



AKADEMIA OBRONY NARODOWEJ

WYDZIAŁ LOTNICTWA I OBRONY POWIETRZNEJ

Ppłk dr inż. Jerzy KOZIOŁ

ZASTOSOWANIE BADAŃ OPERACYJNYCH W PROCESIE DECYZYJNYM ORGANÓW DOWODZENIA SIŁAMI POWIETRZNYMI

Etap II.

ZASTOSOWANIE PROGRAMOWANIA LINIOWEGO I TEORII GIER W PRAKTYCE DOWODZENIA SIŁAMI POWIETRZNYMI

4.34.6.0

Biblioteka Główna
Akademii Sztuki Wojennej

57822



09-057822-000-0



57822

WARSZAWA

2004



AKADEMIA OBRONY NARODOWEJ

WYDZIAŁ LOTNICTWA I OBRONY POWIETRZNEJ



Ppłk dr inż. Jerzy KOZIOŁ

ZASTOSOWANIE BADAŃ OPERACYJNYCH W PROCESIE DECYZYJNYM ORGANÓW DOWODZENIA SIŁAMI POWIETRZNYMI

CZĘŚĆ II

ZASTOSOWANIE PROGRAMOWANIA LINIOWEGO I TEORII GIER W PRAKTYCE DOWODZENIA SIŁAMI POWIETRZNYMI

4.34.6.0

57822

SPIS TREŚCI

WSTĘP	3
WPROWADZENIE.....	7
1. PROBLEMY DOWODZENIA A MODELE I METODY BADAŃ OPERACYONYCH	31
2. ZASTOSOWANIE MODELI LINIOWYCH DLA POTRZEB DOWODZENIA SIŁAMI POWIETRZNYMI.	38
2.1 Model ogólny zagadnienia programowania liniowego	41
2.2 Idea metody simpleks:.....	50
2.3 Zagadnienia transportowe	61
3. MODELE GROWE W DOWODZENIU SIŁAMI POWIETRZNYMI.....	69
3.1 Pojęcia podstawowe.....	69
3.2 Strategie mieszane	81
3.3 Graficzna interpretacja gry	89
3.4 Gry i programowanie liniowe	101
ZAKOŃCZENIE	115
SPIS LITERATURY	117

Recenzent:

Prof. dr hab. inż. Stefan ANTCZAK

WSTĘP

Praca niniejsza jest drugą częścią monografii na temat zastosowania badań operacyjnych w procesie decyzyjnym organów dowodzenia siłami powietrznymi.

Problemy, z jakimi mają obecnie do czynienia dowódcy funkcjonujący w ramach sił powietrznych są złożone i dynamiczne a zdobywane doświadczenie niewystarczające do wyciągania wniosków i podejmowania decyzji wyłącznie na podstawie intuicji. Przydatnym się staje w takiej sytuacji stosowanie metod matematycznych nawet w tak trudnym do opisanie obszarze działalności ludzkiej jak dowodzenie siłami powietrznymi. Ogromne możliwości sprzyjające temu stwarza rozwój techniki komputerowej, szczególnie powszechna dostępność komputerów osobistych - łatwość ich obsługi i duży potencjał obliczeniowy. Komputery stosowane są wszędzie tam, gdzie mamy do czynienia ze zjawiskami, które dają się skwantyfikować: od prostych obliczeń rachunkowych do skomplikowanych problemów związanych z dowodzeniem siłami powietrznymi.

Od kilku dziesięcioleci obserwujemy wkraczanie komputerów również do nauk humanistycznych, wojskowych i społecznych¹, które dawniej wydawały się dalekie od możliwości stosowania w nich metod numerycznych. Dziś można śmiało stwierdzić, że w każdej dziedzinie nauki matematyka wzbogaca arsenał narzędzi badawczych, umożliwia weryfikację pewnych hipotez czy teorii, odsłania nowe horyzonty. Szczególna rola przypada tu badaniom operacyjnym. Dodajmy, że stosowanie metod matematycznych oraz komputerów do obliczeń numerycznych pozwala badaczowi, rozwijającemu jakieś zadanie, poświęcić więcej czasu i wysiłku intelektualnego na formułowanie hipotez, wyciąganie wniosków analitycznych i syntezę wyników, a więc na rzeczywistą pracę naukową.

¹ Malewski M., Wieczorek A., Sosnowska H., Teoria gier W ekonomii i naukach społecznych, PWN, Warszawa 1997. Czujew J.W., Podstawy badań operacyjnych w technice wojskowej, MON Warszawa 1970

Jak już wspomniałem, modelowanie matematyczne jest dziedziną, której zadaniem jest opis rzeczywistości w pewnym specyficznym języku, a mianowicie w języku matematyki i logiki formalnej. Różni się więc ta dziedzina od wielu innych - takich, które wyróżniają pewien obszar rzeczywistości i do tego zakresu ograniczają swoje zainteresowania. Modelowanie matematyczne nie formułuje takich ograniczeń. Jest to dziedzina *interdyscyplinarna*, która dąży do możliwie szerokiej ekspansji.

Uniwersalizm języka, którym posługuje się matematyka, powoduje, że taki sam model może opisywać systemy różniące się w sposób zasadniczy między sobą, dotyczące zupełnie różnych dziedzin. Ten uniwersalizm języka jest jednak nie jedyną, i chyba nie najważniejszą zaletą modelowania matematycznego.

Celem pracy jest przedstawienie metodyki formułowania i rozwiązywania różnorodnych zadań i problemów występujących w ramach procesu dowodzenia siłami powietrznymi w postaci modeli programowania liniowego i teorii gier

Przeważająca część rozważań dotyczy podejmowania decyzji i tworzenia modeli odwzorowujących w obszarze abstrakcji rzeczywistość sił powietrznych, dzięki którym można będzie zwiększać efektywność dowodzenia siłami powietrznymi.

Chcąc osiągnąć założone cele w praktyce niezbędny jest udział specjalisty, znającego dogłębnie specyfikę działań sił powietrznych, istotę występujących tam zjawisk i metod, które by pozwoliły na wstępne sformułowanie modelu matematycznego, co umożliwi podjęcie współpracy z analitykiem systemów, matematykiem i informatykiem. Współpraca taka będzie na ogół niezbędna przy rozwiązywaniu konkretnego zadania modelowania matematycznego.

Współdziałanie, o którym tu mowa, nie jest sprawą prostą. Wymaga nie tylko określonej wiedzy i wysiłku intelektualnego, ale również umiejętności posługiwania się wspólnym językiem. Jest to typowa i często niedoceniana trudność występująca we wszystkich badaniach interdyscyplinarnych. Toteż większość rozważań poświęcono określeniu i wyjaśnieniu pojęć podstawowych, co powinno pomóc w opanowaniu wspólnego języka, niezbędnego przy współpracy specjalistów różnych dziedzin.

Te właśnie przesłanki spowodowały, że istniała pilna potrzeba podjęcia badań i uporządkowania podstawowych pojęć z zakresu języka badań operacyjnych na gruncie

sił powietrznych. W badaniach tych chodziło o ujawnienie odpowiednich procedur, które znalazłyby zastosowania w siłach powietrznych. Badaniom przyświecał także cel użyteczny – opracowanie takiego dzieła, by jego wyniki mogły skłonić do refleksji intelektualnej i operacyjnej, oraz by sprzyjały decydentom WLOP w podejmowaniu trafnych rozstrzygnięć (decyzji). Równocześnie chodziło o to, by „otworzyć” problematykę badań operacyjnych w Wojskach Lotniczych i Obrony Powietrznej. Dotychczas bowiem nie ukazało się wiele opracowań poświęconych tej tematyce.

Założono, że zadanie badawcze obejmie trzy tematy, zaś badania będą prowadzone w trzech etapach. Niniejsza praca jest sprawozdaniem z drugiej części badań. Celem tego etapu badań, którego rezultaty zawiera niniejsze opracowanie, było przedstawienie podstawowych pojęć i uporządkowanie wiedzy w zakresie programowania liniowego i wykorzystania modeli teorii gier w obszarze problemów identyfikowanych na gruncie dowodzenia siłami powietrznymi.

Myślą przewodnią badań były poszukiwania odpowiedzi na najistotniejsze pytania problemowe: W czym się wyraża istota dowodzenia siłami powietrznymi? Na czym polega racjonalność podejmowania decyzji dowódczych w siłach powietrznych? Jakie występują rodzaje problemów dowódczych, które można by modelować przy pomocy programowania liniowego lub praw teorii gier występujących na gruncie dowodzenia siłami powietrznymi?

Tak sformułowane cele i problemy stanowiły zasadniczą podstawę do prowadzenia dociekań naukowych. Przedmiotem dociekań były materiały źródłowe wykazane w bibliografii. Szczególną uwagę zwrócono na analizy i oceny wielu materiałów poświęconych teorii podejmowania decyzji i badań operacyjnych. Autor jest, bowiem przeświadczony o możliwości wykorzystania metod badań operacyjnych do rozwiązywania problemów decyzyjnych sił powietrznych

Przeprowadzony cykl badań teoretycznych pozwolił na wysnucie użytecznych wniosków i uogólnień oraz zestawienie rezultatów w niniejszym studium operacyjnym.

Wydaje się koniecznym w pracy zamieścić wprowadzenie, w którym zostały wyjaśnione podstawowe pojęcia dotyczące struktury sytuacji decyzyjnych ich modelowania i klasyfikacji oraz wyjaśniono, co jest przedmiotem badań operacyjnych.

Rozdział pierwszy w formie skróconej odnosi się do identyfikacji modeli i metod badań operacyjnych wynikających z potrzeb dowodzenia siłami powietrznymi

W rozdziale drugim przedstawiono ogólny i standardowy model programowania liniowego, oraz scharakteryzowano metodę „Simpleks” do rozwiązywania problemów o charakterze liniowym identyfikowanych w obszarze działalności sił powietrznych.

Problematyka ta stanowi bazę do zaprezentowania racjonalności decyzji dowódczych. Konfliktowy charakter skutków decyzji podejmowanych w siłach powietrznych jest inspiracją dla rozdziału trzeciego, w którym opisano podstawowe pojęcia teorii gier i jej zastosowania do rozwiązywania problemów dowódczych mogących występować na gruncie działalności sił powietrznych

W konkluzji można powiedzieć, że niniejsze studium, zawiera istotne elementy dotyczące podstaw badań operacyjnych oraz wskazania co do możliwości i sposobów ich wykorzystania w siłach powietrznych. Jest to kontynuacja badań poświęconych procedurom i metodom badań operacyjnych w siłach powietrznych. Stanowią one – zdaniem autora - wystarczającą bazę teoretyczną do prowadzenia dalszych badań, być może już bardziej pragmatycznych, prowadzonych w celu kompleksowego wykorzystania wiedzy z tego zakresu do podejmowania decyzji dowódczych w ramach planowania rozwoju i długofalowego określania koncepcji użycia Wojsk Lotniczych i Obrony Powietrznej

Wprowadzenie

Problematyka podejmowania decyzji o wyborze tej a nie innej strategii działania² znajduje się obecnie w centrum nauk wojskowych. Zdeterminowana jest ona przede wszystkim dynamicznym rozwojem nauki i techniki wojskowej, jej złożonością i różnorodnością wykonywanych funkcji, a co za tym się kryje - konsekwencjami, jakie wynikają z podjęcia decyzji błędnych, czasami wręcz szkodliwych dla człowieka a nawet całych społeczeństw. W tej sytuacji nie wystarcza dzisiaj sama intuicja, rozsądek i bogate doświadczenie decydenta³ - niezbędne są, jako instrumenty pomocnicze, naukowe metody podejmowania decyzji, w których można wyodrębnić dwa główne kierunki badań:

- kierunek ilościowy, dążący do ujęcia badanej problematyki w postaci tzw. modeli matematycznych,
- kierunek jakościowy, starający się przedstawić problematykę podejmowania decyzji w formie logiczno-funkcjonalnych opisów słownych, które są niematematycznymi modelami omawianej problematyki.

W dalszych rozważaniach zajmę się pierwszym kierunkiem badań, występującym w zagadnieniach dowodzenia siłami powietrznymi, które są możliwe do skwantyfikowania.

Przed przystąpieniem do modelowania matematycznego procesów dowodzenia siłami powietrznymi należy zauważyć, że procesy te charakteryzują się różnorodnością rozwiązań, tak po stronie wyników, jak i po stronie nakładów. Można, bowiem przy wykorzystaniu różnych środków albo metod uzyskać różne.

W swoim postępowaniu dążyć będę do takiego działania, które jest zgodne z zasadą największego efektu, bądź też - z zasadą najmniejszego nakładu środków⁴. Obie zasady są sobie równoważne i noszą nazwę zasady racjonalnego dowodzenia.

