:

Wszelki funkcjonał linjowy $f(x)$, określony w $(l^{(r)})$ $(r > 1)$, jest kształtu

$$f(x) = \sum_{i=1}^{\infty} C_i \xi_i \qquad (x = \{\xi_i\}),$$

przyczem
$$|f| = \sqrt[s]{\sum_{i=1}^{\infty} |C_i|^s}.$$

ROZDZIAŁ IV B.

Przestrzenie unormowane

(Ciąg dalszy).

§ 1. Ciąg funkcyj $\{x_n(t)\}$ $(0 \leqslant t \leqslant 1,\ \ x_n(t) \subset L^{(r)},\ \ r \geqslant 1)$ nazywamy *zamkniętym* w $(L^{(r)})$, jeżeli dla każdej funkcji $x(t) \subset (L^{(r)})$ istnieje ciąg $\{w_n\}$ wyrażeń postaci:

$$w_n(t) = \sum_{i=1}^{k_n} \alpha_i^{(n)} x_i(t),$$

zdążający przeciętnie w potędze r do $x(t)$, t. zn. taki, iż

$$\lim_{n \to \infty} \int_0^1 |x(t) - w_n(t)|^r dt = 0 .$$

Ciąg funkcyj $\{x_n(t)\}$ nazywamy *zupełnym* w $(L^{(r)})$, jeżeli dla każdej funkcji $y(t) \subset (L^{(s)})$ $\left[\frac{1}{r} + \frac{1}{s} = 1\right]$, gdy $r > 1$, wzgl. ograniczonej i mierzalnej, gdy $r = 1$, warunki:

$$\int_0^1 x_n(t)\, y(t)\, dt = 0 \qquad (n = 1, 2, \ldots),$$

pociągają $y(t) = 0$ prawie wszędzie. Pojęcia powyższe występują w teorji szeregów ortogonalnych.

Łatwo zauważyć, iż na to, aby ciąg funkcyj w przestrzeni $(L^{(r)})$ był zamknięty, wystarczy i jest konieczne, by był podstawowy w sensie definicji § 3 rozdziału IV A; podobnież, na to, by był zupełny, konieczne jest i wystarcza, by był pełny (*ibid*). W rzeczy samej, wystarczy przypomnieć, że każdy funkcjonał linjowy w $(L^{(r)})$ jest postaci

$$\int_0^1 \alpha(t)\, x(t)\, dt,$$

gdzie $\alpha(t) \subset L^{(s)}$ (jeżeli $r > 1$), wzgl. $\alpha(t) \subset M$ (jeżeli $r = 1$).

Analogiczne definicje ustalić można w przestrzeni (C).

Ciąg $\{x_n(t)\}$ $(x_n(t) \subset C,\ 0 \leqslant t \leqslant 1)$ jest w (C) *zamknięty*, jeżeli dla każdej funkcji $x(t) \subset (C)$ istnieje ciąg kombinacyj linjowych $\left\{\sum_{i=1}^{k_n} \alpha_i^{(n)} x_i(t)\right\}$, zdążających jednostajnie do $x(t)$.

Ciąg $\{x_n(t)\}$ jest *zupełny* w (C), jeżeli dla każdej funkcji $g(t)$ o wahaniu ograniczonem, warunki

$$\int_0^1 x_n(t)\, dg = 0 \qquad (n = 1, 2, \ldots)$$

pociągają za sobą $g(t) = \text{const.}$, z pominięciem conajwyżej przeliczalnej mnogości punktów.

Z twierdzenia 7 rozdziału IV A wynika natychmiast, iż *na to, aby ciąg $\{x_n(t)\}$ był zupełny w $(L^{(r)})$, wzgl. (C), konieczne jest i wystarcza, by był zamknięty w $(L^{(r)})$, wzgl. (C).*

Postępując analogicznie, przenieść można definicje ciągów zamkniętych i zupełnych na przestrzenie $(l^{(r)})$, (c) i (m).

§ **2.** Twierdzenie 6 rozdziału IV A interpretować można w rozmaitych przestrzeniach; np.

a) *na to, aby istniały kombinacje linjowe utworzone z wyrazów ciągu $\{x_n(t)\}$ $(0 \leqslant t \leqslant 1,\ x_n(t) \subset (L^{(r)}))$, przybliżające przeciętnie w r-*tej *potędze funkcję $x(t) \subset (L^{(r)})$, konieczne jest i wystar-*

cza, by dla każdej funkcji $y(t) \subset (L^{(s)})$ *(wzgl. — ograniczonej, mierzalnej, gdy* $r = 1$*) warunki*

$$\int_0^1 y(t)\, x_n(t)\, dt = 0 \qquad (n = 1, 2, \ldots)$$

pociągały za sobą

$$\int_0^1 y(t)\, x(t)\, dt = 0.$$

b) *Na to, aby istniały wielomiany utworzone z wyrazów ciągu* $\{x_n(t)\}$ $(0 \leqslant t \leqslant 1;\ x_n(t) \subset (C))$, *przybliżające jednostajnie funkcję* $x(t) \subset (C)$ *konieczne jest i wystarcza, by dla każdej funkcji o wahaniu ograniczonem* $g(t)$ *warunki*

$$\int_0^1 x_n(t)\, dg = 0 \qquad (n = 1, 2, \ldots)$$

pociągały za sobą

$$\int_0^1 x(t)\, dg = 0.$$

§ 3. Załóżmy, że dana jest tablica $\{\alpha_{ik}\}$ i ciąg liczb $\{c_i\}$. Zajmiemy się ustaleniem warunków na to, aby istniał ciąg liczb $\{z_i\}$, spełniających nieskończenie wiele równań

$$\sum_{k=1}^{\infty} \alpha_{ik}\, z_k = c_i \qquad (i = 1, 2, \ldots).$$

Rozwiązanie tego zagadnienia podamy w niektórych przypadkach.

a) *Przestrzeń* (l). Niechaj x_i oznacza ciąg $\{\alpha_{ik}\}$, przyczem niech

$$\sum_{k=1}^{\infty} |\alpha_{ik}| < +\infty \qquad (i = 1, 2, \ldots).$$

Jak wiemy, wszelki funkcjonał linjowy w (l) ma kształt

$$f(x) = \sum z_i \xi_i,$$

gdzie x oznacza ciąg $\{\xi_i\}$; mamy wówczas $|f| = \text{kres górny}_{i=1,2,\ldots} z_i$.

Z twierdzenia 5 rozdziału IVA wynika tedy natychmiast:

Na to, by istniał ciąg ograniczony $\{z_k\}$, spełniający równania

$$\sum_{k=i}^{\infty} \alpha_{ik} z_k = c_i \qquad (i = 1, 2, \ldots)$$

oraz warunek

$$\text{kres górny} \, |z_k| \leqslant M,$$

konieczne jest i wystarcza, by dla każdego układu skończonego liczb $h_1, h_2, \ldots h_r$ spełniony był związek

$$\left| \sum_{i=1}^{r} h_i c_i \right| \leqslant M \sum_{k=1}^{\infty} \left| \sum_{i=1}^{r} h_i \alpha_{ik} \right|.$$

b) *Przestrzeń* (c). Niechaj x_i oznacza ciąg $\{\alpha_{ik}\}$ zbieżny do zera, t. j. taki, iż $\lim\limits_{k \to \infty} \alpha_{ik} = 0$. Funkcjonał linjowy w (c) ma kształt

$$f(x) = \alpha \lim_{n \to \infty} \xi_i + \sum_{i=1}^{\infty} z_i \xi_i,$$

gdzie

$$x = \{\xi_i\}, \qquad |f| = |\alpha| + \sum_{i=1}^{\infty} |z_i|.$$

Z uwagi na to, że $\lim\limits_{k \to \infty} \alpha_{ik} = 0$, otrzymujemy z twierdzenia 5 rozdziału IVA:

Na to, by istniał ciąg liczb $\{z_i\}$, spełniających równania

$$\sum_{k=1}^{\infty} \alpha_{ik} z_k = c_i \quad (i = 1, 2, \ldots)$$

oraz warunek

$$\sum_{k=1}^{\infty} |z_i| \leqslant M,$$

konieczne jest i wystarcza, by dla każdego układu skończonego liczb $h_1, h_2, \dots h_r$ zachodziła nierówność

$$\left|\sum_{i=1}^{r} h_i c_i\right| \leqslant M . \underset{k=1,2\dots}{\text{kres górny}} \left|\sum_{i=1}^{r} h_i \alpha_{ik}\right|$$

§ **4**. Problemem momentów nazwano następujące zagadnienie: Dany jest ciąg funkcyj $\{\varphi_i\}$ i ciąg liczb $\{c_i\}$. Jakie są warunki na to, aby istniała funkcja f, spełniająca nieskończenie wiele równań

$$\int_a^b f \varphi_i \, dt = c_i \quad (i = 1, 2, \dots).$$

Podamy rozwiązanie tego zagadnienia w niektórych przypadkach.

a) *Przestrzeń* (C). Niechaj x_i oznacza funkcję ciągłą $x_i(t)$ $(0 \leqslant t \leqslant 1)$.

Ponieważ wszelki funkcjonał linjowy $f(x)$ w (C) daje się przedstawić w postaci

$$f(x) = \int_0^1 x(t) \, dg,$$

gdzie $\underset{0 \leqslant t \leqslant 1}{\text{wahanie}}\, g(t) = |f|$, przeto z twierdzenia 5 rozdziału IVA otrzymujemy [1]):

---

[1]) Twierdzenie to znalazł pierwszy p. F. Riesz w pracy cytowanej na str. 77; zob. również pracę p. E. Helly'ego, cytowaną na str. 71. Twierdzenie pod b) udowodnił pierwszy również p. F. Riesz w pracy cytowanej na str. 71.

Na to, by istniała funkcja $g(t)$ o wahaniu ograniczonem, spełniająca równania

$$\int_0^1 x_i(t)\, dg = c_i \qquad (i = 1, 2, \ldots)$$

oraz warunek

$$\underset{0 \leqslant t \leqslant 1}{\text{wahanie}}\; g(t) \leqslant M,$$

konieczne jest i wystarcza, by dla każdego układu skończonego liczb $h_1, h_2, \ldots h_r$ zachodziła nierówność

$$\left|\sum_{i=1}^{r} h_i c_i\right| \leqslant M \,.\, \max_{0 \leqslant t \leqslant 1} \left|\sum_{i=1}^{r} h_i x_i(t)\right|.$$

b) *Przestrzeń* $(L^{(r)})$ $(r > 1)$. Postępując analogicznie, otrzymujemy twierdzenie:

Na to, by istniała funkcja $\alpha(t)$ $(0 \leqslant t \leqslant 1)$, spełniająca równania

$$\int_0^1 x_i(t)\, \alpha(t)\, dt = c_i \qquad (i = 1, 2, \ldots) \qquad (x_i(t) \subset (L^{(r)}))$$

oraz warunek

$$\int_0^1 |\alpha(t)|^s\, dt \leqslant M^s \qquad \left(\frac{1}{r} + \frac{1}{s} = 1\right),$$

konieczne jest i wystarcza, by dla każdego skończonego układu liczb $h_1, h_2, \ldots h_k$ zachodziła nierówność

$$\left|\sum_{i=1}^{k} h_i c_i\right| \leqslant M \sqrt[r]{\int_0^1 \left|\sum_{i=1}^{k} h_i x_i(t)\right|^r dt}.$$

Jeżeli $r = 1$, wówczas $x_i(t)$ są funkcjami całkowalnemi, poszukiwana zaś funkcja $\alpha(t)$ ma być ograniczona i prawie wszędzie spełniać warunek

$$\max_{0 \leqslant t \leqslant 1} \text{istotne} \, | \, \alpha(t) \, | \leqslant M .$$

Warunek wówczas jest następujący:

$$| \sum_{i=1}^{k} h_i c_i | \leqslant M \int_0^1 | \sum_{i=1}^{k} h_i x_i(t) | \, dt .$$

ROZDZIAŁ VA.

Przestrzenie typu *(B)*.

§ 1. Podamy tu pewne twierdzenia, które związane są istotnie z przestrzeniami unormowanemi zupełnemi, a więc — przestrzeniami typu (B).

Twierdzenie 1. *Jeżeli $F(x)$ jest operacją mierzalną (B) oraz $u(x)$ operacją addytywną, spełniającą warunek*

$$|F(x)| \geqslant |U(x)| \quad \textit{dla każdego } x,$$

wówczas $U(x)$ jest operacją linjową.

Dowód. Istnieje zbiór H pierwszej kategorji taki, że w zbiorze $E - H$ operacja $F(x)$ jest ciągła.

Niechaj $x_0 \subset E - H$. Istnieje zatem takie $r > 0$ i liczba $M > 0$, że

$$|U(x)| \leqslant |F(x)| \leqslant M, \quad \text{jeżeli } |x - x_0| \leqslant r, \quad x \subset E - H. \tag{1}$$

Niechaj $|x'| < \frac{r}{2}$, oraz niech G oznacza zbiór wszystkich punktów kształtu

$$x' + x, \qquad |x - x_0| \leqslant \frac{r}{2}, \qquad x \subset E - H.$$

Zbiór G jest zbiorem drugiej kategorji, gdyż zbiór elementów x, spełniających związki

$$|x - x_0| \leqslant \frac{1}{2} r, \qquad x \subset E - H$$

jest zbiorem drugiej kategorji.

W zbiorze G istnieje zatem element

$$x' + x_1 \subset E - H, \qquad x_1 \subset E - H.$$

Ponieważ $|x_1 - x_0| \leqslant \frac{1}{2} r < r$, $|x' + x_1 - x_0| \leqslant r$,

zatem, na mocy (1),

$$|U(x')| \leqslant |U(x' + x_1)| + |U(x_1)| \leqslant 2M.$$

W kuli więc $|x| \leqslant \frac{r}{2}$ norma elementu $U(x)$ jest ograniczona, operacja U jest zatem ciągła (tw. 1 rozdziału IV A).

Twierdzenie 2. *Jeżeli, dla operacji addytywnej $U(x)$, $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = x$ pociąga za sobą zawsze $\underline{\lim}_{n\to\infty} |U(x_n)| \geqslant |U(x)|$, wówczas operacja $U(x)$ jest linjowa.*

D o w ó d [1]). Oznaczmy przez G_n zbiór elementów x, spełniających nierówność $|U(x)| \leqslant n$.

Zbiór G_n jest, jak wynika z założenia, zamknięty. Ponieważ $E = \sum\limits_{n=1}^{\infty} G_n$, zatem jeden ze zbiorów G_n zawiera kulę, w której operacja $U(x)$ jest ograniczona według normy.

Na mocy więc twierdzenia 1 rozdziału IV A operacja $U(x)$ jest linjowa; z ograniczoności bowiem operacji $U(x)$ według normy w pewnej kuli wynika oczywiście ograniczoność jej w każdej kuli.

Twierdzenie 4. *Jeżeli ciąg operacyj linjowych $\{U_n(x)\}$ jest zbieżny w zbiorze H, wszędziegęstym w pewnej kuli K, i jeżeli ciąg norm $\{|U_n|\}$ jest ograniczony, wówczas ciąg $\{U_n(x)\}$ jest zbieżny w całej przestrzeni.*

---

[1]) Praca cytowana wyż. na str. 38. Théorème 3.

D o w ó d [1]). Niechaj x_0 będzie dowolnym elementem kuli K. Istnieje ciąg $\{x_n\} \subset H$, którego granicą jest x_0.

Mamy, dla każdej trójki liczb n, p, q,

$$|U_p(x_0) - U_q(x_0)| \leqslant |U_p(x_0 - x_n)| + |U_q(x_n - x_0)| + |U_p(x_n) - U_q(x_n)|,$$

zatem

$$\overline{\lim_{p,q\to\infty}} |U_p(x_0) - U_q(x_0)| \leqslant 2M |x_0 - x_n| \qquad (M = \overline{\lim_{n\to\infty}} |U_p|).$$

Ponieważ $\lim\limits_{n\to\infty} |x_0 - x_n| = 0$, więc

$$\lim_{p,q\to\infty} |U_p(x_0) - U_q(x_0)| = 0,$$

skąd wynika zbieżność ciągu $U_n(x_0)$.

Jeżeli teraz x jest dowolnym elementem, x' zaś środkiem kuli K, wówczas istnieje taka liczba $\varepsilon > 0$, że $x' + \varepsilon x \subset K$, a zatem że $\lim\limits_{n\to\infty} U(x' + \varepsilon x)$ istnieje.

Stąd oczywiście wynika, że również granica $\lim\limits_{n\to\infty} U_n(x)$ istnieje, gdyż ciąg $U_n(x')$ jest zbieżny.

Twierdzenie 4. *Jeżeli $\{U_n(x)\}$ jest ciągiem funkcjonałów linjowych, wówczas zbiór H wszystkich elementów x, dla których*

$$\overline{\lim_{n\to\infty}} |U_n(x)| < +\infty$$

jest całą przestrzenią E albo zbiorem pierwszej kategorji.

D o w ó d. Zbiór H jest zbiorem linjowym, a na mocy twierdzenia 9 rozdziału I mierzalnym (B). Z twierdzenia 2 rozdziału IIIA wynika nasze twierdzenie.

Twierdzenie 5. *Jeżeli, dla ciągu operacyj linjowych $\{U_n(x)\}$, mamy w każdym punkcie x przestrzeni*

$$\overline{\lim_{n\to\infty}} |U_n(x)| < +\infty,$$

wówczas ciąg norm $\{|U_n|\}$ jest ograniczony.

---

[1]) Praca cytowana wyż. na str. 40 (p. 53). Tam również twierdzenia 4 i 5.

Dowód. Na mocy twierdzenia 9 rozdziału III A, istnieje kula K i liczba N taka, że

$$|U_n(x)| \leqslant N \quad \text{dla} \quad x \subset K \qquad (n = 1, 2, \ldots).$$

Zatem, jak łatwo widać, mamy $|U_n| \leqslant \frac{2N}{r}$, gdzie r oznacza promień kuli K.

Twierdzenie 6. *Jeżeli zbiór L operacyj linjowych ma tę własność, że dla każdego elementu x istnieje liczba skończona $M(x)$ taka, że*

$$|U(x)| \leqslant M(x), \quad \textit{jeśli} \quad U \subset L,$$

wówczas normy operacyj zbioru L tworzą zbiór ograniczony.

Dowód. W przeciwnym bowiem przypadku istniałby ciąg $\{U_n(x)\}$, $[U_n(x) \subset L]$, taki, że $\lim\limits_{n \to \infty} |U_n| = \infty$. Na mocy zatem twierdzenia 5, istniałby element x_0 taki, że

$$\overline{\lim_{n \to \infty}} |U_n(x_0)| = +\infty$$

wbrew założeniu.

Z twierdzenia 4 i 5 wynika bezpośrednio

Lemmat. *Jeżeli dla ciągu $\{U_n(x)\}$ operacyj linjowych*

$$\overline{\lim_{n \to \infty}} |U_n| = +\infty,$$

wówczas nierówność

$$\overline{\lim_{n \to \infty}} |U_n(x)| < +\infty$$

spełniona być może conajwyżej tylko w zbiorze I-ej kategorji.

Twierdzenie 7. *Jeśli dla ciągu podwójnego $\{U_{pq}(x)\}$ funkcjonałów linjowych*

$$\overline{\lim_{q \to \infty}} |U_{pq}| = +\infty \qquad (p = 1, 2, \ldots),$$

wówczas istnieje element x (niezależny od p), dla którego

$$\overline{\lim_{q \to \infty}} |U_{pq}(x)| = +\infty \qquad (p = 1, 2, \ldots).$$

Dowód [1]) wynika z twierdzenia 4, gdyż zbiór H_p punktów x, w których

$$\lim_{q\to\infty} |U_{pq}(x)| < \infty$$

jest zbiorem pierwszej kategorji. Zbiór $H = \sum_{p=1}^{\infty} H_p$ jest zatem zbiorem pierwszej kategorji, a zbiór $E - H$ jest zbiorem drugiej kategorji (nie jest tedy pusty). Jak łatwo widać,

$$\overline{\lim_{q\to\infty}} |U_{pq}(x)| = \infty \quad \text{przy} \quad x \subset E - H \quad (p = 1, 2, \ldots).$$

Uwaga. W twierdzeniu 7, przeciwdziedziny E_p ciągów $\{U_{pq}\}$ $(p = 1, 2, \ldots)$ nie muszą być jednakowe. Oczywiście dla każdego p przeciwdziedzina ciągu $\{U_{pq}(x)\}$ musi być ta sama, gdyż w przeciwnym przypadku nie możnaby mówić o zbieżności.

§ 2. Jeżeli $\{f_i\}$ jest ciągiem funkcjonałów linjowych, określonych w E, przyczem $|f_i| \leqslant M$ $(i = 1, 2, \ldots)$ (M — niezależne od n), jeżeli $\{y_i\}$ jest ciągiem elementów zbioru E, przyczem $|y_i| \leqslant M'$ $(i = 1, 2, \ldots)$ (M' — liczba niezależna od n), i jeżeli

$$\sum_{i=1}^{\infty} |\alpha_i| < \infty,$$

wówczas wyrażenie

$$U(x) = \sum_{i=1}^{\infty} \alpha_i f_i(x) y_i$$

jest operacją linjową; mamy bowiem

$$|M(x)| \leqslant \sum_{i=1}^{\infty} |\alpha_i|\; |f_i(x)|\; |y_i| \leqslant \sum_{i=1}^{\infty} |\alpha_i| . M M' . |x| =$$

$$= |x| . M M' \sum_{i=1}^{\infty} |\alpha_i| .$$

---

[1]) Praca cytowana wyż. na str. 40., Théorème 1.

Niechaj elementami zbioru E będą funkcje, określone w przedziale $< 0,1 >$ i spełniające warunki następujące:

1) jeżeli $\lim_{n\to\infty} \| x_n \| = 0$, wówczas $\lim_{n\to\infty} \text{as}\, x_n(t) = 0$;

2) jeżeli $\lim_{n\to\infty} \| x_n \| = 0$, wówczas istnieje ciąg częściowy $\{x_{n_i}\}$ i element x taki, że

$$| x_{n_i}(t) | \leqslant | x(t) |$$

dla każdego i oraz dla prawie każdego t ($| \; |$ oznacza tu wartość bezwzględną);

3) jeżeli $\lim_{n\to\infty} \text{as}\, x_n(t) = x(t)$, wówczas

$$\underline{\lim}_{n\to\infty} \| x_n \| \geqslant \| x \| .$$

W warunkach powyższych zakładamy, że $\{x_n\} \subset E$ oraz $x \subset E$. Przestrzenie (C), $(L^{(p)})$, (M) sprawdzają powyższe własności; jeśli chodzi o sprawdzenie warunku 2), to funkcję $x(t)$ określimy jako sumę szeregu

$$x(t) = \sum_{i=1}^{\infty} | x_{n_i}(t) | \text{ przy założeniu, że } \sum_{n=1}^{\infty} \| x_{n_i} \| < \infty .$$

Twierdzenie 8. *Niechaj E i E_1, spełniają warunki* 1), 2), 3) *wyżej podane. Jeżeli $K(s, t)$ jest funkcją określoną w kwadracie* $< 0,1; 0,1 >$, *jeśli dla każdego $x \subset E$ całka*

$$y(s) = \int_0^1 K(s,t)\, x(t)\, dt \tag{1}$$

istnieje dla prawie każdej wartości s, oraz jeśli $y(s) \subset E_1$, wówczas wyrażenie (1) *jest operacją linjową.*

D o w ó d [1]). Niechaj $\lim_{n\to\infty} | x_n - x | = 0$ oraz niech $\{\overline{x}_n\}$ będzie dowolnym ciągiem częściowym ciągu $\{x_n\}$. Ponieważ $\lim_{n\to\infty} | x_n - x | = 0$,

[1]) Praca cytowana wyż. na str. 38; Théorème 2.

przeto, na mocy warunku 2), w zbiorze E istnieje ciąg częściowy $\{\bar{x}_{n_i} - x\}$ i element z taki, że $|\bar{x}_{n_i}(t) - x(t)| \leqslant z(t)$ prawie wszędzie dla każdego i. Ponieważ $\lim\limits_{i \to \infty} \text{as}\, \{K(s,t)\ [\bar{x}_{n_i}(t) - x(t)]\} = 0$,

$|K(s,t)\ (\bar{x}_{n_i} - x)| \leqslant |K(s,t)|\, z(t)$ i całka $\int\limits_0^1 K(s,t)\, z(t)\, dt$ istnieje

w zbiorze H o mierze 1, gdyż $z \subset E$; zatem

$$\lim_{i \to \infty} \int_0^1 K(s,t)\ (\bar{x}_{n_i}(t) - x(t))\, dt = 0;$$

temsamem, $\lim\limits_{i \to \infty} \int\limits_0^1 K(s,t)\, \bar{x}_{n_i}(t)\, dt = \int\limits_0^1 K(s,t)\, x(t)\, dt$ dla $s \subset H$.

Ponieważ z każdego ciągu częściowego ciągu $\{y_n(s)\}$ można wyrwać ciąg zbieżny prawie wszędzie do $y(s)$, zatem $\lim\limits_{n \to \infty} \text{as}\, y_n(s) = y(s)$; wynika stąd już, że operacja $\int\limits_0^1 K(s,t)\, x(t)\, dt$ jest linjowa.

Przestrzeń (L). Jeżeli $K(s,t)$ jest funkcją mierzalną dla $0 \leqslant s \leqslant 1$, $0 \leqslant t \leqslant 1$, spełniającą warunek

$$\int_0^1 C(s)\, ds = K < \infty \qquad (C(s) = \max_{0 \leqslant t \leqslant 1} \text{istotne}\, |K(s,t)|),$$

wówczas wyrażenie

$$U(x) = \int_0^1 K(s,t)\, x(t)\, dt$$

jest w polu (L) operacją linjową, której przeciwdziedzina mieści się również w (L).

Mamy bowiem

$$\int_0^1 \left| \int_0^1 K(s,t)\, x(t)\, dt \right| ds \leqslant \int_0^1 |x(t)|\, dt \,.\, \int_0^1 C(s)\, ds \,.$$

Przestrzeń (M). Jeżeli $K(s,t)$ jest funkcją mierzalną dla $0 \leqslant s \leqslant 1$, $0 \leqslant t \leqslant 1$ i jeżeli

$$\int_0^1 |K(s,t)|\, dt < M < \infty \quad \text{dla każdego } s,$$

wówczas wyrażenie

$$U(x) = \int_0^1 K(s,t)\, x(t)\, dt$$

jest operacją linjową określoną w (M), której przeciwdziedzina mieści się także w (M).

Przestrzeń (C). Jeżeli $K(s,t)$ jest funkcją ciągłą w kwadracie $0 \leqslant x \leqslant 1$, $0 \leqslant y \leqslant 1$, wówczas wyrażenie

$$U(x) = \int_0^1 K(s,t)\, x(t)\, dt$$

jest operacją linjową określoną w (C), przyczem przeciwdziedzina mieści się również w (C).

Podobnie, wyrażenie

$$U(x) = x(t) - \int_0^1 K(s,t)\, x(t)\, dt$$

jest operacją linjową.

Przestrzeń $(L^{(p)})$. Jeżeli $K(s,t)$ jest funkcją mierzalną dla $0 \leqslant s,t \leqslant 1$ i jeżeli

$$\int_0^1 \int_0^1 |K(s,t)\, x(t)\, y(s)|\, ds\, dt < \infty \tag{1}$$

dla każdej pary funkcyj $x(t) \subset (L^{(p)})$, $y(s) \subset (L^{\left(\frac{q}{q-1}\right)})$ $(p, q > 1$, wówczas wyrażenie

$$U(x) = \int_0^1 K(s,t)\, x(t)\, dt \tag{2}$$

jest operacją linjową określoną w przestrzeni $(L^{(p)})$, przyczem przeciwdziedzina mieści się w polu $(L^{(q)})$.

Obierzmy dowolne $x \subset (L^{(p)})$. Dla każdego $y \subset (L^{\left(\frac{q}{q-1}\right)})$ mamy

$$\int_0^1 \int_0^1 K(s,t)\, x(t)\, y(s)\, ds\, dt = \int_0^1 y(s) \left[\int_0^1 K(s,t)\; x(t)\; dt \right] ds;$$

wynika stąd, że

$$\int_0^1 K(s,t)\, x(t)\, dt \subset (L^{(q)}),$$

a zatem — że $U(x)$ jest operacją linjową.

Aby warunek (1) zachodził, wystarczy założyć, że

$\int_0^1 \int_0^1 |K(s,t)^{\frac{r}{r-1}}|\, ds\, dt < \infty$, gdzie r jest mniejszą z liczb p, $\frac{q}{q-1}$

(w szczególności — iż $K(s,t)$ jest ograniczone, gdy $r = 1$, lub całkowalne polowo, gdy $p = q = +\infty$).

Mamy bowiem na mocy nierówności Riesz'a

$$\left| \int_0^1 \int_0^1 K(s,t)\, x(t)\, y(s)\, ds\, dt \right| \leqslant$$

$$\leqslant \left\{ \int_0^1 \int_0^1 |K(s,t)|^{\frac{r}{r-1}}\, ds\, dt \right\}^{\frac{r}{r-1}} \left\{ \int_0^1 |x(s)|^r\, ds \right\}^{\frac{1}{r}} . \left\{ \int_0^1 |y(t)|^r\, dt \right\}^{\frac{1}{r}} .$$

W szczególności, jeżeli $p = q = 2$, wówczas warunek (1) można zastąpić warunkiem

$$\int_0^1 \int_0^1 |K(s,t)|^2 \, ds \, dt < +\infty. \tag{3}$$

Z warunku (3) wynika wówczas, że operacja (2) jest linjowa w $(L^{(2)})$, przyczem $y(s) \subset (L^{(2)})$.

Uwaga. To, co wyżej powiedzieliśmy, ważne jest również w przypadkach $p, q = 1, \infty$.

ROZDZIAŁ V B.

Przestrzenie typu *(B)*

(Ciąg dalszy).

§ 1. *Jeżeli* $\alpha(t)$ *jest funkcją mierzalną w* $0 \leqslant t \leqslant 1$ *i jeżeli dla każdego* $x(t) \subset (L^{(p)})$ $(p \geqslant 1)$ *istnieje całka*

$$\int_0^1 x(t)\,\alpha(t)\,dt\,,$$

wówczas dla $p > 1$ *mamy* $\int_0^1 |\alpha(t)|^{\frac{p}{p-1}} < \infty$, *a dla* $p = 1$ *istotny kres górny* $|\alpha(t)|$ *jest skończony.*

Dowód [1]). Niechaj dla n naturalnego

$$\alpha_n(t) = \begin{cases} \alpha(t), & \text{jeżeli } |\alpha(t)| \leqslant n, \\ n \operatorname{sign} \alpha(t), & \text{jeżeli } |\alpha(t)| > n. \end{cases}$$

Mamy

$$|x(t)\,\alpha(t)| \geqslant |x(t)\,\alpha_n(t)|\,,$$

a więc, ponieważ $\lim\limits_{n\to\infty} \alpha_n(t) = \alpha(t)$,

---

[1]) Dla $p > 1$ twierdzenie to znalazł p. F. Riesz. Ob. pracę cytowaną na str. 71 (p. 457).

$$\lim_{n\to\infty}\int_0^1 x(t)\,\alpha_n(t)\,dt = \int_0^1 x(t)\,\alpha(t)\,dt\,.$$

Wyrażenie $\int_0^1 x(t)\,\alpha_n(t)\,dt$ jest funkcjonałem linjowym w $(L^{(p)})$ ($\alpha_n(t)$ jest funkcją ograniczoną), $\int_0^1 x(t)\,\alpha(t)\,dt$ jest tedy, na mocy twierdzenia 5 rozdziału IIIA, również funkcjonałem linjowym. W myśl przeto twierdzenia o postaci ogólnej funkcjonałów linjowych w $(L^{(p)})$ dla $p > 1$, istnieje funkcja $\overline{\alpha}(t) \subset (L^{\frac{p}{p-1}})$ taka, że

$$\int_0^1 x(t)\overline{\alpha}(t)\,dt = \int_0^1 x(t)\,\alpha(t)\,dt \quad \text{dla} \quad x(t) \subset (L^{(p)}).$$

Przyjmując

$$x(t) = \begin{cases} 1 & \text{dla } 0 \leqslant t \leqslant t_0, \\ 0 & \text{,, } t_0 < t \leqslant 1, \end{cases}$$

mamy

$$\int_0^{t_0} \overline{\alpha}(t)\,dt = \int_0^{t_0} \alpha(t)\,dt \qquad \text{dla każdego } 0 \leqslant t_0 \leqslant 1,$$

skąd prawie wszędzie

$$\overline{\alpha}(t) = \alpha(t)\,.$$

Analogicznie postępuje się dla $p = 1$.

§ 2. *Jeżeli dla każdego ciągu zbieżnego* $x = \{\xi_i\}$ *szereg* $\sum_{i=1}^{\infty} \alpha_i\,\xi_i$ *jest zbieżny, wówczas* $\sum_{i=1}^{\infty} |\alpha_i| < +\infty\,.$

D o w ó d. Wyrażenie $\sum_{i=1}^{n} \alpha_i\,\xi_i$ jest funkcjonałem linjowym w przestrzeni (c), ponieważ zaś

$$\lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} \alpha_i \xi_i = \sum_{i=1}^{\infty} \alpha_i \xi_i$$

przeto z twierdzenia 5 rozdziału III A wynika, że wyrażenie $\sum_{i=1}^{\infty} \alpha_i \xi_i$ jest także funkcjonałem linjowym. Istnieje więc liczba $M > 0$ taka, że

$$\left| \sum_{i=1}^{\infty} \alpha_i \xi_i \right| \leqslant M \| x \| = M . \operatorname*{kres\ górny}_{i=1,2,\ldots} | \xi_i |.$$

Przyjmując tu

$$\xi_i = \operatorname{sign} \alpha_i, \quad \text{jeśli} \quad i \leqslant n, \quad \alpha_i \neq 0,$$

$$\xi_i = 0, \qquad \text{jeśli} \quad i > n \quad \text{lub} \quad \alpha_i = 0,$$

otrzymujemy

$$\sum_{i=1}^{n} | \alpha_i | \leqslant M \qquad (n = 1, 2, \ldots),$$

skąd

$$\sum_{i=1}^{\infty} | \alpha_i | \leqslant M.$$

Jeżeli dla każdego ciągu $x = \{ \xi_i \} \subset (l^{(p)})$ $(p \geqslant 1)$ *szereg* $\sum_{i=1}^{\infty} \alpha_i \xi_i$ *jest zbieżny, wówczas, jeśli* $p > 1$, *mamy*

$$\sum_{i=1}^{\infty} | \alpha_i |^{\frac{p}{p-1}} < \infty,$$

jeśli zaś $p = 1$, *wówczas ciąg* $\{\alpha_i\}$ *jest ograniczony.*

Dowód analogiczny do poprzedniego [1]).