² Przez strategię działania rozumiemy metodę postępowania, przynoszącą określone efekty.

³ Decydent - osoba podejmująca decyzje o realizacji tej lub innej strategii i ponosząca odpowiedzialność za efekt realizacji.

⁴ Zasada największego efektu stwierdza: przy danych nakładach środków osiągnąć maksymalny efekt - stopień realizacji wybranego celu działania. Natomiast zasada najmniejszego nakładu orzeka: dany z góry określony efekt osiągnąć najmniejszymi (minimalnymi) nakładami środków.

Różnorodność środków i efektów nie jest dowolna. Wynika ona z sytuacji decyzyjnej polityczno militarnej, strategicznej, operacyjnej czy taktycznej, w której dokonujemy wyboru strategii.

Struktura sytuacji decyzyjnych

Podejmując decyzję o realizacji takiej a nie innej strategii działania, decydent powinien jednoznacznie sformułować cel działania oraz wyodrębnić zbiory podstawowych parametrów stałych i zmiennych określających rozpatrywaną sytuację decyzyjną a także wyznaczyć relacje między nimi.

Z tych krótkich rozważań wynika, że analiza sytuacji decyzyjnej jest ważną dziedziną wiedzy, odgrywającą coraz większą rolę w dowodzeniu siłami powietrznymi, zarówno w skali pododdziału, oddziału czy całej polityki militarno-społecznej państwa czy sojuszu.

W każdej sytuacji decyzyjnej występują:

- a. Zbiór $S = \{s_1, s_2, \dots, s_m\}$ możliwych strategii działania decydenta.
- b. Zbiór $H = \{h_1, h_2, \dots, h_n\}$ możliwych hipotez o stanie natury (otoczenia) lub strategii „przeciwnika”, determinujących efekt i -tej ($i = 1, 2, \dots, m$) strategii działania decydenta. Decydent najczęściej nie może w pełni przewidzieć, która z nich wystąpi.
- c. Zbiór $R = \{r_1, r_2, \dots, r_p\}$ realizacji określonych na iloczynie kartezjańskim⁵ $S \times H$, gdzie $r_k(s_i, h_j)$ ($i = 1, 2, \dots, m; j = 1, 2, \dots, n$) jest zbiorem efektów osiągniętych z realizacji strategii i -tej przy zajściu hipotezy j -tej.
- d. Zbiór $I = \{i_1, i_2, \dots, i_l\}$ informacji uzyskanych w trakcie formułowania i realizacji podjętej decyzji. Elementy tego zbioru są podstawą budowy systemu bieżącej kontroli realizacji podjętej decyzji.

Zatem ogólną sytuację decyzyjną (SD) można przedstawić jako uporządkowaną czwórkę zbiorów postaci⁶:

⁵ Iloczynem kartezjańskim zbiorów A i B nazywamy zbiór wszystkich par uporządkowanych (a, b) , w których $a \in A$, $b \in B$ i oznaczamy $A \times B$.

⁶ Biela A. Wymiary decyzji menedżerskich Towarzystwo naukowe KUL Lublin 2000

$$SD = \{S, H, R, I\},$$

gdzie: S - zbiór strategii działania, H - zbiór hipotez, R - zbiór relacji, I - zbiór informacji.

Klasyfikacja sytuacji decyzyjnych

Każda sytuacja decyzyjna związana jest z określonym fragmentem rzeczywistego środowiska militarno społecznego. Można wyodrębnić trzy podstawowe cechy środowiska: niepewność, dynamikę i złożoność, cechy te w znacznym stopniu rzutują na strukturę sytuacji decyzyjnej.

Przyjmując za kryterium podziału stopień niepewności występowania j-tej ($j = 1, 2, \dots, n$) hipotezy o stanie natury lub strategii „przeciwnika” oraz stopień niepewności wystąpienia określonego efektu osiągniętego z realizacji strategii i-tej ($i = 1, 2, \dots, m$) przy zajściu hipotezy j-tej ($j = 1, 2, \dots, n$), możemy sytuacje decyzyjne podzielić na deterministyczne, stochastyczne, strategiczno-statystyczne i strategiczne.

Uwzględniając dynamikę zmian zachodzących w środowisku gospodarczo-społecznym sytuacje decyzyjne dzielimy na statyczne i dynamiczne. Pierwsze z nich charakteryzują się tym, że nie uwzględniają wpływu czynnika czasu na przebieg analizowanej sytuacji decyzyjnej.

Ostatnią cechą jest stopień złożoności analizowanego fragmentu rzeczywistości. Cecha ta umożliwia dokonanie podziału sytuacji decyzyjnych na proste i złożone.

Na zakończenie rozważań dotyczących struktury sytuacji decyzyjnej podam krótką charakterystykę sytuacji deterministycznej, stochastycznej, strategiczno-statystycznej i strategicznej⁷.

Deterministyczna sytuacja decyzyjna charakteryzuje się tym, że decyzję o realizacji i-tej ($i = 1, 2, \dots, m$) strategii podejmujemy w warunkach pewności, tzn. każda strategia realizowana jest przy jednoznacznie określonym stanie otoczenia

⁷ Koziół J., Zastosowanie badań operacyjnych w procesie dowodzenia siłami powietrznymi Etap I-Identyfikacja modeli matematycznych przez pryzmat optymalizacji użycia wojsk sił powietrznych, AON Warszawa 2003

(politycznego militarnego, ekonomicznego czy szeroko rozumianej natury) i towarzyszy temu określony efekt. W działalności sił powietrznych tego typu sytuacje występują niezwykle rzadko. Zakładając deterministyczność, decydujemy się na uproszczenie sytuacji rzeczywistej.

Stochastyczne sytuacje decyzyjne posiadają cechę, dzięki której decydent nie jest pewien, jaki efekt osiągnie realizując i -tą ($i = 1, 2, \dots, m$) strategię, ponieważ każdej strategii odpowiada nie jeden efekt, lecz zbiór efektów, z których każdy posiada określone prawdopodobieństwo wystąpienia. Prawdopodobieństwa te znane są decydentowi.

Strategiczne sytuacje decyzyjne, zwane sytuacjami decyzyjnymi w warunkach niepewności, charakteryzują się tym, że każdej strategii odpowiada skończony zbiór efektów działania, którego elementy zależą od poszczególnych stanów natury (otoczenia) lub konkretnie racjonalnie działającego przeciwnika, o nieznanych decydentowi rozkładach.

Strategiczno-statystyczne sytuacje decyzyjne różnią się od sytuacji strategicznych posiadaniem zbioru dodatkowych informacji o rozkładach częstości występowania poszczególnych stanów natury, od których zależy efekt realizacji strategii decydenta.

Model sytuacji decyzyjnej

Mniej lub bardziej dokładnym opisem sytuacji decyzyjnej jest model. Jest to konstrukcja formalna, spełniająca trzy podstawowe warunki:

- jest izomorficzna lub homomorficzna⁸ z analizowaną sytuacją decyzyjną,
- umożliwia sterowanie tą sytuacją,
- umożliwia dokonanie oceny tej sytuacji.

Izomorficzne lub homomorficzne odtworzenie rzeczywistej sytuacji decyzyjnej w postaci modelu stwarza dwa niebezpieczeństwa ujęte obrazowo przez R. Bellmana⁹ jako „pułapka uproszczenia i grzęzawisko szczegółów”.

⁸ Izomorfizm - równopostaciowość, homomorfizm - jednoznaczne odwzorowanie. Morficzny - mający (określoną) formę, Izo - jednakowy, równy, homo - podobny

⁹ Kozubski J.J., Wprowadzenie do badań operacyjnych, Wydawnictwo Uniwersytetu Gdańskiego Gdańsk 2000

Budując model sytuacji decyzyjnej, staramy się uwzględnić tylko te elementy, które mają lub mogą mieć istotny wpływ na strukturę analizowanej sytuacji. Są to tak zwane elementy diagnostyczne.

Uwzględniając stopień abstrakcji, jaki zachodzi między rzeczywistą sytuacją decyzyjną a jej modelem, możemy podzielić modele na ikoniczno-skalowe i analogowe. Pierwsze z nich zawierają elementy diagnostyczne sytuacji decyzyjnej w zmienionej skali, w drugich związek między sytuacją rzeczywistą a modelem jest abstrakcyjny. Przykładem modeli drugiego rodzaju są tzw. modele matematyczne, odtwarzające rzeczywistość za pomocą symboli logiczno-matematycznych. Tego typu modele omawiać będę w dalszej części pracy.

Formalnie rzecz biorąc, matematyczny model sytuacji decyzyjnej zawiera¹⁰:

- a. Zbiór parametrów diagnostycznych (B), który jest najczęściej przedstawiany jako suma dwóch rozłącznych zbiorów A i X ($B = A \cup X$), gdzie: $A = \{a_1, a_2, \dots, a_r\}$ jest zbiorem parametrów strukturalnych modelu, natomiast $X = \{x_1, x_2, \dots, x_n\}$ jest zbiorem, najczęściej nieujemnych, zmiennych zwanych zmiennymi strategicznymi lub decyzyjnymi. Zbiór ten określa strategię działania decydenta.
- b. Zbiór $Z = \{z_1, z_2, \dots, z_k\}$, którego elementami są oceny realizacji poszczególnych strategii działania.
- c. Funkcję f , której dziedziną jest zbiór zmiennych strategicznych, a przeciwdziedziną zbiór ocen realizacji poszczególnych strategii.

$$F(x) = f(x).$$

- d. Zbiór funkcji $Q = \{q_1, q_2, \dots, q_m\}$, których argumentami są zmienne strategiczne i które określają tzw. warunki wewnętrznej zgodności-ograniczenia wynikające z omawianej sytuacji decyzyjnej. Warunki te zapisywane są często w postaci:

$$q_i(x) \leq 0 \quad \text{lub} \quad q_i(x) = 0 \quad \text{lub} \quad q_i(x) \geq 0, \quad i = 1, 2, \dots, m$$

¹⁰ Kukuła K. (red.), *Badania operacyjne w przykładach i zadaniach*, PWN, Warszawa, 2000.

Okazuje się, że każdy z dwóch przedstawionych wyżej warunków da się sprowadzić do warunku trzeciego¹¹. Np. dwa pierwsze dadzą się sprowadzić do warunku: $q_i(x) \geq 0$, $i = 1, 2 \dots m$. Zadaniem decydenta jest, zgodnie z zasadą racjonalnego dowodzenia, wyznaczenie takiego wektora zmiennych decyzyjnych

$$x = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \dots \\ x_n \end{bmatrix} \in R^n$$

spełniające warunki

$$q_i(x_1, x_2, \dots, x_n) \begin{cases} \leq \\ \geq \end{cases} 0; \quad (i = 1, 2, \dots, m),$$

dla którego funkcja

$$F(x) = f(x_1, x_2, \dots, x_n)$$

przyjmuje wartość ekstremalną, tj. maksymalną lub minimalną.

W powyższym zagadnieniu funkcję $F(x) = f(x_1, x_2, \dots, x_n)$ nazywamy funkcją kryterialną lub funkcją celu. Zbiór równości i nierówności nazywamy ograniczeniami zagadnienia programowania matematycznego. Zbiór wektorów

$$D = \left\{ x \in R^n; q_i(x_1, x_2, \dots, x_n) \begin{cases} \leq \\ \geq \end{cases} 0 (i = 1, 2, \dots, m) \right\}$$

nosi nazwę zbioru rozwiązań dopuszczalnych.

Zakładamy, że $F(x) = f(x_1, x_2, \dots, x_n)$, $q_i(x_1, x_2, \dots, x_n)$ $i = 1, 2, \dots, m$ są funkcjami rzeczywistymi n zmiennych rzeczywistych $x_1, x_2, \dots, x_n$.

Rozważania teoretyczne nad konstrukcją metod znajdowania punktów ekstremalnych funkcji wielu zmiennych oparte są na następującym twierdzeniu Fermata¹².

¹¹ Kukuła K. (red.), *Badania operacyjne w przykładach i zadaniach*, PWN, Warszawa, 2000.

¹² Gajda J. B., *Model ekonometryczny w optymalnym sterowaniu gospodarką*, PWE Warszawa 1993.

Rogalska D., *Programowanie liniowe. Algorytmy i zadania*, Wydawnictwo Uniwersytetu Łódzkiego, Łódź, 1998.

Niech funkcja $F(x) = f(x_1, x_2, \dots, x_n)$ określona na zbiorze $D \subset R^n$ osiąga w punkcie wewnętrznym $\hat{x}$ zbioru D wartość ekstremalną (maksymalną lub minimalną). Jeśli dla $x = \hat{x}$ istnieje gradient funkcji $F(x) = f(x_1, x_2, \dots, x_n)$, to

$$\frac{\partial F(\hat{x})}{\partial x_1} = 0, \quad \frac{\partial F(\hat{x})}{\partial x_2} = 0, \quad \dots, \quad \frac{\partial F(\hat{x})}{\partial x_n} = 0.$$

Tak sformułowany model nazywamy modelem optymalizacyjnym sytuacji decyzyjnej.

Układ liczb spełniający warunki wewnętrznej zgodności nazywamy strategią dopuszczalną lub rozwiązaniem dopuszczalnym modelu. Strategia dopuszczalna jest strategią możliwą do zrealizowania w danych warunkach. Natomiast zbiór D - zbiorem rozwiązań (strategii) dopuszczalnych.

Rozwiązanie dopuszczalne maksymalizujące (minimalizujące) funkcję kryterium nazywamy strategią (rozwiązaniem) optymalnym modelu. Czyli jest to najlepsza strategia - najlepsze rozwiązanie danego modelu - w danych warunkach z punktu widzenia danego celu.

Należy w tym miejscu zaznaczyć, że rozwiązania dopuszczalne i optymalne uzyskane z rozwiązania modelu decyzyjnego oraz wnioski z niego płynące odnoszą się¹³:

- w sposób pełny i jednoznaczny do modelu optymalizacyjnego,
- w sposób przybliżony i jednostronny do rzeczywistej sytuacji decyzyjnej.

Zatem ważnym etapem budowy modelu i jego rozwiązania jest weryfikacja, zarówno modelu, jak i jego rozwiązania z rzeczywistą sytuacją decyzyjną. W tym celu staramy się odpowiedzieć na dwa podstawowe pytania:

- czy i w jakim stopniu model optymalizacyjny odpowiada analizowanej sytuacji decyzyjnej,
- czy i w jakim stopniu otrzymane rozwiązanie odpowiada aspiracjom decydenta.

¹³ Witkowska D., Wprowadzenie do badań operacyjnych, Wydawnictwo Politechniki Łódzkiej, Łódź, 1996.

Problematyką budowy modeli decyzyjnych, ich rozwiązaniami oraz weryfikacją z rzeczywistą sytuacją decyzyjną zajmuje się, powstała w latach czterdziestych naszego stulecia, gałąź nauki - badania operacyjne, zwana często teorią podejmowania decyzji.

Przedmiot badań operacyjnych

B. van der Veen pisze¹⁴ przedmiotem badań operacyjnych jest badanie ilościowych cech operacji istotnych dla podejmowania decyzji optymalnych, to znaczy takich, które po wzięciu pod uwagę wszystkich okoliczności można uważać za najlepsze".

Należy w tym miejscu zwrócić uwagę na fakt, mało doceniany i uwzględniany przez tych, którzy są zafascynowani możliwościami wykorzystania metod badań operacyjnych, że metody te są tylko narzędziem pomocniczym w podejmowaniu racjonalnych decyzji. Analiza ekonomiczno-decyzyjna badanych sytuacji decyzyjnych wojskowo militarnych¹⁵ nie rozwiąże w pełni wszystkich problemów nurtujących społeczność wojskową dnia dzisiejszego.

Na niedoskonałość metod badań operacyjnych w zastosowaniu do analizy procesów dowodzenia siłami powietrznymi zwraca uwagę W.Drużynin i D.Kantorow¹⁶, określając badania operacyjne jako: „...sztukę dawania złych odpowiedzi na te praktyczne pytania, na które inne metody dają odpowiedzi jeszcze gorsze”. Zatem decydent w swej działalności powinien kierować się wynikami uzyskanymi z analizy opartej na metodach badań operacyjnych zweryfikowanymi przez intuicję, doświadczenie i zdrowy rozsądek.

Badania operacyjne są pojęciem historycznym ukształtowanym po drugiej wojnie światowej. W praktyce dowodzenia badania operacyjne można traktować jako naukową teorię, która umożliwia budowę modeli na podstawie identyfikacji

¹⁴ Kozubski J.J., Wprowadzenie do badań operacyjnych Wydawnictwo Uniwersytetu Gdańskiego Gdańsk 2000

¹⁵ W literaturze przedmiotu przyjmuje się, że słowo „wojskowy” lepiej odzwierciedla i opisuje struktury zbrojne i aspekty ich funkcjonowania zatem służy praktyce, a słowo „militarny” oznacza całą sferę organizowanej przez państwo przemocy zbrojnej. Szpyra R., Operacje informacyjne państwa w działaniach sił powietrznych

¹⁶ Drużynin W., Kantorow D., Idea, algorytm, decyzja Wydawnictwo Ministerstwa Obrony Narodowej Warszawa 1987

sytuacji rzeczywistych opisywanych wielkościami oraz rozwiązywanie modeli w celu podejmowania efektywnych decyzji ze względu na przyjęte kryteria taktyczne, ekonomiczne, techniczne i społeczne.

Koźmiński A., K. i Obłój K.,¹⁷ traktują badania operacyjne jako naukową metodę zasilającą jednostki podejmujące decyzje w ilościowe ujęcie analizowanej lub syntetyzowanej sytuacji lub zjawiska, stanowiących przedmiot zainteresowania tych jednostek. Zasadnicze podwaliny badań operacyjnych zostały stworzone w związku z działaniami strategicznymi i operacyjnymi podczas drugiej wojny światowej. Oczywiście można zaprezentować wiele wcześniejszych zastosowań modeli ilościowych i technik ich rozwiązywania, które mogły służyć opisowi sytuacji i zjawisk w taki sposób, żeby umożliwiały one podejmowanie na tej podstawie decyzji. I tak proste modele programowania matematycznego zostały opracowane na długo przed II wojną światową, która jest uznawana za głównego inspiratora badań operacyjnych. Modele te wykorzystano później jako narzędzia w teorii modeli liniowych opracowanych przez Jordana (1873 r.)¹⁸ i Minkowskiego (1896 r.)¹⁹. Problematyka modeli dynamicznych rozwinięta została przez Markowa w latach 1856-1922²⁰. Pionierskie studia w zakresie masowej obsługi prowadzone były przez Erlanga w latach 1896-1929. Szczególnie złożone modele w tym zakresie zostały zaproponowane w wyniku prac prowadzonych przez von Neumanna²¹ w 1937 r. i Kantorowicza²² w 1939 r.

Dopiero jednak po II wojnie światowej w wyniku zapotrzebowania na metody umożliwiające podejmowanie decyzji w warunkach niepewności w złożonych sytuacjach militarnych a później gospodarczych rozwinęły się badania

¹⁷ Koźmiński A.K., Obłój K., *Zarys teorii równowagi organizacyjnej* PWE Warszawa 1998

¹⁸ Jordan Camille (1838-1922) matematyk francuski od 1881 członek a od 1916 prezes Akademii nauk w Paryżu, napisał wiele prac z teorii funkcji równań różniczkowych i analizy matematycznej odegrał ogromną rolę w kształtowaniu całego pokolenia matematyków.

¹⁹ Minkowski Herman (1864-1909) matematyk niemiecki profesor uniwersytetu w Bonn, Królewcu, Zurychu i Getyndze – opracował metody geometryczne w teorii liczb, największą sławę przyniosły mu prace w których podał geometryczną interpretację kinematyki w szczególności teorii względności, wprowadzając przestrzeń czterowymiarową.

²⁰ Markow Adriej matematyk rosyjski profesor uniwersytetu w Petersburgu członek Akademii Nauk Specjalista w zakresie rachunku prawdopodobieństwa, zapoczątkował badania nad ważną w zastosowaniach technicznych klasą procesów stochastycznych obecnie nazywanymi procesami Markowa.

²¹ Neuman Jon von (1903-1957) Matematyk amerykański pochodzenia węgierskiego twórca matematycznych podstaw mechaniki kwantowej zajmował się również teorią gier

²² Kantorowicz Leonid 1912 rosyjski matematyk i ekonomista jeden z twórców teorii programowania.

operacyjne. Istniały duże trudności w dostarczeniu odpowiednich informacji, w przeprowadzeniu ich właściwej redukcji i weryfikacji. Chodziło często o to, że posiadane dane odbiegały od wymagań i faktycznych potrzeb informacyjnych budowanych modeli. Często decydenci mieli informacje, ale nie umieli ich wykorzystać dla wyboru odpowiedniego postępowania. W wielu przypadkach duża wiązka celów sprzecznych bez uwzględnienia odpowiednich preferencji przeszkadzała w decyzji dotyczącej wyboru właściwego sposobu działania. W takiej sytuacji zadaniem specjalistów badań operacyjnych było opracowanie odpowiednich modeli-zadań i sposobów ich rozwiązywania.

K. Obłój²³ w cytowanej pracy stwierdza, że pierwsze grupy zajmujące się badaniami operacyjnymi powstają równocześnie w Anglii i USA. W Anglii kierował tą grupę P. M. S. Blackett²⁴ (tzw. cyrk Blackketta), w Stanach Zjednoczonych P. M. Morse, G. E. Kimballi (*U.S. Navy Operations Research Group*). Prace tych zespołów miały przede wszystkim militarne zastosowanie. Niezwykle rzadko przytacza się pierwotne przykłady tych prac. Według K. Obłója na podstawie tych przykładów można podać pierwotne cele i charakterystykę przedmiotu badań operacyjnych.

PRZYKŁAD²⁵ 1

Od początku II wojny światowej flota brytyjska ponosiła duże straty na skutek operacji powietrznych Luftwaffe. Podjęto, więc pozornie oczywistą decyzję o instalowaniu na statkach handlowych baterii dział przeciwlotniczych. Produkcja tych dział była jeszcze niewielka, a zapotrzebowanie ze strony armii i floty ogromne. Wątpliwości, co do sensowności podjętej decyzji pojawiły się, gdy okazało się, że koszty instalacji dział są wysokie, a skuteczność ognia prowadzonego z tych dział niemal żadna. Notowano jedynie pojedyncze wypadki zestrzelenia atakującego samolotu. Przez prawie rok trwały spory, czy działa należy nadal instalować. Ponoszono duże koszty nie osiągając widocznych

²³ Koźmiński A.K., Obłój K., Zarys teorii równowagi organizacyjnej PWE Warszawa 1998

²⁴ Blackett Patrick 1987 fizyk angielski odkrywca pozytonu –laureat nagrody Nobla

efektów. Jednocześnie występowała silna presja ze strony floty handlowej na dalsze instalowanie dział przeciwlotniczych, które dawały załogom poczucie bezpieczeństwa. W końcu zlecono grupie badaczy operacyjnych analizę sytuacji. Punktem wyjścia było zebranie dostępnych danych statystycznych. Stwierdzono, że tylko 4% ataków nieprzyjacielskiego samolotu kończyło się jego zestrzeleniem. Jednocześnie badacze doszli do wniosku, że jest to zupełnie nieprawidłowa miara efektywności. Działa w założeniach miały służyć do ochrony statków, a nie do zestrzeliwania samolotów! Różnica jest subtelna, ale zasadnicza. Widać to wyraźnie na podstawie danych zebranych w tabl. 1. Instalowanie dział ma sens, jeżeli zwiększa się w ten sposób prawdopodobieństwo przetrwania statku. Należało, więc porównać dane statystyczne dotyczące skutków ataku samolotu na uzbrojony i nieuzbrojony transportowiec. Wymowa przedstawionego porównania jest jasna.

Tablica 1

Dane statystyczne o efektach ataku nieprzyjacielskiego samolotu na transportowce uzbrojone i nieuzbrojone w działa przeciwlotnicze

Wyszczególnienie	Transportowiec	
	uzbrojony w działa pplot	nieuzbrojony w działa pplot
Liczba zrzuconych bomb	632	304
Liczba trafień	50	39
Procent trafień	8	13
Liczba atakowanych statków	155	71
Liczba zatopionych statków	16	18
Procent zatopionych statków	10	25

Uzbrojenie statku w działa obniża prawdopodobieństwo zatopienia w przypadku ataku lotniczego o przeszło połowę (ściślej o 60%). Przedstawienie tych danych ostatecznie przesądziło o konieczności instalowania dział na transportowcach".