---

[1]) Ostatnie twierdzenie znalazł p. E. Landau. Zob. E. Landau, Über einen Konvergenzsatz, Gött. Nachr. 1907. p. 25—27.

§ 3. Twierdzenie 8 rozdziału III A, oraz 7 rozdziału VA przedstawiają funkcjonalnie t. zw. zasadę zagęszczania osobliwości. Wyjaśnimy to na paru przykładach [1]).

Niechaj $\{g_k(t)\}$ będzie ciągiem ortogonalnym, unormowanym funkcyj całkowalnych wraz z kwadratem w przedziale $< 0,1 >$. Jeżeli $x(t)$ jest funkcją całkowalną w przedziale $< 0,1 >$, wówczas szereg

$$\sum_{k=1}^{\infty} g_k(t) \int_0^1 g_k(s)\, x(s)\, ds$$

nazywa się rozwinięciem funkcji $x(t)$ wedle ciągu $\{g_k(t)\}$, o ile oczywiście istnieją całki $\int_0^1 g_k(s)\, x(s)\, ds \quad (k = 1, 2, \ldots)$.

a) *Jeżeli dla każdego punktu t_p pewnego ciągu przeliczalnego $\{t_p\}$ punktów przedziału $< 0,1 >$ istnieje funkcja ciągła $x_p(t)$, której rozwinięcie jest w punkcie t_p rozbieżne (wzgl. rozwinięcie dla t_p jest nieograniczone), wówczas istnieje funkcja $x(t)$, której rozwinięcie jest dla każdego punktu t_p rozbieżne (wzgl. której rozwinięcie jest w każdym punkcie t_p nieograniczone).*

Dowód wynika z twierdzenia 8 rozdziału IIIA oraz 7 rozdziału VA, jeżeli przyjmiemy

$$U_{pq}(x) = \sum_{k=1}^{q} g_k(t_p) \int_0^1 g_k(s)\, x(s)\, ds$$

i wyrażenia $U_{pq}(x)$ uważać będziemy za funkcjonały linjowe w przestrzeni funkcyj ciągłych.

b) *Jeżeli dla każdego przedziału $< \alpha_p, \beta_p >$ pewnej rodziny przeliczalnej przedziałów odcinka $< 0,1 >$ istnieje funkcja całko-*

[1]) Zob. pracę cytowaną na str. 40.

walna $x_p(t)$, której rozwinięcie ma własność

$$\overline{\lim_{n\to\infty}} \int_{\alpha_p}^{\beta_p} |s_n(t)|\, dt = \infty, \quad \textit{gdzie} \quad s_n(t) = \sum_{k=1}^{n} g_k(t) \int_0^1 g_k(t)\, x_p(t)\, dt,$$

wówczas istnieje funkcja $x(t)$ całkowalna, posiadającą powyższą własność dla wszystkich jednocześnie przedziałów powyższej rodziny.

D o w ó d opiera się na twierdzeniu 7 rozdziału VA; wystarczy przyjąć

$$U_{pq}(x) = \sum_{k=1}^{q} g_k(t) \int_0^1 g_k(t)\, x(t)\, dt \qquad (\alpha_p \leqslant t \leqslant \beta_p)$$

i wyrażenia U_{pq} uważać za operacje linjowe, określone w przestrzeni funkcyj całkowalnych przedziału $<0,1>$, których przeciwdziedziny mieszczą się w przestrzeni funkcyj całkowalnych w przedziale $<\alpha_p, \beta_p>$.

Uwaga. Jeżeli punkty o spółrzędnych (α_p, β_p) tworzą zbiór wszędziegęsty w kwadracie $<0,1; 0,1>$, wówczas powyższa własność zachodzi dla każdego odcinka $<\alpha, \beta>$ przedziału $<0,1>$.

Opierając się na tej uwadze, można udowodnić dla szeregów F o u r i e r'a *istnienie funkcji całkowalnej $x(t)$, dla której*

$$\overline{\lim_{n\to\infty}} \left| \int_{\alpha}^{\beta} s_n(t)\, dt \right| = +\infty$$

w każdym podprzedziale przedziału $(0,2\pi)$.

§ 4. Niech dana będzie tablica nieskończona liczb

$$(A) \qquad \begin{matrix} a_{1,1}, & a_{1,2}, & \dots \\ a_{2,1}, & a_{2,2}, & \dots \\ \cdot & \cdot & \cdot \end{matrix}$$

Jeśli dla danego ciągu liczb $x = \{\xi_k\}$ każdy z szeregów $\sum_{k=1}^{\infty} a_{i,k}\, \xi_k$ jest zbieżny i ciąg ich sum $\{A_i(x)\}$ jest także zbieżny (*do* $A\,(x)$), wówczas mówimy, że ciąg x jest *sumowalny metodą A odpowiadającą tablicy (A)*, lub krótko *metodą A* (*do* $A\,(x)$).

O metodzie A mówimy, że jest *zachowawcza*, jeśli każdy ciąg zbieżny jest sumowalny tą metodą do swej granicy.

Twierdzenie 1. *Na to, by metoda A była zachowawcza; konieczne jest i wystarcza, by spełnione były warunki*

$$1)\qquad \sum_{k=1}^{\infty} |a_{i,k}| \leqslant M \qquad (i = 1, 2, \ldots),$$

$$2)\qquad \lim_{i\to\infty} a_{i,k} = 0 \qquad (k = 1, 2, \ldots),$$

$$3)\qquad \lim_{i\to\infty} \sum_{k=1}^{\infty} a_{i,k} = 1\,.$$

D o w ó d [1]). Warunki są k o n i e c z n e. Dla każdego ciągu zbieżnego $x = \{\xi_k\}$ oraz każdego i, szereg $\sum\limits_{k=1}^{\infty} a_{i,k}\,\xi_k$ jest zbieżny; wobec wyniku uzyskanego w § 2 szereg $\sum\limits_{k=1}^{\infty} a_{i,k}$ jest temsamem bezwzględnie zbieżny. Określone więc w przestrzeni (c) funkcjonały $A_i\,(x)$ są linjowe, ponieważ zaś ciąg ich jest zbieżny, przeto z twierdzenia 5 rozdziału VA wynika konieczność warunku 1.

Niech teraz $\xi_i^{(0)} = 1 \quad (i = 1, 2, \ldots)$, $\xi_i^{(n)} = 0$ dla $i \neq n$, $\xi_n^{(n)} = 1 \quad (i, n = 1, 2, \ldots)$, i niech x_n oznacza ciąg $\{\xi_i^{(n)}\}$ $(n = 0, 1, \ldots)$. Ponieważ $A_i\,(x_0) = \sum\limits_{k=1}^{\infty} a_{i,k}$, $A_i\,(x_n) = a_{i,n}$ dla $n > 0$ $(i = 1, 2, \ldots)$, widać więc, że spełnione są warunki 2 i 3, bowiem

[1]) Twierdzenie to znalazł p. O. T o e p l i t z. Zob.: O. T o e p l i t z, Über allgemeine lineare Mittelbildungen, Prace mat.-fiz. XXII, (1911), p. 113—119.

$A(x_0) = 1$, $A(x_n) = 0$ dla $n > 0$. Wystarczalność podanych warunków wynika łatwo z uwagi, że ciąg określony powyżej $\{x_n\}$ jest w przestrzeni (c) zupełny.

Lemmat 1. *Niech A będzie metodą zachowawczą oraz $\{\eta_i^{(0)}\}$ ciągiem zbieżnym. Jeśli dla każdego ciągu $\{\alpha_i\}$ warunki $\sum_{i=1}^{\infty} |\alpha_i| < +\infty$, $\sum_{i=1}^{\infty} \alpha_i a_{i,k} = 0$ $(k = 1, 2, \ldots)$ pociągają za sobą $\sum_{i=1}^{\infty} \alpha_i \eta_i^{(0)} = 0$, wówczas dla każdej liczby $\varepsilon > 0$ istnieje ciąg zbieżny x taki, że*

$$|A_i(x) - \eta_i^{(0)}| < \varepsilon \qquad (i = 1, 2, \ldots).$$

D o w ó d. Niech G oznacza zbiór tych ciągów zbieżnych $\{\eta_i\}$, którym odpowiadają ciągi zbieżne x, takie, że $\eta_i = A_i(x)$ $(i=1,2,\ldots)$. Zbiór G stanowi oczywiście przestrzeń wektorjalną (rozpatrujemy go w przestrzeni (c)). Jeżeli $y_0 = \{\eta_i^{(0)}\}$ nie jest punktem skupienia zbioru G, wówczas, jak wynika z lemmatu do twierdzenia 6 rozdziału IVA, istnieje w (c) funkcjonał linjowy $f(y)$ taki, że

$$f(y) = 0 \quad \text{dla} \quad y \subset G, \qquad f(y_0) = 1. \tag{1}$$

Z uwagi na ogólną postać funkcjonałów linjowych w (c) istnieje tedy ciąg liczb $\{\alpha_i\}$ taki, że szereg $\sum_{i=1}^{\infty} \alpha_i$ jest bezwzględnie zbieżny oraz

$$\sum_{i=1}^{\infty} \alpha_i \eta_i + \alpha \lim_{i\to\infty} \eta_i = 0 \quad \text{dla} \quad \{\eta_i\} \subset G, \tag{2}$$

$$\sum_{i=1}^{\infty} \alpha_i \eta_i^{(0)} + \alpha \lim_{i\to\infty} \eta_i^{(0)} = 1. \tag{3}$$

Ponieważ metoda A jest zachowawcza, przeto z (2) dostajemy

$$\sum_{i=1}^{\infty} \alpha_i A_i(x) + \alpha \lim_{k\to\infty} \xi_k = 0, \quad \text{jeśli} \quad x = \{\xi_k\} \subset (c). \tag{4}$$

Na mocy twierdzenia 1 istnieje liczba M taka, że

$$\sum_{k=1}^{\infty} |a_{i,k}| \leqslant M \qquad (i = 1, 2, \ldots), \text{ zatem}$$

$$\sum_{i=1}^{\infty} \sum_{k=1}^{\infty} |\alpha_i| \, |a_{i,k}| \, |\xi_k| \leqslant M \sum_{i=1}^{\infty} |\alpha_i| \, \|x\|. \tag{5}$$

Z (5) dostajemy

$$\sum_{i=1}^{\infty} \alpha_i A_i(x) = \sum_{k=1}^{\infty} \xi_k \sum_{i=1}^{\infty} \alpha_i a_{i,k}. \tag{6}$$

Przyjmując, dla ustalonej liczby naturalnej n, $\xi_n = 1$, oraz $\xi_k = 0$ jeśli $k \neq n$, mamy z uwagi na (4),

$$\sum_{i=1}^{\infty} \alpha_i a_{i,n} = 0 \qquad (n = 1, 2, \ldots). \tag{7}$$

Przyjmując dalej $\xi_k = 1$ $(k = 1, 2, \ldots)$, dostajemy z (4), (6) i (7 $\alpha = 0$, i temsamem, z uwagi na (3),

$$\sum_{i=1}^{\infty} \alpha_i \eta_i^{(0)} = 1,$$

co wobec (7), sprzeczne jest z założeniem.

Lemmat 2. *Jeśli* $x_0 = \{\xi_k^{(0)}\}$ *jest ciągiem ograniczonym, sumowalnym metodą zachowawczą* A, *wówczas dla każdej liczby* $\varepsilon > 0$ *istnieje ciąg zbieżny* x *taki, że*

$$|A_i(x) - A_i(x_0)| < \varepsilon \qquad (i = 1, 2, \ldots).$$

D o w ó d. Niech

$$\eta_i^{(0)} = A_i(x_0) \qquad (i = 1, 2, \ldots), \tag{1}$$

i niech $\{\alpha_i\}$ oznacza dowolny ciąg, spełniający warunki

$$\sum_{i=1}^{\infty} |\alpha_i| < +\infty, \qquad \sum_{i=1}^{\infty} \alpha_i a_{i,k} = 0 \quad (k = 1, 2, \ldots). \tag{2}$$

Z uwagi na (1)

$$\sum_{i=1}^{\infty} \alpha_i \eta_i^{(0)} = \sum_{i=1}^{\infty} \alpha_i A_i(x_0); \tag{3}$$

A jest metodą zachowawczą, istnieje więc pewna liczba M taka, iż

$$\sum_{k=1}^{\infty} |a_{i,k}| \leqslant M \qquad (i = 1, 2, \ldots, n),$$

i temsamem

$$\sum_{i=1}^{\infty} \sum_{k=1}^{\infty} |\alpha_i|\,|a_{i,k}|\,|\xi_k^{(0)}| \leqslant M \,.\, \sum_{i=1}^{\infty} |\alpha_i| \,.\, \text{kres górny}_{k=1,2,\ldots} |\xi_k^{(0)}|,$$

skąd, zważywszy na (3),

$$\sum_{i=1}^{\infty} \alpha_i \eta_i^{(0)} = \sum_{k=1}^{\infty} \xi_k^{(0)} \sum_{i=1}^{\infty} \alpha_i a_{i,k}$$

i, w myśl (2),

$$\sum_{i=1}^{\infty} \alpha_i \eta_i^{(0)} = 0.$$

Lemmat nasz wynika tedy natychmiast z lemmatu poprzedniego.

Lemmat 3. *Jeśli A jest metodą zachowawczą i warunki*

$$\sum_{i=1}^{\infty} |\alpha_i| < +\infty, \qquad \sum_{i=1}^{\infty} \alpha_i a_{i,k} = 0 \qquad (k = 1, 2, \ldots)$$

pociągają za sobą $\alpha_i = 0$ $(i = 1, 2, \ldots)$, wówczas, dla każdego ciągu zbieżnego $\{\eta_i^{(0)}\}$ i każdej liczby $\varepsilon > 0$, istnieje ciąg zbieżny x taki, iż

$$|A_i(x) - \eta_i^{(0)}| < \varepsilon \qquad (i = 1, 2, \ldots).$$

D o w ó d — natychmiastowy wobec lemmatu 1.

Metodę A nazywamy *odwracalną*, jeśli każdemu ciągowi zbieżnemu $\{\eta_i\}$ odpowiada dokładnie jeden ciąg x (zbieżny, lub nie), dla którego $A_i(x) = \eta_i$ $(i = 1, 2, \ldots)$. Powiadamy, że metoda B, odpowiadająca tablicy

$$
(B) \quad \begin{array}{lll} b_{1,1}, & b_{1,2}, & \ldots \\ b_{2,1}, & b_{2,2}, & \ldots \\ \ldots & \ldots & \ldots \end{array}
$$

jest *niesłabsza* od metody A, jeśli każdy ciąg sumowalny metodą A jest również sumowalny metodą B.

Lemmat 4. *Jeśli x_0 jest ciągiem sumowalnym metodą zachowawczą i odwracalną A i jeśli dla każdej liczby $\varepsilon > 0$ istnieje ciąg zbieżny x, taki, iż*

$$
|A_i(x) - A_i(x_0)| < \varepsilon \qquad (i = 1, 2, \ldots),
$$

wówczas ciąg x_0 jest sumowalny każdą metodą zachowawczą B, niesłabszą od A, do tej samej liczby.

Dowód. Metoda A jest odwracalna, na mocy przeto twierdzenia, udowodnionego w § 5 (uwaga) rozdziału IIIA istnieje tablica

$$
\begin{array}{lll} \alpha_{1,1}, & \alpha_{1,2}, & \ldots \\ \alpha_{2,1}, & \alpha_{2,2}, & \ldots \\ \ldots & \ldots & \ldots \end{array}
$$

oraz ciąg $\{\alpha_i\}$ o własnościach następujących:

a) $\displaystyle\sum_{i=1}^{\infty} |\alpha_{i,k}| < +\infty \qquad (k = 1, 2, \ldots);$

b) jeśli, dla ciągu zbieżnego $y = \{\eta_i\}$, przyjmiemy

$$
\xi_k = f_k(y) = \sum_{i=1}^{\infty} \alpha_{i,k}\,\eta_i + \alpha_k \lim_{i\to\infty} \eta_i \qquad (k = 1, 2, \ldots),
$$

wówczas

$$\sum_{k=1}^{\infty} a_{i,k}\, \xi_k = \eta_i .$$

Określone w przestrzeni (c) funkcjonały $f_k(y)$ są linjowe.

Dla każdego ciągu zbieżnego y ciąg odpowiedni $x = \{\xi_k\}$ jest, w myśl założenia, sumowalny metodą B, a więc każdy z szeregów $\sum_{k=1}^{\infty} b_{i,k}\,\xi_k$ jest zbieżny i ciąg ich sum $\{B_i(x)\}$ jest zbieżny.

Niech teraz, dla $y \subset (c)$,

$$F_i(y) = \sum_{k=1}^{\infty} b_{i,k}\, f_k(y) \quad (i = 1, 2, \ldots), \quad F(y) = \lim_{i\to\infty} F_i(y);$$

widzimy, że funkcjonały $F_i(y)$ są linjowe, tę samą własność ma więc także funkcjonał $F(y)$.

Niech x_0 będzie dowolnym ciągiem, spełniającym warunki założenia, oraz ε — liczbą > 0. Istnieje ciąg zbieżny x, taki, że

$$|A_i(x) - A_i(x_0)| < \varepsilon \quad (i = 1, 2, \ldots). \tag{2}$$

Przyjmując $y_0 = \{A_i(x_0)\}$, $y = \{A_i(x)\}$ mamy $y_0, y \subset (c)$ oraz $\|y - y_0\| \leqslant \varepsilon$; temsamem

$$|F(y) - F(y_0)| \leqslant |F|\,\varepsilon . \tag{3}$$

Ponieważ $A(x) = B(x)$, przeto

$$|A(x_0) - B(x_0)| \leqslant |A(x_0) - A(x)| + |B(x) - B(x_0)|,$$

i z (2), (3) dostajemy

$$|A(x_0) - B(x_0)| \leqslant |F| . \varepsilon + \varepsilon ,$$

skąd oczywiście wynika, iż $A(x_0) = B(x_0)$, o co chodziło.

Twierdzenie 2. *Jeśli metoda zachowawcza B jest niesłabsza od metody zachowawczej i odwracalnej A, wówczas każdy ciąg ograniczony sumowalny metodą A jest sumowalny metodą B do tej samej liczby.*

D o w ó d [1]) opiera się na lemmatach 2 i 4.

Nazwiemy daną metodę A *doskonałą*, jeśli jest zachowawcza, odwracalna oraz, jeśli dla każdego ciągu $\{\alpha_i\}$ warunki

$$\sum_{i=1}^{\infty} |\alpha_i| < +\infty, \qquad \sum_{i=1}^{\infty} \alpha_i \, a_{i,k} = 0 \qquad (k = 1, 2, \ldots)$$

pociągają za sobą $\alpha_i = 0$ $(i = 1, 2, \ldots)$. Wobec lemmatów 3 i 4 dostajemy [2])

Twierdzenie 3. *Jeśli A jest metodą doskonałą, a B metodą zachowawczą niesłabszą od A, wówczas każdy ciąg sumowalny metodą A jest sumowalny metodą B do tej samej liczby.*

---

[1]) Dla specjalnej klasy metod odwracalnych, a mianowicie t. zw. metod normalnych, znalazł to twierdzenie p. S. M a z u r. Zob.: S. M a z u r, Über lineare Limitierungsverfahren, Math. Zeitschr. 28 (1928) p. 599—611, Satz VII.

[2]) Dla metod normalnych zob.: S. M a z u r, Uber eine Anwendung der Theorie der Operationen bei der Untersuchung der Toeplitzschen Limitierungsverfahren, Stud. Math. II (1930) p.

ROZDZIAŁ VI A.

Operacje pełnociągłe i stowarzyszone.

Ciągi biortogonalne.

§ **1.** Zajmiemy się klasą t. zw. operacyj pełnociągłych (linjowych) w przestrzeniach typu (B).

Lemmat 1. *Każdy zbiór zwarty jest ośrodkowy.*

Dowód. Niech G będzie zbiorem zwartym; udowodnimy, że jest ośrodkowy, t. j. iż posiada część przeliczalną wszędziegęstą.

Niechaj $x_1 \subset G$ i niech x_n $(n > 1)$ oznacza element, spełniający warunki:

a) $x_n \subset G$,

b) jeżeli $x \subset G$, wówczas $d \leqslant 2 d_n$, gdzie d, wzgl. d_n, oznacza odległość elementu x, wzgl. x_n, od zbioru $(x_1, x_2, \ldots x_{n-1})$.

Ciąg $\{x_n\}$ jest wszędziegęsty w G. Gdyby bowiem istniał element $x \subset G$ taki, że

$$|x - x_n| \geqslant \alpha > 0 \qquad (n = 1, 2, \ldots),$$

wówczas mielibyśmy, na mocy b), dla każdego p, q,

$$|x_p - x_q| \geqslant \frac{1}{2} \alpha,$$

co jest niemożliwe, gdyż z ciągu $\{x_n\}$ daje się wyrwać ciąg zbieżny.

D e f i n i c j a. Operacja $U(x)$ linjowa nazywa się *pełnociągła*, jeżeli każdy zbiór ograniczony przekształca na zbiór zwarty.

Przykład: jeżeli X_i $(i = 1, 2, \dots n)$ są funkcjonałami linjowemi, a x_i $(i = 1, 2, \dots n)$ — elementami, wówczas operacja

$$U(x) = \sum_{i=1}^{n} X_i(x)\, x_i$$

jest operacją pełnociągłą

Twierdzenie 1. *Przeciwdziedzina operacji $U(x)$ pełnociągłej jest zbiorem ośrodkowym.*

D o w ó d. Oznaczmy przez K_n zbiór wszystkich elementów $U(x)$ dla $|x| \leqslant n$.

Zbiór K_n jest zwarty, zatem na mocy lemmatu jest ośrodkowy. Temsamem jednak ośrodkowy jest również zbiór $\sum_{n=1}^{\infty} K_n$, t. j. przeciwdziedzina operacji U.

Twierdzenie 2. *Jeżeli $\{U_n(x)\}$ jest ciągiem operacyj linjowych pełnociągłych i jeżeli dla pewnej operacji linjowej $U(x)$ zachodzi*

$$\lim_{n\to\infty} |U_n - U| = 0,$$

wówczas $U(x)$ jest również operacją pełnociągłą.

D o w ó d. Niechaj ciąg $\{x_i\}$ będzie ciągiem ograniczonym. Metodą przekątni łatwo można wyjąć z ciągu $\{x_i\}$ ciąg częściowy $\{\bar{x}_i\}$, tak, by dla każdego n istniała granica $\lim\limits_{i\to\infty} U_n(\bar{x}_i)$

Mamy, dla każdego n,

$$|U(\bar{x}_p) - U(\bar{x}_q)| = |U(\bar{x}_p) - U_n(\bar{x}_p)| + |U_n(\bar{x}_p) - U_n(\bar{x}_q)| + \\ + |U_n(\bar{x}_q) - U(\bar{x}_q)|,$$

a zatem

$$|U(\bar{x}_p) - U(\bar{x}_q)| \leqslant |U - U_n| \, [\,|\bar{x}_p| + |\bar{x}_q|\,] + |U_n(\bar{x}_p) - U_n(\bar{x}_q)|,$$

skąd oczywiście

$$\overline{\lim_{p,q\to\infty}} |U(\bar{x}_p) - U(\bar{x}_q)| = 0.$$

Ciąg $U(\bar{x}_i)$ jest tedy zbieżny, a więc operacja $U(x)$ jest pełnociągła.

§ 2. Jeżeli $K(s,t)$ jest funkcją ciągłą dla $0 \leqslant s, t \leqslant 1$, wówczas wyrażenie

$$y(s) = \int_0^1 K(s,t)\, x(t)\, dt \tag{1}$$

jest funkcją ciągłą zmiennej s dla każdej funkcji $x(t)$ całkowalnej. Jeżeli wyrażenie (1) uważać będziemy za operację, której dziedziną jest jedna z przestrzeni (C), $(L^{(r)})$, (L), (M), a przeciwdziedzinę uważać będziemy za część tej samej przestrzeni lub innej z wyżej wymienionych, wówczas łatwo udowodnimy, że operacja (1) jest pełnociągła.

Dowód opiera się na znanem twierdzeniu Arzeli:

Warunkiem wystarczającym na to, aby z ciągu funkcyj ciągłych $\{y_n(t)\}$ *dał się wyrwać ciąg jednostajnie zbieżny, jest to, by dla każdej liczby* $\varepsilon > 0$ *istniała liczba* $\eta > 0$ *taka, że jeżeli* $|t' - t''| < \eta$, *wówczas*

$$|y_n(t') - y_n(t'')| \leqslant \varepsilon \qquad (n = 1, 2, \ldots).$$

Przypuśćmy, że $\|x_n(t)\| \leqslant 1$, i niech w przedziale $<0,1>$ zmiennej s

$$y_n(s) = \int_0^1 K(s,t)\, x_n(t)\, dt.$$

Ponieważ $K(s,t)$ jest funkcją ciągłą, zatem każdej liczbie $\varepsilon > 0$ odpowiada taka liczba η, że nierówność $|s_1 - s_2| < \eta$ pociąga za sobą $|K(s_1,t) - K(s_2,t)| \leqslant \varepsilon$ dla $0 \leqslant t \leqslant 1$.

Zatem:

$$|y_n(s_1) - y_n(s_2)| \leqslant \left| \int_0^1 \{K(s_1,t) - K(s_2,t)\}\, x_n(t)\, dt \right| \leqslant$$

$$\leqslant \varepsilon \int_0^1 |x_n(t)|\, dt. \tag{2}$$

Można łatwo sprawdzić, że w przestrzeniach (C), $(L^{(r)})$, (L), (M) mamy zawsze

$$\int_0^1 |x_n(t)|\, dt \leqslant \|x_n\|.$$

Stąd, na mocy (2),

$$|y_n(s_1) - y_n(s_2)| \leqslant \varepsilon,$$

i na mocy wspomnianego wyżej twierdzenia Arzeli wyjąć możemy z ciągu $\{y_n(s)\}$ ciąg jednostajnie zbieżny. Ponieważ zaś ciąg jednostajnie zbieżny funkcyj ciągłych w przestrzeniach (C), $(L^{(r)})$, (L), (M) jest również zbieżny wedle normy ustalonej w tej przestrzeni, przeto udowodniliśmy temsamem, że operacja (1) jest pełnociągła.

Przestrzeń (C). Aby operacja (1) była pełnociągła w (C) wystarczy założyć, że dla każdego s_0 zachodzi

$$\lim_{s \to s_0} \int_0^1 |K(s_0, t) - K(s, t)|\, dt = 0. \tag{3}$$

Łatwo bowiem z warunku (3) wynika, że dla każdej liczby $\varepsilon > 0$ istnieje taka liczba $\eta > 0$, że, jeżeli $|s_1 - s_2| \leqslant \eta$, wówczas

$$\int_0^1 |K(s_1, t) - K(s_2, t)|\, dt \leqslant \varepsilon.$$

Stąd podobnie, jak poprzednio, wynika łatwo, że operacja (1) jest w (C) pełnociągła.

Warunek (3) jest spełniony np., jeżeli $K(s, t)$ jest funkcją ograniczoną i jeżeli dla każdego s_0 zachodzi

$$\lim_{s \to s_0} K(s, t) = K(s_0, t) \quad \text{dla prawie każdego } t.$$

Operacja

$$y(s) = \int_0^s K(s, t)\, x(t)\, dt$$

jest operacją pełnociągłą, jeżeli $K(s, t)$ spełnia warunek (3).

Przestrzeń $(L^{(p)})$. Niech $K(s,t)$ będzie funkcją mierzalną dla $0 \leqslant s,t \leqslant 1$, a r niech oznacza mniejszą z dwu liczb $p, \dfrac{q}{q-1}$ $(p>1,\ q>1)$. Wówczas, jeżeli

$$\int_0^1 \int_0^1 |K(s,t)|^{\frac{r}{r-1}}\, ds\, dt < +\infty,$$

operacja (1) jest pełnociągła dla $x \subset (L^{(p)})$, a przeciwdziedzina jej mieści się w $(L^{(q)})$.

Dowód. Niechaj $\{K_n(s,t)\}$ oznacza ciąg funkcyj ciągłych, przyczem niech

$$\lim_{n\to\infty} \int_0^1 \int_0^1 |K_n(s,t) - K(s,t)|^{\frac{r}{r-1}}\, ds\, dt = 0. \tag{4}$$

Ponieważ operacja

$$y = U_n(x) = \int_0^1 K_n(s,t)\, x(t)\, dt$$

jest operacją pełnociągłą dla $x \subset (L^{(p)})$, $y \subset (L^{(q)})$, zatem

$$\| U_n(x) - U(x) \|^q \leqslant \int_0^1 \left| \int_0^1 (K_n - K)\, x(t)\, dt \right|^q ds \leqslant$$

$$\leqslant \left\{ \int_0^1 ds \left[\int_0^1 |K_n - K|^{\frac{r}{r-1}} dt \right]^{\frac{q(r-1)}{r}} \right\} \left\{ \int_0^1 |x(t)|^r dt \right\}^{\frac{q}{r}}.$$

Ponieważ $r \leqslant p$, więc $\displaystyle\int_0^1 |x(t)|^r dt \leqslant \left(\int_0^1 |x(t)|^p dt \right)^{\frac{r}{p}}$;

ponieważ dalej $r \leqslant \dfrac{q}{q-1}$, więc $\dfrac{q(r-1)}{r} \leqslant 1$, zatem

$$\| U_n(x) - U(x) \|^q \leqslant \left\{ \int_0^1 \int_0^1 |K_n - K|^{\frac{r}{r-1}} dt\, ds \right\}^{\frac{q(r-1)}{r}} \| x \|^q$$

czyli

$$\| U_n - U \| \leqslant \left\{ \int_0^1 \int_0^1 | K_n - K |^{\frac{r}{r-1}} ds\, dt \right\}^{\frac{r-1}{r}}.$$

Stąd na mocy (4)

$$\lim_{n \to \infty} \| U_n - U \| = 0,$$

i operacja $y = \int_0^1 K(s,t)\, x(t)\, dt$ jest pełnociągła przy $y \subset (L^{(q)})$.

Uwaga. Z poprzedniego wynika, przyjmując $p = q = 2$, że, jeżeli

$$\int_0^1 \int_0^1 K^2(s,t)\, ds\, dt < +\infty,$$

wówczas operacja

$$y = \int_0^1 K(s,t)\, x(t)\, dt$$

jest pełnociągła przy $x \subset (L^{(2)})$, $y \subset (L^{(2)})$.

§ 3. Niechaj $y = U(x)$ będzie operacją linjową, określoną w E, przyczem przeciwdziedzina jej niechaj mieści się w E_1. O przestrzeniach E i E_1 zakładamy, jak zwykle, że są typu (B).

Funkcjonały linjowe, określone w E, oznaczać będziemy literą X, określone w E_1 — literą Y.

Weźmy pod uwagę wyrażenie

$$Y\, U(x), \tag{1}$$

gdzie Y jest dowolnym funkcjonałem określonym w E_1.

Wyrażenie (1) możemy oczywiście uważać jako funkcjonał określony w E.

Niech

$$X(x) = Y\, U(x).$$

Funkcjonał X jest addytywny i ciągły. Mamy bowiem

$$|X(x)| \leqslant |YU(x)| \leqslant |Y|\,|U|\,|x|,$$

skąd

$$|X| \leqslant |Y|\,|U|. \tag{2}$$

Związek między X oraz Y jest nową operacją

$$X = \overline{U}(Y).$$

Dziedziną jej jest zbiór funkcjonałów linjowych, określonych w E_1, przeciwdziedzina zaś mieści się w zbiorze funkcjonałów, określonych w E.

Operacja ta jest wreszcie addytywna i ciągła, jak to wynika ze związku (2).

Operację $\overline{U}(Y)$ nazywamy operacją *stowarzyszoną* lub *sprzężoną* z operacją $U(x)$.

Twierdzenie 3. *Jeżeli $\overline{U}(Y)$ jest operacją stowarzyszoną z operacją linjową $U(x)$, wówczas*

$$|\overline{U}| = |U|. \tag{1}$$

D o w ó d. Mamy, dla każdego $x \subset E$,

$$|YU(x)| \leqslant |Y| . |U| . |x|,$$

skąd

$$|\overline{U}(Y)| = |YU| \leqslant |Y| . |U|,$$

a więc

$$|\overline{U}| \leqslant |U|. \tag{2}$$

Niech, z drugiej strony, x_0 będzie dowolnym elementem przestrzeni E. Istnieje, w myśl tw. 3 rozdz. IVA, funkcjonał Y_0, określony w przestrzeni E_1 taki, iż

$$|Y_0| = 1, \qquad |Y_0 U(x_0)| = |U(x_0)|.$$

Zatem

$$|U(x_0)| = |Y_0 U(x_0)| \leqslant |\overline{U}| . |Y_0| . |x_0| = |\overline{U}| . |x_0|,$$

skąd

$$|U(x_0)| \leqslant |\overline{U}| . |x_0|,$$

a więc

$$|U| \leqslant |\overline{U}|,$$

co, łącznie z (2), daje (1).