²⁵ Flanek Cz., Kozioł J., Kryteria i metody oceny efektywności systemów OP AON Warszawa 2000

PRZYKŁAD²⁶ 2

W 1942 r. alianci zdecydowali, że trzeba przeznaczyć pewną liczbę samolotów bojowych dla zwalczania okrętów podwodnych, które, jak nigdy dawały się wówczas na Atlantyku we znaki flocie sprzymierzonych. Powstał problem, jak te samoloty praktycznie wykorzystać: czy to do eskortowania konwojów, czy może do nalotów na bazy niemieckich łodzi, czy też do patrolowania Zatoki Biskajskiej będącej bazą operacyjną łodzi. Zebrane dane wskazywałyby, że jedna łódź podwodna zatapia w miesięcznym patrolu statystycznie 0,8 statku. Bliższa analiza wykazała jednak, że niemieckie stocznie mogły produkować wystarczającą liczbę łodzi podwodnych dla natychmiastowego zapelnienia luki. Podstawowym limitem były załogi. Czas ich szkolenia (głównie na Bałtyku) wynosił około 6 miesięcy. Ponieważ Niemcy nie mieli rezerw kadrowych, faktycznie zatopienie okrętu oznaczało przede wszystkim likwidację załogi. Konsekwencją tego była 6-miesięczna przerwa w patrolach i statystyczne ocalenie 4,8 statku alianckiego.

Przy przyjęciu za miarę efektywności liczby ocalonych statków na 100 lotów bojowych samolotu, badacze znając skuteczność samolotu jako środka zwalczania okrętów podwodnych, określili efektywność zaproponowanych przez dowództwo wariantów działania samolotów

Tablica 2

	Efektywność działań
eskortują zagrożone konwoje	30
eskortują wszystkie konwoje	3
patrolują Biskaje	3-4
atakują bazy łodzi	1

²⁶ Gavrilc I. N. „Liniowe modele optymalnego wzrostu gospodarki planowej”. W: „Zastosowanie matematyki w badaniach ekonomicznych”. Warszawa 1968.

Jak widać, efektywność wariantów mierzona liczbą ocalonych statków na 100 lotów bojowych była zróżnicowana. Pierwszy wariant był dominujący, ale tylko, co dziesiąty konwój był szczególnie zagrożony. Przy braku informacji, który będzie zagrożony, trzy pierwsze warianty miały podobną efektywność. Decyzja dotycząca wykorzystania samolotów pozostawała w gestii dowódcy sił powietrznych. Powyższe dane niemal w trakcie analizy uległy dezaktualizacji. Samoloty brytyjskie zostały wyposażone w radary, co drastycznie podniosło efektywność ich działań. Z kolei okręty podwodne stosowały tylko krótkie, nocne wynurzenia i wkrótce zostały wyposażone w odbiorniki radiolokacyjne. Umożliwiało im to wykrycie zbliżającego się samolotu i szybkie zanurzenie. Kolejne zmiany taktyki walki i innowacje techniczne spowodowały, że w kolejnych latach efektywność poszczególnych wariantów ulegała systematycznym fluktuacjom, za którymi musiały nadążyć obliczenia matematyczne badaczy operacyjnych.

Badania operacyjne, jako narzędzie służące w najogólniejszym sensie w procesie podejmowania decyzji znalazły swoje stałe miejsce w dowodzeniu siłami powietrznymi a później w zarządzaniu.

Szczególne miejsce i znaczenie w zastosowaniu uzyskała ta dyscyplina naukowa w USA. Na ten temat dużo się pisze. W angielskiej terminologii powszechnie używany jest termin badania operacyjne (*operational research*). Często stosowany równorzędny termin jest nauka o zarządzaniu (*management science*). Nie wchodząc w spory semantyczne, czy badania operacyjne można utożsamiać z dowodzeniem i nauką o zarządzaniu, należy stwierdzić, że ta dyscyplina naukowa na trwałe weszła do nauk o dowodzeniu i do zarządzania jako narzędzie - do podejmowania decyzji.

Współcześnie w USA i innych krajach wysokorozwiniętych wg J.A.F. Stonera²⁷ „prawie każda większa firma zatrudnia pracowników odpowiedzialnych za stosowanie badań operacyjnych. Zazwyczaj tworzą oni grupę specjalistów przy dyrekcji firmy. Wyniki swoich badań przedkładają najczęściej kierownikom

²⁷ Stoner J.A.F., Freeman R.E., Gilbert D.R. Kierowanie PWE Warszawa 1999

odpowiednich działów: kontroli, finansów lub planowania. Jednakże ostatnio coraz częściej firmy zalecają specjalistom z zakresu badań operacyjnych bezpośredni kontakt z dyrektorami, podejmującymi istotne dla firmy decyzje. Równolegle, działalność specjalistów z zakresu badań operacyjnych zyskuje coraz szersze zastosowanie w urzędach federalnych i stanowych, jak również w innych organizacjach nieprowadzących działalności przynoszących zysk".

Rozwój badań operacyjnych jako dyscypliny naukowej, a także szerokie rozpropagowanie ich metod do praktycznego stosowania Jest ułatwione faktem powstania w większości krajów zachodnich stowarzyszeń grupujących specjalistów z tej dziedziny. Z kolei towarzystwa krajowe zrzeszone zostały w IFORS - związek, który został powołany 1 stycznia 1959 r. przez *Operations Research Society of America*, *The Operational Research Society (UK)* oraz SOFRO. IFORS organizuje raz na trzy lata swoje kongresy²⁸.

Badania operacyjne jako dyscyplina naukowa powstały, jak wynika to z przedstawionych przykładów, na wyraźne zapotrzebowanie szeroko pojętej praktyki wojennej, technicznej, a w późniejszym okresie - gospodarczej. Zatem, mimo, że tworzą bezspornie dyscyplinę naukową i są rozwijane teoretycznie, ich możliwości utylitarne są słabo znane i wykorzystywane. Szczególnie istotne dla praktyki wojskowej i gospodarczej są możliwości ich wykorzystania jako instrumentów, narzędzi stosowanych do kreowania i doskonalenia metod i technik służących organizacji i dowodzeniu (zarządzaniu) na różnych szczeblach dowodzenia. Badania operacyjne mogą być stosowane do przeprowadzania kompleksowej analizy ważnych i złożonych problemów decyzyjnych w ujęciu systemowym przez interdyscyplinarne zespoły posługujące się metodami matematycznymi i dysponujące dostępem do bardzo szybkich komputerów²⁹.

Cechami charakterystycznymi badań operacyjnych jest ich systemowa orientacja oraz statyczna i dynamiczna możliwość prowadzenia analizy. W tworzonych modelach i metodach służących rozwiązywaniu problemów

²⁸ Ignasiak E., *Optymalizacja projektów inwestycyjnych*, PWE Warszawa 1994.

²⁹ Moc obliczeniowa dzisiejszych podręcznych komputerów stanowi dodatkową motywację do ponownego sięgnięcia po metody badań operacyjnych w siłach powietrznych

operacyjnych, taktycznych, technicznych, ekonomicznych i społecznych oddzielnie lub łącznie mają one szczególne zastosowanie. Inną ich cechą jest konieczność podejścia interdyscyplinarnego. Szczególne znaczenie ma dla tej dyscypliny naukowej wykorzystanie badania modeli przy użyciu eksperymentu.

Modele w badaniach operacyjnych są tworzone dla prezentacji działań lub operacji wybranych przykładów rzeczywistości, często wyidealizowanej dla wyjaśnienia istoty związków strukturalnych oraz wyjaśnienia zasad ich zachowania i to przy zastosowaniu opisu zdeterminowanego, jak również probabilistycznego tak statycznie, jak i dynamicznie. Typy tych modeli można podzielić najogólniej na fizykalne, ikonograficzne i matematyczne³⁰.

Modele fizykalne są bardzo łatwe do wyróżnienia i opracowania, jeżeli dokładnie cel, któremu mają służyć, jest zidentyfikowany. Modele ikonograficzne często nazywane schematami, są od wielu lat tradycyjnie używane do badania systemów organizacyjnych i procedur ich funkcjonowania. Matematyczne modele są rodzajem abstrakcyjnego przedstawiania procesów i ich opisu strukturalnego przy użyciu raczej symboli, niż wielkości podobnych lub zamiennych jak przy modelach fizykalnych wykorzystujących często zjawiska i procesy analogowe.

Przykładami modeli fizykalnych mogą być: przedstawienie lądów i oceanów oraz innych geograficznych cech przy wykorzystaniu globusa, lub analiza modelu przepływu prądu o określonym napięciu i natężeniu, jak również innych czynników za pomocą układów hydraulicznych. Modele ikonograficzne są uzyskiwane przez opis zdarzeń i stanów na schematach lub diagramach.

Matematyczny model wykorzystuje specjalny język, który pozwala opisywać i wyjaśniać system przez niego prezentowany. Symbole tego języka mogą być trudniejsze do uogólnienia, niż werbalne opisy, prowadzą one jednak do wyższego stopnia abstrakcji i są bardziej precyzyjne w zastosowaniu, ponieważ można dla rozwiązania za ich pomocą i na podstawie przyjętych kryteriów zastosować odpowiednie procedury i metody matematyczne. Modele matematyczne są używane do przewidywania, sterowania lub kierowania procesami z uwzględnieniem

³⁰ Badach A., Kryński H., Zastosowanie matematyki do podejmowania decyzji ekonomicznych, Warszawa 1976.

parametru czasu i odpowiednich miar efektywności. Na przykład zastosowanie programowania liniowego służyć może do określenia optymalnego podziału zasobów czy uzbrojenia przez pryzmat wielu kryteriów. Inny model może służyć w kierowaniu gospodarką magazynową lub ustalenia zapasów. Teoria masowej obsługi i na jej podstawie budowane modele dostarczają narzędzia dla obsługi lotnisk, optymalizacji ugrupowania środków obrony przeciwlotniczej itp.

Modele badań operacyjnych, po pierwsze służą często do wyjaśniania zachowania się systemu opisywanego czynnikami społecznymi, ekonomicznymi technicznymi, dla których przeważnie należy wykorzystywać probabilistyczne charakterystyki, aby wyjaśnić ich przypadkowe zachowanie: po drugie służą często do wyjaśniania załamania systemów związanych z dwiema klasami zmiennych, to znaczy zmiennymi decyzyjnymi, których stopnie swobody określają wariantowe możliwości działania decydentów, oraz zmiennymi nieproceduralnymi, które służą dla opisu efektywności i umożliwiają lokalizację, które, to wielkości i wyniki nie znajdują się pod kontrolą decydentów. W eksperymencie podstawą dla obserwacji i wariantu budowy modelu jest sam system (obiekt), jego stan, charakteryzujące go zdarzenia i jego oddziaływanie na otoczenie, również oddziaływanie otoczenia na niego. W efekcie bezpośredniego eksperymentu stosowanego głównie w praktyce dowodzenia informacje ilościowe uzyskuje się bez przerywania biegu procesu znajdującego się pod kontrolą kierującego i obserwacją decydenta. Szczególnie ważny sposób podejścia do operacyjnych modeli niewymagających bezpośredniej obserwacji dostarczają metody symulacyjne. Głównymi celami działań związanych z dowodzeniem siłami powietrznymi jest maksymalizacja miar efektywności jak potencjał obronny przeciwnika, ilość zniszczonych celów, koszty, czas wykonania zadania itp. Badanie takich działań i ich skutków nie może być skutecznie podejmowane w każdym przypadku przy wykorzystaniu eksperymentów, ponieważ proces podejmowania decyzji wymaga wyprzedzającego wariantowego przewidywania tego typu rezultatów, a to najlepiej jest uzyskać metodą symulacyjną. Podstawę dla formułowania modelu jest określenie funkcji celu, często nazywanej funkcją efektywności działania, przy wykorzystaniu zmiennych decyzyjnych i zmiennych niezależnych (niesterowalnych). Konstrukcja tej funkcji

uzależniona jest od właściwego doboru zmiennych, jak to uprzednio powiedziano, znajdujących się pod kontrolę decydenta i tych zmiennych, które są od niego niezależne. Oznacza to, że zmienne decyzyjne (sterowalne) x_i , mogą być badane w świetle przyjętych w modelu zmiennych niesterowalnych y_j . Rezultatem tego jest wyznaczanie wartości wyjściowych dla funkcji celu C . Funkcjonał opisujący ten problem jest zazwyczaj wyrażany jako $C = F(x_i; y_j)$, i, j - elementy zbioru liczb naturalnych. Przykładem może być zadanie wyboru systemu uzbrojenia, czyli określenie takiej liczby zestawów uzbrojenia poszczególnych typów, aby uzyskać maksymalną efektywność całego systemu uzbrojenia lub zadanie rozmieszczenie uzbrojenia i np. aparatury rozpoznawczej samolotu aby uzyskać maksymalną efektywność bojową samolotu przy danych ograniczeniach. Model jest podstawowym narzędziem służącym do określenia zbioru możliwych rozwiązań w drodze analizy matematycznej lub eksperymentu. Rozwiązanie zawsze jest optymalne lub suboptymalne z punktu widzenia modelu a nie rzeczywistości. Im efektywniejsze jest dopasowanie modelu do rzeczywistości, tym korzystniejsza jest aproksymacja rozwiązania optymalnego do stanu faktycznego (rzeczywistego). Weryfikacja formalna i doświadczalna modelu oraz zbadanie systemowe jego jakości jest końcowym etapem pracy badacza. Specjaliści badań operacyjnych w zasadzie nie biorą udziału w procesie podejmowania decyzji. Istotne trudności w badaniach operacyjnych wywołują problemy wielokryterialne³¹.