Twierdzenie 4. *Jeżeli operacja linjowa $U(x)$ jest pełnociągła, wówczas operacja sprzężona $\overline{U}(Y)$ jest również pełnociągła.*

[t. zn. jeżeli $|Y_n| < A$, wówczas istnieje taki ciąg $\{Y_{n_i}\}$ oraz funkcjonał X, że $\lim\limits_{i\to\infty} |U(Y_{n_i}) - X| = 0$].

D o w ó d. Ponieważ przeciwdziedzina operacji $U(x)$ ma część przeliczalną wszędziegęstą, przeto z ciągu funkcjonałów $\{Y_n\}$ ($|Y_n| < A$) można wyjąć ciąg częściowy $\{Y_{n_i}\}$ zbieżny dla każdego y, należącego do przeciwdziedziny operacji $U(x)$.

Niech zatem

$$\lim_{i\to\infty} Y_{n_i} U(x) = \lim_{i\to\infty} X_{n_i}(x) = X(x).$$

Niechaj x_i będzie elementem takim, że

$$|x_i| = 1, \qquad |X(x_i) - X_{n_i}(x_i)| \geqslant \tfrac{1}{2} |X - X_{n_i}|. \tag{1}$$

Gdyby istniała liczba $\alpha > 0$ taka, że $|X - X_{n_i}| > \alpha$ dla każdego i, wówczas mielibyśmy, na mocy (1),

$$|Y_i' U(x_i) - \lim_{i\to\infty} Y_i' U(x_i)| \geqslant \tfrac{1}{2}\alpha, \quad \text{gdzie } Y_i' = Y_{n_i}. \tag{2}$$

Ponieważ $|x_i| = 1$, istnieje więc ciąg wskaźników k_i taki, że $\lim\limits_{i\to\infty} U(x_{k_i}) = y_0$. Zatem, jeżeli $\varepsilon > 0$, wówczas dla $i > N$,

$$|y_0 - U(x_{k_i})| < \varepsilon \quad \text{i} \quad |Y_{k_i}'(y_0) - \lim_{i\to\infty} Y_{k_i}'(y_0)| < \varepsilon.$$

Mamy więc, dla $i > N$,

$$|Y_{k_i}' U(x_{k_i}) - \lim_{i\to\infty} Y_{k_i}' U(x_{k_i})| \leqslant |Y_{k_i}' [U(x_{k_i}) - y_0]| + |Y_{k_i}'(y_0) -$$

$$- \lim_{i\to\infty} Y_{k_i}'(y_0)| + |\lim_{i\to\infty} Y_{k_i}' [U(x_{k_i}) - y_0]| \leqslant A\varepsilon + \varepsilon + A\varepsilon,$$

co wobec dowolności liczby $\varepsilon > 0$ sprzeczne jest z (2).

§ 4. *Przestrzeń* (C). Jeżeli $K(s,t)$ jest funkcją ciągłą dla $0 \leqslant s, t \leqslant 1$, wówczas wyrażenie

$$\int_0^1 K(s,t)\, x(t)\, dt = U(x) \tag{1}$$

jest operacją ciągłą.

Niech $Y(y)$ $[y \subset (C)]$ będzie dowolnym funkcjonałem linjowym w (C), a więc, w myśl § 4 rozdz. IVA, postaci

$$Y(y) = \int_0^1 y(t)\, d\, Y(t),$$

gdzie $Y(t)$ jest pewną funkcją o wahaniu ograniczonem,—i niech

$$X(x) = Y\, U(x).$$

Funkcjonał $X(x)$ jest również linjowy w (C), a więc jest także postaci

$$X(x) = \int_0^1 x(t)\, d\, X(t), \tag{1}$$

gdzie $X(t)$ jest znowuż pewną funkcją o wahaniu ograniczonem. Przyjmując zatem

$$y(s) = U(x) = \int_0^1 K(s,t)\, x(t)\, dt, \tag{2}$$

mamy, dla każdej funkcji $x(t) \subset (C)$,

$$\int_0^1 x(s)\, d\, X(s) = \int_0^1 y(s)\, d\, Y(s). \tag{3}$$

Niech $x_{u,n}(s)$ oznacza funkcję równą 1 w przedziale $(0, u)$, zeru — w przedziale $\left(u + \dfrac{1}{n}, 1\right)$, oraz linjową — w przedziale

$(u, u + \frac{1}{n})$. Podstawiając tę funkcję zamiast $x(s)$ w (2) i (3), otrzymujemy

$$\int_0^1 x_{u,n}(s)\, dX(s) = \int_0^1 \left[\int_0^1 K(s,t)\, x_{u,n}(t)\, dt \right] dY(s)$$

$$= \int_0^1 x_{u,n}(t) \left[\int_0^1 K(s,t)\, dY(s) \right] dt\ ^{1)}$$

i przechodząc do granicy, gdy $n \to \infty$, mamy w każdym punkcie u, w którym funkcja $X(s)$ jest ciągła — a więc w każdym punkcie przedziału $< 0{,}1 >$ z wyjątkiem conajwyżej przeliczalnej mnogości punktów —

---

[1]) Korzystamy tu z twierdzenia „o przemienności całkowania" dla całek wielokrotnych Stieltjesa funkcji ciągłej. Twierdzenie to formułujemy, jak następuje: *jeśli* $F(s,t)$ *jest funkcją ciągłą w kwadracie* $K = < 0{,}1;\ 0{,}1 >$, $g(t)$, $h(t)$ *są funkcjami o wahaniu ograniczonem w przedziale* $< 0, 1 >$, *wówczas*

$$\iint_K F(s,t)\, dg(s)\, dh(t) = \int_0^1 \left[\int_0^1 F(s,t)\, dg(s) \right] dh(t) =$$

$$= \int_0^1 \left[\int_0^1 F(s,t)\, dh(t) \right] dg(s).$$

Pierwszą („powierzchniową") z trzech powyższych całek należy rozumieć jako granicę sum postaci

$$\sum_{i=0}^{n} \sum_{j=0}^{m} F(s_i', t_j') \left[g(s_{i+1}) - g(s_i) \right] \left[h(t_{j+1}) - h(t_i) \right]$$

(gdzie: $0 = t_0 < t_1 < \ldots < t_{n+1} = 1$, $\quad 0 = s_0 < s_1 < \ldots < s_{m+1} = 1$, s_i', wzgl. t_j', są dowolnemi punktami przedziału $< s_i, s_{i+1} >$, wzgl. $< t_j, t_{j+1} >$), gdy długość największego z przedziałów $< s_i, s_{i+1} >$, $< t_j, t_{j+1} >$ dąży do zera. Dowód twierdzenia „o przemienności całkowania" dla całki Stieltjesa jest identyczny z dowodem analogicznego twierdzenia dla całki Riemanna.

$$X(u) = \int_0^u \left[\int_0^1 K(s,t)\, dY(s) \right] dt; \tag{4}$$

ponieważ jednak wartość całki Stieltjesa (1) nie ulega zmianie, jeśli wartość funkcji $X(t)$ zmienić w conajwyżej przeliczalnej mnogości punktów (por. § 1 rozdz. IV B), przeto przyjąć można, iż funkcja $X(u)$ określona jest przez wzór (4) w *całym* przedziale $< 0,1 >$, a — temsamem — iż jest ciągła.

Wyrażenie (4) uważać tedy możemy za przedstawienie operacji sprzężonej $\overline{U}(Y) = X$. Należy to tak rozumieć, że, jeżeli $Y(s)$ jest funkcją o wahaniu ograniczonem, reprezentującą funkcjonał linjowy $\int_0^1 y(s)\, dY(s)$, wówczas odpowiednia funkcja $X(s)$ o wahaniu ograniczonem (w naszym wypadku przytem ciągła) reprezentuje funkcjonał linjowy $\int_0^1 x(t)\, dX(t)$.

Dla operacji linjowej

$$U(x) = X(s) - \int_0^1 K(s,t)\, x(t)\, dt \qquad [K(s,t), \text{ j. w.}]$$

mamy

$$\overline{U}(Y) = Y(t) - \int_0^t dt \int_0^1 K(s,t)\, dY(s) = X(t).$$

Przestrzeń $(L^{(p)})$. Jeżeli $K(s,t)$ jest mierzalne dla $0 \leqslant s,t \leqslant 1$ i jeżeli

$$\int_0^1 \int_0^1 |K(s,t)\, x(t)\, y(s)|\, ds\, dt < +\infty$$

dla każdej pary $x(t) \subset (L^{(p)}), y(s) \subset (L^{\left(\frac{q}{q-1}\right)})$ $(p > 1,\ q > 1)$, wówczas operacja

$$U(x) = y(s) = \int_0^1 K(s,t)\, x(t)\, dt$$

jest operacją linjową dla $x \subset (L^{(p)})$, $y \subset (L^{(q)})$.

Funkcjonał linjowy Y w przestrzeni $(L^{(q)})$ jest kształtu

$$Y(y) = \int_0^1 Y(s)\, y(s)\, ds,$$

gdzie $Y(s)$ jest pewną funkcją należącą do $(L^{(p)})$.

Mamy

$$Y(y) = \int_0^1 Y(s)\, ds \int_0^1 K(s,t)\, x(t)\, dt = \int_0^1 x(t)\, dt \int_0^1 K(s,t)\, Y(s)\, ds.$$

Niech

$$X(t) = \int_0^1 K(s,t)\, Y(s)\, ds; \tag{1}$$

wówczas

$$\int_0^1 Y(s)\, y(s)\, ds = \int_0^1 X(t)\, x(t)\, dt. \tag{2}$$

Wyrażenie (1) uważać możemy za przedstawienie operacji sprzężonej $\overline{U}(Y) = X$.

Jeśli $p = q > 1$, wówczas dla operacji linjowej

$$U(x) = x(s) - \int_0^1 K(s,t)\, x(t)\, dt$$

operacja sprzężona ma kształt

$$X = \overline{U}(Y) = Y(t) - \int_0^1 K(s,t)\, Y(s)\, ds.$$

Uwaga. Poprzednie uwagi odnoszą się również do przestrzeni (L).

Jeżeli

$$\int_0^1 \int_0^1 |K(s,t)\, x(t)\, y(s)|\, ds\, dt < +\infty$$

dla $x \subset (L)$, $y \subset (M)$, wówczas wyrażenie

$$y = U(x) = \int_0^1 K(s,t)\, x(t)\, dt$$

jest operacją linjową przy $x \subset (L)$, $y \subset (L)$.

Operacja stowarzyszona ma postać

$$X = \overline{U}(Y) = \int_0^1 K(s,t)\, Y(s)\, ds,$$

gdzie $Y(s) \subset (M)$ reprezentuje funkcjonał linjowy

$$\int_0^1 Y(s)\, y(s)\, ds \qquad [y(s) \subset (L)],$$

podczas gdy $X(t) \subset (M)$ reprezentuje funkcjonał linjowy

$$\int_0^1 X(t)\, x(t)\, dt \qquad [x(t) \subset (L)].$$

Dla pary odpowiedniej X, Y oraz x, y mamy

$$\int_0^1 X(t)\, x(t)\, dt = \int_0^1 Y(s)\, y(s)\, ds\,.$$

§ 3. W dalszym ciągu korzystać będziemy wielokrotnie z twierdzenia następującego:

Jeżeli $\{x_n\}$ *jest ciągiem elementów przestrzeni E typu (B) takim, iż, dla każdego funkcjonału* $f(x)$ *w E,*

$$\limsup_{n\to\infty} |f(x_n)| < \infty, \tag{1}$$

wówczas również

$$\limsup_{n\to\infty} |x_n| < \infty \tag{2}$$

(t. zn. iż ciąg $\{x_n\}$ *jest ograniczony według normy).*

Dowód. Niech $\overline{E}$ będzie zbiorem funkcjonałów linjowych określonych w E. Zachowując zwykłą definicję normy funkcjonału, uważać możemy $\overline{E}$ za pewną przestrzeń (B). Określimy w przestrzeni tej ciąg funkcjonałów linjowych Φ_n, przyjmując dla każdego funkcjonału $f \subset \overline{E}$,

$$\Phi_n(f) = f(x_n).$$

W myśl (1) mamy dla każdego $f \subset \overline{E}$

$$\limsup_{n\to\infty} |\Phi_n(f)| < \infty,$$

a więc (rozdz. VA, twierdz. 5) istnieje taka liczba M, iż

$$|\Phi_n(f)| \leqslant M \cdot |f|. \tag{3}$$

Na mocy twierdzenia 3 rozdz. IVA istnieje dla każdego n taki funkcjonał linjowy $f_n(x)$ w przestrzeni E, iż

$$|f_n| = 1, \qquad |f_n(x_n)| = |x_n|.$$

Otrzymujemy tedy z (3), dla każdego n,

$$|x_n| = |f_n(x_n)| = |\Phi_n(f_n)| \leqslant M \cdot |f_n| = M,$$

skąd oczywiście wynika związek (2).

§ 4. Ciąg elementów $\{x_i\}$ i funkcjonałów linjowych $\{f_i\}$ nazywamy *biortogonalnym*, jeżeli spełnione są warunki

$$f_i(x_j) = \begin{cases} 1 & \text{dla } i = j \\ 0 & ,, \ i \neq j. \end{cases}$$

Jeżeli x jest dowolnym elementem, wówczas szereg

$$\sum_{i=1}^{\infty} x_i f_i(x)$$

nazywamy *rozwinięciem elementu x wedle ciągu biortogonalnego* $\{x_i\}$, $\{f_i\}$.

Jeżeli ciąg $\{f_i\}$ jest ciągiem pełnym i jeżeli szereg (1) jest dla pewnego elementu x zbieżny, wówczas x jest sumą tego szeregu. Mamy bowiem:

$$f_j\left[x - \sum_{i=1}^{\infty} x_i f_i(x)\right] = f_j(x) - f_j(x) = 0 \qquad (j = 1, 2, \ldots).$$

Twierdzenie 5. *Jeżeli szereg* $\sum_{i=1}^{\infty} x_i f_i(x)$ *jest dla każdego elementu x zbieżny, wówczas szereg*

$$\sum_{i=1}^{\infty} f_i(x) f(x_i)$$

jest dla każdego funkcjonału f zbieżny w każdym punkcie x.

D o w ó d. Niech

$$S_n = \sum_{i=1}^{n} f_i \,.\, f(x_i).$$

Mamy

$$S_n(x) = \sum_{i=1}^{n} f_i(x) f(x_i) = f\left[\sum_{i=1}^{n} x_i f_i(x)\right],$$

zbieżność ciągu $\{S_n(x)\}$ jest widoczna tedy w każdym punkcie x.

Twierdzenie 6. *Jeżeli sumy częściowe szeregu*

$$\sum_{i=1}^{\infty} f_i \,.\, f(x_i)$$

są ograniczone, wówczas szereg

$$\sum_{i=1}^{\infty} x_i f_i(x)$$

jest zbieżny dla każdego elementu x, który jest granicą jakiegoś ciągu kombinacyj linjowych utworzonych z wyrazów ciągu $\{x_i\}$.

D o w ó d. Niech

$$s_n(x) = \sum_{i=1}^{\infty} x_i f_i(x).$$

Mamy

$$f s_n(x) = \sum_{i=1}^{\infty} f(x_i) f_i(x) = S_n(x),$$

gdzie

$$S_n = \sum_{i=1}^{n} f_i \, . \, f(x_i).$$

Ponieważ $|S_n| \leqslant M$ (M — niezależne od n), więc

$$|S_n(x)| \leqslant M |x|;$$

temsamem (§ 3), dla każdego x, $\overline{\lim\limits_{n \to \infty}} |s_n(x)| < +\infty$, i na mocy twierdzenia 6 rozdziału V B istnieje liczba $\overline{M}$, niezależna od n oraz x), taka iż

$$|s_n(x)| \leqslant \overline{M} |x|.$$

Ponieważ zaś $\lim\limits_{n \to \infty} s_n(x_i) = x_i \quad (i = 1, 2, \ldots)$, przeto zwykłe już rozumowanie prowadzi do wniosku, że granica $\lim\limits_{n \to \infty} s_n(x)$ istnieje dla każdego x, spełniającego warunki założeniu.

Twierdzenie 7. *Jeżeli sumy częściowe szeregu*

$$\sum_{i=1}^{\infty} x_i f_i(x)$$

mają normy ograniczone dla każdego funkcjonału linjowego, wówczas szereg

$$\sum_{i=1}^{\infty} f_i f(x_i)$$

jest zbieżny dla każdego funkcjonału f, który jest granicą ciągu kombinacyj linjowych utworzonych z wyrazów ciągu $\{f_i\}$.

Dowód przebiega analogicznie do poprzedniego.

Twierdzenie 8. *Jeżeli $\{x_i\}$ jest ciągiem pełnym i jeżeli szereg*

$$\sum_{i=1}^{\infty} x_i f_i(x)$$

ma sumy częściowe według normy ograniczone dla każdego elementu x, wówczas szereg powyższy jest dla każdego elementu zbieżny.

Dowód. Niech

$$s_n(x) = \sum_{i=1}^{n} x_i f_i(x).$$

Mamy

$$\overline{\lim_{n\to\infty}} |s_n(x)| < +\infty \quad \text{dla każdego } x,$$

ponadto

$$\lim_{n\to\infty} s_n(x_i) = x_i \qquad (i = 1, 2, \ldots),$$

skąd na mocy twierdzenia 3 rozdziału VA wynika nasze twierdzenie.

ROZDZIAŁ VI B.

Operacje pełnociągłe i stowarzyszone.

Ciągi biortogonalne.

(Ciąg dalszy)

§ 1. Niechaj $\{x_i(t)\}$ będzie ciągiem funkcyj przestrzeni $(L^{(p)})$ $(p>1)$ oraz $\{y_i(t)\}$ ciągiem funkcyj przestrzeni $(L^{\left(\frac{p}{p-1}\right)})$, przyczem niech

$$\int_0^1 x_i(t)\, y_j(t)\, dt = \begin{cases} 1 & \text{dla} \quad i = j, \\ 0 & \text{,,} \quad i \neq j. \end{cases} \tag{1}$$

Założymy dalej, że ciągi $\{x_i\}$ i $\{y_i\}$ są zupełne (lub zamknięte) w $(L^{(p)})$, wzgl. $(L^{\left(\frac{p}{p-1}\right)})$.

Przy założeniach powyższych można wypowiedzieć następujące

Twierdzenie 1. *Jeżeli szereg*

$$\sum_{i=1}^{\infty} x_i(t) \int_0^1 y_i(t)\, x(t)\, dt$$

jest zbieżny przeciętnie w potędze p dla każdej funkcji $x(t) \subset (L^{(p)})$, *wówczas szereg*

$$\sum_{i=1}^{\infty} y_i(t) \int_0^1 x_i(t)\, y(t)\, dt \tag{2}$$

jest zbieżny przeciętnie w potędze $\frac{p}{p-1}$ *dla każdej funkcji* $y(t)$ *przestrzeni* $(L^{(\frac{p}{p-1})})$.

Dowód. Niech

$$f_i(x) = \int_0^1 y_i(t)\, x(t)\, dt \quad \text{dla} \quad x(t) \subset (L^{(p)}).$$

Na mocy założenia szereg

$$\sum_{i=1}^{\infty} x_i f_i(x)$$

jest dla $x \subset (L^{(p)})$ zbieżny przeciętnie w potędze p t. zn. wedle normy, stąd, na mocy twierdzenia 7 rozdz. poprzedniego szereg

$$\sum_{i=1}^{\infty} f_i f(x_i) = \sum_{i=1}^{\infty} y_i(t) \int_0^1 x_i(t)\, y(t)\, dt, \quad \text{gdzie } y(t) \subset (L^{(\frac{p}{p-1})}),$$

jest wedle normy zbieżny w $(L^{(\frac{p}{p-1})})$ (t. zn. przeciętnie w potędze $\frac{p}{p-1}$) dla każdego funkcjonału linjowego f w przestrzeni $(L^{(p)})$; temsamem więc zbieżny jest szereg (2) dla każdej funkcji $y(t) \subset (L^{(\frac{p}{p-1})})$.

Załóżmy teraz, że $x_i(t) = y_i(t) \subset (L^{(s)})$, gdzie s jest większą z liczb p, $\frac{p}{p-1}$.

Przy założeniu tem wynika z twierdzenia poprzedniego: Jeżeli szereg

$$\sum_{i=1}^{\infty} x_i(t) \int_0^1 x_i(t)\, x(t)\, dt$$

jest dla każdego $x \subset (L^{(p)})$ zbieżny w potędze p, wówczas szereg ten jest dla każdego $x \subset (L^{(\frac{p}{p-1})})$ zbieżny przeciętnie w potędze $\frac{p}{p-1}$.

Można tu założyć w szczególności, że $\{x_i\}$ są np. funkcjami ograniczonemi.

§ 2. Niechaj $\{x_i(t)\}$ będzie ciągiem funkcyj całkowalnych oraz $\{y_i(t)\}$ ciągiem funkcyj ograniczonych w przedziale $0 \leqslant t \leqslant 1$, spełniających warunki (1) § poprzedniego. Niechaj nadto $\{x_i(t)\}$ będzie ciągiem zupełnym w przestrzeni (L).

Twierdzenie 2. *Jeżeli szereg* $\sum_{i=1}^{\infty} x_i(t) \int_0^1 y_i(t)\, x(t)\, dt$ *jest dla każdego* $x(t) \subset L$ *zbieżny przeciętnie, wówczas szereg*

$$\sum_{i=1}^{\infty} y_i(t) \int_0^1 x_i(t)\, y(t)\, dt$$

jest ograniczony prawie wszędzie dla każdego $x(t) \subset (M)$ (*i naodwrót*).

D o w ó d przeprowadza się analogicznie jak poprzednio: x_i uważa się za elementy pola L, a y_i za reprezentanty funkcjonałów linjowych i korzysta się z twierdzenia 8 rozdziału VIA.

Uwaga 1. Jeżeli $x_i(t) = y_i(t) \subset (M)$ i jeżeli szereg

$$\sum_{i=1}^{\infty} x_i(t) \int_0^1 x_i(t)\, x(t)\, dt \tag{1}$$

jest dla każdego $x(t) \subset (L)$ przeciętnie zbieżny, wówczas szereg ten jest dla każdego $x(t) \subset (M)$ ograniczony, i odwrotnie.

Uwaga 2. Jeżeli $x_i(t) = y_i(t) \subset (C)$ i jeśli ponadto $\{x_i\}$ jest ciągiem zupełnym w (C), wówczas zbieżność jednostajna szeregu (1) dla każdego $x(t) \subset (C)$ pociąga za sobą zbieżność przeciętną dla każdego $x(t) \subset (L)$, i naodwrót.

Pierwszą część dowodu otrzymujemy, uważając x_i za elementy pola (C), a $y_i = x_i$ za reprezentanty funkcjonałów, drugą część dowodu otrzymamy, uważając $x_i(t)$ za elementy pola (L), a $y_i = x_i$ za reprezentanty funkcjonałów linjowych w polu (L).

§ 3. *W każdej przestrzeni ośrodkowej E istnieje układ biortogonalny $\{f_i(x)\}$, $\{x_i\}$, pełny* [1].

W rzeczy samej, niechaj $\{y_i\}$ będzie ciągiem wszędziegęstym w E oraz $\{\varphi_i\}$ — ciągiem funkcjonałów, z którego do każdego funkcjonału φ da się wyrwać ciąg zbieżny.

W ciągu $\{\varphi_i\}$ istnieje funkcjonał nieortogonalny do y_1. Przypuśćmy, że $\varphi_1(y_1) \neq 0$.

Przyjmijmy: $x_1 = y_1$, $f_1 = \dfrac{1}{\varphi_1(y_1)} \varphi_1$. Mamy $f_1(x_1) = 1$.

Utwórzmy ciągi

$$\{y_i - x_1 f_1(y_i)\} = \{y_i'\}, \qquad \{\varphi_i - f_1 \varphi_i(x_i)\} = \{\varphi_i'\}.$$

Mamy

$$f_1(y_i') = 0, \qquad \varphi_i'(x_1) = 0 \qquad (i = 1, 2, \ldots).$$

W ciągu $\{\varphi_i'\}$ istnieje funkcjonał różny od zera.

Niechaj φ_2' będzie pierwszym różnym od zera. W ciągu $\{y_i')$ istnieje element nieortogonalny do φ_2'. W przeciwnym bowiem wypadku mielibyśmy

$$\varphi_2'(y_i') = 0 \qquad (i = 1, 2, \ldots), \qquad \varphi_2'(x_1) = 0,$$

czyli

$$\varphi_2'(y_i) = 0 \qquad (i = 1, 2, \ldots),$$

co jest niemożliwe. Przypuśćmy, że

$$\varphi_2'(y_2') \neq 0.$$

Niech

$$f_2 = \varphi_2', \qquad x_2 = \frac{1}{\varphi_2'(y_2')} y_2'.$$

---

[1] t. zn. iż w przestrzeni E pełny jest zarówno ciąg elementów $\{x_i\}$ (§ 3 rozdz. IV A), jak i ciąg funkcjonałów $\{f_i(x)\}$ (§ 3 rozdz. III A).

Mamy:

$$f_2(x_1) = 0, \quad f_2(x_2) = 1, \quad f_1(x_2) = 0.$$

Utwórzmy ciąg

$$\{y_i' - x_2 f_2(y_i')\} = \{y_i''\} \qquad \{\varphi_i' - f_2 \varphi_i'(x_2)\} = \{\varphi_i''\}.$$

Obierzmy teraz w ciągu $\{y_i''\}$ pierwszy element nie znikający i oznaczmy go przez x_3.

Do elementu x_3 dobierzmy pierwszy funkcjonał ciągu $\{\varphi_i''\}$ nieortogonalny. Postępując tak dalej otrzymamy ciąg biortogonalny $\{x_i\}$, $\{f_i\}$. Ponieważ każdy element ciągu $\{y_i\}$ i każdy funkcjonał ciągu $\{\varphi_i\}$ daje się linjowo wyrazić przy pomocy wyrazów ciągów $\{x_i\}$ i $\{f_i\}$, zatem łatwo zauważyć, iż otrzymany ciąg biortogonalny jest pełny.

Metoda powyższa biortogonalizacji jest analogiczna do postępowania stosowanego zwykle w przestrzeni $(L^{(2)})$.

§ 4. Ciąg elementów $\{x_i\}$ nazywamy *bazą* [1]), jeżeli dla każdego elementu x istnieje jeden i tylko jeden ciąg liczb $\{\eta_i\}$ taki, że

$$x = \sum_{i=1}^{\infty} \eta_i x_i.$$

Niechaj ciąg $\{x_i\}$ będzie bazą. Oznaczmy przez E_1 zbiór ciągów $y = \{\eta_i\}$, dla których szereg

$$\sum_{i=1}^{\infty} \eta_i x_i$$

jest szeregiem zbieżnym.

Niech

$$|y| = \underset{n=1,2,\ldots}{\text{kres górny}} \left| \sum_{i=1}^{n} \eta_i x_i \right|.$$

---

[1]) Pojęcie to wprowadzone zostało w przypadku ogólnym przez p. J. Schaudera. Zob. J. Schauder, Zur Theorie stetiger Abbildungen in Funktionalräumen, Math. Ztschr., 26 (1927), p. 47 — 65.

Łatwo wykazać, że E_1 jest przy powyższej normie przestrzenią typu (B).

Niech teraz dalej, dla każdego ciągu $y = \{\eta_i\} \subset E_1$,

$$x = U(y) = \sum_{i=1}^{\infty} \eta_i x_i.$$

Operacja $U(y)$, w ten sposób określona, jest linjowa, gdyż

$$|U(y)| \leqslant |y|,$$

ponieważ zaś odwzorowuje w sposób jedno-jednoznaczny zbiór E_1 na E, zatem odwrotność tej operacji $y = U^{-1}(x)$ jest również operacją linjową.

Niech

$$f_i(x) = \eta_i \quad \text{dla} \quad x = \sum_{i=1}^{\infty} \eta_i x_i.$$

Ponieważ

$$|\eta_i x_i| \leqslant 2|y|, \qquad |f_i(x)| = |\eta_i| \leqslant \frac{2}{|x_i|}|y| \leqslant \frac{2}{|x_i|}|U^{-1}|\,|x|,$$

więc funkcjonał f_i jest także funkcjonałem linjowym.

Mamy zatem

$$x = \sum_{i=1}^{\infty} x_i f_i(x) \quad \text{dla} \quad x \subset E,$$

a ponieważ rozwinięcie powyższe jest jedyne, zatem

$$f_i(x_j) = \begin{cases} 1 & \text{dla} \quad i = j, \\ 0 & \;\;,, \quad i \neq j. \end{cases}$$

Ciąg $\{x_i\}$ i $\{f_i\}$ jest zatem ciągiem biortogonalnym.

Zauważymy, że dla każdego funkcjonału linjowego f, określonego w E, szereg

$$\sum_{i=1}^{\infty} f_i f(x_i)$$

jest zbieżny do $f(x)$. Mamy bowiem dla $x \subset E$

$$\sum_{i=1}^{\infty} f_i(x) f(x_i) = \lim_{n\to\infty} f\left[\sum_{i=1}^{n} x_i f_i(x)\right] = f(x).$$

Nie wiadomo, czy w każdej przestrzeni typu (B) ośrodkowej istnieje baza.

W przestrzeniach (L^p) $p \geqslant 1$ bazą jest system ortogonalny Haara. W polu (C) bazę podał p. J. Schauder [1]).

W przestrzeniach (l^p) $(p \geqslant 1)$ bazą jest układ elementów

$$x_i = \{\xi_n^{(i)}\}, \text{ gdzie } \xi_n^{(i)} = \begin{cases} 1, & i = n \\ 0, & i \neq n \end{cases}; \text{ wówczas } f_i(x) = \xi_i \text{ dla } x = \{\xi_i\}$$

W polu (c) bazą jest tensam układ z dołączeniem elementu

$$x_0 = \{\xi_n^{(0)}\}, \text{ gdzie } \xi_n^{(0)} = 1 \quad (n = 1, 2, \ldots);$$

mamy wówczas:

$$f_0(x) = \lim_{i\to\infty} \xi_i \quad \text{dla} \quad x = \{\xi_i\} \subset (c).$$

§ 5. *Niechaj ciągi $\{x_i\}$, $\{f_i\}$* i *$\{y_i\}$, $\{\varphi_i\}$ będą ciągami biortogonalnemi. Jeżeli równania*

$$f_i(x) = \varphi_i(y) \qquad (i = 1, 2, \ldots)$$

mają dla każdego elementu x jedno dokładnie rozwiązanie $y = U(x)$, wówczas zbieżność szeregu $\sum_{i=1}^{\infty} h_i x_i$ pociąga za sobą zbieżność szeregu $\sum_{i=1}^{\infty} h_i y_i$ dla każdego ciągu liczb $\{h_i\}$.

---

[1]) Schauder, l. c., p. 48—49.

D o w ó d. Jak łatwo zauważyć, $\lim_{n\to\infty} x_n = x_0$ i $\lim_{n\to\infty} y_n = y_0$ $[y_n = U(x_n)]$ pociąga $y_0 = U(x_0)$. Na mocy więc twierdz. 14 rozdziału IIIA operacja $y = U(x)$ jest operacją linjową.

Przyjmując zatem $|U| = M$, mamy

$$|U(x)| \leqslant M|x|.$$

Ponieważ

$$U(x_i) = y_i \qquad (i = 1, 2, \ldots),$$

zatem

$$U\left(\sum_{i=1}^{n} h_i x_i\right) = \sum_{i=1}^{n} h_i y_i \quad (h_i \text{ dowolne liczby rzeczywiste}),$$

skąd wynika nasze twierdzenie.

Uwaga. Jako wniosek z powyższego twierdzenia wynika: *Jeżeli $\{x_i(t)\}$, $\{y_i(t)\}$ są ciągami ortogonalnemi unormowanemi funkcyj ciągłych, i jeżeli dla każdej funkcji ciągłej $x(t)$ istnieje jedna jedyna funkcja ciągła $y(t)$, spełniająca warunki*

$$\int_0^1 x_i(t)\, x(t)\, dt = \int_0^1 y_i(t)\, y(t)\, dt,$$

wówczas zbieżność jednostajna szeregu

$$\sum_{i=1}^{\infty} h_i x_i(t)$$

pociąga za sobą zbieżność jednostajną szeregu

$$\sum_{i=1}^{\infty} h_i y_i(t).$$

Analogiczne twierdzenie można otrzymać w innych przestrzeniach funkcyjnych [1]).

---

[1]) Zob.: S. B a n a c h, Sur une proprieté caractéristique des fonctions orthogonales, Comptes Rendus, t. 180 (1925), p. 1637 — 1640. Por.: H. S t e i n h a u s, Sur quelques applications du calcul fonctionnel à la théorie des séries orthogonales, Stud. Math. I (1929), p. 191 — 200.

§ 6. Niechaj $\{x_i\}$, $\{f_i\}$ będzie układem biortogonalnym, przyczem $\{f_i\}$ niechaj będzie ciągiem pełnym.

Jeżeli ciąg $\{h_i\}$ ma tę własność, że, skoro $\{\alpha_i\}$ są spółczynnikami pewnego elementu x (t. zn. $\alpha_i = f_i(x)$), to $\{h_i \alpha_i\}$ są również spółczynnikami pewnego elementu y, wówczas, jeżeli β_i są spółczynnikami pewnego funkcjonału linjowego f (t. zn. $\beta_i = f(x_i)$), $h_i \beta_i$ są również spółczynnikami pewnego funkcjonału linjowego φ.

Dowód. Z założenia wynika, że układ równań

$$f_i(x) = h_i f_i(y) \qquad (i = 1, 2, \ldots)$$

ma dla każdego x dokładnie jedno rozwiązanie, które oznaczymy przez $y = U(x)$.

Związki $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = x_0$, $\lim\limits_{n\to\infty} y_n = y_0$, $y_n = U(x_n)$ pociągają za sobą oczywiście $y_0 = U(x_0)$; na mocy tedy twierdzenia 14 rozdziału IIIA, operacja $U(x)$ jest ciągła.

W szczególności, łatwo sprawdzamy, iż, dla każdego i,

$$U(x_i) = h_i x_i. \tag{1}$$

Niech teraz β_i $(i = 1, 2, \ldots)$ będą spółczynnikami pewnego funkcjonału f, t. j. niech

$$f(x_i) = \beta_i \qquad (i = 1, 2, \ldots).$$

Mamy wówczas, w myśl (1),

$$f\,U(x_i) = h_i f(x_i) = h_i \beta_i,$$

t. zn. iż liczby $h_i \beta_i$ są spółczynnikami operacji $f\,U$.

Uwaga. Ponieważ, w myśl (1), $U(x_i) = h_i x_i$, zatem, jeżeli x jest granicą ciągu $\{x_i\}$, wówczas $U(x)$ jest granicą kombinacyj linjowych wyrazów ciągu $\{x_i\}$.

Jako zastosowanie tej uwagi otrzymujemy łatwo twierdzenie następujące:

Twierdzenie 3. *Niechaj $\{x_i(t)\}$ będzie ciągiem ortogonalnym, unormowanym funkcyj ciągłych, zamkniętym w przestrzeni funkcyj ciągłych.*

Jeżeli ciąg czynników $\{h_i\}$ *przeprowadza zawsze dowolny ciąg spółczynników* α_i *funkcji ograniczonej w ciąg spółczynników* $\{h_i \alpha_i\}$ *funkcji ograniczonej, wówczas przeprowadza zarazem ciąg spółczynników* β_i *dowolnej funkcji ciągłej w ciąg* $\{h_i \beta_i\}$ *spółczynników funkcji również ciągłej.*

Twierdzenie odwrotne jest także prawdziwe.

Mamy wreszcie:

Twierdzenie 4. *Niechaj* $\{x_i(t)\}$ *będzie ciągiem ortogonalnym, unormowanym i zupełnym w* $(L^{\left(\frac{p}{p-1}\right)})$.

Jeżeli ciąg czynników $\{h_i\}$ *przeprowadza ciąg spółczynników* $\{\alpha_i\}$ *dowolnej funkcji* $x(t) \subset (L^{(p)})$ *w ciąg spółczynników* $\{h_i \alpha_i\}$ *pewnej funkcji* $y(t) \subset (L^{(p)})$, *wówczas ciąg* $\{h_i\}$ *przeprowadza dowolny ciąg spółczynników* $\{\alpha_i\}$ *funkcji* $x(t) \subset (L^{\left(\frac{p}{p-1}\right)})$ *w ciąg spółczynników* $\{h_i \alpha_i\}$ *funkcji* $y(t) \subset (L^{\left(\frac{p}{p-1}\right)})$. *Jeżeli* $p = \infty$, *wówczas* $(L^{(p)}) = (M)$ [1].

[1]) Zob.: W. Orlicz, Beiträge zur Theorie der Orthogonalentwicklungen, Stud. Math. I (1929), p. 1—39 oraz tegoż Autora, Beiträge zur Theorie der Orthogonalentwicklungen II. Stud. Math. I, (1929) p. 241 — 255.

ROZDZIAŁ VII A.

Ciągi słabo zbieżne.

§ 1. *Definicja.* Ciąg elementów $\{x_n\}$ *zdąża słabo* do elementu x, jeżeli dla każdego funkcjonału linjowego f spełniony jest warunek

$$\lim_{n\to\infty} f(x_n) = f(x).$$

Twierdzenie 1. *Na to, by ciąg $\{x_n\}$ zdążał słabo do x, konieczne jest i wystarcza, aby*

a) *ciąg $\{|x_n|\}$ był ograniczony;*

b) $\lim\limits_{n\to\infty} f(x_n) = f(x)$ *dla każdego funkcjonału $f \subset \overline{E}'$, gdzie $\overline{E}'$ oznacza zbiór wszędziegęsty w zbiorze $\overline{E}$ wszystkich funkcjonałów linjowych.*

Dowód. Konieczność a) wynika z twierdzenia § 3 rozdz. VIA. Konieczność b) jest oczywista.

Załóżmy, z kolei, iż warunki a), b) są spełnione i niech u będzie dowolnym funkcjonałem linjowym w E. Istnieje wówczas, dla każdej liczby $\varepsilon > 0$, funkcjonał $f \subset \overline{E}'$ taki, iż

$$|f - u| < \frac{\varepsilon}{2M},$$

gdzie M jest górnym kresem liczb $|x_n|$, $|x|$. Wówczas

$$|u(x - x_n)| \leqslant |f(x - x_n)| + \frac{\varepsilon}{2M} |x - x_n| \leqslant |f(x - x_n)| + \varepsilon,$$

a więc, ponieważ ε jest dowolną liczbą > 0 oraz

$$\lim_{n \to \infty} f(x_n) = f(x),$$

zatem również

$$\lim_{n \to \infty} u(x_n) = u(x),$$

t. j. ciąg $\{x_n\}$ jest słabo zbieżny do x.

Uwaga. O zbiorze $\overline{E}'$ wystarczy założyć, że kombinacje linjowe utworzone z funkcjonałów, należących do $\overline{E}'$, tworzą zbiór wszędziegęsty w $\overline{E}$.

Twierdzenie 2. *Jeżeli ciąg elementów $\{x_n\}$ zdąża słabo do x, wówczas istnieje taki ciąg kombinacyj linjowych $\{w_n\}$ elementów tego ciągu, że*

$$\lim_{n \to \infty} w_n = x.$$

Dowód wynika z twierdzenia 6 rozdziału IVA i z definicji słabej zbieżności.

§ 2. *Przestrzeń* (C). Z twierdzenia o postaci ogólnej funkcjonałów linjowych w (C) wynika, iż *ciąg funkcyj ciągłych $\{x_n(t)\}$ zdąża słabo w tej przestrzeni do pewnej funkcji $x(t) \subset (C)$ wtedy i tylko wtedy, gdy dla każdej funkcji $g(t)$ o wahaniu ograniczonem*

$$\lim_{n \to \infty} \int_0^1 x_n(t)\, dg = \int_0^1 x(t)\, dg.$$

Stąd:

Na to, by ciąg funkcyj $\{x_n(t)\}$ pola (C) był słabo zbieżny w tem polu do funkcji $x(t) \subset (C)$, konieczne jest i wystarcza, by

a) $\lim\limits_{n \to \infty} x_n(t) = x(t)$;

b) *ciąg $\{x_n(t)\}$ był wspólnie ograniczony.*

Dowód. Warunek jest konieczny: a) wynika z uwagi, że, jeżeli t_0 jest dowolnym punktem przedziału $< 0,1 >$, wówczas funkcjonał $f(x) = x(t_0)$ jest linjowy, zatem $\lim\limits_{n\to\infty} f(x_n) = f(x)$, czyli

$$\lim_{n\to\infty} x_n(t_0) = x(t_0).$$

Konieczność warunku b) wynika z twierdzenia § 3 rozdziału VI A.

Warunek jest wystarczający: Jeżeli bowiem $g(t)$ jest funkcją o wahaniu ograniczonem, a $\{x_n(t)\}$ ciągiem funkcyj ciągłych wspólnie ograniczonych, zmierzających wszędzie do funkcji ciągłej $x(t)$, wówczas (por. wstęp, § 5) mamy

$$\lim_{n\to\infty} \int_0^1 x_n(t)\, dg(t) = \int_0^1 x(t)\, dg(t).$$

Z twierdzenia 2 oraz powyższych uwag wynika bezpośrednio:

Twierdzenie 3. *Jeżeli ciąg funkcyj ciągłych* $\{x_n(t)\}$ $(0 \leqslant t \leqslant 1)$ *jest ograniczony i zbieżny wszędzie do funkcji ciągłej* $x(t)$, *wówczas istnieje ciąg wielomianów, utworzonych z wyrazów danego ciągu, zdążających jednostajnie do* $x(t)$.

Jest to ciekawa własność przestrzeni funkcyj ciągłych, której nie posiadają np. funkcje pierwszej klasy Baire'a.

Przestrzeń $(L^{(r)})$ $(r > 1)$. *Ciąg* $\{x_n(t)\}$ *zdąża słabo do* $x(t)$ $(x_n(t) \subset (L^{(r)}),\ x(t) \subset (L^{(r)}))$, *jeżeli dla każdej funkcji* $\alpha(t) \subset (L^{(s)}$ $[s = \frac{p}{p-1}]$ *zachodzi*

$$\lim_{n\to\infty} \int_0^1 x_n(t)\, \alpha(t)\, dt = \int_0^1 x(t)\, \alpha(t)\, dt.$$

Stąd:

Na to, aby ciąg funkcyj $\{x_n(t)\}$ *pola* $(L^{(r)})$ *zdążał słabo do funkcji* $x(t) \subset (L^{(r)})$, *konieczne jest i wystarcza, by*

a) $$\lim_{n\to\infty} \int_0^t x_n(u)\, du = \int_0^t x(u)\, du \qquad (0 \leqslant t \leqslant 1);$$

b) *ciąg* $\left\{\int\limits_0^1 |x_n(t)|^r dt\right\}$ *był ograniczony* [1]).

Warunki są konieczne. Określmy funkcję $\alpha(u, t)$

$$\alpha(u,t) = \begin{cases} 1 & \text{dla } u \leqslant t, \quad 0 \leqslant u \leqslant 1, \quad 0 \leqslant t \leqslant 1. \\ 0 & \quad " \quad u > t. \end{cases}$$

Dla każdego t, $\alpha(u,t) \subset (L^{(s)})$, zatem

$$\lim_{n\to\infty} \int\limits_0^1 x_n(t)\,\alpha(u,t)\,du = \int\limits_0^1 x(t)\,\alpha(u,t)\,du,$$

czyli

$$\lim_{n\to\infty} \int\limits_0^t x_n(u)\,du = \int\limits_0^t x(u)\,du.$$

Konieczność warunku b) wynika bezpośrednio z twierdzenia § 3 rozdz. VI A.

Warunki są wystarczające. Zauważmy, że każda funkcja schodkowa $\alpha(u)$ da się przedstawić w postaci

$$\alpha(u) = \sum_{i=1}^{n} h_i \,.\, [\alpha(u, t_i') - \alpha(u, t_i'')].$$

Ponieważ wedle a)

$$\lim_{n\to\infty} \int\limits_0^1 x_n(u)\,\alpha(u, t_i)\,du = \int\limits_0^1 x(u)\,\alpha(u, t_i)\,du,$$

przeto dla każdej funkcji schodkowej $\alpha(u)$

$$\lim_{n\to\infty} \int\limits_0^1 x_n(u)\,\alpha(u)\,du = \int\limits_0^1 x(u)\,\alpha(u)\,du.$$

---

[1]) Twierdzenie to udowodnił p. F. Riesz. Zob. pracę cytowaną na str. 71 pod [1]) (p. 465 — 466).

Niechaj teraz $\alpha(t)$ będzie dowolną funkcją klasy $(L^{(\frac{p}{p-1})})$. Istnieje ciąg funkcyj schodkowych $\{\alpha_n(t)\}$, dążących przeciętnie w potędze $\frac{p}{p-1}$ do $\alpha(t)$.

Zbiór funkcyj schodkowych jest zatem wszędziegęsty w $(L^{(s)})$, skąd na mocy warunku b) otrzymujemy słabą zbieżność ciągu $\{x_n(t)\}$ do $x(t)$.

Przestrzeń (c). *Na to, aby ciąg* $\{x_n\}$ *zdążał słabo do elementu* x $[x_n = \{\xi_i^n\} \subset (c),\ x = \{\xi_i\} \subset (c)]$ *konieczne jest i wystarcza, by*

1) *ciąg* $\{|x_n|\}$ *był ograniczony*;

2) $\lim\limits_{n\to\infty} \xi_i^{(n)} = \xi_i, \qquad \lim\limits_{n\to\infty} \{\lim\limits_{i\to\infty} \xi_i^{(n)}\} = \lim\limits_{i\to\infty} \xi_i.$

Dowód jest natychmiastowy, jeżeli oprzemy się na twierdzeniu, że każdy funkcjonał linjowy w (c) ma kształt:

$$f(x) = C \lim_{i\to\infty} \xi_i + \sum_{i=1}^{\infty} C_i \xi_i,$$

gdzie

$$x = \{\xi_i\}, \qquad |C| + \sum_{i=1}^{\infty} |C_i| = |f|,$$

i zauważymy, że przyjmując

$$f_0(x) = \lim_{i\to\infty} \xi_i, \qquad f_i(x) = \xi_i,$$

możemy powiedzieć, że kombinacje linjowe utworzone z funkcjonałów $f_n(x)$ $(n = 0, 1 \ldots)$ tworzą zbiór wszędziegęsty w zbiorze funkcjonałów.

Przestrzeń $(l^{(p)})$ $(p > 1)$. *Na to, aby ciąg* $\{x_n\}$ *zdążał słabo do* x $[x_n \equiv \{\xi_i^{(n)}\} \subset (l^{(p)}),\ x \equiv \{\xi_i\} \subset (l^{(p)})]$, *konieczne jest i wystarcza, by*

1) *ciąg liczb* $\left\{\sum_{i=1}^{\infty} |\xi_i^{(n)}|^p\right\}$ *był ograniczony;*

2) $\lim\limits_{n\to\infty} \xi_i^{(n)} = \xi_i \qquad (i = 1, 2 \ldots).$

D o w ó d. K o n i e c z n o ś ć warunków wynika z twierdzenia § 3 rozdz. VI A, ponieważ dla $x = \{\xi_i\} \subset (l^{(p)})$, mamy

$$|x| = \left\{\sum_{i=1}^{\infty} |\xi_i|^p\right\}^{\frac{1}{p}}, \quad -$$

oraz z uwagi, iż funkcjonały

$$f_i(x) = \xi_i \quad \text{dla} \quad x = \{\xi_i\} \subset (l^{(p)})$$

są linjowe w przestrzeni $(l^{(p)})$ $(p > 1)$.

D o s t a t e c z n o ś ć jest bezpośrednią konsekwencją twierdzenia 1, oraz uwagi do tego twierdzenia (str. 146); wystarczy zauważyć, iż kombinacje linjowe określonych wyżej funkcjonałów $f_i(x)$ stanowią zbiór wszędziegęsty w przestrzeni wszystkich funkcjonałów w polu $(l^{(p)})$.

Przestrzeń (l). *Na to, aby ciąg* $\{x_n\}$ *zdążał słabo do* x $[x_n = \xi_i^{(n)} \subset (l),\quad x = \{\xi_i\} \subset (l)]$, *konieczne jest i wystarcza, by*

$$\lim_{n\to\infty} |x_n - x| = 0, \quad \text{t. zn.} \quad \lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{\infty} |\xi_i^{(n)} - \xi_i| = 0\,.$$

W przestrzeni (l) *słaba zbieżność jest tedy równoważna zbieżności wedle normy.*

D o w ó d. Przyjmijmy $\eta_i^{(n)} = \xi_i^{(n)} - \xi_i$. Załóżmy, że ciąg $\{x_n\}$ zdąża słabo do x. Oczywiście ciąg $\{y_n\}$ $[y_n = \xi_i^{(n)} - \xi_i]$ zdąża słabo do Θ. Zatem dla każdego ciągu ograniczonego $\{c_i\}$ zachodzi

$$\lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{\infty} c_i \eta_i^{(n)} = 0; \tag{1}$$

przyjmując $c_i = 0$ dla $i \neq r$, $c_r = 1$, otrzymamy:

$$\lim_{n\to\infty} \eta_r^{(n)} = 0 \qquad (r = 1, 2, \ldots). \tag{2}$$

Przypuśćmy, że

$$\overline{\lim_{n\to\infty}} \sum_{i=1}^{\infty} |\eta_i^{(n)}| > \varepsilon > 0. \tag{3}$$

Określamy przy pomocy indukcji ciąg liczb naturalnych $\{n_k\}$ i $\{r_k\}$ w sposób następujący:

1) n_1 jest najmniejszą liczbą n, dla której

$$\sum_{i=1}^{\infty} |\eta_i^{(n)}| > \varepsilon;$$

2) r_1 jest najmniejszą liczbą, spełniającą związki

$$\sum_{i=1}^{r_1} |\eta_i^{(n_1)}| > \frac{\varepsilon}{2}, \qquad \sum_{i=r_1+1}^{\infty} |\eta_i^{(n_1)}| < \frac{\varepsilon}{5};$$

3) n_k jest najmniejszą liczbą większą od n_{k-1}, spełniającą warunki

a) $$\sum_{i=1}^{\infty} |\eta_i^{(n_k)}| > \varepsilon,$$

b) $$\sum_{i=1}^{r_{k-1}} |\eta_i^{(n_k)}| < \frac{\varepsilon}{5};$$

4) r_k jest najmniejszą liczbą $> r_{k-1}$, spełniającą nierówności

$$\sum_{i=r_{k-1}+1}^{r_k} |\eta_i^{(n_k)}| > \frac{\varepsilon}{2}, \qquad \sum_{i=r_k+1}^{\infty} |\eta_i^{(n_k)}| < \frac{\varepsilon}{5}.$$

Istnienie ciągów $\{n_k\}$ i $\{r_k\}$ wynika ze związków (2) i (3). Niech teraz

$$c_i = \begin{cases} \operatorname{sign} \eta_i^{(n_{k+1})} & \text{dla} \quad r_k < i \leqslant r_{k+1}, \\ \operatorname{sign} \eta_i^{(n_1)} & \text{„} \quad 1 \leqslant i \leqslant r_1, \end{cases} \tag{4}$$

Mamy $|c_j| = 1$ $(j = 1, 2, \ldots)$. Zatem, na mocy (1),

$$\lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{\infty} c_i \eta_i^{(n)} = 0. \tag{5}$$

Lecz, w myśl (4),

$$\left| \sum_{i=1}^{\infty} c_i \eta_i^{(n_k)} \right| \geqslant \sum_{i=r_{k-1}+1}^{r_k} |\eta_i^{(n_k)}| - \sum_{i=1}^{r_{k-1}} |\eta_i^{(n_k)}| - \sum_{i=r_k+1}^{\infty} |\eta_i^{(n_k)}|.$$

Zatem, na mocy warunków (3) i (4), określających ciągi $\{n_k\}$ i $\{r_k\}$, mamy:

$$\left| \sum_{i=1}^{\infty} c_i \eta_i^{(n_k)} \right| \geqslant \frac{\varepsilon}{2} - \frac{\varepsilon}{5} - \frac{\varepsilon}{5} = \frac{\varepsilon}{10} \qquad (k = 1, 2, \ldots),$$

co jednak sprzeczne jest z (5) i z warunkiem 3), na mocy którego $n_k > n_{k-1}$, więc $\lim\limits_{k\to\infty} n_k = +\infty$.

Przestrzeń (L). *Ciąg* $\{x_n(t)\}$ *zdąża słabo do* $x_0(t)$ $[x_n \subset L,$ $x_0 \subset L,$ $0 \leqslant t \leqslant 1]$, *jeżeli dla każdej funkcji ograniczonej* $\alpha(t)$ *zachodzi*

$$\lim_{n\to\infty} \int_0^1 x_n(t)\,\alpha(t)\,dt = \int_0^1 x_0(t)\,\alpha(t)\,dt. \tag{1}$$

Stąd:

Na to, aby ciąg funkcyj $\{x_n(t)\}$ *pola* (L) *był słabo zbieżny do funkcji* $x(t) \subset (L)$, *konieczne jest i wystarcza, by*

1) *ciąg* $\int_0^1 |x_n(t)|\,dt$ *był ograniczony;*

2) *dla każdej liczby* $\varepsilon > 0$, *istniała odpowiednia liczba* η *taka, że dla każdego zbioru* H, *zawartego w* $< 0, 1 >$, *o mierze* $< \eta$, *zachodziła nierówność*

$$\left| \int_H x_n(t)\, dt \right| \leqslant \varepsilon \qquad (n = 1, 2, \ldots);$$

3) $$\lim_{n \to \infty} \int_0^t x_n(u)\, du = \int_0^t x_0(u)\, du \qquad (0 \leqslant t \leqslant 1)\ ^{1)}.$$

D o w ó d. Konieczność warunku 1) wynika z twierdzenia § 3 rozdz. VI A. Udowodnimy teraz lemmat następujący:

Jeśli $\lim\limits_{n \to \infty} \int_0^1 x_n(t)\, \alpha(t)\, dt = 0$ dla każdego $\alpha(t) \subset (M)$ $[x_n(t) \subset L]$, wówczas warunek 2) jest spełniony.

Przypuśćmy bowiem, że warunek 2) nie jest spełniony.

Istnieje zatem $\varepsilon > 0$ takie, że do każdego $\eta > 0$ istnieje zbiór $H(\eta)$ o mierze $< \eta$ i liczba naturalna $n(\eta)$ taka, że

$$\left| \int_{H(\eta)} x_{n(\eta)}(t)\, dt \right| > \varepsilon. \tag{1}$$

Niechaj $\{\alpha_n\}$ oznacza ciąg liczb, spełniających warunek:

$$\left| \int_H x_n(t)\, dt \right| < \tfrac{1}{2}\varepsilon \text{ dla każdego zbioru } H \text{ o mierze } < \alpha_n. \tag{2}$$

Określamy ciąg zbiorów $\{G_i\}$, liczb $\{\eta_i\}$ przy pomocy indukcji w następujący sposób:

---

1) Warunek 1) jest zresztą konsekwencją warunku 2).

$$\left\{\begin{array}{lll} G_1 = H(1), & n_1 = n(1), & N_1 = 0, \\ G_i = H\left(\frac{1}{2^{N_i}}\right), & n_i = n\left(\frac{1}{2^{N_i}}\right), & \end{array}\right. \tag{3}$$

gdzie N_i jest dowolną liczbą naturalną, spełniającą warunek

$$\frac{1}{2^{N_i}} < \frac{1}{2}\,\alpha_{n_{i-1}}, \qquad N_i < N_{i+1}.$$

A więc miara zbioru $\sum_{j=1}^{\infty} G_{j+1}$ jest mniejsza niż

$$\sum_{j=i}^{\infty} \frac{1}{2^{N_{j+1}}} \leqslant \frac{2}{2^{N_{i+1}}} < \alpha_{n_i}.$$

Niech

$$H_i = G_i - R_i, \text{ gdzie } R_i = G_i \sum_{j=i}^{\infty} G_{j+1}.$$

Mamy oczywiście $H_r\, H_k = 0$ przy $r \neq k$, oraz

$$\int_{H_i} x_{n_i}(t)\, dt = \int_{G_i} x_{n_i}(t) - \int_{R_i} x_{n_i}(t)\, dt.$$

Ponieważ miara R_i jest $< \alpha_{n_i}$, zatem na mocy (1), (2), (3)

$$\left|\int_{H_i} x_{n_i}(t)\, dt\right| \geqslant \varepsilon - \frac{1}{2}\,\varepsilon = \frac{1}{2}\,\varepsilon. \tag{4}$$

Niech

$$\xi_i^{(n)} = \int_{H_i} x_n(t)\, dt \qquad (n = 1, 2, \ldots),$$

i niechaj $\{d_i\}$ będzie dowolnym ciągiem ograniczonym.

Określamy funkcję $\alpha(t)$ w sposób następujący

$$\alpha(t) = \left\{\begin{array}{ll} d_i & \text{dla } t \subset H_i, \\ 0 & \text{dla pozostałych } t. \end{array}\right.$$

Mamy

$$\int_0^1 \alpha(t)\, x_n(t)\, dt = \sum_{i=1}^{\infty} d_i\, \xi_i^{(n)}.$$

Widzimy zatem, że

$$\lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{\infty} d_i\, \xi_i^{(n)} = 0 \quad \text{dla} \quad \{d_i\} \subset (m).$$

Uważając więc ciągi $\{\xi_i^{(n)}\}$ jako elementy przestrzeni (l), widzimy, że $\{\xi_i^{(n)}\}$ dąży słabo do Θ. Zatem

$$\lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{\infty} |\xi_i^{(n)}| = 0.$$

A więc $\lim\limits_{i\to\infty} \xi_i^{(n_i)} = 0$, co jest sprzeczne z (4), gdyż

$$|\xi_i^{(n_i)}| = \left| \int_{H_i} x_{n_i}(t)\, dt \right| \geqslant \frac{1}{2}\, \varepsilon.$$

Opierając się na powyższym lemmacie, z uwagi, że

$$\lim_{n\to\infty} \int_0^1 [x_n(t) - x_0(t)]\, \alpha(t)\, dt = 0 \quad \text{dla} \quad \alpha(t) \subset (M),$$

mamy

$$\int_H | x_n(t) - x_0(t) |\, dt < \varepsilon$$

dla każdego zbioru H o mierze mniejszej niż η.

Obierając η dość małe, mamy

$$\int_H | x_0(t) |\, dt < \tfrac{1}{2}\, \varepsilon,$$

o ile tylko miara zbioru H jest mniejsza od η.

Zatem

$$\int_H |x_n(t)|\, dt < \frac{3}{2}\,\varepsilon \qquad (n = 1, 2, \ldots).$$

Widzimy zatem, że ciąg $\{x_n(t)\}$ spełnia warunek 2).

Warunek 3) jest oczywiście konieczny.

Przyjmując bowiem

$$\alpha(u) = 1 \quad \text{dla} \quad 1 \leqslant u \leqslant t,$$

$$\alpha(u) = 0 \quad \text{dla} \quad t < u \leqslant 1,$$

mamy

$$\lim_{n\to\infty} \int_0^1 x_n(u)\,\alpha(u)\, du = \int_0^1 x_0(u)\,\alpha(u)\, du.$$

Przejdziemy teraz do dowodu, że warunki podane są **wystarczające**.

Niechaj $\alpha(t)$ będzie dowolną funkcją mierzalną mniejszą bezwzględnie od M w przedziale $<0, 1>$. Niechaj ε będzie dowolną liczbą, a $\eta > 0$ odpowiednią liczbą, wynikającą z warunku 2).

Istnieje funkcja schodkowa $\beta(t)$, ograniczona bezwzględnie przez M i spełniającą warunek: zbiór H wszystkich punktów, spełniających nierówność

$$|\alpha(t) - \beta(t)| > \varepsilon,$$

ma miarę mniejszą od η. Na mocy warunku 3), mamy

$$\lim_{n\to\infty} \int_0^1 x_n(t)\,\beta(t)\, dt = \int_0^1 x_0(t)\,\beta(t)\, dt. \tag{6}$$

Zauważmy, że

$$\left| \int_0^1 [\alpha(t) - \beta(t)]\, x_n(t)\, dt \right| \leqslant \left| \int_{H'} [\alpha(t) - \beta(t)]\, x_n(t)\, dt \right| +$$

$$+\left|\int_H [\alpha(t)-\beta(t)]\, x_n(t)\, dt\right|,$$

gdzie H' oznacza dopełnienie zbioru H do przedziału $<0, 1>$.

Zatem

$$\left|\int_0^1 [\alpha(t)-\beta(t)]\, x_n(t)\, dt\right| \leqslant \varepsilon \int_0^1 |x_n(t)|\, dt + 2M \int_H |x_n(t)|\, dt.$$

Jeżeli przez H_n oznaczymy zbiór tych punktów zbioru H, gdzie $x_n(t) \geqslant 0$, wówczas, na mocy warunku 2),

$$\int_H |x_n(t)|\, dt = \left|\int_{H-H_n} x_n(t)\, dt\right| + \left|\int_{H_n} x_n(t)\, dt\right| \leqslant 2\varepsilon,$$

a więc

$$\left|\int_0^1 [\alpha(t)-\beta(t)]\, x_n(t)\, dt\right| \leqslant \varepsilon \left[\int_0^1 |x_n(t)|\, dt + 4M\right]. \tag{7}$$

Mamy na mocy (6) i (7)

$$\overline{\lim_{n\to\infty}} \left| \left\{ \int_0^1 x_n(t)\, \alpha(t)\, dt - \int_0^1 x_0(t)\, \alpha(t)\, dt \right\} \right| \leqslant$$

$$\leqslant \overline{\lim_{n\to\infty}} \left| \int_0^1 x_n(t)\, [\alpha(t)-\beta(t)]\, dt \right| + \left| \int_0^1 x_0(t)\, [\alpha(t)-\beta(t)]\, dt \right| \leqslant$$

$$\leqslant \overline{\lim_{n\to\infty}}\, \varepsilon \left[\int_0^1 |x_n(t)|\, dt + 4M \right] + \varepsilon \int_0^1 |x_0(t)|\, dt + 2M \int_H |x_0(t)|\, dt.$$

Na mocy warunku 1) ciąg $\int\limits_0^1 |x_n(t)|\, dt$ jest ograniczony, $\int\limits_H |x_0(t)|\, dt$ zmierza do zera wraz z miarą zbioru H, a zatem

$$\lim_{n\to\infty} \int\limits_0^1 x_n(t)\, \alpha(t)\, dt = \int\limits_0^1 x_0(t)\, \alpha(t)\, dt.$$

ROZDZIAŁ VII B.

Ciągi słabo zbieżne.

(Ciąg dalszy)

§ 1. *Jeżeli ciąg* $\{x_n(t)\}$ *zdąża słabo do* $x(t)$ *w przestrzeni* $(L^{(p)})$ $(p > 1)$ $[x_n(t), x(t) \subset (L^{(p)}),\ p > 1]$ *i jeżeli*

$$\lim_{n\to\infty} \int_0^1 |x_n(t)|^p\, dt = \int_0^1 |x(t)|^p\, dt,$$

wówczas ciąg $\{x_n(t)\}$ *zdąża wedle normy do* $x(t)$, *t. zn.*

$$\lim_{n\to\infty} \int_0^1 |x_n(t) - x(t)|^p\, dt = 0\ [1]).$$

Analogiczne twierdzenie zachodzi dla przestrzeni $(l^{(p)})$ $(p \geqslant 1)$, mianowicie:

Jeżeli ciąg $\{x_n\} \equiv \{\xi_i^{(n)}\}$ *zdąża słabo do* $x \equiv \{\xi_i\}$ *w* $(l^{(p)})$ $(p \geqslant 1)$ $[x_n, x \subset (l^{(p)})]$ *i jeżeli*

$$\lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{\infty} |\xi_i^{(n)}|^p = \sum_{i=1}^{\infty} |\xi_i|^p,$$

[1]) Twierdzenie to udowodnione zostało po raz pierwszy przez Radona (Sitzgsb. Ak. Wiss. Wien, t. 122 (1913), Abt. IIa, pp. 1295 — 1438). Również: F. Riesz, Acta Litt. ac Scient. Szeged, t. 4, (1929), pp. 58—64, oraz 182—185.

wówczas

$$\lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{\infty} |\xi_i^{(n)} - \xi_i|^p = 0.$$

Dowód. Mamy

$$\lim_{n\to\infty} \xi_i^{(n)} = \xi_i, \tag{1}$$

$$\sqrt[p]{\sum_{i=1}^{\infty} |\xi_i^{(n)} - \xi_i|^p} \leqslant \sqrt[p]{\sum_{i=1}^{N-1} |\xi_i^{(n)} - \xi_i|^p} + \sqrt[p]{\sum_{i=N}^{\infty} |\xi_i^{(n)} - \xi_i|^p}, \tag{2}$$

gdzie N jest dowolną liczbą naturalną.

Lecz

$$\sqrt[p]{\sum_{i=N}^{\infty} |\xi_i^{(n)} - \xi_i|^p} \leqslant \sqrt[p]{\sum_{i=N}^{\infty} |\xi_i^{(n)}|^p} + \sqrt[p]{\sum_{i=N}^{\infty} |\xi_i|^p},$$

skąd, na mocy założenia i związków (1), (2), otrzymujemy:

$$\overline{\lim_{n\to\infty}} \sum_{i=1}^{\infty} |\xi_i^{(n)} - \xi_i|^p \leqslant \left\{ 2 \sqrt[p]{\sum_{i=N}^{\infty} |\xi_i|^p} \right\}^p = 2^p \sum_{i=N}^{\infty} |\xi_i|^p.$$

Ponieważ N jest dowolną liczbą naturalną i ponieważ

$$\lim_{N\to\infty} \sum_{i=N}^{\infty} |\xi_i|^p = 0,$$

więc

$$\lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{\infty} |\xi_i^{(n)} - \xi_i|^p = 0.$$

§ 2. Jeżeli ciąg elementów $\{x_n\}$ pewnej przestrzeni typu (B) ma tę własność, że dla każdego funkcjonału linjowego $f(x)$ istnieje

$$\lim_{n\to\infty} f(x_n),$$

to nie koniecznie istnieć musi element x_0, do którego ciąg $\{x_n\}$ jest słabo zbieżny, t. j. taki, że

$$\lim_{n\to\infty} f(x_n) = f(x_0)$$

dla każdego funkcjonału linjowego.

Przykład taki można podać w przestrzeni (C).

Niechaj $\{x_n(t)\}$ $(0 \leqslant t \leqslant 1)$ oznacza ciąg funkcyj ciągłych wspólnie ograniczonych i zdążających wszędzie do funkcji $z(t)$ nieciągłej.

Wynika wówczas z twierdzenia § 2 rozdziału VIIA istnienie granicy

$$\lim_{n\to\infty} \int_0^1 x_n(t)\, dg$$

dla każdej funkcji g o wahaniu ograniczonem.

Ciąg $\{x_n(t)\}$ nie jest jednak słabo zbieżny do żadnej funkcji ciągłej.

W przestrzeniach $(L^{(p)})$, $(l^{(p)})$ $(p \geqslant 1)$, *jeśli, dla pewnego ciągu* $\{x_n\}$, $\lim\limits_{n\to\infty} f(x_n)$ *istnieje dla każdego funkcjonału f linjowego, wówczas ciąg* $\{x_n\}$ *zdąża słabo do pewnego elementu* x_0.

Dowód dla (L). Niechaj ciąg $\{x_n(t)\} \subset (L)$ ma powyższą własność, t. zn. niech

$$\lim_{n\to\infty} \int_0^1 x_n(t)\, \alpha(t)\, dt$$

istnieje dla każdej funkcji $\alpha(t) \subset (M)$.