PROBLEMY WIELOKRYTERIALNE

Konieczność podejmowania racjonalnych decyzji w dowodzeniu siłami powietrznymi stawia przed specjalistami różnych dyscyplin naukowych, jak również praktykami dowodzenia, wiele różnych problemów, na przykład ustalanie celów działalności, konfrontacja celów własnych z celami wyższych przełożonych.

Problem różnorodności celów działalności systemów wojskowych, militarnych i kryteriów ich oceny jest istotnym problemem występującym w

³¹ Problemy teorii modelowania są przedstawione w sposób skrótowy gdyż nie jest to przedmiotem pracy zainteresowanego czytelnika problemami modelowania odsyłam do poświęconej modelowaniu pracy Kozioł J., „Zastosowanie modeli matematycznych w praktyce dowodzenia siłami powietrznymi” AON Warszawa 2003

praktyce stosowania badań operacyjnych umożliwiających efektywne podejmowanie decyzji, został on sformułowany dość dawno (pod koniec XIX w.) i do tej pory jest przedmiotem rozważań tak praktyków jak i teoretyków. Jednakże nie został on w sposób zadowalający rozwiązany³². Podstawowe trudności optymalizacji wielokryterialnej są związane z opisem problemu, z formalizacją praktycznych zadań, z opisaniem w postaci pewnego matematycznego modelu optymalizacji. Centralnym momentem problemu wielokryterialnego jest wybór zasady optymalności, to znaczy określania prawa (definicji) wyboru rozwiązania pozwalającego uwzględnić jego własności według wszystkich rozpatrywanych kryteriów. Złożoność tego problemu wyraża się przeciwnością kryteriów, ich różnym znaczeniem i różnymi wymiarami. W rzeczywistości stosuje się w praktyce jedynie optymalizację jednocelową ze względu na brak uniwersalnych metod optymalizacji wielocelowej. Praktyka wskazuje jednak na to, że praktycy dowodzenia, rzadko zainteresowani są wyborem jednego parametru dla kierowania przedsięwzięciem³³. Bardzo trudno także jest im zdecydować się na wyróżnienie jednej funkcji celu, ponieważ chcieliby rozwiązać zadania z kilkoma funkcjami celu, z uwzględnieniem wielu kryteriów.

Zaistnienie sytuacji wielokryterialnej wynika z dwóch powodów

1. stopień realizacji jednego celu oceniany jest za pomoce wielu kryteriów,
2. realizować należy nie jeden cel, a wiele celów.

Rozważmy w pierwszej kolejności przypadek 1). Jak wiadomo, sprawdzianem stopnia realizacji celu jest kryterium umożliwiające mierzenie różnych stopni realizacji celu. Obiektywna ocena jakości dowodzenia systemem wojskowym (oddziałem sił powietrznych) jest możliwa dopiero wówczas, gdy istnieje jakiś wskaźnik ilościowy charakteryzujący stopień – osiągnięcia celu. Z formalnego punktu widzenia kryterium jest funkcją, która różnym stopniom realizacji celu przyporządkowuje liczby rzeczywiste z określoną jednostką miary. Mając model matematyczny funkcji celu należy znaleźć rozwiązanie optymalne z punktu widzenia określonego kryterium. Oczywisty jest fakt, że nie ma optymalności w

³² Szapiro R., Co decyduje o decyzji PWN Warszawa 2000

³³ Michalak W., Koziół J., Zarządzanie strategiczne w siłach powietrznych AON, Warszawa 2003

sensie bezwzględnym. Istnieje tylko optymalność względna. Należy zawsze określić co (cel) i w jakim sensie (funkcja celu, kryterium) powinno być optymalizowane. W większości przypadków realizację celu można optymalizować z punktu widzenia różnych kryteriów. Mając do czynienia już tylko z jednym celem można uzyskać różne rozwiązania, stosując odmienne kryteria optymalizacji. Najlepiej jest to zauważalne w przypadku probabilistycznych zmiennych decyzyjnych. Wówczas należy dokładnie określić, w sensie, jakiego kryterium przyjmie się, że probabilistyczna realizacja celu osiąga wartość ekstremalną.

Do najczęściej stosowanych kryteriów należą: kryterium ekstremalnej (minimalnej lub maksymalnej) wartości oczekiwanej, minimalnej wariancji, największego prawdopodobieństwa zajścia określonego zdarzenia lub też powiązanie tych kryteriów, na przykład kryterium wagowe wartości oczekiwanej i wariancji.

Jako przykład takiej sytuacji można rozpatrywać problem osiągnięcia „największej liczby zniszczonych celów powietrznych” przez oddział (dywizjon) przeciwlotniczy broniący określonej strefy. Zakładając, że wynik działalności oddziału przeciwlotniczego (w tym przypadku liczba zniszczonych celów) jest rozpatrywany jako proces probabilistyczny, zatem liczba ta jest zmienną losową. Dla uproszczenia rozważań przyjmijmy ogólnie, że jest funkcją. Z pewnych wybranych wielkości P charakteryzujących proces niszczenia środków napadu powietrznego (ŚNP) (np. liczby środków obrony powietrznej biorących udział w walce, środków rozpoznania, sposobu kierowania ogniem itp.)³⁴

Najbardziej naturalnym i najczęściej stosowanym kryterium w takiej sytuacji jest maksymalizacja wartości oczekiwanej liczby zniszczonych celów, zatem rozwiązaniem optymalnym będzie znalezienie takiej techniki walki ze środkami napadu powietrznego P^x , że

$$E(Z(P^x)) = \max_P E(Z(P))$$

gdzie E - operator wartości oczekiwanej.

³⁴ Flanek Cz., Koziół J. Kryteria i metody oceny efektywności systemów OP AON Warszawa 2000

Kryterium to ma jednak pewne wady. Nie podaje na przykład, jaka jest *wariancja zmiennej losowej zniszczonych celów*, w trakcie walki przeciwlotniczej P^x , to znaczy $D(Z(P^x))$, gdzie D^2 - operator wariancji. Z matematycznego a również z praktycznego punktu widzenia jest to dość istotna wada. Nie zawsze jest najlepiej, gdy wyznaczona technika P^x jest optymalna ze względu na kryterium wartości oczekiwanej, gdyż wariancja zmiennej losowej wyznaczonej na jej podstawie może być tak duża, że rzeczywista wartość zniszczonych celów różni się bardzo od wartości $EZ(P^x)$. Znając jednocześnie wariancję można byłoby wyznaczyć pewien przedział wartości, w którym byłby on osiągnięty. Gdyby natomiast wprowadzono kryterium najmniejszej wariancji, to znaczy szukano by takiego sposobu prowadzenia walki P^x , dla którego

$$D^2(Z(P^x)) = \min D^2(Z(P)),$$

To chociaż byłaby pewność, że taki sposób prowadzenia walki przeciwlotniczej daje najmniejsze losowe wahanie liczby zniszczonych celów, to jednakże jego wartość oczekiwana $E(Z(P^x))$ może być znacznie mniejsza od wartości oczekiwanej zniszczonych celów, otrzymanej przez przyjęcie innej techniki walki przeciwlotniczej P .

Podobnie można rozważyć wady i zalety innych kryteriów, jak na przykład największego prawdopodobieństwa zajścia określonego zdarzenia. Idealnym rozwiązaniem byłoby takie, które dawałoby osiągnięcie odpowiednich ekstremów dla wszystkich rozważanych kryteriów. Praktycznie jednak rozwiązania takie nie zdarzają się a na przykład techniki prowadzenia walki przeciwlotniczej P i P^x są różne³⁵. Otrzymaliśmy, zatem sytuację, w której osiągnięcie jednego celu („największej liczby zniszczonych celów”) można realizować poprzez kilka kryteriów.

Przejdźmy do przypadku 2). J. Zieleniewski³⁶ stwierdza: „Badanie różnych rodzajów działania prowadzi przeważnie do wniosku, że każde działanie prowadzone w szerszej skali zmierza do osiągnięcia nie jednego, lecz wielu celów”.

³⁵ Halama A. Działania taktyczne pułku rakiet przeciwlotniczych bliskiego zasięgu AON Warszawa 2001

³⁶ Zieleniewski J., Organizacja i zarządzanie PWN Warszawa 1980

Podobnie - Miller i M. L. Starr piszą³⁷: „Zarówno organizacja jak i poszczególni ludzie dochodzą do wniosku, że poszukiwanie jednego, podstawowego celu jest bezowocne [...]. Także w odniesieniu do organizacji, jak i w odniesieniu do jednostek, okazuje się, że posiadanie rozmaitych celów jest praktyczną koniecznością [...]”³⁸.

Ponieważ, jak to zostało zauważone uprzednio, sprawdzianem stopnia realizacji celu jest kryterium, a zatem i w tej sytuacji istnieje kilka kryteriów. Powstaje, zatem problem, w jaki sposób znaleźć takie rozwiązanie, aby dawało ono zadowalającą realizację wszystkich celów. We wszystkich tych sytuacjach, w których osiągnięcie jednego celu jest oceniane ze względu na kilka kryteriów, lub też, gdy mamy do czynienia nie z jednym a wieloma celami, występuje problem wielokryterialny.

Jednym z najbardziej poważnych niedostatków współczesnych metod badań operacyjnych i współczesnej teorii sterowania optymalnego³⁹ jest to, że wymagają one, by rozwiązanie było oceniane za pomocą jednego kryterium. Takie podejście do wielu zagadnień występujących w dowodzeniu w sposób istotny ułatwia znalezienie rozwiązania, ale jednocześnie niedokładnie opisuje rzeczywistość. Dlatego, między innymi, wielokrotnie proponowane rozwiązania teoretyczne są dalekie od wyników uzyskanych w praktyce.

Problem wielokryterialny w zagadnieniach wojskowych i militarnych występuje zarówno na szczeblu strategicznym, operacyjnym i taktycznym. Sienkiewicz P., rozważając cele systemów militarnych⁴⁰ na różnych szczeblach dowodzenia, zauważa występowanie, co najmniej dwóch konkurujących ze sobą celów „Takimi celami, niewspółmiernymi ze względu na efekty i w znacznym stopniu konkurującymi ze sobą, są np. maksymalizacja zachowanego potencjału bojowego i minimalizacja strat (kosztów) własnych. Niewspółmierność tych celów wynika stąd, że efekty realizacji każdego z nich mają różne wartości i uzyskuje się

³⁷ Miller D. W., M. L. Starr „Praktyka i teoria decyzji”. PWN, Warszawa 1971.

³⁸ Bolesta –Kukułka K., „Decyzje menedżerskie PWE Warszawa 2003

³⁹ Greniewski H., „Informacja w zastosowaniu do planowania i zarządzania”, PWN, Warszawa. 1999

⁴⁰ Sienkiewicz P., „Teoretyczne podstawy optymalizacji w systemach dowodzenia AON Warszawa 1986

je w różnym czasie. Cele te konkurują ze sobą, ponieważ chcąc zachować największy potencjał należy wydatkować zasoby na działania obronne. Prawdłowo sformułowane kryterium planu perspektywicznego w sposób nieunikniony pociąga za sobą określony wybór proporcji między tymi celami, tzn. pewien kompromis między nimi" ⁴¹

W zagadnieniach dowodzenia znane są próby poszukiwanie takiego planu, który zapewniłby jednoczesną maksymalizację efektów prowadzonych działań przy minimalizacji poniesionych kosztów własnych. Praktyka dowodzenia wskazuje na potrzebę budowy takich systemów, które posługiwałyby się w kierowaniu działalnością różnych procesów zespołem możliwie niesprzecznych celów reprezentujących zespołowe funkcję celów, jak na przykład grupa następujących kryteriów: maksymalizacja liczby zniszczonych celów, minimalizacja kosztów, maksymalizacja udziału poszczególnych środków ogniowych w walce przeciwlotniczej, minimalizacja zużycia rakiet przeciwlotniczych przy odpieraniu nalotu ŚNP⁴², itp. Każdy z nas niemal, na co dzień ma do czynienia z sytuacją wielokryterialną wynikłą z możliwości wyboru jednego, spośród wielu, przedmiotów. Każdy z nich można ocenić z punktu widzenia jego wielu cech, na przykład przy kupowaniu samochodu bierzemy pod uwagę między innymi następujące czynniki: cenę, osiągi techniczne, koszty eksploatacji, warunki, w jakich będzie używany, kolor karoserii, wyposażenia dodatkowe, możliwości zakupu części zamiennych, kolor i jakość tapicerki itp.

Problemy wielokryterialne pojawiają się w wielu dziedzinach życia. Znane jest zadanie wyboru kandydata: należy wyznaczyć na określone stanowisko jednego z pracowników organizacji, uwzględniając następujące czynniki: staż pracy, zdolności organizacyjne, poprzednie doświadczenia na kierowniczym stanowisku, autorytet kompetentność itp. Zadaniem konstruktorów samolotów i innych urządzeń technicznych jest uwzględnienie wielu parametrów, które winny osiągać możliwie najlepsze wartości. Lekarze stoją bardzo często wobec problemu doboru takiego środka leczniczego, który daje możliwie najlepsze efekty przy zwalczaniu choroby,

⁴¹ Sienkiewicz P., Analiza systemowa Warszawa 1996

⁴² Zdrodowski B., Teoria obrony powietrznej AON Warszawa 1994

jednocześnie powoduje minimalne skutki uboczne.

Z historycznego punktu widzenia problem wielokryterialny był rozważany na szczeblu makroekonomicznym. Pod koniec XIX wieku V. Pareto⁴³ zajmował się badaniem dobrobytu i dochodów ludności. Chodziło o problem zwiększenia dochodów różnych grup ludności na podstawie ograniczonego dochodu ogólnego. V. Pareto zauważył, że jeżeli zwiększa się dochód grupy ludności, a maleje dochód innej grupy, to porównanie dobrobytu ogólnego jest niemożliwe. Badanie tych problemów doprowadziło V. Pareto i P. Edgewortha do zbudowania prostego modelu matematycznego⁴⁴. Zagadnienie to rozważyli jako problem efektywnego wykorzystania środków x_1 i x_2 do realizacji celów z_1 i z_2 sformułowanych w postaci dwóch funkcji kryteriów:

$$\begin{aligned} z_1 &= f_1(x_1^1, x_2^1) \\ z_2 &= f_2(x_1^2, x_2^2) \end{aligned}$$

w których x_j^i - nakład środka j -tego na realizację i -tego celu przy danej liczbie środków x_1 i x_2 takich, że

$$\begin{aligned} x_1^1 + x_1^2 &= x_1 \\ x_2^1 + x_2^2 &= x_2 \end{aligned}$$

Problem wielokryterialny pojawia się również w przypadku, gdy nie potrafimy sformułować celu w postaci matematycznego modelu funkcji celu. Wiąże się to z problemem budowy miary do określenia stopnia realizacji celu. Rozważając taką sytuację, często postępuje się w ten sposób, że zachowuje się możliwość transformacji celów i środków, które umożliwiają realizację celu. Jest to bezpośrednio związane z problemem dekompozycji celu. Cel główny (nadrzędny) zostaje podzielony na wiele celów, których realizacja przyczynia się do osiągnięcia celu nadrzędnego. W przypadku niemierzalnego celu głównego i zastosowania dekompozycji na cele mierzalne, zagadnienie takie można interpretować jako

⁴³ Pareto Vilfredo (1848-1923) włoski socjolog i ekonomista twórca teorii elit społecznych w ekonomii współtwórca szkoły równowagi ogólnej.

⁴⁴ Gajda J. B., Model ekonometryczny w optymalnym sterowaniu gospodarką, PWE Warszawa 1993.

zadanie sterowania obiektami ze strukturą hierarchiczną składającą się; z dwóch poziomów hierarchii. Można założyć, że na niższym poziomie znajduje się N podsystemów, z których każdy ma swoje kryterium optymalności, odpowiednią składową funkcji celu F (f_n -ta funkcja celu odpowiada n -temu podsystemowi). Podstawowe zadanie górnego poziomu polega na sformułowaniu globalnego kryterium optymalności, które obejmuje zbiór funkcji celu.⁴⁵

Należy zauważyć, że cele występujące na niższym szczeblu są współzależne. Zależność celów jest związana z zagadnieniem zużywania (lub absorbowania) tych samych, zwykle ograniczonych, środków i zasobów działania. Zatem odejście od celu niemierzalnego do celów mierzalnych sprowadza się, na ogół, do problemu wielokryterialnego. Dysponując, zatem określonym zbiorem zasobów i środków, a tym samym określonym zbiorem rozwiązań dopuszczalnych, zadanie sprowadza się do optymalizacji wielu celów. Współzależność tych celów powoduje, że rozwiązanie optymalne ze względu na jeden cel nie musi być optymalne ze względu na inne cele.

⁴⁵ Kasprzak T. „Analiza działalności systemów ekonomicznych”, Warszawa 1998.

1. PROBLEMY DOWODZENIA A MODELE I METODY BADAŃ OPERACYONYCH

Procesy przygotowania możliwości wariantowego podejmowania, decyzji na podstawie metod matematycznych wymagają często dla prawidłowego opracowania analitycznego lub syntetycznego oraz weryfikacji stosowanych modeli, jak również algorytmów wykorzystania metod statystyki matematycznej i sposobów zaproponowanych przez teorię i technikę symulacji⁴⁶

Metody statystyki matematycznej umożliwiają uogólnienie doświadczeń opisanych danymi pomiarowymi i wskaźnikami ilościowymi, jak wielkość opanowanego terenu, liczba zniszczonych celów, poniesione nakłady, koszt operacji itp. Trzeba jednocześnie stwierdzić, że proste metody takie, jak grupowanie, porządkowanie, wyznaczanie różnego rodzaju średnich, szeregów czasowych, rozkładów poszczególnych parametrów itp⁴⁷, mogą w przypadku rozwiązywania łatwych sytuacji problemowych być wykorzystywane bezpośrednio do podejmowania decyzji. Czasem jednak przy rozwiązywaniu trudniejszych problemów stanowią zaledwie odpowiednio przygotowane zasilenie informacyjne dla wykorzystania złożonych metod badań operacyjnych, w przypadku problemów skomplikowanych, jak na przykład decyzje dotyczące planowania czy prognozowanie działań sił powietrznych w zależności od posiadanych zasobów i dysponowanej technologii walki, metody te służą jako narzędzie pomocnicze w kreowaniu modeli matematycznych. Metoda symulacji⁴⁸ umożliwia odtwarzanie w komputerze procesów, których przebieg określają nie jakieś wcześniej rozpoznane funkcje matematyczne, lecz bardziej ogólne zasady postępowania lub pravidła porządkujące ciąg następujących po sobie zdarzeń i relacji hipotetycznego „czynnika” lub decydenta, który w obliczu powstających sytuacji podejmuje decyzje. Jeżeli powstający w trakcie symulacji ciąg sytuacji i odpowiadających im decyzji odtwarza praktykę prowadzenia walki zbrojnej (walki zbrojnej sił powietrznych), to wówczas wyniki symulacji realizowanej w ciągu długiego czasu

⁴⁶ Gajda J.B., Prognozowanie i symulacja a decyzje gospodarcze Wydawnictwo C.H.Beck Warszawa 2001

⁴⁷ Flanek Cz., Kozioł J. Kryteria i metody oceny efektywności systemów OP AON Warszawa 2000

⁴⁸ Aktualnie stosowanym narzędziem do rozwiązywania tego typu problemów w Akademii Obrony Narodowej jest program GMX autorstwa prof. B.Zdrowskiego

stają się źródłem informacji i ocen nieosiągalnych żadną inną metodą. W szczególności metoda symulacji może być użyta jako eksperyment w planowaniu działań sił powietrznych. Bezpieczniej jest, bowiem prowadzić wszelkiego rodzaju eksperymenty z użyciem komputera a nie na rzeczywisty systemie wojskowym, na dodatek w walce.

Można również, metodę tę wykorzystać szeroko jako instrument doskonalący przyszłe kadry dowódcze (do procesu uczenia podejmowania decyzji jak i do obserwacji i określania cech osobowych uczących się). Korzyści z tego tytułu są dwojakie:

- po pierwsze - wynikają one z możliwości użycia bardzo atrakcyjnych metody uczenia, dającej znakomite wyniki⁴⁹
- po wtóre - obserwacje uczestników gier kierowniczych ułatwiają formułowanie hipotez o cechach kadry dowódczej szczebla taktycznego, predyspozycjach do podejmowania właściwych decyzji taktycznych, słabościach w szybkiej analizie sytuacji bojowej, itp.; znajomość ta umożliwia - zarówno odpowiednie ukierunkowanie programów nauczania, jak również jest cennym źródłem informacji na użytek prognozowania rozwiązań taktycznych (wnioskowanie o zachowaniach taktycznych jakie skłonna będzie przejawiać kadra dowódcza).

Problemowe ujęcie obszaru i zakresu teorii badań operacyjnych z punktu widzenia możliwości praktycznego jej wykorzystania, które zostało założone dla układu tej pracy dzieli je między innymi na zagadnienia rozdziału środków walki sił powietrznych, dla których zasadnicze zastosowanie mają modele i metody rozwiązywania programowania liniowego i dyskretnego oraz bliskie im zagadnienie lokalizacyjno-transportowe. Istotny problem stanowią również zagadnienia wykorzystywania modeli sieciowych do kierowania i koordynacji projektowaniem i realizację różnego rodzaju przedsięwzięć. Duże zastosowanie mają również w analizie tworzenia systemów dla rzeczywistych obiektów metody obsługi masowej, popularnie nazywane teorię kolejek. Wiele problemów militarnych modeluje się

⁴⁹ Od kilku lat na wydziale Lotnictwa i Obrony Powietrznej Akademii Obrony Narodowej ta metoda jest stosowana ze znakomitymi rezultatami

przy wykorzystaniu metod umożliwiających rozwiązywanie zagadnień konkurencyjnych przy wykorzystaniu teorii gier.

Pole zastosowań badań operacyjnych wyznaczone jest możliwością prowadzenia analizy zgodnie z potrzebami i wymogami podejmowania konkretnych działań oraz zastosowania dla ich oceny odpowiednich kryteriów efektywności taktyczno – operacyjnej i techniczno-ekonomicznej. Oczywiście zaufanie do metody uzależnione jest od formalnych i praktycznych sposobów weryfikacji modelu, jego rozwiązania oraz otrzymanych z niego wyników. W dużej mierze praktyczne ich wykorzystanie zależy od prostych i zrozumiałych, ale precyzyjnie opisanych algorytmów i procedur postępowania oraz dostosowania ich - o ile zaistnieje potrzeba - do wykonania dla nich złożonych obliczeń metodami komputerowymi (informatycznymi). Pole to obejmuje tworzenie modeli analitycznych symulujących, ekonometrycznych i statystycznych oraz mieszanych, jak również ich rozwiązywanie i budowę efektywnych algorytmów dla potrzeb podejmowania decyzji umożliwiających sterowanie, kierowanie i dowodzenie procesami militarnymi i walki, procesami technicznymi i organizacyjnymi.

Metody programowania matematycznego takiego, jak programowanie liniowe, dyskretne, całkowitoliczbowe, wypukłe dynamiczne, umożliwią między innymi dokonanie podziału posiadanych zasobów, według zadanego kryterium optymalizacyjnego przy uwzględnieniu ograniczeń takich jak na przykład wymagania operacyjne, taktyczne ekonomiczne polityczne i gospodarcze. Metody te spełniać, więc mogą w istocie tę samą funkcję, co tzw. bilansowanie zadań i środków dokonywane w tradycyjnej procedurze planowania metodą przymiarek i szacowań taktycznych. Trzeba jednocześnie stwierdzić, że metody te są o wiele sprawniejsze i efektywniejsze w praktyce. Na szerokie zastosowanie szczególnie zasługuje programowanie liniowe ze względu na jego metodologiczne i praktyczne opracowanie przy użyciu systemów informatycznych, które mają do tego celu odpowiednie oprogramowanie. Te metody są szczególnie przydatne do szacowania tych parametrów, które ze swej natury są addytywne mają, więc postać liniowej funkcji celu. Z kolei wiele zagadnień taktycznych, ekonomicznych i technicznych daje się przedstawić w postaci funkcji liniowych czy też takich, które z możliwą do

przyjęcia dokładnością można aproksymować funkcjami liniowymi.