Mamy oczywiście

$$\lim_{p,q\to\infty} \int_0^1 [x_p(t) - x_q(t)]\, \alpha(t)\, dt = 0 \quad \text{dla} \quad \alpha(t) \subset (M).$$

Łatwo zauważyć, że dla każdej liczby $\varepsilon > 0$ istnieje taka para liczb $\eta > 0$ i $N > 0$, że

$$\int_H |x_N(t) - x_h(t)|\, dt < \varepsilon \tag{1}$$

dla $h \geqslant N$ i dla każdego zbioru H o mierze mniejszej niż η.

W przeciwnym bowiem przypadku istniałby ciąg liczb $\{p_n\}$ i $\{h_n\}$, dążących do ∞ i ciąg zbiorów $\{H_n\}$ o miarach dążących do zera, takich, że

$$\int_{H_n} |x_{p_n}(t) - x_{h_n}(t)|\, dt \geqslant \varepsilon,$$

co sprzeciwiałoby się lemmatowi § 2 rozdziału VIIA (str. 153), gdyż

$$\lim_{n\to\infty} \int_0^1 [\, x_{p_n}(t) - x_{q_n}(t)\,]\, \alpha(t)\, dt = 0 \quad \text{dla} \quad \alpha(t) \subset (M).$$

W szczególności, dla η dość małego, mamy

$$\int_H |x_i(t)|\, dt < \tfrac{1}{2}\, \varepsilon \qquad (i = 1, 2, \ldots N),$$

o ile miara zbioru H jest mniejsza od η.

Zatem na mocy (1)

$$\int_H |x_n(t)|\, dt < \frac{3}{2}\, \varepsilon \qquad (n = 1, 2, \ldots)$$

dla każdego zbioru H o mierze $< \eta$.

Niech

$$\lim_{n\to\infty} \int_0^t x_n(u)\, du = \beta(t).$$

Pokażemy, że funkcja $\beta(t)$ jest funkcją absolutnie ciągłą. Jeżeli bowiem ε jest dowolną liczbą dodatnią, wówczas istnieje $\eta > 0$ takie, że

$$\int_H |x_n(t)|\, dt < \varepsilon \ (n = 1, 2, \ldots) \text{ dla każdego zbioru } H \text{ o mierze } < \eta.$$

W szczególności, jeżeli zbiór H składa się ze skończonej liczby odcinków $\{\delta_i\}$, niezachodzących na siebie, o krańcach t_i, t_i', wówczas

$$\lim_{n\to\infty} \int_H x_n(t)\,dt = \lim_{n\to\infty} \sum_i \int_{t_i}^{t_i'} x_n(t)\,dt = \sum_i [\beta(t_i') - \beta(t_i)],$$

a więc

$$\left| \sum_i [\beta(t_i') - \beta(t_i)] \right| \leqslant \varepsilon,$$

co oznacza ciągłość bezwzględną funkcji $\beta(t)$.

Przyjmując $\beta'(t) = x_0(t)$, widzimy, że ciąg $x_n(t)$ zdąża słabo do $x_0(t)$.

Czytelnik łatwo udowodni analogiczną własność dla przestrzeni (l), t. zn.:

Jeżeli ciąg $\{\xi_i^{(n)}\}$ ma tę własność, że

$$\sum_{i=1}^{\infty} |\xi_i^{(n)}| < +\infty \qquad (n = 1, 2, \ldots)$$

i $\lim\limits_{n\to\infty} \sum\limits_{i=1}^{\infty} d_i\,\xi_i^{(n)}$ istnieje dla każdego ciągu $\{d_i\}$ ograniczonego, wówczas istnieje ciąg $\{\xi_i\}$ taki, że

$$\sum_{i=1}^{\infty} |\xi_i| < +\infty, \qquad \lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{\infty} d_i\,\xi_i^{(n)} = \sum_{i=1}^{\infty} d_i\,\xi_i.$$

Udowodnimy teraz dla przestrzeni $(L^{(p)})$ $(p > 1)$ własność podaną na początku tego ustępu, mianowicie następujące twierdzenie:

Jeżeli $\{x_n(t)\} \subset (L^{(p)})$ $(p > 1)$ i jeżeli

$$\lim_{n\to\infty} \int_0^1 x_n(t)\,y(t)\,dt$$

istnieje dla każdego $y(t) \subset (L^{(\frac{p}{p-1})})$, wówczas istnieje $x_0(t) \subset (L^{(p)})$

takie, że

$$\lim_{n\to\infty}\int_0^1 x_n(t)\,y(t)\,dt=\int_0^1 x_0(t)\,y(t)\,dt \quad \text{dla} \quad y(t)\subset\left(L^{\left(\frac{p}{p-1}\right)}\right).$$

Dowód. Niech dla $y\subset\left(L^{\left(\frac{p}{p-1}\right)}\right)$

$$f_n(y)=\int_0^1 x_n(t)\,y(t)\,dt.$$

Funkcjonał $f_n(y)$ jest funkcjonałem linjowym określonym w $\left(L^{\left(\frac{p}{p-1}\right)}\right)$.

Ponieważ $\lim_{n\to\infty} f_n(y)$ istnieje dla każdego $y\subset\left(L^{\left(\frac{p}{p-1}\right)}\right)$, zatem funkcjonał $f(y)=\lim_{n\to\infty} f_n(y)$, jako granica funkcjonałów linjowych, jest również linjowy. Z twierdzenia o przedstawieniu funkcjonałów w przestrzeniach $\left(L^{\left(\frac{p}{p-1}\right)}\right)$ (rozdz. IVA, § 4) wynika istnienie takiej funkcji $x_0(t)\subset(L^{(p)})$, że

$$f(y)=\int_0^1 x_0(t)\,y(t)\,dt \quad \text{dla} \quad y\subset\left(L^{\left(\frac{p}{p-1}\right)}\right).$$

Mamy więc

$$\lim_{n\to\infty}\int_0^1 x_n(t)\,y(t)\,dt=\int_0^1 x_0(t)\,y(t)\,dt \quad \text{dla} \quad y\subset\left(L^{\left(\frac{p}{p-1}\right)}\right).$$

Uwaga. Analogiczne twierdzenie i dowód można podać dla przestrzeni $(l^{(p)})$ $(p>1)$.

§ 3. *Niechaj $y=U(x)$ będzie operacją linjową, określoną w przestrzeni E typu (B), której przeciwdziedzina mieści się w przestrzeni E_1 również typu (B).*

Jeżeli ciąg $\{x_n\}$ zdąża słabo do x_0, wówczas ciąg $\{U(x_n)\}$ zdąża słabo do $U(x_0)$.

D o w ó d. Niech Y będzie dowolnym funkcjonałem linjowym określonym w E_1. Wyrażenie

$$YU(x) = X(x)$$

jest oczywiście funkcjonałem addytywnym w E i, jak łatwo widać, ciągłym.

Mamy bowiem:

$$|X(x)| = |YU(x)| \leqslant |Y| \, |U(x)| \leqslant |Y| \, |U| \, |x|.$$

Ponieważ $\{x_n\}$ zdąża słabo do x_0 więc

$$\lim_{n\to\infty} YU(x_n) = \lim_{n\to\infty} X(x_n) = X(x_0) = YU(x_0).$$

Zatem ciąg $\{U(x_n)\}$ zdąża słabo do $U(x_0)$.

Jeżeli założymy, że operacja $y = U(x)$ jest pełnociągła, wówczas, skoro ciąg $\{x_n\}$ zdąża słabo do $\{x_0\}$, to ciąg $\{U(x_n)\}$ zdąża wedle normy do $U(x_0)$, t. j.

$$\lim_{n\to\infty} |U(x_n) - U(x_0)| = 0.$$

Przypuśćmy, że ciąg $U(x_n)$ nie zdąża (wedle normy) do $U(x_0)$. Istnieje zatem $\varepsilon > 0$ i ciąg częściowy $\{x_{n_i}\}$ taki, że

$$|U(x_{n_i}) - U(x_0)| > \varepsilon \qquad (i = 1, 2, \ldots), \tag{1}$$

przyczem ciąg $\{U(x_{n_i})\}$ jest zbieżny wedle normy do pewnego elementu y'. Ponieważ ciąg $\{x_{n_i}\}$ jest słabo zbieżny do x_0, więc ciąg $\{U(x_{n_i})\}$ jest słabo zbieżny do $U(x_0)$, co jest niemożliwe, gdyż ciąg $\{U(x_{n_i})\}$ dąży do y', a na mocy (1) $y' \neq U(x_0)$.

ROZDZIAŁ VIII A.

Funkcjonały linjowe w przestrzeniach *(B)*.

W rozdziale tym zakładać będziemy, że rozważana przestrzeń jest typu (B) [1]).

Niechaj ϑ będzie dowolną liczbą porządkową graniczną (t. zn. nie mającą poprzedniej).

Jeżeli $\{C_\xi\}$ $(1 \leqslant \xi < \vartheta)$ jest ciągiem ograniczonym liczb rzeczywistych typu ϑ, wówczas przez

$$\overline{\lim_{\xi \to \vartheta}}\, C_\xi \quad \text{(limes superior)}$$

oznaczamy dolny kres liczb rzeczywistych K, spełniających nierówność

$$C_\xi \leqslant K,$$

począwszy od pewnej liczby porządkowej zależnej od K.

Określamy dalej:

$$\underline{\lim_{\xi \to \vartheta}}\, C_\xi = - \overline{\lim_{\xi \to \vartheta}}\, (-C_\xi) \qquad \text{(limes inferior)}.$$

---

[1]) Por. pracę cytowaną pod [1]) na str. 26 (p. 228—234), gdzie znajdują się wszystkie twierdzenia tego rozdziału.

Twierdzenie 1. *Jeżeli dla ciągu* $\{f_\xi(x)\}$ $(1 \leqslant \xi < \vartheta)$ *funkcjonałów linjowych typu* ϑ *mamy*

$$|f_\xi| \leqslant M \qquad (1 \leqslant \xi < \vartheta),$$

wówczas istnieje funkcjonał linjowy $f(x)$, *spełniający warunki:*

$$|f| \leqslant M, \qquad \underline{\lim}_{\xi \to \vartheta} f_\xi(x) \leqslant f(x) \leqslant \overline{\lim}_{\xi \to \vartheta} f_\xi(x) \ (\textit{dla każdego } x). \quad (1)$$

Twierdzenie powyższe wynika z twierdzenia 1 rozdziału II, jeżeli przyjmiemy tam

$$p(x) = \overline{\lim}_{\xi \to \vartheta} f_\xi(x).$$

Funkcjonał $p(x)$ spełnia warunki twierdzenia, a ponadto

$$p(x) \leqslant M|x|.$$

Uwaga. Każdy funkcjonał linjowy $f(x)$, spełniający warunki (1), nazywamy *funkcjonałem granicznym* ciągu $\{f_\xi(x)\}$.

Jeżeli $\lim\limits_{n \to \infty} |f_n - f| = 0$, wówczas f jest oczywiście funkcjonałem granicznym ciągu $\{f_n(x)\}$, mamy bowiem

$$\lim_{n \to \infty} f_n(x) = f(x)$$

dla każdego x.

Definicja. Przestrzeń L wektorjalną funkcjonałów linjowych nazywamy *słabozamkniętą*, jeżeli dla każdego ciągu funkcjonałów $\{f_\xi\}$ $(\xi < \vartheta)$ tej przestrzeni, ograniczonych według normy, istnieje zawsze funkcjonał graniczny, należący również do L.

Uwaga. Definicja słabej zamkniętości wymaga liczb pozaskończonych. Przekonamy się później, że w zbiorach ośrodkowych można ich jednak uniknąć.

Twierdzenie 2. *Jeżeli* L *jest przestrzenią wektorjalną słabozamkniętą funkcjonałów linjowych i jeżeli funkcjonał linjowy* φ *do* L *nie należy, wówczas, oznaczając przez* M *liczbę, spełniającą warunek*

$$0 < M < |f - \varphi| \quad \textit{dla każdego} \quad f \subset L,$$

możemy znaleźć element x_0 *taki, że*

$$f(x_0) = 0 \quad \textit{dla każdego} \quad f \subset L,$$

$$\varphi(x_0) = 1,$$

$$|x_0| < \frac{1}{M}.$$

Dowód. Obierzmy dowolny ciąg liczb $\{M_i\}$ $(M_1 = M)$ rosnący nieograniczony. Niechaj $\aleph$ oznacza największą liczbę kardynalną, spełniającą warunek: jeżeli moc dowolnego zbioru $H \subset E$ jest $< \aleph$, wówczas istnieje funkcjonał linjowy $f(x)$, taki, że

$$f \subset L, \quad |f - \varphi| \leqslant M_2, \quad |f(x) - \varphi(x)| \leqslant M_1 \,.\, |x| \quad (x \subset H). \quad (1)$$

Oczywiście moc zbioru E jest $\geqslant \aleph$. Gdyby bowiem istniał funkcjonał linjowy $f(x)$ taki, iż

$$|f(x) - \varphi(x)| \leqslant M_1 |x| \quad \text{dla} \quad x \subset E,$$

wówczas

$$|f - \varphi| \leqslant M_1 = M,$$

co jest sprzeczne z założeniem.

Pokażemy teraz, że $\aleph$ jest liczbą skończoną.

Przypuśćmy bowiem, że $\aleph$ nie jest liczbą skończoną.

Niechaj G będzie dowolnym zbiorem elementów mocy $\aleph$. Uporządkujemy elementy zbioru G w ciąg pozaskończony

$$\{x_\xi\} \qquad (1 \leqslant \xi < \vartheta),$$

gdzie ϑ jest najmniejszą liczbą porządkową mocy $\aleph$. Oczywiście ϑ jest liczbą graniczną.

Jeżeli $\eta < \vartheta$, wówczas moc zbioru wyrazów ciągu

$$\{x_\xi\} \qquad (1 \leqslant \xi < \eta)$$

jest mniejsza od $\aleph$; istnieje zatem funkcjonał linjowy f_η, spełniający związki

$$f_\eta \subset L, \quad |f_\eta - \varphi| \leqslant M_2, \quad |f_\eta(x_\xi) - \varphi(x_\xi)| \leqslant M_1 |x_\xi| \quad \text{dla} \quad \xi < \eta. \quad (2)$$

Ponieważ zbiór L jest słabo zamknięty, istnieje zatem funkcjonał linjowy f, należący do L i będący funkcjonałem granicznym ciągu

$$\{f_\eta\} \qquad (1 \leqslant \eta < \vartheta).$$

Na mocy (2) mamy

$$|f-\varphi| \leqslant M_2, \quad |f(x_\xi) - \varphi(x_\xi)| \leqslant M_1 |x_\xi| \qquad (1 \leqslant \xi < \vartheta).$$

Wynika stąd, że dla każdego zbioru G mocy $\aleph$ istnieje funkcjonał linjowy f, spełniający warunki (1).

A zatem $\aleph$ nie jest liczbą kardynalną nieskończoną.

Istnieje zatem zbiór K_1, zawierający skończoną liczbę elementów, taki, że żaden funkcjonał f, spełniający warunki

$$|f-\varphi| \leqslant M_2 \quad \text{i} \quad |f(x) - \varphi(x)| \leqslant M_1 |x| \quad \text{dla} \quad x \subset K_1$$

nie należy do L.

Postępując podobnie przy pomocy indukcji z n na $n+1$, łatwo pokazać, że istnieje ciąg zbiorów skończonych $\{K_i\}$ taki, że, dla każdej liczby n naturalnej, jeśli

$$|f-\varphi| \leqslant M_n, \qquad |f(x) - \varphi(x)| \leqslant M_i |x| \quad \text{dla} \quad x \subset K_i \qquad (i < n),$$

wówczas f nie należy do L.

Jeśli tedy

$$|f(x) - \varphi(x)| \leqslant M_i |x| \quad \text{dla} \quad x \subset K_i \quad (i = 1, 2, \ldots), \tag{3}$$

wówczas f nie należy napewno do L.

Możemy przyjąć, że elementy zbiorów $\{K_i\}$ mają normy równe $\frac{M_1}{M_i}$, wystarczy w tym celu elementy zbiorów $\{K_i\}$ pomnożyć tylko przez odpowiednie liczby.

Porządkując wówczas elementy zbiorów K_i w ciąg $\{x_n\}$ i wypisując najpierw elementy zbioru K_1, następnie elementy zbioru K_2 i t. d., mamy

$$\lim_{n\to\infty} x_n = \Theta, \qquad |x_n| \leqslant 1 \qquad (n = 1, 2, \ldots), \tag{5}$$

i jeśli

$$|f(x_n) - \varphi(x_n)| \leqslant M_1 \qquad (n = 1, 2, \ldots) \tag{6}$$

wówczas f nie należy napewno do L.

Oznaczmy przez $\overline{L}$ zbiór wszystkich ciągów $\{f(x_n)\}$ dla $f \subset L$. Oczywiście $\overline{L} \subset (c)$ [zbiór ciągów zbieżnych] i $\{\varphi(x_n)\} \subset (c)$.

Na mocy (6) odległość ciągu $\{\varphi(x_n)\}$ od zbioru linjowego $\overline{L}$ jest $\geqslant M_1$. Istnieje zatem, na mocy lemmatu do twierdzenia 6 rozdziału IVA, ciąg liczb $\{C_n\}$ i liczba $\{C\}$ taka, że

$$C \lim_{n\to\infty} f(x_n) + \sum_{n=1}^{\infty} C_n f(x_n) = 0 \quad \text{dla} \quad f \subset L, \tag{7}$$

$$C \lim_{n\to\infty} \varphi(x_n) + \sum_{n=1}^{\infty} C_n \varphi(x_n) = 1\,,$$

$$|C| + \sum_{n=1}^{\infty} |C_n| \leqslant \frac{1}{M_1}.$$

Jeżeli teraz przyjmiemy

$$x_0 = \sum_{n=1}^{\infty} C_n x_n\,,$$

wówczas na mocy (7)

$$f(x_0) = 0 \quad \text{dla} \quad f \subset L,$$

$$\varphi(x) = 1\,,$$

$$|x_0| \leqslant \sum_{n=1}^{\infty} |C_n|\,|x_n| \leqslant \frac{1}{M_1} = \frac{1}{M}.$$

Definicja. Jeżeli l jest przestrzenią wektorjalną zamkniętą, wówczas zbiór L wszystkich funkcjonałów linjowych, spełniających warunek

$$f(x) = 0 \quad \text{dla} \quad x \subset l,$$

nazywamy zbiorem *regularnie zamkniętym*.

Definicja. Ciąg $\{f_n\}$ funkcjonałów linjowych *zdąża słabo* do funkcjonału f (piszemy wówczas $\lim\limits_{n\to\infty} f_n = f$), jeżeli dla każdego x

$$\lim_{n\to\infty} f_n(x) = f(x).$$

Funkcjonał $f(x)$ nazywamy *słabą granicą* ciągu $\{f_n\}$ (mówimy często wprost zbieżny w sensie słabo zbieżnym).

Funkcjonał $f(x)$ jest funkcjonałem addytywnym Baire'a, jest zatem linjowy.

Na mocy twierdzenia 5 rozdziału V A, ciąg norm $\{|f_n|\}$ jest ograniczony.

Jeśli

$$\lim_{n\to\infty} f_n(x) = f(x),$$

wówczas

$$\lim_{n\to\infty} |f_n(x)| = |f(x)|,$$

zatem

$$\varliminf_{n\to\infty} |f_n|\,|x| \geqslant |f(x)|,$$

czyli

$$|f| \leqslant \varliminf_{n\to\infty} |f_n|.$$

Z tego, cośmy wyżej powiedzieli, wynika łatwo

Twierdzenie 3. *Na to, aby ciąg funkcjonałów linjowych* $\{f_n(x)\}$ *był słabo zbieżny do funkcjonału* $f(x)$, *konieczne jest i wystarcza, aby*

1) *ciąg* $\{|f_n|\}$ *był ograniczony,*

2) $\lim\limits_{n\to\infty} f_n(x) = f(x)$ *dla elementów* x *pewnego zbioru wszędziegęstego* (*lub podstawowego*).

Twierdzenie 4. *Jeżeli zbiór* E *jest ośrodkowy, wówczas z każdego ciągu* $\{f_n\}$ *funkcjonałów, których normy są wspólnie ograniczone, da się wyrwać ciąg słabo zbieżny.*

Dowód. Wystarczy w tym celu z ciągu $\{f_n\}$ wyrwać ciąg częściowy, zbieżny w pewnym zbiorze przeliczalnym wszędziegęstym. Uczynić to można łatwo przy pomocy metody przekątni.

Twierdzenie 5. *Jeżeli E jest przestrzenią ośrodkową, wówczas każdy zbiór L funkcjonałów linjowych zawiera podzbiór przeliczalny R wszędziegęsty słabo w L (t. zn. dla każdego $f \subset L$ istnieje ciąg $\{f_n\} \subset R$ zdążający słabo do f).*

Dowód. Twierdzenie powyższe wystarczy udowodnić przy założeniu, że funkcjonały L mają normy wspólnie ograniczone. Każdy bowiem zbiór jest sumą przeliczalnej liczby zbiorów, mających powyższą własność. Niechaj $\{x_n\}$ będzie zbiorem wszędziegęstym w E.

Niechaj Z_n oznacza zbiór punktów przestrzeni n-wymiarowej o współrzędnych

$$(f(x_1),\quad f(x_2), \ldots,\quad f(x_n)) \quad \text{dla} \quad f \subset L.$$

Istnieje oczywiście zbiór przeliczalny $K_n \subset L$ taki, że punkty

$$(f(x_1),\quad f(x_2), \ldots,\quad f(x_n)) \quad \text{dla} \quad f \subset K_n,$$

tworzą zbiór wszędziegęsty w Z_n. Niechaj $R = \sum_{n=1}^{\infty} K_n$. R jest zbiorem przeliczalnym. Jeżeli $f \subset L$, wówczas istnieje ciąg $\{f_n\}$, spełniający warunki:

$$1) \quad f_n \subset K_n, \qquad 2) \quad |f_n(x_i) - f(x_i)| < \frac{1}{n} \qquad (i = 1, 2, \ldots n).$$

Ciąg $\{f_n\}$ zdąża więc słabo do f, gdyż normy funkcjonałów $\{f_n\}$, jako należących do L, są w myśl założenia wspólnie ograniczone.

Twierdzenie 6. *Jeżeli E jest przestrzenią ośrodkową, wówczas na to, by przestrzeń L wektorjalna funkcjonałów linjowych była słabozamknięta, konieczne jest i wystarcza, by granica każdego ciągu słabo zbieżnego funkcjonałów, należących do L, należała również do L.*

Dowód. Konieczność warunku jest oczywista. Pokażemy, że warunek jest wystarczający.

Niechaj $\{f_\xi\}$ $(1 < \xi \leqslant \vartheta)$ będzie ciągiem typu ϑ, przyczem niech

$$f_\xi \subset L, \qquad \|f_\xi\| \leqslant M \qquad (1 \leqslant \xi < \vartheta).$$

Niechaj $\{x_n\}$ będzie zbiorem wszędziegęstym w E.

Dla każdej liczby naturalnej istnieje liczba ξ_n, spełniająca warunki

$$\liminf_{\xi \to \vartheta} f_\xi(x_i) - \frac{1}{n} \leqslant f_{\xi_n}(x_i) \leqslant \limsup_{\xi \to \vartheta} f_\xi(x_i) + \frac{1}{n} \quad (1 \leqslant i \leqslant n). \quad (1)$$

Z ciągu $\{f_{\xi_n}\}$ wyrwać można ciąg częściowy słabo zbieżny do f, który oczywiście będzie funkcjonałem granicznym ciągu $\{f_\xi\}$ i w myśl założenia należeć będzie do L.

ROZDZIAŁ VIII B.

Funkcjonały linjowe w przestrzeniach *(B)*.

(Ciąg dalszy)

§ 1. Przestrzeniami typu (B) ośrodkowemi są przestrzenie $(L^{(p)})$ $(p \geqslant 1)$, (C), $(l^{(p)})$ $(p \geqslant 1)$, (c).

W przestrzeniach $(L^{(p)})$, (C) wielomiany o spółczynnikach wymiernych tworzą zbiór przeliczalny wszędziegęsty.

W przestrzeniach $(l^{(p)})$ $(p \geqslant 1)$ zbiór przeliczalny wszędziegęsty tworzą ciągi o wyrazach wymiernych, posiadające tylko skończoną liczbę wyrazów różnych od zera.

W przestrzeni (c) należy do poprzedniego zbioru dołączyć ciągi, z których każdy ma, począwszy od pewnego miejsca, wszystkie wyrazy równe jakiejś liczbie wymiernej.

§ 2. *Słaba zbieżność funkcjonałów w niektórych przestrzeniach ośrodkowych.*

a) *Przestrzeń* $(L^{(p)})$ $(p > 1)$. Ponieważ każdy funkcjonał linjowy $f(x)$ określony w $(L^{(p)})$ jest kształtu

$$\int_0^1 x(t)\,\alpha(t)\,dt, \quad \text{gdzie} \quad \alpha(t) \subset (L^{\left(\frac{p}{p-1}\right)}),$$

zatem ciąg funkcjonałów

$$\{f_n(x)\} = \left\{\int_0^1 x(t)\,\alpha_n(t)\,dt\right\}, \text{ gdzie } \alpha_n(t) \subset (L^{\left(\frac{p}{p-1}\right)}),$$

zdąża słabo do funkcjonału

$$f(x) = \int_0^1 x(t)\,\alpha(t)\,dt$$

wtedy i tylko wtedy, jeżeli dla każdego $x(t) \subset (L^{(p)})$ zachodzi

$$\lim_{n \to \infty} \int_0^1 x(t)\,\alpha_n(t)\,dt = \int_0^1 x(t)\,\alpha(t)\,dt.$$

Widzimy stąd, że słaba zbieżność funkcjonałów linjowych w $(L^{(p)})$ sprowadza się do słabej zbieżności elementów w $\left(L^{\left(\frac{p}{p-1}\right)}\right)$.

b) Analogiczne uwagi stosują się do słabej zbieżności w $(l^{(p)})$ $(p > 1)$.

c) *Przestrzeń* (L). W przestrzeni (L) każdy funkcjonał linjowy $f(x)$ jest postaci

$$f(x) = \int_0^1 x(t)\,\alpha(t)\,dt, \quad \text{gdzie} \quad \alpha(t) \subset (M).$$

Ciąg funkcjonałów linjowych

$$\{f_n(x)\} \equiv \left\{ \int_0^1 x(t)\,\alpha_n(t)\,dt \right\}$$

zdąża zatem słabo do funkcjonału linjowego

$$f(x) = \int_0^1 x(t)\,\alpha(t)\,dt,$$

jeżeli dla każdego $x(t) \subset (L)$ zachodzi

$$\lim_{n \to \infty} \int_0^1 x(t)\,\alpha_n(t)\,dt = \int_0^1 x(t)\,\alpha(t)\,dt. \tag{1}$$

Twierdzenie 7. *Na to, by związek* (1) *zachodził dla każdej funkcji* $x(t)$ *całkowalnej w* $<0,1>$, *konieczne jest i wystarcza:*

1) *by funkcje* $\{\alpha_n(t)\}$ *i* $\alpha(t)$ *były wspólnie ograniczone poza zbiorem miary zero,*

2) *by* $\lim\limits_{n\to\infty}\int\limits_0^t \alpha_n(u)\,du = \int\limits_0^t \alpha(u)\,du \qquad (0 \leqslant t \leqslant 1).$

Dowód. Konieczność warunku 1) wynika z twierdzenia 3 rozdziału VIIIA; mamy bowiem

$$\|f_n\| = \underset{0\leqslant t\leqslant 1}{\text{istotny kres górny}} |\alpha_n(t)|;$$

przyjmując zaś

$$x_t(u) = \begin{cases} 0 & \text{dla} \quad 0 \leqslant t < u \leqslant 1, \\ 1 & \text{„} \quad 1 \geqslant t \geqslant u \geqslant 0, \end{cases}$$

mamy

$$\int\limits_0^1 x_t(u)\,\alpha_n(u)\,du = \int\limits_0^t \alpha_n(u)\,du.$$

Dostateczność warunków wynika z uwagi, że zbiór funkcyj

$$\{x_t(u)\} \qquad (0 \leqslant t \leqslant 1)$$

jest zbiorem pełnym w (L), gdyż

$$\int\limits_0^1 x_t(u)\,\alpha(u)\,du = 0 \qquad (0 \leqslant t \leqslant 1)$$

pociąga za sobą $\alpha(u) = 0$ prawie wszędzie.

d) Analogiczne warunki odnoszą się do przestrzeni (l).

Łatwo można udowodnić następujące twierdzenie:

Na to, aby dla każdego ciągu $\{\xi_i\} \subset (l)$ *zachodził związek*

$$\lim_{k\to\infty}\sum_{i=1}^{\infty}\alpha_{ik}\,\xi_i = \sum_{i=1}^{\infty}\alpha_i\,\xi_i,$$

konieczne jest i wystarcza,

1) *by istniała liczba* $M > 0$, *spełniająca warunek*

$$|\alpha_{ik}| < M, \qquad |\alpha_i| < M \qquad (i, k = 1, 2, \ldots),$$

oraz

2) *by* $\lim_{k\to\infty} \alpha_{ik} = \alpha_i \qquad (i = 1, 2, \ldots)$.

§ 3. a) Z każdego ciągu funkcyj $\{x_n(t)\} \subset (L^{(p)})$ $(p > 1)$, spełniających warunek

$$\int_0^1 |x_n(t)|^p\, dt < M \qquad (M \text{ — niezależne od } n),$$

da się wyrwać ciąg słabo zbieżny do pewnej funkcji $x_0(t) \subset (L^{(p)})$; inn. słowy, istnieje taki ciąg wskaźników $\{n_i\}$ dążących do $+\infty$, że

$$\lim_{i\to\infty} \int_0^1 x_{n_i}(t)\, y(t)\, dt = \int_0^1 x_0(t)\, y(t)\, dt \quad \text{dla} \quad y \subset (L^{\left(\frac{p}{p-1}\right)}).$$

Dowód wynika z twierdzenia 4 rozdziału VIII A, i z uwagi, że elementy przestrzeni $(L^{(p)})$ $(p > 1)$ można uważać za reprezentanty funkcjonałów linjowych określonych w $(L^{\left(\frac{p}{p-1}\right)})$ [1]).

b) Z każdego ciągu funkcyj $x_n(t)$ wspólnie ograniczonych (poza zbiorem miary zero) da się wyrwać ciąg słabo zbieżny do pewnej funkcji $x_0(t)$ ograniczonej (poza zbiorem miary zero), t. zn. istnieje taki ciąg wskaźników $\{n_i\}$ dążących do $+\infty$, że

$$\lim_{i\to\infty} \int_0^1 x_{n_i}(t)\, y(t)\, dt = \int_0^1 x_0(t)\, y(t)\, dt \quad \text{dla} \quad y \subset (L).$$

Dowód wynika znowu z twierdzenia 4 rozdziału VIII A, i uwagi, że funkcje ograniczone uważać możemy za reprezentanty funkcjonałów linjowych w (L).

---

[1]) Twierdzenie to udowodnił pierwszy p. F. Riesz. Zob. pracę cytowaną na str. 71 pod [1]) (p. 466 — 467).

Analogiczne twierdzenia i dowody występują w przestrzeniach $(l^{(p)})$ $(p > 1)$ i (m).

§ 4. Jeżeli przestrzeń funkcjonałów uważać będziemy za przestrzeń elementów typu (B), wówczas słaba zbieżność elementów tej przestrzeni może nie być równoważna słabej zbieżności funkcjonałów.

Przestrzeń np. (l) uważać możemy jako przestrzeń funkcjonałów linjowych określonych w (c_0) (t. j. przestrzeni ciągów zbieżnych do zera).

W przypadku tym ciąg $\{\xi_i^{(n)}\} \subset (l)$ dąży słabo do $\{\xi_i\} \subset (l)$, jeżeli

$$\lim_{n\to\infty} \xi_i^{(n)} = \xi_i, \qquad \sum_{i=1}^{\infty} |\xi_i^{(n)}| < M \quad (\text{gdzie } M \text{ jest niezależne od } n).$$

Na str. 150 zaś udowodniliśmy, że jeżeli przestrzeń (l) uważamy jako przestrzeń elementów, wówczas na to, by ciąg $\{\xi_i^{(n)}\}$ zdążał słabo do $\{\xi_i\}$ konieczne jest i wystarcza, by

$$\lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{\infty} |\xi_i^{(n)} - \xi_i| = 0.$$

Widzimy więc, że pojęcie słabej zbieżności zależy od tego, czy elementy danej przestrzeni uważamy za reprezentanty funkcjonałów linjowych, czy nie.

§ 5. Jeżeli E jest przestrzenią typu (B), wówczas przestrzeń funkcjonałów linjowych określonych w E nazywamy przestrzenią *sprzężoną* do E. Przestrzeń sprzężoną z E oznaczać będziemy przez $\overline{E}$.

Oczywiście $\overline{E}$ jest również typu (B).

a) *Jeżeli przestrzenie E i E_1 typu (B) są izomorficzne (wzgl. równoważne), wówczas przestrzenie sprzężone $\overline{E}$ i $\overline{E_1}$ są izomorficzne (wzgl. równoważne).*

Dowód. Jeżeli bowiem istnieje operacja linjowa $y = U(x)$, odwzorowująca w sposób jedno - jednoznaczny i obustronnie ciągły E na E_1, wówczas każdemu funkcjonałowi linjowemu Y, określonemu w $\overline{E_1}$, przypisać możemy funkcjonał linjowy

$$X(x) = YU(x),$$

określony w E. Ponieważ operacja odwrotna $x = U^{-1}(y)$ jest linjowa, więc każdemu funkcjonałowi linjowemu X, określonemu w E, odpowiada funkcjonał

$$Y(y) = XU^{-1}(y),$$

określony w E_1. Zatem przestrzenie $\overline{E_1}$ i $\overline{E}$ są izomorficzne.