Metoda programowania liniowego może być skutecznie zastosowana w pracach planistycznych wszystkich szczebli dowodzenia. Głównym elementem wnikliwej analizy przeprowadzonej za pomoce badań operacyjnych jest wyczerpująca ocena wrażliwości modelu matematycznego. Dokładna analiza porównawcza możliwych przypadków dostarczy podstawowych informacji, za pomocą których dowództwo może zweryfikować poprawność zbudowanego modelu, jego założenia oraz dane w nim wykorzystywane.

Podkreślenia wymaga i to, że z reguły w sztaby jednostek liniowych zapoznane z modelem procesu decyzyjnego, opartym na wykorzystaniu programowania liniowego, spostrzegają z aprobatą że w przeciwieństwie do tradycyjnych, znanych sposobów podejmowania decyzji⁵⁰, że programowanie liniowe daje sposobność zbadania wszystkich możliwych wariantów decyzyjnych i upewnia, że żaden z nich nie został pominięty.

Modele lokalizacyjno-transportowe dotyczą w głównej mierze zagadnień komunikacyjnych. Typowym problemem transportowym jest znalezienie w sieci, w której każdy łuk ma określoną długość, najkrótszej drogi. Takie określenie problemu jest daleko idącym uproszczeniem, ponieważ w praktyce wymaga zbudowania modelu optymalizacyjnego z uwzględnieniem wielu kryteriów takich jak koszty, czas, szybkość transportu, długość drogi itp.

Wszystkie tego rodzaju problemy są szczególnymi zagadnieniami alokacji i polegają na opracowaniu formuły przydziału ograniczonych zasobów, aby przy określonych kosztach optymalizować funkcję celu. Funkcja celu może oznaczać maksymalizację efektów, wydajności lub minimalizację poniesionych nakładów.

Wiele trudności praktycznych w praktyce dowodzenia sprawia planowanie realizacji złożonych przedsięwzięć militarnych. Wykonanie tego rodzaju zadań wymaga w praktycznym działaniu różnorodnych rozwiązań organizacyjnych i działań koordynacyjnych. Opracowane przy zastosowaniu teorii grafów i sieci metod planowania pozwalają efektywniej wykorzystać dostępne zasoby materialne i ludzkiej energii oraz prowadzą do znacznego skrócenia terminu końcowego.

⁵⁰ Metoda „plusów i minusów”

Stosowanie metod sieciowych wymaga identyfikacji działań, od których zależy czas realizacji, przewidywany termin końcowy, oraz określenia, w jaki sposób dokonywać oceny postępu realizacji całego projektu, w jakim stopniu można przyspieszyć termin realizacji przedsięwzięcia przy zadanym jako wielkość normatywna koszcie.

Pierwsze wzmianki o zastosowaniu metod sieciowych powołują się na program budowy pocisków Polaris⁵¹. Pozwoliły one skrócić czas realizacji przedsięwzięcia o dwa lata, to znaczy o połowę. Efektywne również wyniki uzyskano w USA przy remoncie łodzi podwodnych zaplanowanym według tego rodzaju metod⁵².

Jak wskazuje praktyka dowodzenie realizowane jest w ramach konfliktów interesów⁵³. Można ten fakt oczywiście zlekceważyć, ale wtedy rozwiązania dokładne, stosowane w badaniach operacyjnych nie są w pełni rozwiązaniami realnymi. Oczywiście na tym polu pewnej pomocy może udzielić teoria gier. Stosując teorię gier jako narzędzie do modelowania zagadnień konfliktowych w dowodzeniu żąda się od tej metody odpowiedzi na pytanie: jak zamodelować występujące konflikty interesów, jak między nimi znaleźć kompromis. Można na przykład założyć, że istnieje dwóch przeciwników, których działalność jest charakteryzowana przez konkurencyjne cele. Dysponują oni skończoną ilością strategii działania. Wybór ostateczny strategii jednego konkurenta zależy od tego, jaką strategię wybrał drugi. Ostateczny wynik ich działania jest superpozycją wybranych strategii. Teoria gier rozwiązuje takie problemy. Wybrane strategie i uzyskane wyniki ich stosowania stanowią podstawę dla podejmowania decyzji przez poszczególnych graczy.

Dla zrozumienia możliwości zastosowania badań operacyjnych w ujęciu systemowym warto poddać analizie rzeczywisty złożony problem opracowany dla praktyki dowodzenia.

Opracowanie to może być bardzo przydatne jako przykład ilustrujący potrzeby rozwiązywania trudnych problemów metodami badań operacyjnych, samodzielnie

⁵¹ Wagner M.H., *Badania operacyjne PWE* Warszawa 1990

⁵² Siwak T., *Badania operacyjne dla inżynierów* Wyd. AGH Kraków 1998

⁵³ Szpyra R. *Operacje informacyjne państwa w działaniach sił powietrznych AON* Warszawa 2002.

w zespołach interdyscyplinarnych przy wykorzystaniu inicjatywy, pomysłowości i inwencji twórczej poszczególnych jego członków⁵⁴.

Doświadczenia wynikające ze stosowania od przeszło siedemdziesięciu paru lat badań operacyjnych wykazują szerokie możliwości ich zastosowania do podejmowania decyzji między innymi w dowodzeniu. Opracowano teoretycznie i sprawdzono w praktyce z dobrymi skutkami wiele metod, jak na przykład zagadnienia optymalnego podziału zasobów, obsługi lotnisk, sterowania przebiegiem przewozów samochodowych i kolejowych itp. Badania operacyjne dają wiele gotowych metod, które można wykorzystywać do rozwiązywania podobnych problemów w technice uzbrojenia. Istnieje również potrzeba opracowania szczegółowych zagadnień, które niesie praktyka i do których nie udaje się w prosty sposób wykorzystać zastosowanych metod i technik. Zagadnieniami tymi powinni się zająć odpowiednio dobrani programiści. Posiadana wiedza teoretyczna oraz doświadczenie praktyczne badaczy, jak również zdolność do kreowania nowych rozwiązań problemów, są dla tego rodzaju zadań najbardziej efektywne.

Słabością badań operacyjnych jest konieczność arbitralnego rozstrzygnięcia, jaki zakres i szczegółowość rozwiązywania problemów jest możliwy oraz jakie przyjąć kryteria oceny wyników rozwiązania. Duże trudności występują również przy dopasowywaniu modelu do rzeczywistości, której daje on jedynie uproszczony obraz w porównaniu do jej wielkiej złożoności i różnorodności. Wynika to często z pominięcia w modelu istotnych zmiennych. Może tu również występować potrzeba określenia charakteru zmiennych, parametrów oraz w uproszczony sposób zależności funkcyjnej między nimi, jak na przykład liniowy lub multimplikatywny charakter funkcji, bądź założenie o ciągłym lub dyskretnym obrazie funkcji i zmiennych. Można również manipulować ograniczeniami, pomijać je lub je modyfikować⁵⁵. Duże trudności stwarza także łączność z decydentami, którzy są przyzwyczajeni do języka lingwistycznego, a nie do logiki języka specjalistycznego, obowiązującego w badaniach operacyjnych. Umiejętne

⁵⁴ Bardzo szerokie możliwości wykorzystania tego typu metod istnieją w sztabach jednostek sił powietrznych

⁵⁵ Rogalska D., Programowanie liniowe. Algorytmy i zadania, Wydawnictwo Uniwersytetu Łódzkiego, Łódź, 1983.

położenie nacisku na opracowanie języka zrozumiałego przez decydentów, zapewni sukces w zastosowaniu badań operacyjnych. Istotne jest także, aby zmienne ilościowe i jakościowe można było w jakiś sposób wymiarowo i problemowo zinterpretować. Wymiarowość modeli badań operacyjnych często pozostawia wiele do życzenia. Oczywiście w tym przeglądzie wymienione zostały zaledwie niektóre zagadnienia i są to rzeczywiste problemy wywołujące trudności i kontrowersje w praktycznym stosowaniu badań operacyjnych w dowodzeniu siłami powietrznymi.

Badania operacyjne ofiarowują wiele metod i technik oraz wiedzy i doświadczenia dla kreowania i usprawniania procesu podejmowania decyzji przy wyborze rozwiązań technicznych, organizacyjnych i w rachunku ekonomicznym, najogólniej - w dowodzeniu. Do tego natomiast, aby je stosować, wymagane jest zapotrzebowanie ze strony praktyków dowodzenia i odrobina nadziei, że badania te dostarczą metod, które usprawnią, a nawet pozwolą poprawnie zaprojektować efektywne systemy dowodzenia siłami powietrznymi

2. Zastosowanie modeli liniowych dla potrzeb dowodzenia siłami powietrznymi.

W wielu różnych sytuacjach identyfikowanych w ramach dowodzenia siłami powietrznymi dowódca decydent zmuszony jest do podejmowania decyzji. Sytuacje te nazywamy sytuacjami decyzyjnymi. Warunki, w jakich działa decydent, nie pozwalają na wybór dowolnej decyzji. Decyzje takie ograniczone są pewnymi warunkami wynikającymi z wpływu otoczenia bliższego i dalszego, w jakim siły powietrzne funkcjonują. Decyzję, która jest w zgodzie z warunkami ograniczającymi nazywamy decyzją dopuszczalną.

Nie każda decyzja dopuszczalna jest równie dobra. W świetle celów, jakie sobie stawia decydent, jedne decyzje mogą być lepsze, inne gorsze. Stąd wynika problem wyboru decyzji najlepszej, zwanej decyzją optymalną.

Wybór decyzji optymalnej wymaga przyjęcia określonego kryterium, według którego decydent (dowódca) ocenia decyzje jako lepsze lub gorsze. Kryterium to nazywamy kryterium wyboru lub oceny decyzji.

Opis określonej sytuacji decyzyjnej nazywamy problemem (zagadnieniem) decyzyjnym, w którym warunki ograniczające, kryterium wyboru i decyzje dają się opisać w języku matematycznym.

Warunki ograniczające najczęściej opisywane są za pomocą układów równań lub nierówności. W równaniach tych (lub nierównościach) występować będą pewne wielkości dane, zwane parametrami, oraz wielkości, które należy ustalić, zwane zmiennymi decyzyjnymi.

Oprócz warunków ograniczających w zadaniu decyzyjnym mogą także występować warunki dotyczące znaku zmiennych (np. warunek nieujemności) lub typu zmiennych (np. warunek ich ciągłości, całkowitoliczbowości lub binarności).

Decyzję dopuszczalną utożsamiamy z takim układem wartości zmiennych (układem liczb), które spełniają wszystkie warunki opisujące badaną sytuację. Rolę kryterium wyboru będzie pełnić pewna funkcja zmiennych decyzyjnych mierząca cel, który chce osiągnąć decydent (dowódca). Funkcją tę nazywa się funkcja celu.

Wybór decyzji optymalnej polega na ustaleniu takiej decyzji dopuszczalnej, przy której funkcja celu osiąga wartość najkorzystniejszą, tzn. w zależności od badanej sytuacji wartości minimalną lub maksymalną.

Opisanie sytuacji decyzyjnej w języku matematycznym ma na celu sprowadzenie problemu wyboru najlepszego decyzji do rozwiązania pewnego jednoznacznie określonego zadania matematycznego. Aby rozwiązanie takiego zadania rzeczywiście umożliwiło wybór najlepszej decyzji, trzeba je tak sformułować, by dokładnie opisywało ono daną sytuację decyzyjną. Należy zatem ustalić⁵⁶:

1. jakie wielkości mają być wyznaczone i odpowiednio je oznaczyć (tzn. należy podać zmienne decyzyjne),
2. jakie wielkości są dane (określić parametry zadania),
3. jakie warunki ograniczające musi spełnić dopuszczalne decyzje i sformułować je w postaci równania lub nierówności wiążących zmienne decyzyjne (zapisać warunki ograniczające),
4. cel, jaki chce osiągnąć decydent oraz sformułować funkcję zmiennych decyzyjnych określającą stopień osiągnięcia celu (podać funkcję celu).

Jeżeli w zadaniu decyzyjnym funkcja celu oraz warunki ograniczające są liniowe, to zadanie takie nazywamy liniowym modelem optymalizacji.

Modele optymalizacji liniowej stanowią najliczniejszą i najbardziej rozpowszechnioną grupę modeli matematycznych dotyczących wyboru decyzji optymalnej, tj. takiej, która przy istniejących ograniczeniach zapewnia, ze względu na przyjęte kryterium, najlepszą realizację określonego zamierzenia - celu.

Proces budowy modelu umożliwiającego wyznaczanie decyzji optymalnej składa się z czterech etapów⁵⁷:

1. zdefiniowania pojęcia decyzji,
2. ustalenia warunków wyznaczających zbiór decyzji dopuszczalnych D ,
3. przyjęcia miernika oceny stopnia (poziomu) realizacji założonego celu przez każdą z decyzji dopuszczalnych,
4. określenia pojęcia decyzji optymalnej przy przyjętym mierniku oceny.