Gdyby pola E i E_1 były równoważne, wówczas dla odpowiednich funkcjonałów linjowych X oraz Y mielibyśmy $|X| = |Y|$, gdyż

$$|X| = \underset{|x| \leqslant 1}{\text{górny kres}}\, X(x) =$$

$$= \underset{|x| \leqslant 1}{\text{górny kres}}\, YU(x) = \underset{|y| \leqslant 1}{\text{górny kres}}\, Y(y) = |Y|.$$

b) *Jeżeli przestrzeń E typu (B) jest ośrodkowa i jeżeli z każdego ciągu elementów $\{x_i\}$ o normach wspólnie ograniczonych da się wyrwać ciąg słabozbieżny do pewnego elementu x, wówczas przestrzeń E jest równoważna z przestrzenią sprzężoną do $\overline{E}$.*

D o w ó d. Oznaczmy przez H zbiór funkcjonałów linjowych $F(X)$, określonych w $\overline{E}$, postaci

$$F(X) = X(x_0), \quad \text{dla każdego} \quad X \subset \overline{E},$$

gdzie x_0 jest pewnym elementem E zależnym tylko od F.

Mamy oczywiście $|F(X)| \leqslant |X| . |x_0|$, a zatem $|F| \leqslant |x_0|$.

Na mocy twierdzenia 3 rozdziału IVA istnieje taki funkcjonał $X_0 \subset \overline{E}$, iż

$$|X_0| = 1 \quad \text{i} \quad X_0(x_0) = |x_0|,$$

a zatem

$$F(X_0) = |x_0|, \quad \text{czyli} \quad |x_0| \leqslant |F|,$$

i wobec poprzedniego $|F| = |x_0|$.

Zbiór H jest zbiorem pełnym w $\overline{\overline{E}}$ ($\overline{\overline{E}}$ oznacza przestrzeń funkcjonałów linjowych określonych w $\overline{E}$). Jeżeli bowiem mamy, dla pewnego $X_0 \subset \overline{E}$,

$$F(X_0) = 0 \quad \text{dla każdego} \quad F \subset H,$$

wówczas $X_0(x) = 0$ dla każdego $x \subset E$, a więc $X_0 = 0$.

Pokażemy teraz, że H jest zbiorem słabozamkniętym.

Niechaj ϑ będzie dowolną liczbą graniczną pozaskończoną, i niech $\{F_\xi\}$ $(1 \leqslant \xi < \vartheta)$ oznacza ciąg funkcjonałów zbioru H o normach wspólnie ograniczonych; istnieje zatem liczba $M > 0$ taka, że

$$|F_\xi| < M \qquad (1 \leqslant \xi < \vartheta).$$

Każdy funkcjonał F_ξ jest kształtu

$$F_\xi(x) = X(x_\xi) \qquad (1 \leqslant \xi \leqslant \vartheta).$$

Zbiór E jest ośrodkowy, istnieje zatem ciąg $\{x_i\}$ wszędziegęsty w E. Niechaj n oznacza liczbę naturalną dowolną. Oznaczmy przez $x_\xi^{(n)}$ dowolny element ciągu $\{x_i\}$, spełniający nierówność

$$|x_\xi^{(n)} - x_\xi| < \frac{1}{n} \qquad (1 \leqslant \xi < \vartheta). \tag{1}$$

Niechaj

$$F_\xi^{(n)}(X) = X(x_\xi^{(n)}) \quad \text{dla} \quad X \subset \overline{E}.$$

Przypuśćmy, że ϑ jest liczbą porządkową spółkońcową z ω. Istnieje zatem ciąg przeliczalny $\{\xi_i\}$ liczb porządkowych, mniejszych od ϑ i zdążających do ϑ. Z ciągu $\{x_{\xi_i}^{(n)}\}$ da się wyrwać ciąg słabozbieżny do pewnego elementu $x^{(n)}$.

Oczywiście mamy dla każdego X

$$\overline{\lim_{\xi \to \vartheta}} F_\xi^{(n)}(X) \geqslant \overline{\lim_{i \to \infty}} F_{\xi_i}^{(n)}(X) = \overline{\lim_{i \to \infty}} X(x_{\xi_i}^{(n)}) \geqslant X(x^{(n)})$$

i funkcjonał $F^{(n)}(X) = X(x^{(n)})$ jest przeto funkcjonałem granicznym ciągu $\{F_{\xi_n}^{(n)}\}$.

Jeżeli ϑ nie jest liczbą spółkońcową z ω, wówczas z uwagi, że ciąg $\{x_\xi^{(n)}\}$ zawiera tylko przeliczalną liczbę różnych elementów, wynika istnienie takiego elementu $x^{(n)}$, że do każdej liczby porządkowej $\eta < \vartheta$ istnieje liczba porządkowa $\xi < \eta$ i $\xi < \vartheta$, taka, że

$$x_\xi^{(n)} = x^{(n)}.$$

Oczywiście

$$\overline{\lim_{\xi \to \vartheta}} F_\xi^{(n)}(X) = \overline{\lim_{\xi \to \vartheta}} X(x_\xi^{(n)}) \geqslant X(x^{(n)}) = F^{(n)}(X).$$

$F^{(n)}$ jest więc funkcjonałem granicznym ciągu $\{F_\xi^{(n)}\}$.

Z ciągu $\{x^{(n)}\}$ da się wyjąć ciąg słabozbieżny do pewnego elementu x_0. Niech $X(x_0) = F_0(x)$.

Oczywiście $F_0 \subset H$ oraz

$$\overline{\lim_{n \to \infty}} F^{(n)}(x) \geqslant F_0(x). \tag{2}$$

Na mocy (1) mamy:

$$X(x_\xi) \geqslant X(x_\xi^{(n)}) - \frac{1}{n} \| X \|,$$

$$\overline{\lim_{\xi \to \vartheta}} F_\xi(x) = \overline{\lim_{\xi \to \vartheta}} X(x_\xi) \geqslant \overline{\lim_{\xi \to \vartheta}} X(x_\xi^{(n)}) - \frac{1}{n} \| X \| =$$

$$= \overline{\lim_{\xi \to \vartheta}} F_\xi^{(n)}(X) - \frac{1}{n} \|X\| \geqslant F^{(n)}(X) - \frac{1}{n} \| X \|.$$

A więc, na mocy (2),

$$\overline{\lim_{\xi \to \vartheta}} F_\xi(x) \geqslant \overline{\lim_{n \to \infty}} F^{(n)}(X) \geqslant F_0(x).$$

Funkcjonał F_0 jest więc funkcjonałem granicznym ciągu $\{F_\xi\}$ i należy do zbioru H, który jest tedy zbiorem słabozamkniętym.

Ponieważ H jest jednak również zbiorem pełnym, więc na mocy twierdzenia 2 rozdziału VIII A zawiera wszystkie funkcjonały linjowe określone w $\overline{E}$.

Każdemu tedy funkcjonałowi F linjowemu określonemu w $\overline{E}$ odpowiada element x spełniający warunek

$$F(x) = X(x) \quad \text{dla} \quad X \subset \overline{E},$$

$$|F| = |x|.$$

Jeżeli więc przyjmiemy

$$F = U(x),$$

to operacja $U(x)$ jest operacją linjową, odwzorowującą E na $\overline{\overline{E}}$ w sposób jedno-jednoznaczny, przyczem

$$|U(x)| = |x|.$$

Przestrzenie E i $\overline{\overline{E}}$ są zatem równoważne.

Uwaga. $(L^{(p)})$ i $(l^{(p)})$ $(p > 1)$ są przestrzeniami równoważnemi z przestrzeniami sprzężonemi do przestrzeni swoich funkcjonałów linjowych.

§ 6. Własność A pewnej przestrzeni nazywamy *izomorficzną*, jeżeli każda przestrzeń izomorficzna z pewną przestrzenią, posiadającą własność A, posiada również własność A.

1. *Moc* zbioru jak i własność, że *zbiór jest ośrodkowy*, są własnościami izomorficznemi.

2. Własność: *z każdego ciągu elementów* $\{x_n\}$ *o normach ograniczonych da się wyjąć ciąg słabozbieżny*, jest własnością izomorficzną.

Własność powyższą mają $(L^{(p)})$, $(l^{(p)})$ $(p > 1)$; własności tej nie posiadają (L), (C), (l), (c).

3. Własność: *jeżeli dla pewnego ciągu* $\{x_n\}$

$$\lim_{n \to \infty} f(x_n)$$

istnieje dla każdego funkcjonału linjowego, wówczas istnieje element x_0, *do którego ciąg* $\{x_n\}$ *jest słabozbieżny*, jest własnością izomorficzną.

Powyższą własność posiadają $(L^{(p)})$, $(l^{(p)})$ $(p \geqslant 1)$; (C) i (c) nie posiadają tej własności.

4. Własność: *jeżeli ciąg* $\{x_n\}$ *jest słabozbieżny do elementu* x_0, *wówczas jest mocnozbieżny* (*t. zn. wedle normy*) jest własnością izomorficzną.

Własność powyższą posiada przestrzeń (l), nie posiadają jej przestrzenie $(L^{(p)})$ $(p \geqslant 1)$, $(l^{(p)})$ $(p > 1)$.

5. Własność: *przestrzeń posiada bazę* jest własnością izomorficzną.

Przestrzenie $(L^{(p)})$, $(l^{(p)})$ $(p \geqslant 1)$, (C), (c) posiadają bazę.

6. Własność: *przestrzeń sprzężona jest ośrodkowa* jest własnością izomorficzną.

Własność powyższą posiadają przestrzenie $(L^{(p)})$, $(l^{(p)})$ $(p > 1)$, (c); nie posiadają tej własności przestrzenie (L), (l), (C).

7. Własność: *przestrzeń jest izomorficzna z przestrzenią sprzężoną* jest własnością izomorficzną.

Własność powyższą posiada przestrzeń $(L^{(2)})$ i $(l^{(2)})$, nie posiadają jej (c), (l), (L).

ROZDZIAŁ IX A.

Równania funkcjonalne linjowe.

§ 1. W rozdziale tym zajmiemy się równaniami typu

$$y = U(x),$$

gdzie operacja U jest linjowa, dziedzina x-ów tworzy przestrzeń E, przeciwdziedzina — przestrzeń E' [1]).

O przestrzeniach E i E' zakładamy, jak zwykle, że są typu (B).

Funkcjonały linjowe, określone w E oznaczać będziemy literą X, zaś określone w E' literą Y.

Jeżeli odwzorowanie określone przez operację linjową

$$y = U(x)$$

jest jedno-jednoznaczne, to oczywiście operacja odwrotna

$$x = U^{-1}(y)$$

jest addytywna. Łatwo widać, że warunkiem koniecznym i wystarczającym na to, by istniała operacja odwrotna, jest warunek

$$U(x) = \Theta \quad \text{pociąga za sobą} \quad x = \Theta.$$

[1]) Twierdzenia § 1 tego rozdziału znajdują się w pracy cytowanej na str. 26 pod [1]) (p. 234—238).

Jeżeli operacja odwrotna jest ciągła, wówczas istnieje $m>0$ takie, że

$$\| x \| \leqslant m \| y \| .$$

Jeżeli, odwrotnie, istnieje liczba $m>0$ o tej własności, że

$$m \| x \| \leqslant \| U(x) \| ,$$

to istnieje operacja odwrotna ciągła.

Jeżeli operacja odwrotna jest ciągła, to przeciwdziedzina jest zamknięta.

Jeżeli bowiem $\lim\limits_{n\to\infty} y_n = y$, to przyjmując $U(x_n) = y_n$, mamy

$$\lim_{p,q\to\infty} \| x_p - x_q \| \leqslant m \overline{\lim_{p,q\to\infty}} \| y_p - y_q \| = 0,$$

i przyjmując $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = x$,

mamy

$$U(x) = y.$$

Jeżeli Y_0 jest funkcjonałem granicznym ciągu $\{Y_\xi\}$ typu ϑ, wówczas funkcjonał $X_0 = \overline{U}(Y_0)$ jest funkcjonałem granicznym ciągu $\{X_\xi\} = \{\overline{U}(Y_\xi)\}$ typu ϑ.

Jest to oczywiste, gdyż dla każdego x mamy

$$X_\xi(x) = Y_\xi[U(x)] \qquad (0 \leqslant \xi < \vartheta).$$

Lemmat. *Niechaj operacja $X = \overline{U}(Y)$ posiada odwrotność ciągłą. Jeżeli L' oznacza dowolną przestrzeń wektorjalną Y-ów, a $\overline{U}(L')$ odpowiedni zbiór X-ów, wówczas, jeżeli L' jest przestrzenią słabozamkniętą, to zbiór $\overline{U}(L')$ jest również słabozamknięty.*

D o w ó d. Z założenia wynika, że istnieje liczba $m>0$ taka, że

$$\| \overline{U}(Y) \| \geqslant m \| Y \| \quad \text{dla każdego } Y.$$

Jeżeli więc dla $1 \leqslant \xi < \vartheta$ mamy

$$X_\xi \subset \overline{U}(L'), \quad \| X_\xi \| \leqslant K,$$

i jeżeli $X_\xi = \overline{U}(Y_\xi)$, wówczas dla $1 \leqslant \xi < \vartheta$ zachodzi

$$\| Y_\xi \| \leqslant \frac{1}{m} K, \qquad Y_\xi \subset L'.$$

Ciąg $\{Y_\xi\}$ posiada funkcjonał graniczny $Y_0 \subset L'$, gdyż zbiór L' jest słabozamknięty. Oczywiście $X_0 = \overline{U}(Y_0)$ należy do $\overline{U}(L')$ i jest funkcjonałem granicznym ciągu $\{X_\xi\}$.

Twierdzenie 1. 1. *Jeżeli operacja sprzężona* $X = \overline{U}(Y)$ *ma odwrotność ciągłą, wówczas równanie* $y = U(x)$ *ma dla każdego* y *rozwiązanie.*

2. *Jeżeli operacja* $X = \overline{U}(Y)$ *ma dla każdego* X *rozwiązanie, wówczas:*

a) *operacja* $y = U(x)$ *ma odwrotność ciągłą,*

b) *przeciwdziedzina jej jest zbiorem* y*-ów, spełniających warunek*

$$Y(y) = 0, \quad \text{jeżeli} \quad \overline{U}(Y) = 0.$$

Dowód. 1. Niechaj y_0 będzie dowolnym elementem zbioru E'. Niechaj L' będzie zbiorem wszystkich funkcjonałów linjowych Y, takich, że $Y(y_0) = 0$.

Oznaczmy przez L zbiór funkcjonałów

$$X = \overline{U}(Y) \quad \text{dla} \quad Y \subset L'.$$

Ponieważ L' jest zbiorem słabozamkniętym, więc na mocy lemmatu poprzedniego zbiór L jest również słabozamknięty. Zbiór L nie zawiera funkcjonału $X_0 = \overline{U}(Y_0)$, gdzie Y_0 jest funkcjonałem linjowym takim, że $Y_0(y_0) = 1$. Na mocy więc twierdzenia 2 rozdziału VIII A istnieje element x_0 taki, że:

$$X_0(x_0) = 1, \qquad X(x_0) = 0 \quad \text{jeżeli} \quad X \subset L.$$

Niech

$$y_1 = U(x_0).$$

Mamy

$$Y_0(y_1) = X_0(x_0) = 1, \qquad Y(y_1) = 0 \quad \text{jeżeli} \quad Y \subset L'.$$

Niechaj Y będzie dowolnym funkcjonałem linjowym i niech

$$Y' = Y - (Y(y_0)) \,.\, Y_0.$$

Zatem

$$Y'(y_1) = 0, \quad \text{czyli} \quad Y(y_1) - Y(y_0) = 0, \quad \text{więc} \quad Y(y_1 - y_0) = 0.$$

Ponieważ Y jest dowolnym funkcjonałem linjowym, więc

$$y_1 - y_0 = 0, \quad \text{czyli} \quad y_0 = U(x_0).$$

2 a) Gdyby twierdzenie 2 a) było nieprawdziwe, to istniałby ciąg elementów $\{x_n\}$ taki, że

$$\lim_{n\to\infty} \| x_n \| = +\infty, \qquad \lim_{n\to\infty} \| y_n \| = 0, \qquad y_n = U(x_n).$$

Niechaj X będzie dowolnym funkcjonałem, a Y funkcjonałem takim, że

$$X = \overline{U}(Y).$$

Mamy:

$$\lim_{n\to\infty} X(x_n) = \lim_{n\to\infty} Y(y_n) = 0.$$

Ponieważ X jest dowolnym funkcjonałem, przeto z ostatniej równości wynika, że ciąg $\{x_n\}$ ma normy ograniczone, co jest sprzeczne z założeniem.

2b) Niechaj element y_0 spełnia warunek

$$Y(y_0) = 0 \quad \text{jeżeli} \quad \overline{U}(Y) = 0. \tag{1}$$

Przeciwdziedzina G' operacji $U(x)$ jest zamknięta. Jeżeli zatem przypuścimy, że y_0 nie należy do G', wówczas na mocy twierdzenia 2 rozdz. IVA istnieje funkcjonał Y_0 taki, że

$$Y_0(y_0) = 1, \qquad Y_0(y) = 0 \quad \text{dla} \quad y \subset G'.$$

Jeżeli $X_0 = \overline{U}(Y_0)$, $y \subset G'$, $y = U(x)$, wówczas:

$$X_0(x) = Y_0(y) = 0, \quad \text{zatem} \quad \overline{U}(Y_0) = 0,$$

co na mocy (1) jest niemożliwe. Zatem

$$v_0 \subset G'.$$

Naodwrót, jeżeli

$$\overline{U}(Y) = X = 0,$$

wówczas dla $y \subset G'$

$$Y(y) = X(x) = 0.$$

Twierdzenie 2. 1. *Jeżeli operacja $y = U(x)$ ma odwrotność ciągłą, wówczas równanie $X = \overline{U}(Y)$ ma dla każdego X rozwiązanie.*

2. *Jeżeli operacja $y = U(x)$ ma dla każdego y rozwiązanie, wówczas:*

a) *operacja $X = \overline{U}(Y)$ ma odwrotność ciągłą,*

b) *przeciwdziedzina jej jest zbiorem X-ów, spełniających warunek $X(x) = 0$, jeżeli $U(x) = 0$.*

Dowód przeprowadza się analogicznie jak poprzedni; należy tylko litery $x, y, X, Y, U, \overline{U}$ zamienić odpowiednio na $Y, X, y, x, \overline{U}, U$. Jeżeli w dowodzie użyto twierdzenia o elementach, należy obecnie oprzeć się na twierdzeniu analogicznem o funkcjonałach, i naodwrót.

Z twierdzeń 1, 2 wynikają łatwo twierdzenia:

Twierdzenie 3. *Jeżeli równanie $y = U(x)$ ma dla każdego y zawsze jedno jedyne rozwiązanie, wówczas równanie $X = \overline{U}(Y)$ ma dla każdego X także zawsze jedno jedyne rozwiązanie, i naodwrót.*

Twierdzenie 4. *Jeżeli operacje $y = U(x)$ i $X = \overline{U}(Y)$ mają odwrotności ciągłe, wówczas dla każdego y i X istnieje dokładnie jedno odpowiednio x oraz Y takie, że*

$$y = U(x), \qquad X = \overline{U}(Y).$$

Twierdzenie 5. *Jeżeli operacje* $y = U(x)$ *i* $X = \overline{U}(Y)$ *mają dla każdego* y *i* X *rozwiązanie, to dokładnie jedno.*

Twierdzenie 6. a) *Jeżeli przeciwdziedzina operacji linjowej* $U(x)$ *jest zamknięta, wówczas przeciwdziedzina operacji* $\overline{U}(Y)$ *jest zbiorem* X *spełniających warunek:* $X(x) = 0$, *skoro* $U(x) = 0$. b) *Jeżeli przeciwdziedzina operacji linjowej* $\overline{U}(Y)$ *jest zamknięta, to przeciwdziedzina operacji* $U(x)$ *jest zbiorem* y, *spełniających warunek:* $Y(y) = 0$, *skoro* $\overline{U}(Y) = 0$.

Dowód. Niech G oznacza pochodną przeciwdziedziny operacji $U(x)$; G jest przestrzenią typu (B). Oznaczmy przez Z dowolny funkcjonał linjowy określony w G, a przez $\overline{U}_1(Z)$ funkcjonał linjowy X spełniający równanie

$$Z\,U(x) = X(x) \quad \text{dla} \quad x \subset E.$$

Łatwo sprawdzamy, że przeciwdziedziny operacji $\overline{U}_1(Z)$, $\overline{U}(Y)$ są identyczne. Jeżeli bowiem Y jest funkcjonałem linjowym określonym w E_1 i takim, że

$$Z(y) = Y(y) \quad \text{dla} \quad y \subset G, \tag{1}$$

wówczas $Z\,U(x) = Y\,U(x)$ dla każdego x, a zatem

$$\overline{U}_1(Z) = \overline{U}(Y). \tag{2}$$

Jeżeli zaś Z jest funkcjonałem linjowym określonym w G, wówczas na mocy twierdzenia 2 rozdziału IVA istnieje w E_1 funkcjonał linjowy Y, spełniający warunek (1), a zatem i (2). Twierdzenie a) dostajemy z twierdzenia 2. Co do b), to zauważmy przedewszystkiem, że, gdy $\overline{U}_1(Z) = \Theta$, to $Z(y) = 0$ dla $y \subset G$, a zatem $Z = \Theta$. Ponieważ zbiory Z-ów i X-ów są przestrzeniami typu (B), więc na mocy twierdzenia 12 rozdziału IIIA operacja $X = \overline{U}_1(Z)$ ma odwrotność ciągłą. Zatem na mocy twierdzenia 1 równanie $y = U(x)$ ma dla każdego $y \subset G$ rozwiązanie i przeciwdziedzina operacji $U(x)$ jest temsamem zamknięta.

§ 2. Zajmiemy się teraz równaniami typu

$$y = x - U(x),$$

gdzie U jest operacją linjową pełnociągłą, której przeciwdziedzina mieści się w dziedzinie [1]).

Lemmat. *Jeżeli operacja $U(x)$ jest pełnociągła, wówczas operacja $T(x) \equiv x - U(x)$ przeprowadza zbiór zamknięty ograniczony w zbiór zamknięty.*

Dowód. Niechaj G będzie zbiorem ograniczonym. Przypuśćmy, że

$$x_n \subset G \qquad (n = 1, 2, \ldots), \qquad \lim_{n\to\infty} T(x_n) = y_0. \tag{1}$$

Ponieważ ciąg $\{U(x_n)\}$ jest zbiorem zwartym, zatem istnieje ciąg częściowy $\{U(x_{n_i})\}$ zbieżny do pewnego elementu x_0.

Ponieważ

$$U(x_{n_i}) = x_{n_i} - T(x_{n_i}),$$

zatem, na mocy (1), mamy

$$\lim_{i\to\infty} x_{n_i} = y_0 + x_0\,,$$

skąd

$$T(y_0 + x_0) = y_0\,.$$

Twierdzenie 7. *Jeżeli operacja linjowa $U(x)$ jest pełnociągła, wówczas przeciwdziedziny operacyj*

$$T(x) = x - U(x) \quad \text{i} \quad \overline{T}(X) = X - \overline{U}(X)$$

są zamknięte.

Dowód. Niechaj G oznacza zbiór rozwiązań równania

$$T(x) = 0.$$

---

[1]) Twierdzenia tego § z wyjątkiem tych, w których występuje pojęcie operacji sprzężonej, zostały dowiedzione po raz pierwszy przez p. F. Riesza. Zob.: F. Riesz, Uber lineare Funktionalgleichungen, Acta Math. 41 (1918) p. 71—98.

Przypuśćmy, że $y_0 \neq \Theta$ jest elementem skupienia przeciwdziedziny. Istnieje zatem ciąg elementów $\{x_n\}$ taki, że

$$\lim_{n\to\infty} T(x_n) = y_0 .$$

Gdyby ciąg $\{|x_n|\}$ był ograniczony, wówczas, na mocy lemmatu powyżej dowiedzionego, element y_0 należałby do przeciwdziedziny. Oznaczmy przez d_n odległość elementu x_n od zbioru G. Istnieje zatem element $w_n \subset G$ taki, że

$$d_n \leqslant |x_n - w_n| \leqslant \left(1 + \frac{1}{n}\right) d_n . \tag{1}$$

Mamy

$$\lim_{n\to\infty} T(x_n - w_n) = y_0 . \tag{2}$$

Gdyby ciąg $\{|x_n - w_n|\}$ był ograniczony, wówczas w myśl lemmatu twierdzenie byłoby udowodnione.

Przyjmijmy więc, że

$$\lim_{n\to\infty} |x_n - w_n| = +\infty .$$

Przyjmując

$$z_n = \frac{x_n - w_n}{|x_n - w_n|},$$

mamy na mocy (2)

$$\lim_{n\to\infty} T(z_n) = \Theta \quad \text{i} \quad |z_n| = 1.$$

Na mocy więc lemmatu z ciągu $\{z_n\}$ da się wyrwać ciąg $\{z_{k_i}\}$ zbieżny do elementu w_0, dla którego zachodzi

$$T(w_0) = 0,$$

a więc

$$w_0 \subset G.$$

Niech $z_n - w_0 = \varepsilon_n$. Mamy

$$\lim_{i\to\infty} |\varepsilon_{k_i}| = 0 . \tag{3}$$

Zatem

$$\frac{x_n - w_n}{|x_n - w_n|} - w_0 = \varepsilon_n,$$

czyli

$$x_n - w_n - w_0 |x_n - w_n| = \varepsilon_n |x_n - w_n|.$$

Stąd, na mocy (1),

$$\Big| x_{n_i} - w_{n_i} - w_0 |x_{n_i} - w_{n_i}| \Big| \leqslant |\varepsilon_{n_i}| \cdot \left(1 + \frac{1}{n_i}\right) d_{n_i}. \tag{4}$$

Na mocy (3) i (4) istnieje takie n_i, że

$$\Big| x_{n_i} - w_{n_i} - w_0 |x_{n_i} - w_{n_i}| \Big| \leqslant \frac{d_{n_i}}{2},$$

co jest niemożliwe, gdyż

$$w_{n_i} + w_0 |x_{n_i} - w_{n_i}| \subset G,$$

zaś d_{n_i} jest odległością x_{n_i} od G. Stąd wynika bezpośrednio, że przeciwdziedzina operacji T jest również zamknięta.

Lemmat. *Jeżeli zbiór linjowy G_1 zamknięty jest częścią właściwą zbioru linjowego G, wówczas dla każdej liczby $\varepsilon > 0$ istnieje $x_0 \subset G$ takie, że*

$$|x_0| = 1, \qquad |x_0 - x| \geqslant 1 - \varepsilon \quad \textit{dla} \quad x \subset G.$$

D o w ó d. Niechaj $x' \subset G - G_1$. Jeżeli d oznacza odległość x' od G_1, a η dowolną liczbę dodatnią, wówczas istnieje element $y' \subset G_1$ taki, że

$$d \leqslant |x' - y'| \leqslant d + \eta.$$

Przyjmijmy

$$x_0 = \frac{x' - y'}{|x' - y'|}.$$

Jeżeli $y \subset G_1$, wówczas

$$|x_0 - y| = \frac{1}{|x' - y'|} \Big| x' - y' - |x' - y'| \cdot y \Big|.$$

Ponieważ

$$y' + |x' - y'|\, y \subset G_1, \quad \text{gdyż} \quad y' \subset G_1 \quad \text{i} \quad y \subset G_1,$$

zatem

$$|x_0 - y| \geqslant \frac{1}{|x' - y'|}\, d \geqslant \frac{d}{d + \eta}.$$

Obierając odpowiednie $\eta > 0$, otrzymamy

$$|x_0 - y| \geqslant 1 - \varepsilon, \qquad y \subset G_1.$$

Oczywiście

$$|x_0| = \frac{|x' - y'|}{|x' - y'|} = 1,$$

$$x_0 \subset G, \quad \text{gdyż} \quad x' \subset G \quad \text{i} \quad y' \subset G_1 \subset G.$$

Twierdzenie 8. *Jeżeli $U(x)$ jest operacją linjową pełnociągłą, wówczas równania $x - U(x) = \Theta$, jakoteż $X - \overline{U}(X) = \Theta$ mają conajwyżej skończoną liczbę rozwiązań linjowo niezależnych.*

Dowód. Przypuśćmy, że istnieje ciąg $\{x_n\}$ elementów linjowo niezależnych i spełniających równania

$$x_n - U(x_n) = \Theta \qquad (n = 1, 2, \ldots).$$

Oznaczmy przez E_n zbiór elementów kształtu

$$\sum_{i=1}^{n} h_i x_i,$$

gdzie h_i są dowolnemi liczbami rzeczywistemi.

Oczywiście gdy $x \subset E_n$, wówczas

$$x - U(x) = \Theta.$$

Łatwo widać, że zbiór E_n jest zbiorem linjowym zamkniętym, nie zawierającym elementu x_{n+1}, zatem będącym częścią właściwą zbioru E_{n+1}. Na mocy lemmatu istnieje ciąg elementów $\{y_n\}$, spełniających związki

$$|y_n| = 1, \qquad y_n \subset E_n, \qquad |y_n - y| > \tfrac{1}{2} \quad \text{jeżeli} \quad y \subset E_{n-1}. \tag{1}$$

Lecz

$$y_n - U(y_n) = \Theta \quad \text{czyli} \quad y_n = U(y_n).$$

Ciąg $\{y_n\}$ powinien więc być zwartym, co się sprzeciwia nierówności (1).

Dowód dla równania $X - \overline{U}(X) = \Theta$ przedstawia się analogicznie; uważać możemy zbiór X-ów za przestrzeń typu (B).

Twierdzenie 9. *Jeżeli równanie $y = x - U(x)$, gdzie $U(x)$ jest operacją pełnociągłą, ma dla każdego y rozwiązanie, wówczas równanie $x - U(x) = \Theta$ nie ma rozwiązania po za $x = \Theta$.*

Dowód. Połóżmy

$$T^{(1)}(x) = x - U(x) = T(x), \qquad T^{(n)}(x) = T(T^{(n-1)}(x)).$$

Oznaczmy przez E_n zbiór x-ów, spełniających równanie

$$T^{(n)}(x) = \Theta.$$

Przypuśćmy, że istnieje element $x_1 \neq \Theta$ dla którego zachodzi

$$T(x_1) = \Theta.$$

Oznaczmy przez x_n element, spełniający równanie

$$x_{n-1} = T(x_n) \qquad (n = 2, 3, \ldots).$$

Ponieważ

$$T^{(n)}(x_{n+1}) = x_1 \neq \Theta, \qquad T^{(n+1)}(x_{n+1}) = T(x_1) = \Theta,$$

więc

$$x_{n+1} \subset E - E_n, \qquad x_{n+1} \subset E_{n+1}.$$

Oczywiście E_n jest zbiorem zamkniętym linjowym, będącym częścią właściwą zbioru E_{n+1}.

Na mocy więc lemmatu, istnieje ciąg elementów $\{y_n\}$, spełniających związki

$$|y_n| = 1, \qquad y_n \subset E_n, \qquad |y_n - x| > \tfrac{1}{2} \quad \text{dla} \quad x \subset E_{n-1}. \qquad (1)$$

Mamy

$$T(y_n) = y_n - U(y_n),$$

zatem

$$U(y_p) - U(y_q) = y_p - [y_q + T(y_p) - T(y_q)] = y_p - x.$$

Jeżeli $p > q$, wówczas z uwagi, że $y_n \subset E_n$, wynika

$$T^{(p-1)}(x) = T^{(p-1)}(y_q) + T^{(p)}(y_p) - T^{(p)}(y_q) = \Theta,$$

zatem $x \subset E_{p-1}$, więc na mocy (1)

$$|y_p - x| > \tfrac{1}{2},$$

czyli

$$|U(y_p) - U(y_q)| > \tfrac{1}{2} \qquad (p > q),$$

co jest niemożliwe, gdyż z ciągu $\{U(y_n)\}$ da się wyrwać ciąg zbieżny.

Analogicznie otrzymujemy

Twierdzenie 10. *Jeżeli równanie $Y = X - \overline{U}(X)$ ($U(x)$ operacja pełnociągła) ma dla każdego Y rozwiązanie, wówczas równanie*

$$X - U(X) = \Theta$$

nie ma rozwiązania po za $X = \Theta$.

Dowód prowadzi się analogicznie, uważać możemy bowiem zbiór X-ów za przestrzeń typu (B).

Twierdzenie 11. *Jeżeli równanie $x - U(x) = \Theta$ ($U(x)$ operacja linjowa pełnociągła) ma jedyne rozwiązanie $x = \Theta$, wówczas równanie*

$$y = x - U(x)$$

ma dla każdego y rozwiązanie.

Dowód. Ponieważ przeciwdziedzina operacji $x - U(x)$ jest zamknięta, zatem na mocy twierdzenia 2 i założenia wynika, że równanie

$$Y = X - \overline{U}(X)$$

ma dla każdego Y rozwiązanie.

Na mocy więc twierdzenia 10, $X - U(X) = \Theta$ ma jedyne rozwiązanie $X = \Theta$. Na mocy więc twierdzenia 1, równanie

$$y = x - U(x)$$

ma dla każdego y rozwiązanie.

Analogicznie udowadnia się

Twierdzenie 12. *Jeżeli równanie* $X - \overline{U}(X) = \Theta$ ($U(x)$ *operacja pełnociągła*) *ma jedyne rozwiązanie* $X = \Theta$, *wówczas równanie*

$$Y = X - \overline{U}(X)$$

ma rozwiązanie dla każdego Y.

Twierdzenie 13. *Jeżeli* $U(x)$ *jest operacją pełnociągłą wówczas równania*

$$x - U(x) = \Theta \quad \text{i} \quad X - \overline{U}(X) = \Theta,$$

mają równą liczbę rozwiązań linjowo niezależnych.

D o w ó d [1]). Połóżmy

$$T(x) = x - U(x), \qquad \overline{T}(X) = X - \overline{U}(X).$$

Niechaj

$$T(x_i) = \Theta \quad (i = 1, 2, \ldots n), \qquad \overline{T}(X_i) = \Theta \quad (i = 1, 2, \ldots \nu), \tag{1}$$

przyczem zakładamy, że elementy $\{x_i\}$ względnie funkcjonały $\{X_i\}$ są linjowo niezależne, liczby zaś n i ν oznaczają największą liczbę rozwiązań linjowo niezależnych równania

$$T(x) = \Theta \quad \text{względnie} \quad \overline{T}(X) = \Theta.$$

Niechaj η_i $(1 \leqslant i \leqslant \nu)$ oznacza dowolny element, taki, że

$$X_i(\eta_i) = 1, \qquad X_j(\eta_i) = 0 \quad \text{dla} \quad j \neq i. \tag{2}$$

Istnienie takiego elementu jest widoczne, gdyż zbiór linjowy typu

---

[1]) W pewnych przypadkach specjalnych twierdzenie to udowodnił p. F. R i e s z w pracy cytowanej na str. 190, p. 96—98. Dowód tego twierdzenia w tej ogólności przy innem jego sformułowaniu podał p. T. H. H i l d e b r a n d t; zob.: T. H. H i l d e b r a n d t, Über vollstetige lineare Transformationen, Acta Math. 51 (1928) p. 311—318. W sformułowaniu przez nas podanem twierdzenie to znajduje się w pracy p. J. S c h a u d e r a, cytowanej w uwagach do rozdziału VI A.

$$\sum_{j=1}^{i-1} \alpha_j X_j + \sum_{j=i+1}^{\nu} \beta_j X_j$$

jest słabo zamknięty i nie zawiera X_i.

Analogicznie oznaczmy przez Z_i $(1 \leqslant i \leqslant n)$ funkcjonał linjowy, taki, że

$$Z_i(x_i) = 1, \qquad Z_i(x_j) = 0 \qquad \text{dla} \qquad i \neq j. \tag{3}$$

Funkcjonał Z_i istnieje, gdyż x_i nie należy do zbioru linjowego zamkniętego kształtu

$$\sum_{j=1}^{i-1} \alpha_j x_j + \sum_{j=i+1}^{n} \beta_j x_j.$$

Przypuśćmy, że $\nu > n$. Połóżmy

$$R(x) = U(x) + \sum_{i=1}^{n} Z_i(x) \eta_i.$$

Jak łatwo widać, operacja $R(x)$ jest pełnociągła.

Zauważmy, że równanie

$$w(x) \equiv x - R(x) = \Theta$$

ma jedyne rozwiązanie $x = \Theta$. Przypuśćmy bowiem, że

$$W(x_0) \equiv x_0 - R(x_0) = T(x_0) - \sum_{i=1}^{n} Z_i(x_0) \eta_i = \Theta. \tag{4}$$

Zauważmy, że na mocy (1) mamy $(1 \leqslant i \leqslant \nu)$

$$X_i\, T(x) = \Theta \quad \text{dla każdego } x, \tag{5}$$

zatem na mocy (4) i (2) mamy

$$X_i\, W(x_0) = Z_i(x_0) = 0 \qquad (1 \leqslant i \leqslant n). \tag{6}$$

A więc $T(x_0) = \Theta$, skąd na mocy (1) i znaczenia liczby n

$$x_0 = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i x_i ;$$

α_i są odpowiednie liczby rzeczywiste.

Na mocy (6) i (3) mamy stale

$$Z_i(x_0) = \alpha_i = 0 \quad \text{a więc} \quad x_0 = \Theta .$$

Na mocy więc twierdzenia 11 równanie

$$x - R(x) = T(x) - \sum_{i=1}^{n} Z_i(x)\,\eta_i = \eta_{n+1}$$

miałoby rozwiązanie, lecz jak łatwo widać na mocy (2) i (5) mamy

$$X_{n+1}(x - R(x)) = 0,$$

zaś na mocy (2)

$$X_{n+1}(\eta_{n+1}) = 1.$$

Zatem nie może zachodzić nierówność $\nu > n$.

Gdybyśmy przypuścili, że $\nu < n$, wówczas kładąc

$$R(x) = \sum_{i=1}^{\nu} Z_i(x)\,\eta_i,$$

mamy

$$\overline{R}(X) = \sum_{i=1}^{\nu} X(\eta_i)\,Z_i .$$

Postępując jak poprzednio, wykażemy, że równanie

$$\overline{T}(X) - \sum_{i=1}^{\nu} X(\eta_i) Z_i = \Theta,$$

sprzężone do równania $T(x) - \sum_{i=1}^{\nu} Z_i(x)\,\eta_i = \Theta$ ma jedyne rozwiązanie $X = \Theta$. Na mocy więc twierdzenia 12 równanie

$$\overline{T}(X) - \sum_{i=1}^{\nu} X(\eta_i)\, Z_i = Z_{\nu+1}$$

powinno mieć rozwiązanie, lecz to jest niemożliwe, gdyż

$$\overline{T}(X)\, x_{\nu+1} = X\, T(x_{\nu+1}) = 0 \quad \text{dla każdego } X,$$

$$Z_i(x_{\nu+1}) = 0 \quad \text{dla} \quad i \leqslant n \quad \text{zaś} \quad Z_{\nu+1}(x_{\nu+1}) = 1.$$

A więc $n = \nu$, o co chodziło.

§ 3. Załóżmy, że operacja linjowa $U(x)$ ma przeciwdziedzinę mieszczącą się w E. Wówczas dla każdego h rzeczywistego, operacja $x - h\,U(x)$ jest operacją linjową.

Sprzężona do niej ma kształt

$$X - h\,\overline{U}(X),$$

gdzie $\overline{U}$ jest sprzężoną do U. Zajmiemy się teraz badaniem równań

$$\left.\begin{aligned} x - h\,U(x) &= y, && \text{(a)} \\ X - h\,\overline{U}(X) &= \mathfrak{Y}. && \text{(b)} \end{aligned}\right\} \quad \text{(I)}$$

Jeżeli dla pewnego h_0 równanie (a) ma dla każdego y jedno jedyne rozwiązanie, wówczas powiadamy, że h_0 jest wartością *regularną* równania (a), w przeciwnym wypadku h_0 nazywa się wartością *właściwą*. Zbiór wartości właściwych tworzy tak zwane *spektrum*.

Na mocy twierdzenia 3 wynika, że równania (a) i (b) mają ten sam zbiór wartości regularnych, zatem i właściwych.

Twierdzenia 1 — 6 łatwo czytelnik wypowie dla równań typu (I).

Twierdzenia powyższe pozwalają z zachowania się równania (a) wnioskować o równaniu (b) i naodwrót.

Twierdzenie 14. *Zbiór wartości regularnych jest zbiorem otwartym.*

D o w ó d. Przypuśćmy, że h_0 jest wartością regularną. Istnieje zatem liczba $m > 0$ spełniająca związki

$$|x - h_0 U(x)| \geqslant m |x|,$$

$$|X - h_0 \overline{U}(X)| \geqslant m |X|,$$

Dla dowolnego ε mamy

$$|x - (h_0 + \varepsilon) U(x)| \geqslant |x - h_0 U(x)| - |\varepsilon| \, |U(x)| \geqslant (m - |\varepsilon| \, |U|) |x|,$$

analogicznie

$$|X - (h_0 + \varepsilon) \overline{U}(X)| \geqslant (m - |\varepsilon| \, |\overline{U}|) |X|.$$

Wynika stąd, że dla ε dość małych co do modułu, operacje

$$x - (h_0 + \varepsilon) U(x),$$

$$X - (h_0 + \varepsilon) \overline{U}(X)$$

mają odwrotność ciągłą, co na mocy twierdzenia 4 pociąga, że $h_0 + \varepsilon$ jest wartością regularną.

Twierdzenie 15. *Jeżeli* $|h| < \dfrac{1}{|U|}$, *wówczas h jest wartością regularną.*

D o w ó d[1]). Jeżeli $|h| < \dfrac{1}{|U|}$, wówczas rozwiązania możemy przedstawić w postaci

$$x = y + \sum_{n=1}^{\infty} h^n U^{(n)}(y), \qquad X = Y + \sum_{n=1}^{\infty} h^n \overline{U}^{(n)}(Y) \tag{1}$$

$$[U^{(1)}(y) = U(y), \qquad U^{(n)}(y) = U\, U^{(n-1)}(y),$$

$$\overline{U}^{(1)}(Y) = \overline{U}(Y), \qquad \overline{U}^{(n)}(Y) = \overline{U}\, \overline{U}^{(n-1)}(Y)]$$

Szeregi powyższe są zbieżne, gdyż

---

[1]) Zob. pracę cytowaną na str. 38, p. 161, Théorème 7.

$$\sum_{n=1}^{\infty} | h^n U^{(n)}(y) | \leqslant \sum_{n=1}^{\infty} \{ | h | . | U | \} \; | y |,$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} | h^n \overline{U}^{(n)}(Y) | \leqslant \sum_{n=1}^{\infty} \{ | h | . | U | \}^n | Y |.$$

Z (1) wynika

$$U(x) = U(y) + \sum_{n=1}^{\infty} h^n U^{(n+1)}(y) = \frac{1}{h} \sum_{n=1}^{\infty} h^n U^{(n)}(y) = \frac{1}{h} [x - y],$$

zatem $x - h\, U(x) = y$, analogicznie $X - h\, \overline{U}(X) = Y$.

Ponieważ równania (I) mają dla każdego y i Y rozwiązania, zatem na mocy twierdzenia 5 jedyne, więc h jest wartością regularną.

Jeżeli x względnie X spełnia równania

$$\left.\begin{aligned} x + h\, U(x) &= \Theta, \\ \overline{X} + h\, U(X) &= \Theta, \end{aligned}\right. \qquad \text{(II)}$$

wówczas x względnie X nazywa się *elementem* wzgl. *funkcjonałem właściwym.*

Twierdzenie 16. *Jeżeli*

$$\left.\begin{aligned} x - h\, U(x) &= \Theta, \\ X - h'\, \overline{U}(X) &= \Theta, \end{aligned}\right. \qquad (h \neq h')$$

wówczas $X(x) = 0$.

(Innemi słowy: Element właściwy wartości h jest ortogonalny do każdego funkcjonału właściwego wartości h', jeżeli $h \neq h'$).

Dowód. Mamy

$$X(x) = h\, X\, U(x) = h\, \overline{U}(X)\, x\, .$$

Ponieważ

$$\overline{U}(X) = \frac{1}{h'} X$$

zatem

$$X(x) = \frac{h}{h'} X(x).$$

Z uwagi na to, że $h \neq h'$, otrzymujemy

$$X(x) = 0.$$

§ 4. Jeżeli $U(x)$ jest operacją pełnociągłą, wówczas dla równań (II) można wypowiedzieć następujące twierdzenia, które są uogólnieniem twierdzeń Fredholma dla równań całkowych.

Twierdzenie 17. a) *Równania* (II) *mają tę samą skończoną liczbę* $d(h)$ *rozwiązań niezależnych;*

b) *Jeżeli* $d(h) = 0$, *wówczas* h *jest wartością regularną;*

c) *Jeżeli* $d(h) > 0$, *zaś*

$$\{x_i\}, \quad \{X_i\} \qquad (i = 1, 2, \ldots d(h))$$

są niezależnemi rozwiązaniami równań (II), *wówczas równanie* (Ia) *ma rozwiązanie dla każdego* y, *spełniającego warunki*

$$X_i(y) = 0 \qquad (i = 1, 2, \ldots d(h)),$$

równanie zaś (Ib) *ma rozwiązanie dla każdego* Y *spełniającego warunki*

$$Y(x_i) = 0 \qquad (i = 1, 2, \ldots d(h)).$$

Dowód. [1]) a) jest to inna wypowiedź twierdzenia 13,

b) wynika z twierdzenia 11 i z a),

c) wynika z twierdzenia 6 i twierdzenia 7.

Twierdzenie 18. *Jeżeli* $U(x)$ *jest operacją pełnociągłą, wówczas zbiór wartości właściwych równania* (Ia) *jest zbiorem izolowanym.*

Dowód [2]). Przypuśćmy, że

$$\lim_{n\to\infty} h_n = h, \qquad (h_i \neq h_k \quad \text{dla} \quad i \neq k)$$

---

[1]) Zob. pracę p. J. Schaudera cytowaną w uwagach do rozdziału VI A.

[2]) Zob. pracę cytowaną na str. 190, p. 90, Satz 12.

i że h_n są wartościami właściwemi równania (Ia). Niechaj

$$x_n = h_n\, U(x_n), \qquad x_n \neq \Theta. \tag{1}$$

Zauważmy, że elementy x_n są linjowo niezależne.

Przypuśćmy bowiem, że elementy $x_1\; x_2 \ldots\; x_{n-1}$ są linjowo niezależne, zaś

$$x_n = \sum_{i=1}^{n-1} \alpha_i\, x_i\,;$$

mamy

$$x_n = h_n\, U(x_n) = \sum_{i=1}^{n-1} h_n\, \alpha_i\, U(x_i),$$

zatem

$$x_n = \sum_{i=1}^{n-1} h_n \frac{\alpha_i}{h_i}\, x_i\,,$$

skąd

$$\sum_{i=1}^{n-1} \alpha_i \left(1 - \frac{h_n}{h_i}\right) x_i = 0,$$

a ponieważ $\dfrac{h_n}{h_i} \neq 1 \;\; (n > i)$, zatem elementy x_i $(i = 1, 2, \ldots\, n-1)$ byłyby linjowo zależne.

Oznaczmy przez G_n zbiór linjowy elementów y kształtu

$$y = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i\, x_i\,;$$

oczywiście G_n jest zbiorem zamkniętym i jest częścią właściwą zbioru G_{n+1}. Jeżeli $y \subset G_n$ wówczas

$$y - h_n\, U(y) \subset G_{n-1}\,.$$

Mamy bowiem, na mocy (1),

$$y - h_n\, U(y) = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i\, x_i - \sum_{i=1}^{n} h_n\, \alpha_i \frac{x_i}{h_i} = \sum_{i=1}^{n-1} \alpha_i \left(1 - \frac{h_n}{h_i}\right) x_i.$$

Na mocy lemmatu § 2, istnieje ciąg elementów $\{y_n\}$, spełniający związki

$$|y_n| = 1, \quad y_n \subset G_n, \quad |y_n - y| > \tfrac{1}{2} \text{ jeżeli } y \subset G_{n-1}. \quad (2)$$

Ponieważ $\{h_n\}$ jest ciągiem ograniczonym, zatem ciąg

$$\{U(h_n y_n)\}$$

jest ciągiem zwartym. Lecz dla $p > q$ mamy

$$|U(h_p y_p) - U(h_q y_q)| = |y_p - (y_p - h_p U(y_p) + U(h_q y_q))|.$$

Ponieważ

$$y_p \subset G_p, \qquad y_p - h_p U(y_p) \subset G_{p-1}, \qquad h_q U(y_q) \subset G_q \subset G_{p-1},$$

zatem na mocy (2)

$$|U(h_p y_p) - U(h_q y_q)| > \tfrac{1}{2} \quad \text{dla} \quad p > q.$$

A więc ciąg $U(h_n y_n)$ nie jest ciągiem zwartym.

Wynika stąd, że wartości właściwe nie mają punktu skupienia w skończoności.

ROZDZIAŁ IX B.

Równania funkcjonalne linjowe.

(Ciąg dalszy).

§ 1. Do równań typu $x - h\,U(x) = y$ w przestrzeniach $(L^{(p)})$ sprowadzają się t. zw. równania całkowe Fredholma, kształtu

$$x(s) - h \int_0^1 K(s,t)\, x(t)\, dt = y(s), \tag{1}$$

gdzie $K(s,t)$ spełnia odpowiednie warunki.

Równanie

$$X - h\,\overline{U}(X) = Y$$

przedstawia się w postaci

$$X(t) - h \int_0^1 K(s,t)\, X(s)\, ds = Y(t). \tag{2}$$

Czytelnik z łatwością zinterpretuje twierdzenia rozdziału IX A w odpowiedni sposób dla równań całkowych.

Jeżeli $K(s\,t)$ spełniają odpowiednie warunki, wówczas operacja linjowa

$$\int_0^1 K(s,t)\, x(t)\, dt$$

jest pełnociągłą i stosują się do równań (1), (2) twierdzenia § 2 i § 4 rozdziału IX A.

W szczególności twierdzenia 17 przyjmują postać t. zw. twierdzeń Fredholma.

Oczywiście twierdzenia te pozostają prawdziwe nietylko dla równań całkowych.

§ 2. Równania typu

$$x(s) - \int_0^s K(s, t)\, x(t)\, dt = y(s), \tag{1}$$

gdzie $K(s, t)$ jest funkcją ciągłą, noszą nazwę równań Volterry.

Operacja

$$\int_0^s K(s, t)\, x(t)\, dt$$

jest pełnociągłą w przestrzeniach $(L^{(p)})$ $(p > 1)$ i (C).

Wykażemy, że równanie

$$x(s) - \int_0^s K(s, t)\, x(t)\, dt = 0 \tag{2}$$

ma tylko jedno rozwiązanie $x(s) \equiv 0$.

Przypuśćmy, że $x(s)$ spełnia powyższe równanie.

Oczywiście $x(s)$ jest funkcją ciągłą. Niechaj

$$m = \max_{o \leqslant t \leqslant 1} |x(t)|, \qquad M = \max_{o \leqslant s,\, t \leqslant 1} |K(s, t)|.$$

Na mocy (2)

$$|x(s)| \leqslant M \int_0^s |x(t)|\, dt, \tag{3}$$

zatem

$$|x(s)| \leqslant M m s \qquad (0 \leqslant s \leqslant 1).$$

Stąd na mocy (3), wstawiając Mms zamiast $x(t)$, otrzymamy

$$|x(s)| \leqslant M^2 m \frac{s^2}{2}.$$

Postępując tak dalej dostajemy

$$|x(s)| \leqslant \frac{(Ms)^n}{n} m \qquad (n = 1, 2, \ldots).$$

Oczywiście więc $x(s) \equiv 0$.

Ponieważ równanie (2) ma tylko jedno rozwiązanie $x(s) \equiv 0$, a operacja

$$Y(s) = \int_0^s K(s, t)\, x(t)\, dt$$

jest pełnociągłą dla

$$x \subset (L^{(p)}),\ y \subset (L^{(p)}) \text{ oraz } x \subset (C),\ y \subset (C),$$

zatem równanie (1) ma dla każdego $y \subset (L^{(p)})$ rozwiązanie jedno jedyne $x \subset (L^{(p)})$.

§ 3. Jeżeli $y = U(x)$ jest operacją linjową dla $x \subset (L^{(2)})$, $y \subset (L^{(2)})$, wówczas operacja sprzężona

$$X = \overline{U}(Y)$$

uważaną być może za operację linjową dla $Y \subset (L^{(2)})$, $X \subset (L^{(2)})$.

Wynika to stąd, że wszelki funkcjonał linjowy w $(L^{(2)})$ jest kształtu

$$\int_0^1 Y(t)\, x(t)\, dt, \quad \text{gdzie} \quad Y(t) \subset (L^{(2)}).$$

Możemy zatem funkcję $Y(t)$ uważać za reprezentanta powyższego funkcjonału.

Jeżeli

$$\int_0^1 y\, U(x) = \int_0^1 x\, U(y) \quad \text{dla } x \subset (L^{(2)}),\quad y \subset (L^{(2)}), \tag{1}$$

wówczas operację linjową $U(x)$ nazywamy *symetryczną*.

Ponieważ

$$\int_0^1 y\,U(x) = \int_0^1 x\,\overline{U}(y),$$

zatem operacja symetryczna równa jest swojej sprzężonej.

Jeżeli $K(s, t)$ jest funkcją symetryczną [t. zn. $K(s, t) = K(t, s)$] i ponadto

$$\int_0^1 \int_0^1 K(s, t)\, x(t)\, y(s)\, ds\, dt$$

istnieje dla każdego $x \subset (L^{(2)})$ i $y \subset (L^{(2)})$, wówczas operacje

$$U(x) = \int_0^1 K(s\,t)\, x(t)\, dt = y(s),$$

$$V(x) = x(s) - h \int_0^1 K(s\,t)\, x(t)\, dt = y(s), \qquad (2)$$

są operacjami linjowemi symetrycznemi, gdyż spełniają warunek (1).

Równania typu (2) noszą nazwę *równań całkowych symetrycznych.*

Jeżeli $U(x)$ jest operacją symetryczną, wówczas do równań typu

$$x - h\,U(x) = y \qquad (\mathrm{I})$$

odnoszą się następujące twierdzenia.

Twierdzenie 1. *Wartość parametru h jest regularną jeżeli, albo równanie* (I) *ma odwrotność ciągłą, albo jeżeli równanie* (I) *ma dla każdego y rozwiązanie.*

Dowód wynika z uwagi, że równanie sprzężone jest identyczne z danem.

Twierdzenie 2. *Równanie* (I) *posiada zawsze przynajmniej jedną wartość właściwą. Najmniejszą wartością właściwą jest jedna z liczb:*

$$\frac{1}{\|U\|}, \qquad -\frac{1}{\|U\|}.$$

($\|U\|$, jak łatwo widać, jest najmniejszą liczbą, spełniającą nierówność

$$\int_0^1 U^2(x) \leqslant \|U\|^2 \int_0^1 x^2 \quad \text{dla każdego} \quad x \subset (L^{(2)})).$$

Dowód opiera się na następującej uwadze.

Jeżeli

$$\lim_{n\to\infty} \int_0^1 x_n y_n = 1, \qquad \int_0^1 x_n^2 \leqslant 1, \qquad \int_0^1 y_n^2 \leqslant 1 \qquad (n = 1, 2, \ldots),$$

wówczas

$$\lim_{n\to\infty} \int_0^1 (x_n - y_n)^2 = 0.$$

Mamy bowiem

$$\lim_{n\to\infty} \int_0^1 (x_n - y_n)^2 = \lim_{n\to\infty} \int_0^1 x_n^2 + \lim_{n\to\infty} \int_0^1 y_n^2 - 2 \lim_{n\to\infty} \int_0^1 x_n y_n \leqslant 0.$$

Niechaj k^2 oznacza najmniejszą liczbę, spełniającą nierówność

$$\int_0^1 [U(x)]^2\, dt \leqslant k^2 \int_0^1 x^2, \tag{3}$$

to znaczy

$$k^2 = \|U\|^2.$$

Istnieje zatem, taki ciąg $\{x_n\}$, że

$$\int_0^1 x_n^2(t) = 1, \quad \lim_{n\to\infty} \int_0^1 [U(x_n)]^2 = k^2. \tag{4}$$

Mamy

$$\lim_{n\to\infty}\int_0^1 \frac{1}{k^2}\,[\,U(x_n)\,]^2 = \lim_{n\to\infty}\int_0^1 \frac{1}{k^2}\,U(x_n)\,U(x_n) =$$

$$= \lim_{n\to\infty}\int_0^1 x_n\left[\frac{1}{k^2}\,U\,U(x_n)\right] = 1. \tag{5}$$

Ponieważ, na mocy (3) i (4),

$$\int_0^1\left[\frac{1}{k^2}\,U\,U(x_n)\right]^2 \leqslant \frac{1}{k^4}\,k^2\int_0^1 U^2(x_n) \leqslant \frac{1}{k^4}\,k^2\,.\,k^2\int_0^1 x_n^2 = 1,$$

zatem, na mocy uwagi uczynionej poprzednio, mamy

$$\lim_{n\to\infty}\int_0^1\left[x_n - \frac{1}{k^2}\,U\,U(x_n)\right]^2 = 0, \tag{6}$$

skąd, kładąc

$$x_n - \frac{1}{k}\,U(x_n) = y_n, \tag{7}$$

$$\lim_{n\to\infty}\int_0^1 \left(y_n + \frac{1}{k}\,U(y_n)\right)^2 = 0. \tag{8}$$

Wynika stąd, że albo $h = \frac{1}{k}$, albo $h = -\frac{1}{k}$ jest wartością właściwą. Przypuśćmy bowiem, że $h = -\frac{1}{k}$ i $h = \frac{1}{k}$ są wartościami regularnemi. Wówczas równanie (I) posiada odwrotność ciągłą dla $h = \pm\frac{1}{k}$. Zatem istnieje liczba $M > 0$, taka, że

$$\left\| x \pm \frac{1}{k}\,U(x)\right\|^2 \geqslant M^2\,\|x\|^2 = M^2\int_0^1 x^2.$$

Stąd, na mocy (7), $\int\limits_0^1 y_n^2 \geqslant M^2$, a więc

$$\int\limits_0^1 (y_n + \frac{1}{k} U(y_n))^2 \geqslant M^2 \int\limits_0^1 y_n^2 \geqslant M^4,$$

to zaś sprzeciwia się (8).

Na mocy twierdzenia 15 rozdziału IX widzimy, że jeżeli

$$|h| < \frac{1}{\|U\|},$$

wówczas h jest wartością regularną.

Przypuśćmy, że h_0 jest wartością właściwą i że

$$\lim_{n\to\infty} \int\limits_0^1 (x_n - h_0 U(x_n))^2 = 0, \qquad \int\limits_0^1 x_n^2 = 1. \tag{1}$$

Kładąc $y_n = x_n - h_0 U(x_n)$, mamy

$$\lim_{n\to\infty} \int y_n^2 = 0, \tag{2}$$

oraz

$$\lim_{n\to\infty} \int\limits_0^1 x_n U(x_n) = \lim_{n\to\infty} \int\limits_0^1 [y_n + h_0 U(x_n)] U(x_n) =$$

$$= \lim_{n\to\infty} \left[\int\limits_0^1 y_n U(x_n) + h_0 \int\limits_0^1 (U(x_n))^2 \right]. \tag{3}$$

Na mocy (2),

$$\lim_{n\to\infty} \int\limits_0^1 y_n U(x_n) = 0,$$

na mocy (1),

$$\lim_{n\to\infty} h_0^2 \int\limits_0^1 [U(x_n)]^2 = \lim_{n\to\infty} \int\limits_0^1 x_n^2 = 1,$$

stąd na mocy (3)

$$\lim_{n\to\infty} \int_0^1 x_n\, U(x_n) = \frac{1}{h_0}. \tag{4}$$

Zauważmy, że jeżeli $\int x^2 = 1$, to

$$\left| \int_0^1 x\, U(x) \right| \leqslant \sqrt{\int x^2} \, . \, \| U \| \sqrt{\int x^2} = \| U \| .$$

Stąd, na mocy (4), widzimy, że:

Górny kres wyrażenia

$$\left| \int_0^1 x\, U(x) \right|, \quad \left(\int x^2 \leqslant 1 \right)$$

jest równy bezwzględnej wartości najmniejszej co do modułu wartości właściwej.

ROZDZIAŁ X.

Przestrzenie typu *(G)*.

§ 1. Niechaj E będzie przestrzenią (D) zupełną.

Przypuśćmy, że każdej uporządkowanej parze elementów x, y przestrzeni E przypisany jest jednoznacznie element z tej przestrzeni; oznaczmy go przez xy, nazywając iloczynem elementów x, y.

Załóżmy, że E jest grupą ze względu na powyższy iloczyn, t. zn.:

I_1. $(xy)z = x(yz)$;

I_2. Istnieje element jednostkowy 1, taki, że

$$1 . x = x . 1 = x \quad \text{dla każdego } x;$$

I_3. Każdemu elementowi x odpowiada element odwrotny x^{-1}, spełniający równanie

$$x . x^{-1} = 1.$$

Z aksjomatów, powyższych wynika łatwo, że:

a) Istnieje dokładnie jeden element jednostkowy;

b) Elementem odwrotnym względem x^{-1} jest x;

c) $xy = xz$ pociąga za sobą $y = z$.

Załóżmy ponadto, że spełnione są aksjomaty następujące:

II_1. $\lim\limits_{n \to \infty} x_n = x$ i $\lim\limits_{n \to \infty} y_n = y$

pociągają za sobą

$$\lim_{n\to\infty} x_n y_n = x y;$$

II_2. $\lim\limits_{n\to\infty} y_n = y$ pociąga $\lim\limits_{n\to\infty} y_n^{-1} = y^{-1}$.

Przestrzenie, spełniające powyższe aksjomaty, nazywać będziemy *przestrzeniami typu* (G).

Przypuśćmy, że E jest przestrzenią typu (G).

Jeżeli $x \subset E$, a H jest zbiorem zawartym w E, wówczas przez

$$x H \quad (\text{wzgl. } H x)$$

oznaczać będziemy zbiór wszystkich elementów y kształtu

$$y = x z, \qquad z \subset H \qquad (\text{wzgl. } y = z x, \quad z \subset H).$$

Oczywiście, że stale

$$x (H_1 + H_2) \equiv x H_1 + x H_2,$$

$$x (H_1 - H_2) \equiv x H_1 - x H_2 \quad \text{dla} \quad H_2 \subset H_1,$$

$$x (H_1 \,.\, H_2) \equiv (x H_1) \,.\, (x H_2).$$

Łatwo można pokazać, że jeżeli H jest zbiorem zamkniętym (wzgl. otwartym, nigdziegęstym, pierwszej lub drugiej kategorji, mierzalnym (B)), wówczas zbiór $x H$ jest również zamknięty (wzgl. otwarty, nigdziegęsty i t. d.).

Jeżeli y jest punktem wewnętrznym zbioru H, wówczas xy jest punktem wewnętrznym zbioru $x H$.

Zbiór niepusty $H \subset E$ nazywa się *podgrupą*, jeżeli warunki $x \subset H$ i $y \subset H$ pociągają $xy \subset H$ i $x^{-1} \subset H$.

Oczywiście, że wówczas $1 \subset H$.

§ **2.** Przypuśćmy, że E i E_1 są przestrzeniami typu (G).

Operacja $U(x)$, określona w E, której przeciwdziedzina mieści się w E_1, nazywa się *multyplikatywną*, jeżeli

$$U(x y) = U(x) \,.\, U(y).$$

Mamy $U(x) = U(x \,.\, 1) = U(x) \,.\, U(1)$, a zatem $U(1) = 1$.

Mamy również

$$1 = U(1) = U(x \,.\, x^{-1}) = U(x) \,.\, U(x^{-1}),$$

i tem samem

$$U(x^{-1}) = \{ U(x) \}^{-1}.$$

Operacja multyplikatywna ciągła nosi nazwę *potęgowej.*

Twierdzenie 1. *Jeżeli operacja $y = U(x)$ multyplikatywna jest ciągła w jednym punkcie, wówczas jest potęgową.*

Dowód. Przypuśćmy, że x_0 jest punktem ciągłości operacji $y = U(x)$. Niechaj $x \subset E$.

Jeżeli $\lim\limits_{n \to \infty} x_n = x$, wówczas

$$\lim_{n \to \infty} x_n x^{-1} x_0 = x_0$$

i tem samem

$$\lim_{n \to \infty} U(x_n x^{-1} x_0) = U(x_0).$$

Stąd

$$\lim_{n \to \infty} [U(x_n)\, U(x^{-1})\, U(x_0)] = U(x_0),$$

czyli

$$\lim_{n \to \infty} U(x_n)\, U(x^{-1}) = 1,$$

więc

$$\lim_{n \to \infty} U(x_n)\, U(x^{-1})\, U(x) = U(x).$$

Ponieważ

$$U(x^{-1})\, U(x) = U(1) = 1,$$

więc

$$\lim_{n \to \infty} U(x_n) = U(x).$$

Twierdzenie 2. *Operacja multyplikatywna mierzalna (B) jest potęgową.*

Dowód. Na mocy twierdzenia 4 rozdziału I, operacja $U(x)$ jest ciągłą w zbiorze H, przyczem $E - H$ jest zbiorem pierwszej kategorji. Przypuśćmy, że

$$\lim_{n \to \infty} x_n = 1.$$

Zbiór $x_n H$ jest zbiorem drugiej kategorji, przyczem

$$E - x_n H \equiv x_n (E - H)$$

jest zbiorem pierwszej kategorji. Zatem zbiór

$$(E-H) + \sum_{n=1}^{\infty} x_n (E-H)$$

nie wyczerpuje przestrzeni E.

Oczywiście mamy

$$E - H \prod_{n=1}^{\infty} (x_n H) \subset E - H + \sum_{n=1}^{\infty} (E - x_n H);$$

Istnieje zatem punkt x', taki, że

$$x' \subset H, \qquad x' \subset x_n H \qquad (n = 1, 2, \ldots);$$

a więc stale

$$x_n^{-1} x' \subset H.$$

Ponieważ

$$\lim_{n \to \infty} x_n^{-1} x' = x'.$$

zatem

$$\lim_{n \to \infty} U (x_n^{-1} x') = U (x'),$$

skąd

$$\lim_{n \to \infty} U (x_n^{-1}) \, U (x') = U (x'),$$

i tem samem

$$\lim_{n \to \infty} U (x_n^{-1}) = 1\,,$$

czyli

$$\lim_{n \to \infty} U (x_n) = 1.$$

A więc punkt 1 jest punktem ciągłości, zatem operacja $U(x)$ jest ciągłą.

§ 3. W ustępie tym zakładać będziemy, że E jest przestrzenią typu (G) spójną t. zn., że E nie jest sumą dwóch zbiorów zamkniętych rozłącznych.

Przestrzenie typu (G) spójne nazywać będziemy przestrzeniami *typu* (G^*).

Jeżeli $H \subset E$ jest równocześnie zbiorem otwartym i zamkniętym, wówczas $H = E$. W tym wypadku bowiem $E - H$ jest również zbiorem zamkniętym.

Twierdzenie 3. *Jeżeli podgrupa $L \subset E$ mierzalna (B) jest drugiej kategorji, wówczas $L = E$.*

Dowód. Wobec założenia, istnieje kula otwarta K (której środek $y_0 \subset L$, jak oczywiście możemy przyjąć), w której L jest wszędzie drugiej kategorji. Ponieważ L jest zbiorem mierzalnym (B), więc $K - KL$ jest zbiorem pierwszej kategorji.

Weźmy pod uwagę zbiór $y_0^{-1} K$.

Ponieważ y_0 jest punktem zbioru K, zatem punkt $y_0^{-1} . y_0 = 1$ jest punktem zbioru $y_0^{-1} K$.

Istnieje zatem kula otwarta K_1 o środku 1, należąca do zbioru $y_0^{-1} K$.

Mamy widocznie

$$y_0^{-1} L = L,$$

$$y_0^{-1} [K - KL] = (y_0^{-1} K) - (y_0^{-1} K) . L \supset K_1 - K_1 L.$$

Ponieważ $K - KL$ jest zbiorem pierwszej kategorji, więc zbiór

$$K_1 - K_1 L \text{ jest zbiorem pierwszej kategorji.} \tag{1}$$

Wykażemy, że kula K_1 należy do L.

Niechaj x będzie punktem kuli K_1.

Oczywiście punkt $x . 1 = x$ będzie punktem zbioru $x K_1$, gdyż 1 jest środkiem kuli K_1.

Ponieważ zbiory otwarte K_1 i $x K_1$ mają punkt x wspólny, zatem istnieje kula otwarta K_2 (o środku x), taka, że

$$K_2 \subset (x K_1) . K_1 \tag{2}$$

Na mocy (1) i (2) zbiór

$$K_2 - K_2 L \text{ jest zbiorem pierwszej kategorji.} \tag{3}$$

Ponieważ $x^{-1} K_2 \subset K_2 \subset K_1$ (na mocy (2), więc na mocy (1)

$$(x^{-1} K_2) - (x^{-1} K_2) L \text{ jest pierwszej kategorji.} \tag{4}$$

A więc zbiór

$$x [(x^{-1} K_2) - (x^{-1} K_2) L] = K_2 - K_2 (x L) \tag{5}$$

jest zbiorem pierwszej kategorji.

Na mocy (3) i (5) iloczyn

$$[K_2 . (x L)] . [K_2 L]$$

nie jest pusty.

Istnieje zatem punkt $y \subset L$ taki, że $x y \subset L$.

A więc punkt

$$(x y) y^{-1} = x \subset L.$$

Wykazaliśmy więc, że 1 jest punktem wewnętrznym zbioru L. Ponieważ $y L = L$ jeżeli $y \subset L$, więc punkt $y = y . 1$ jest punktem wewnętrznym zbioru L.

Zbiór L jest więc otwarty.

Przypuśćmy teraz, że stale

$$y_n \subset L \quad \text{i} \quad \lim_{n \to \infty} y_n = y.$$

Ponieważ

$$\lim_{n \to \infty} y y_n^{-1} = y\, y^{-1} = 1,$$

więc istnieje takie n, że $y y_n^{-1} \subset L$.

Z uwagi na to, że $y_n \subset L$ otrzymujemy

$$y = (y y_n^{-1}) y_n \subset L.$$

Zbiór L jest więc równocześnie zbiorem zamkniętym i otwartym, więc $L = E$.

Twierdzenie 4. *Jeżeli $\{U_n(x)\}$ jest ciągiem operacyj potęgowych, wówczas zbiór x-ów, dla których*

$$\lim_{n \to \infty} U_n(x) \textit{ istnieje,}$$

jest zbiorem pierwszej kategorji albo zbiorem E.

Twierdzenie 5. *Niechaj* $\{U_{pq}(x)\}$ *będzie ciągiem podwójnym operacyj potęgowych. Jeżeli istnieje ciąg* $\{x_p\}$ *taki, że*

$$\lim_{q\to\infty} U_{pq}(x_p) \quad \textit{nie istnieje dla} \quad p = 1, 2, \ldots,$$

wówczas istnieje element x' (*niezależny od* p), *dla którego*

$$\lim_{q\to\infty} U_{pq}(x') \ \textit{nie istnieje} \ (p = 1, 2, \ldots).$$

Dowody powyższych twierdzeń są analogiczne do dowodów odpowiednich twierdzeń rozdziału III A (twierdzenia 7 i 8).

UWAGI.

Rozdział I.

§§ 2, 5, 7. Twierdzenia 1, 3, 4 i 5 zostały ogłoszone w pracy: S. Banach, Théorème sur les ensembles de première catégorie, Fund. Math. XVI (1930) p. 395 — 398. W przypadku, gdy przestrzeń E jest ośrodkową, twierdzenia te były znane już dawniej.

Twierdzenie 3 można uogólnić, okazując, że każdy zbiór (A) spełnia warunek Baire'a; dowód można prowadzić jak w przypadku przestrzeni euklidesowych, uwzględniając twierdzenie 1. Zob.: O. Nikodym, Sur une proprieté de l'opération A, Fund. Math. VII (1925) p. 149—154 oraz E. Szpilrajn, O mierzalności i warunku Baire'a, C. R. du Premier Congrès des Mathématiciens des Pays Slaves, Warszawa, 1929, p. 297—303.

Rozdział II.

§ 2. Przy pomocy pewnika wyboru łatwo wynika, że w każdej przestrzeni wektorjalnej istnieje funkcjonał addytywny, jednorodny i nieznikający identycznie. Przestrzenie wektorjalne nazywamy również *linjowemi*.

Rozdział III A.

§ 1. Według twierdzenia, które udowodnił p. S. Mazur, w każdej przestrzeni typu (F) spełniony jest warunek: Gdy $\lim\limits_{n\to\infty} h_n = 0$ (h_n — liczby), $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = \Theta$ $(x_n \subset E)$, to $\lim\limits_{n\to\infty} h_n x_n = \Theta$.

§ 2. Twierdzenie 2 można uogólnić następująco: Przestrzeń wektorjalna $L \subset E$, spełniająca warunek Baire'a oraz drugiej kategorji, jest identyczna z E. Dowód jak w tekście bez zmian.

Załóżmy, że E jest przestrzenią (F) o nieskończonej liczbie wymiarów. Nie wiadomo jest, czy istnieją przestrzenie wektorjalne $L \subset E$, mierzalne (B) lecz dowolnie wysokiej klasy przy klasyfikacji Borela (będące zbiorami (A) lecz niemierzalne (B), spełniające warunek Baire'a lecz nie będące zbiorami (A)).

Wiadomo tylko, że w każdej przestrzeni E typu (B) istnieje przestrzeń wektorjalna $L \subset E$, będąca iloczynem pewnego zbioru F_σ i pewnego zbioru G_δ, lecz nie stanowiąca przytem zbioru F_σ; przestrzeń taka jest tedy jednocześnie zbiorem $F_{\sigma\delta}$ oraz $G_{\delta\sigma}$, nie będąc ani F_σ ani G_δ. Jeżeli przestrzeń wektorjalna L jest zawarta w jakiejś przestrzeni E typu (F) i jest G_δ, wówczas jest zamkniętą. Rezultaty te będą ogłoszone w pracy pp. S. Mazura i L. Sternbacha w IV tomie czasopisma Studia Mathematica.

Zauważmy jeszcze, że można skonstruować przestrzeń wektorjalną zawartą w (C), która jest zbiorem $F_{\sigma\delta\sigma}$, nie będąc zbiorem $F_{\sigma\delta}$.

§ 3. Przy dodatkowem założeniu, że przestrzeń E jest ośrodkową, twierdzenie 10 stanowi bezpośredni wniosek z twierdzenia p. F. Hausdorffa, wedle którego, obraz ciągły części mierzalnej (B) przestrzeni metrycznej zupełnej ośrodkowej jest zbiorem (A) (Zob.: F. Hausdorff, Mengenlehre, 1927, p. 269); wystarczy uwzględnić uwagi do twierdzenia 3 rozdziału I oraz twierdzenia 2 bieżącego rozdziału.

Zauważmy pozatem, że, według supozycji p. S. Mazura, zarówno twierdzenie 10 jak i wszystkie następne tego rozdziału, zachowują ważność w przypadku każdej przestrzeni wektorjalnej, metrycznej i zupełnej E, spełniającej warunek: Gdy $\lim\limits_{n\to\infty} h_n = h$, $\lim\limits_{n\to\infty} k_n = k$ (h_n, h, k_n, k — liczby) oraz $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = x$, $\lim\limits_{n\to\infty} y_n = y$ (x_n, x, y_n, $y \subset E$), to $\lim\limits_{n\to\infty} (h_n x_n + k_n y_n) = hx + ky$.

Prosty dowód twierdzenia 12 dla przypadku przestrzeni typu (B) zawiera praca: J. Schauder, Über die Umkehrung linearer, stetiger Funktionaloperationen, Stud. Math. II (1930) p. 1—6.

Z twierdzenia 6 wynika oczywiście, że gdy G jest przestrzenią wektorjalną zamkniętą zawartą w E, to każda operacja addytywna oraz mierzalna (B), określona w G, o wartościach należących do E^*, jest linjową. Istnieją funkcjonały addytywne mierzalne (B) nieciągłe, jednak określone w zbiorach wektorjalnych niezamkniętych mierzalnych (B).

Niewiadomo jednak, czy w przypadku gdy zbiór wektorjalny nie jest zamknięty, mogą istnieć w niem operacje addytywne dowolnie wysokiej klasy przy klasyfikacji Baire'a.

Gdy operacja linjowa $U(x)$ odwzorowuje E na część Z przestrzeni E^* wzajemnie jednoznacznie, to operacja odwrotna $U^{-1}(y)$ jest linjową o ile tylko zbiór Z jest zamknięty; wynika to z twierdzenia 12. W przypadku gdy zbiór Z nie jest zamknięty, operacja $U^{-1}(y)$ nie jest linjową; o ile jednak przestrzeń E jest ośrodkowa, to operacja ta jest mierzalną (B). W przypadku n. p., gdy każda z przestrzeni E, E^* jest przestrzenią ($L^{(2)}$), operacja $U^{-1}(y)$ jest pierwszej klasy przy klasyfikacji Baire'a.

Rozdział III B.

§ 1. Opierając się na wyniku tego §, można okazać, że gdy operacja linjowa $U(x)$ odwzorowuje przestrzeń ośrodkową typu (F) na część jakiejś przestrzeni typu (F), to przeciwdziedzina jej jest zbiorem mierzalnym (B); wystarczy skorzystać z twierdzenia p. F. Hausdorffa, na mocy którego obraz ciągły i jedno-jednoznaczny części mierzalnej (B) przestrzeni metrycznej zupełnej ośrodkowej jest zbiorem mierzalnym (B). Por. uwagę do twierdzenia 10 rozdziału III A.

§ 2. Zob.: S. Banach. Über die Baire'sche Kategorie gewisser Funktionenmengen, Stud. Math. III (1931); L. Auerbach und S. Banach, Über die Höldersche Bedingung, Stud. Math. III (1931) oraz S. Mazurkiewicz, Sur les fonctions non dérivables, Stud. Math. III (1931).

§ 7. Gdy $p, q \geqslant 1$, to przestrzenie $(l^{(p)})$, $(l^{(q)})$ a podobnie $(L^{(p)})$, $(L^{(q)})$ nie są równoważne, o ile tylko $p \neq q$; przestrzenie $(l^{(p)})$, $(L^{(q)})$ są równoważne jedynie w tym przypadku, gdy $p = q = 2$.

Według uwagi p. S. Mazura, przy dowolnych $p, q \geqslant 1$ przestrzenie $(l^{(p)})$, $(L^{(q)})$, są homeomorficzne; zob.: S. Mazur, Une remarque sur l'homéomorphie des champs fonctionnels, Stud. Math. I (1929) p. 83—85.

Zagadnienie kiedy dwie przestrzenie rozpatrywanej tu klasy są izomorficzne (względnie izometryczne), nie jest rozwiązane; w każdym razie przestrzenie n. p. (l), $(l^{(p)})$ przy $p > 1$ nie są izomorficzne.

Ciekawym przykładem dwóch przestrzeni typu (F), izomorficznych lecz nierównoważnych, są przestrzenie (C) oraz (C') (zob. § 2 tego rozdziału). Przestrzenie te są izomorficzne, jak to okazał p. K. Borsuk, to zaś, że nie są one równoważne wynika z następującego ogólnego twierdzenia. Gdy E jest dowolną przestrzenią metryczną, to niech E^* oznacza zbiór wszystkich funkcyj rzeczywistych, jednostajnie ciągłych i ograniczonych, określonych w E; E^* stanowi widocznie przy zwykłych definicjach działań przestrzeń typu (B), gdy przez odległość dwóch funkcyj $x(t)$, $y(t)$ tego zbioru rozumiemy $\max\limits_{t \subset E} |x(t) - y(t)|$. Twierdzenie o które chodzi brzmi: Gdy E, E_1 są przestrzeniami metrycznemi, to na to by przestrzenie E^*, E_1^* były równoważne, potrzeba i wystarcza, by przestrzenie E i E_1 były homeomorficzne. Omawiane tu rezultaty będą opublikowane w tomie IV-ym czasopisma Studia Mathematica.

Nie wiemy dotąd, czy odwzorowanie izometryczne dwóch przestrzeni (B) jest odwzorowaniem równoważnem, a nawet czy każde dwie przestrzenie (B) izometryczne są równoważne (izomorficzne)[1]. Nie znamy również przykładu

---

[1]) Zagadnienie to zostało ostatnio rozwiązane przez pp. S. Mazura i S. Ulama, którzy okazali, że odwzorowanie izometryczne dwóch przestrzeni (B) jest zawsze linjowe.

dwóch przestrzeni (F) ośrodkowych o nieskończonej liczbie wymiarów, nie homeomorficznych między sobą.

Przestrzeń (m) posiada tę własność, że każda przestrzeń (B) ośrodkowa jest równoważna z jej częścią; w tym sensie stanowi przestrzeń uniwersalną dla wszystkich przestrzeni (B) ośrodkowych. Zagadnienie, czy istnieje przestrzeń ośrodkowa (B) uniwersalna dla wszystkich przestrzeni (B) ośrodkowych, pozostaje otwarte [1].

Rozdział IV A.

§ 1. Przestrzeń (s) nie tylko nie jest przestrzenią typu (B), lecz nie jest nawet izomorficzna z żadną przestrzenią tego typu.

§§ 2, 3. Twierdzenia 2—5 oraz lemmat zawiera praca: H. Hahn, Über lineare Gleichungen in linearen Räumen, Journ f. r. u. a. Math. 157 (1927) p. 214—229.

Niech E będzie przestrzenią typu (B), zaś G przestrzenią wektorjalną zawartą w E; przypuśćmy, że w G określoną jest operacja linjowa $f(x)$, o wartościach należących do pewnej przestrzeni E^* typu (B). Nie wiadomo, czy istnieje wtedy w E operacja linjowa $F(x)$ o wartościach należących do E^*, taka, że $F(x) = f(x)$ dla $x \subset G$.

Zauważmy wkońcu, że gdy E jest przestrzenią typu (F) i w przestrzeni wektorjalnej $G \subset E$ określony jest funkcjonał linjowy $f(x)$, to może nie istnieć w E funkcjonał linjowy $F(x)$, o tej własności, że $F(x) = f(x)$ dla $x \subset G$. Wynika to prosto stąd, że w przestrzeni (S) nie istnieje wogóle funkcjonał linjowy nie znikający identycznie.

§ 4. P. S. Mazur dowiódł, że gdy E jest przestrzenią wektorjalną ośrodkową zawartą w (m), zaś $f(x)$ funkcjonałem linjowym w E, to istnieje tablica liczb

$$(A) \quad \begin{array}{l} a_{1,1},\ a_{1,2},\ \ldots \\ a_{2,1},\ a_{2,2},\ \ldots \\ \ldots\ldots\ldots \end{array}$$

o tej własności, że przy każdym ciągu $x = \{\xi_n\} \subset E$ mamy $f(x) = \lim\limits_{i\to\infty} \sum\limits_{k=1}^{\infty} a_{i,k}\,\xi_k$ a ponadto $\sum\limits_{k=1}^{\infty} |a_{i,k}| \leqslant |f|$ $(i = 1, 2, \ldots)$. Twierdzenie to wyznacza postać funkcjonałów linjowych w przestrzeniach E uważanego rodzaju.

Rozdział V A.

§ 2. Gdy $x_n(t)$, $x(t)$ są funkcjami określonemi w $<0,1>$, to przez $\lim\limits_{n\to\infty} \text{as}\, x_n(t) = x(t)$ rozumiemy, że ciąg $\{x_n(t)\}$ jest zbieżny asymptotycznie do $x(t)$ w $<0,1>$; por. Wstęp, § 3.

---

[1]) Zagadnienie to zostało ostatnio rozwiązane pozytywnie przez p. S. Mazura.

Rozdział V B.

§ 4. Metodę A odpowiadającą tablicy (A) nazywa się normalną, gdy $a_{i,k}=0$ dla $i<k$, $\neq 0$ dla $i=k$ $(i,k=1,2,\ldots)$. Do metod tego typu należą zarówno metody Cesàro C_k jak i Eulera E_k $(k>0)$. Ostatnie metody są według twierdzenia p. S. Mazura doskonałe (zob. pracę cytowaną w związku z twierdzeniem 3).

Twierdzenie 3 uzupełnia uwaga: Jeżeli metoda zachowawcza i odwracalna A posiada tę własność, że gdy B jest dowolną metodą zachowawczą niesłabszą od A, to każdy ciąg sumowalny metodą A jest sumowalny metodą B do tej samej liczby, w takim razie metoda A jest doskonałą.

Rozdział VI A.

§ 3. Zob.: J. Schauder, Über lineare, vollstetige Funktionaloperationen, Stud. Math. II (1930) p. 183—196.

Rozdział VI B.

§ 4. Twierdzenie, że w przestrzeniach $(L^{(p)})$ $(p\geqslant 1)$ bazę tworzy układ ortogonalny Haara zawarte jest w pracy: J. Schauder, Eine Eigenschaft des Haarschen Orthogonalsystems, Math. Zeitschr. 28 (1928) p. 317—320.

Niech E oznacza zbiór wszystkich funkcyj zespolonych $f(z)$ zmiennej zespolonej z, określonych w kole jednostkowem $|z|\leqslant 1$, regularnych w jego wnętrzu i ciągłych na brzegu. Przy zwykłych definicjach działań E stanowi przestrzeń (B), gdy przez normę funkcji $f(z)$ rozumiemy maximum jej modułu w uważanym kole. Nie wiadomo czy w tej przestrzeni istnieje baza.

Podobnie nie wiemy czy istnieje baza w przestrzeni E typu (B) tak określonej. E jest zbiorem wszystkich funkcyj rzeczywistych $f(x,y)$ zmiennych rzeczywistych x, y, określonych w kwadracie $0\leqslant x,y\leqslant 1$, posiadających pochodne cząstkowe pierwszego rzędu ciągłe; działania zwykłe a pozatem

$$\|f(x,y)\| = \underset{0\leqslant x,y\leqslant 1}{\mathrm{Max}}\,|f(x,y)| + \underset{0\leqslant x,y\leqslant 1}{\mathrm{Max}}\,|\;f_x'(x,y)\;| + \underset{0\leqslant x,y\leqslant 1}{\mathrm{Max}}|\;f_y'(x,y)|.$$

Nie potrafimy wkońcu rozstrzygnąć pytania, czy z tego, że w jakiejś przestrzeni E typu (B) istnieje baza wynika, że w każdej przestrzeni wektorjalnej zamkniętej $G\subset E$ istnieje również baza. Zagadnienie to nie jest rozwiązane nawet w przypadku gdy E jest n. p. przestrzenią $(L^{(p)})$ przy $p\geqslant 1$, $\neq 2$.

Rozdział VII A.

§ 2. Twierdzenie 3 można zaostrzyć a mianowicie, jak to okazał p. Z. Zalcwasser, przy założeniach tego twierdzenia istnieje ciąg wielomianów

$\{\sum_{m=1}^{n} \lambda_{n,m} x_m(t)\}$, taki, że stale $\lambda_{n,m} \geqslant 0$, $\sum_{m=1}^{n} \lambda_{n,m} = 1$, zbieżny jednostajnie do $x(t)$; zob.: Z. Zalcwasser, Sur une propriété du champ des fonctions continues, Stud. Math. II (1930) p. 63—67. P. J. Schreier udowodnił przytem, że gdy spełnione są założenia twierdzenia 3, to ciąg $\{x_n(t)\}$ może nie zawierać ciągu częściowego sumowalnego metodą pierwszych średnich jednostajnie do $x(t)$; zob.: J. Schreier, Ein Gegenbeispiel zur Theorie der schwachen Konwergenz, Stud. Math. II (1930) p. 58—62.

W przestrzeniach jednak $(l^{(p)})$, $(L^{(p)})$ przy $p > 1$, a podobnie w przestrzeniach (c), (c_0), z każdego ciągu elementów $\{x_n\}$ słabo zbieżnego do x można wyrwać ciąg, którego pierwsze średnie zdążają wedle normy do x; w przestrzeni (L), nietylko to twierdzenie jest fałszywe, ale niezachodzi nawet twierdzenie analogiczne do twierdzenia p. Zalcwassera. Zob.: S. Banach et S. Saks, Sur la corvercence forte dans les champs L^p, Stud. Math. II (1930) p. 51—57.

Rozdział VII B.

§ 2. Dany ciąg elementów $\{x_n\}$ przestrzeni E typu (B), nazywamy *słabo zbieżnym*, gdy przy każdym funkcjonale linjowym $f(x)$ w E, ciąg $\{f(x_n)\}$ jest zbieżny; przestrzeń E nazywa się *słabo zupełną*, gdy każdy ciąg $\{x_n\}$ elementów uważanej przestrzeni słabo zbieżny jest słabo zbieżny do pewnego elementu x tej przestrzeni.

Przestrzeń (c_0), i tem samem (c), (m), nie jest słabo zupełną. Słaba zupełność przestrzeni (L) została wykazana przez p. H. Steinhausa, w pracy cytowanej na str. 83; słabą zupełność przestrzeni $(L^{(p)})$ przy $p > 1$, stwierdził p. F. Riesz w pracy cytowanej na str. 71. W przestrzeni (l) dany ciąg elementów jest słabo zbieżny, wtedy i tylko wtedy gdy jest zbieżny wedle normy; słaba zupełność tej przestrzeni jest więc oczywista.

Rozdział VIII A.

§ 1. Gdy R jest zbiorem funkcjonałów linjowych określonych w danej przestrzeni ośrodkowej E typu (B), to określony w tej przestrzeni funkcjonał linjowy $f(x)$ nazywamy *słabem skupieniem* zbioru R, gdy istnieje ciąg funkcjonałów linjowych $\{f_n(x)\}$ należących do R, $\neq f$ oraz słabo zbieżny do $f(x)$. Zbiór R' wszystkich słabych skupień zbioru R nosi nazwę jego *słabej pochodnej*; analogicznie można określić słabe pochodne wyższych rzędów.

Łatwo dowodzi się, że przy każdym zbiorze R, pewna jego słaba pochodna przeliczalnego rzędu jest już słabo zamknięta. P. S. Mazurkiewicz okazał, że nawet w przypadku, gdy zbiór R stanowi przestrzeń wektorjalną, jego słaba pochodna (pierwszego rzędu) nie musi być zbiorem słabo zamkniętym; zob.: S. Mazurkiewicz. Sur la dérivée faible d'un ensemble de fonctionnelles linéaires, Stud. Math. II (1931) p: 68—71. Dotąd nie znamy jednak przykładu zbioru R wektorjalnego, o tej własności, że jego słaba pochodna drugiego rzędu nie jest słabo zamknięta.

Rozdział VIII B.

§ 2. Twierdzenie 7 zostało udowodnione przez p. H. Lebesgue'a.

§ 3. Dany zbiór J elementów przestrzeni typu (B) nazywamo *słabo zwartym*, gdy z każdego ciągu elementów tego zbioru można wyrwać ciąg słabo zbieżny. W przestrzeniach $(l^{(p)})$ i $(L^{(p)})$ przy $p>1$, każdy zbiór ograniczony jest słabo zwarty; dowód dla przypadku przestrzeni $(L^{(p)})$ zawiera praca p. F. Riesza cytowana na str. 71. Podobną własność mają n. p. przestrzenie (c_0), (c); nie posiadają jej przestrzenie (l), (L), (C), (m).

§ 5. Wyszczególnimy tu kilka własności izomorficznych.

1⁰ Szereg $\sum_{n=1}^{\infty} x_n$ elementów danej przestrzeni typu (B) nazywamy *bezwarunkowo zbieżnym*, gdy jest zbieżny przy każdem uporządkowaniu wyrazów (do tego samego elementu). Własnosć: Dany szereg $\sum_{n=1}^{\infty} x_n$ elementów jest bez warunkowo zbieżny wtedy i tylko wtedy gdy przy każdym funkcjonale linjowym $f(x)$ szereg $\sum_{n=1}^{\infty} |f(x_n)|$ jest zbieżny, jest własnością izomorficzną. Własność tę posiadają, wedle twierdzenia p. W. Orlicza, wszystkie przestrzenie typu (B) słabozupełne; zob drugą z prac cytowanych na str. 144.

2⁰ Własność: Gdy $\{x_n\}$ jest ciągiem elementów o normie 1, to istnieje ciąg liczb $\{t_n\}$ taki, że szereg $\sum_{n=1}^{\infty} t_n x_n$ jest rozbieżny i ma sumy częściowe wedle normy ograniczone, jest własnością izomorficzną. P. S. Mazur okazał, że własność tę posiada przestrzeń (c), nie posiadają jej przestrzenie $(l^{(p)})$, $(L^{(p)})$ przy $p\geqslant 1$, (m), (M), (C).

3⁰. Własność: Zbiór wypukły zamknięty jest słabo zamknięty (t. j. zawiera każdy element, do którego można dobrać ciąg elementów uważanego zbioru słabo zbieżny do niego), jest własnością izomorficzną. Zgodnie z uwagami do § 2 Rozdziału VII A, własność tę posiadają przestrzenie (c), $(l^{(p)})$, $(L^{(p)})$, przy $p>1$, (l), (c), $c_0)$ i nie posiada jej przestrzeń (L).

Przestrzeń $(L^{(2)})$ (a podobnie $(l^{(2)})$) jest równoważna z przestrzenią z nią sprzężoną. Niewiadomo czy własność ta jest dla przestrzeni $(L^{(2)})$ charakterystyczną w tym sensie, że na to by dana przestrzeń typu (B) ośrodkowa o nieskończonej liczbie wymiarów była równoważna z $(L^{(2)})$, potrzeba i wystarcza by była równoważna z przestrzenią do niej sprzężoną.

P. S. Mazur postawił pozatem pytanie, czy każda przestrzeń typu (B) ośrodkowa o nieskończonej liczbie wymiarów, równoważna z każdą przestrzenią w niej zawartą wektorjalną zamkniętą o nieskończonej liczbie wymiarów, jest równoważna z przestrzenią $(L^{(2)})$.

Rozdział IX A.

§ 2. Gdy operacja linjowa $U(x)$ odwzorowuje przestrzeń (E) typu (B) na jej część, to równania $x - U(x) = \Theta$, $X - \overline{U}(X) = \Theta$, mogą nie posiadać równej liczby linjowo niezależnych rozwiązań. Można okazać jednak, że gdy $|U| = 1$ i p, q oznaczają odpowiednio liczby linjowo niezależnych rozwiązań tych równań, to $p \leqslant q$; przytem, gdy przestrzeń E jest słabo zupełną i każdy zbiór ograniczony w niej jest słabo zwarty, to $p = q$. Zob.: S. Mazur, Über die Nullstellen linearer Operationen, Stud. Math. II (1930) p. 11—20.

Rozdział IX B.

§ 1, 2, 3. Zob. artykuł: E. Hellinger und O. Toeplitz, Integralgleichungen und Gleichungen mit unendlichvielen Unbekannten, Enzykl. d. math. Wiss., 1928.

Rozdział X.

§ 1, 2, 3. Twierdzenia 1—5 zawiera praca: S. Banach, Über die Räume vom Typus (G), Stud. Math. III (1931).

Załóżmy, że E, E^* są przestrzeniami (G) i przytem przestrzeń E jest ośrodkową; $U(x)$ niech oznacza operację multyplikatywną odwzorowującą E na część E^*. Przy tych założeniach zachodzi twierdzenie:

1. Gdy $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = x_0$, $\lim\limits_{n\to\infty} U(x_n) = y_0$ pociąga zawsze $y_0 = U(x_0)$, to operacja $U(x)$ jest potęgową.

Zakładając dalej, że operacja $U(x)$ jest potęgową, mamy twierdzenia:

2. Przeciwdziedzina operacji $U(x)$ jest albo pierwszej kategorji albo identyczna z E^*;

3. Jeżeli przeciwdziedzina operacji $U(x)$ jest identyczna z E, to do każdego ciągu punktów $\{y_n\}$ zbieżnego do $y_0 = U(x_0)$, istnieje ciąg punktów $\{x_n\}$ zbieżny do x_0, taki, że stale $U(x_n) = y_n$;

4. Jeżeli operacja $U(x)$ odwzorowuje E na E^* wzajemnie jednoznacznie, to odwzorowanie to jest obustronnie ciągłe.

W końcu zachodzi jeszcze twierdzenie:

5. Jeżeli grupa E jest przestrzenią (G) ośrodkową zarówno przy pewnej definicji odległości (x, y), jak i przy pewnej innej definicji odległości $(x, y)_1$ i jeżeli $\lim_{n\to\infty} (x_n, x) = 0$ pociąga zawsze $\lim_{n\to\infty} (x_n, x)_1 = 0$, to i naodwrót $\lim_{n\to\infty} (x_n, x)_1 = 0$ pociąga zawsze $\lim_{n\to\infty} (x_n, x) = 0$; pojęcie granicy w obu przypadkach jest tedy to samo.

Twierdzenia 1, 2, 3, 4, 5 są oczywiście analogiczne odpowiednio do twierdzeń 14, 10, 11, 12, 13 rozdziału III A; założenie, że przestrzeń E jest ośrodkową jest istotne. Dowody tych twierdzeń znajdują się w pracy cytowanej powyżej.

Zob. również: F. Leja, Sur la notion du groupe abstrait topologique, Fund. Math. IX (1927) p. 37—44.

Skorowidz Terminów.

Errata.

str.	*wiersz*	*zamiast:*	*winno być:*
36	1 od góry	$\sum_{=1}^{i} x_j$	$\sum_{j=1}^{i} x_j$
41	11 od góry	$n_0 y \subset G_2$	$n_0 y \subset G_1$
43	4 od góry	lub	oraz
43	5 od dołu	$\lim_{n\to\infty} x^n$	$\lim_{n\to\infty} x_n$
47	12 od dołu	E	$\overline{E}$
52	8 od góry	$\sum_{n=1}^{\infty} \overline{G}_n = G$	$\sum_{n=1}^{\infty} \overline{G}_n = \overline{G}$
53	1) od góry	III	III A
56	8 od góry	$i = 1, 2, \ldots$	$k = 1, 2, \ldots$
58	4 od góry	IV	IV A
64	4 od dołu	$\sum_{i=1}^{\infty} a_{ik} \xi_k$	$\sum_{k=1}^{\infty} a_{ik} \xi_k$
65	7 od góry	(1)	(2)
65	10 od góry	$\sum_{k=1}^{r} h_i a_{ik}$	$\sum_{k=1}^{r} h_k \alpha_{ik}$
66	14 od góry	$i = 1, 2, \ldots$	$k = 1, 2, \ldots$
66	10 od dołu	III	III A
79	6 od góry	$0 \leqslant t_0 < t_1 \ldots < t^n = 1$	$0 = t_0 < t_1 < \ldots < t_n = 1$
79	8 od góry	C_i	c_i
79	10 od góry	$\sum C_i \{\xi_{t_i} - \xi_{t_{i-1}}\}$	$\sum_{i=1}^{n} c_i \{\xi_{t_i} - \xi_{t_{i-1}}\}$
92	3 od góry	z_i	$\lvert z_i \rvert$

str.	*wiersz*	*zamiast:*	*winno być:*
92	6 od góry	$\sum_{k=i}^{\infty} a_{ik} z_k$	$\sum_{k=1}^{\infty} a_{ik} z_k$
96	7 od góry	$u(x)$	$U(x)$
97	5 od dołu	4	3
130	2 od dołu	3	5
131	4 od dołu	4	6
162	8 od góry	$x_{q_n}(t)$	$x_{h_n}(t)$
170	7 od dołu	x	x_0
174	12 od góry	ciągi	ciągi o wyrazach wymiernych

T R E Ś Ć.

W S T Ę P.

ROZDZIAŁ I.

Zbiory i operacje mierzalne (B) w przestrzeniach metrycznych.

ROZDZIAŁ II.

Ogólne przestrzenie wektorjalne.

ROZDZIAŁ III A.

O przestrzeniach typu (F).

ROZDZIAŁ III B.

O przestrzeniach typu (F).
(Ciąg dalszy).

ROZDZIAŁ IV A.

Przestrzenie unormowane.

ROZDZIAŁ IV B.

Przestrzenie unormowane.
(Ciąg dalszy).

ROZDZIAŁ V A.

Przestrzenie typu (B).

ROZDZIAŁ V B.

Przestrzenie typu (B).
(Ciąg dalszy).

ROZDZIAŁ VI A.

Operacje pełnociągłe i stowarzyszone. Ciągi biortogonalne.

ROZDZIAŁ VI B.

Operacje pełnociągłe i stowarzyszone. Ciągi biortogonalne.
(Ciąg dalszy).

ROZDZIAŁ VII A.

Ciągi słabo zbieżne.

ROZDZIAŁ VII B.

Ciągi słabo zbieżne.
(Ciąg dalszy).

ROZDZIAŁ VIII A.

Funkcjonały linjowe w przestrzeniach (B).

ROZDZIAŁ VIII B.

Funkcjonały linjowe w przestrzeniach (B).
(Ciąg dalszy).

ROZDZIAŁ IX A.

Równania funkcjonalne linjowe.

ROZDZIAŁ IX B.

Równania funkcjonalne linjowe.
(Ciąg dalszy).

ROZDZIAŁ X.

Przestrzenie typu (G).