⁵⁶ Wagner M.H., Badania operacyjne PWE Warszawa 1990

⁵⁷ Tamże

Otrzymany w takim postępowaniu model wyboru decyzji optymalnej jest zadaniem optymalizacji liniowej, gdy⁵⁸:

- Sformułowany problem decyzyjny pozwala na ilościowe ujęcie rezultatów każdego z wymienionych etapów budowy modelu.
- Jego zapis formalny ma niżej wymienione własności:
 - Dowolną decyzję można wyrazić za pomocą nieujemnych wartości liczbowych k zmiennych - *zmiennych decyzyjnych*, tzn. dowolną decyzję można zapisać jako wektor $X = [x_1 x_2 \dots x_k]$, w którym $x_j \geq 0$ ($j = 1, 2, \dots, k$) oznacza określoną wartość j -tej zmiennej decyzyjnej, a liczba k - liczbę zmiennych decyzyjnych, wynikającą z treści modelowanego problemu.
 - Ograniczenia dotyczące swobody wyboru decyzji (definiujące zbiór D można zapisać w postaci układu nierówności lub równań liniowych, jakie muszą spełniać wartości zmiennych decyzyjnych $x_1, x_2, \dots, x_k$, tzn. zapis formalny ograniczenia można przedstawić za pomocą nierówności:
 $a_1x_1 + a_2x_2 + \dots + a_kx_k \leq b$ lub $a_1x_1 + a_2x_2 + \dots + a_kx_k \geq b$ albo równania:
 $a_1x_1 + a_2x_2 + \dots + a_kx_k = b$
 - Ocenę stopnia osiągnięcia celu przez decyzję dopuszczalną x wyraża wartość pewnej funkcji liniowej f (*funkcji celu*), określonej na zbiorze D . Miernikiem oceny jest więc funkcja:
 $f(x) = c_1x_1 + c_2x_2 + \dots + c_kx_k$.
 - Ustalenie, czy decyzja optymalna x° ma być tą spośród decyzji dopuszczalnych, która zapewnia, że $f(x^\circ)$ jest największą (*maksymalną*) czy też jest najmniejszą (*minimalną*) wartością funkcji celu f osiąganą na zbiorze D .

Wiele praktycznych zagadnień wynikających z praktyki dowodzenia siłami powietrznymi może być sformułowanych jako modele programowania liniowego.

⁵⁸ Trzaskalik T., Badania operacyjne z komputerem, seria: Metody badań operacyjnych, Absolwent, Łódź, 1997.

2.1 Model ogólny zagadnienia programowania liniowego

Znaleźć n liczb rzeczywistych $x_1, x_2, \dots, x_n$ spełniających ograniczenia

$$\sum_{j=1}^n a_{ij} x_j = b_i \quad (i = 1, 2, \dots, r; r \geq 0)$$

$$\sum_{j=1}^n a_{ij} x_j \leq b_i \quad (i = r+1, r+2, \dots, r+s; s \geq 0)$$

$$\sum_{j=1}^n a_{ij} x_j \geq b_i \quad (i = r+s+1, r+s+2, \dots, r+s+m; m \geq 0),$$

$$x_1 \geq 0, x_2 \geq 0, \dots, x_t \geq 0 \quad (t \geq 0)$$

dla których funkcja celu

$$F(x) = \sum_{j=1}^n c_j x_j$$

przyjmuje wartość ekstremalną (maksymalną lub minimalną) oraz wyznaczyć wartość funkcji celu w punkcie ekstremalnym.

Współczynniki

$$a_{ij} \quad (i = 1, 2, \dots, m; j = 1, 2, \dots, n, 0), \quad c_j \quad (j = 1, 2, \dots, n)$$

są stałymi (liczbami rzeczywistymi) i są znane w powyższym zagadnieniu.

Model standardowy zagadnienia programowania liniowego

Znaleźć n liczb rzeczywistych $x_1, x_2, \dots, x_n$, spełniających ograniczenia

$$\sum_{j=1}^n a_{ij} x_j = b_i \quad \text{oraz } b_i \geq 0 \quad (i = 1, 2, \dots, m; m < n)$$

$$x_j \geq 0 \quad (j = 1, 2, \dots, n)$$

dla których funkcja celu

$$F(x) = \sum_{j=1}^n c_j x_j$$

osiąga wartość minimalną oraz wyznaczyć wartość funkcji celu w punkcie minimalnym.

Wprowadzając oznaczenia:

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \dots \\ b_m \end{bmatrix}, x = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \dots \\ x_n \end{bmatrix}, 0_n = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \dots \\ 0 \end{bmatrix},$$

$$c = [c_1, c_2, \dots, c_n]$$

zagadnienie programowania liniowego można zapisać zwięźlej:

Znaleźć wektor $x \in R^n$ spełniający ograniczenia

$$\begin{aligned} Ax &= B, \\ x &\geq 0_n, \end{aligned}$$

dla którego funkcja celu

$$F(x) = z(x) = cx$$

osiąga wartość minimalną oraz obliczyć wartość funkcji celu w tym punkcie.

Interpretacja geometryczna liniowych modeli optymalizacji

Zadanie programowanie liniowego (PL) może mieć rozwiązanie dopuszczalne lub być zadaniem sprzecznym, nie mającym rozwiązania dopuszczalnego. Jeżeli zadanie PL ma rozwiązanie dopuszczalne, to zachodzi jedna z trzech możliwości:

1. istnieje jedno rozwiązanie optymalne,
2. istnieje wiele rozwiązań optymalnych,
3. brak rozwiązania optymalnego.

W przypadku dwóch zmiennych bardzo łatwo jest znaleźć rozwiązanie optymalne lub pokazać, że go nie ma. Stosujemy wówczas metodę geometryczną. Ze względu na ograniczenia dotyczące liczby zmiennych nie ma ona jednak dużego znaczenia praktycznego, pozwala doskonale zilustrować procedurę znajdowania rozwiązania optymalnego.

Problem znajdowania rozwiązania zadania programowania liniowego metodą geometryczną sprowadza się do⁵⁹:

1. wyznaczenia półpłaszczyzny odpowiadającej poszczególnym nierównościom,
2. znalezienia części wspólnej dla wszystkich półpłaszczyzn, czyli zbioru rozwiązań dopuszczalnych,
3. wyszukania w zbiorze rozwiązań dopuszczalnych rozwiązania najlepszego dla przyjętej funkcji celu.

Jeżeli zbiór rozwiązań dopuszczalnych jest zbiorem pustym lub zbiorem nieograniczonym w kierunku wzrostu wartości funkcji celu dla zadania na maksimum bądź spadku dla zadania na minimum, to zadanie nie ma rozwiązania optymalnego.

PRZYKŁAD 3

Składnica środków materiałowych zaopatruje dwa rodzaje jednostek A_1 i A_2 w cztery grupy środków B_1, B_2, B_3, B_4 . Dla zaopatrzenia jednej jednostki A_1 potrzeba 4 tony środków B_1 , 1,5 tony środków B_2 ; 2,5 tony środków B_3 . Dla zaopatrzenia jednej jednostki A_2 potrzeba 3 tony środków B_1 , 3 tony środków B_2 ; 2 tony środków B_3 i 2 tony środków B_4 . W ciągu jednego dnia składnica powinna wydać nie mniej niż 16 ton środka B_1 15 ton środków B_2 oraz nie więcej niż 20 ton środków B_3 i 12 ton środków B_4 . Do załadunku tych środków materiałowych na odpowiednie środki transportu wyznaczono grupę załadowczą, która może załadować środki przeznaczone dla jednostki A_1 w ciągu 70 minut a dla jednostki A_2 - w ciągu 90 minut. Należy określić ile jednostek A_1 i A_2 może składnica zaopatrzyć w ciągu dnia mając na uwadze, to aby

⁵⁹ Trzaskalik T., Badania operacyjne z komputerem, seria: Metody badań operacyjnych, Absolwent, Łódź, 1997.

łączny czas pracy grupy załadowczej był jak najkrótszy. Oznaczmy przez x_1 – ilość jednostek A_1 zaopatrywanych w ciągu dnia przez x_2 ilość jednostek A_2 zaopatrywanych w ciągu dnia.

Funkcja optymalizacyjna ma postać $F(x_1, x_2) = 70x_1 + 90x_2 \rightarrow \min$

Przy ograniczeniach

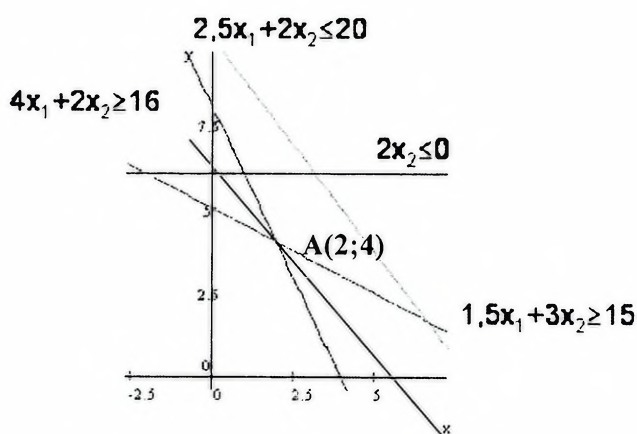
$$4x_1 + 2x_2 \geq 16$$

$$1,5x_1 + 3x_2 \geq 15$$

$$2,5x_1 + 2x_2 \leq 20$$

$$2x_2 \leq 12$$

$$x_2 \geq 0; x_1 \geq 0$$



Rysunek 1. Interpretacja graficzna rozwiązania przykładu:

Rozwiązanie optymalne zadania jest następujące $x_1 = 2$ $x_2 = 4$ dla tych wartości zmiennych decyzyjnych funkcja kryterialna przyjmuje wartość $F(2;4) = 8 \frac{1}{3}$ godz., Zatem w ciągu dnia składnica może zaopatrzyć dwie jednostki A_1 i cztery jednostki A_2 a minimalny czas pracy grupy załadowczej wynosi 8 godz, i 20 minut.

PRZYKŁAD 4

Należy systemy uzbrojenia m typów przydzielić n nosicielom, przy czym dane są ilości poszczególnych systemów uzbrojenia b_i $i=1, 2, \dots, n$ oraz możliwości ich przydziału poszczególnym nosicielom a_{ij} , $i=1, 2, \dots, n$ Ponadto znane są prawdopodobieństwa zniszczenia nosicieli systemów uzbrojenia p_i $i=1, 2, \dots, n$. Jeżeli oznaczmy przez x_i $i=1, 2, \dots, n$. liczbę nosicieli to funkcja kryterialna może mieć postać

$$F(x)=\sum_{i=1}^n p_i x_i \rightarrow \min$$

a w zadaniu optymalizacyjnym funkcję celu należy minimalizować przy wskazanych ograniczeniach

$$\sum_{j=1}^n a_{ij} x_j \geq b_i \rightarrow b_i, i = 1,2,...m$$

Funkcja celu dla podanego przykładu będzie minimalizować straty nosicieli i można ją wyrazić w poniższej formie:

$$F(x) = 0.4x_1 + 0.5x_2 + 0.2x_3 + 0.8x_4 + 0.6x_5 + 0.3x_6 \rightarrow \min$$

Przy ograniczeniach wynikających z treści problemu:

$$\begin{aligned} 4x_1 + x_4 &\geq 16 \\ 2x_2 + x_5 &\geq 10 \\ x_3 + x_4 + 6x_5 &\geq 76 \\ 4x_1 + 3x_2 + x_6 &\geq 24 \\ x_j &\geq 0; j = 1,...,4 \end{aligned}$$

Otrzymujemy macierz

	Typ X1	Typ X2	Typ X3	Typ X4	Typ X5	Typ X6	b _i .
Min p-stwa strat	0,4	0,5	0,2	0,8	0,6	0,3	
Uzbrojenie typu C1	4	0	0	1	0	0	16
Uzbrojenie typu C2	0	2	0	0	1	0	10
Uzbrojenie typu C3	0	0	1	2	6	0	76
Uzbrojenie typu C4	4	3	0	0	0	1	24

Rozwiązanie

Lp	Zmienne	Wartość zmiennej	Wartość p- stwa C(j)	Rezultat
1	X1	6,0	0,4	2,4
2	X2	0	0,5	0
3	X3	0	0,2	0
4	X4	0	0,8	0
5	X5	12,7	0,6	7,6
6	X6	0	0,3	0
Wartość funkcji celu (Min.) =10,0				

Optymalne rozwiązanie zadania jest następujące $x_1=6$; $x_2=0$; $x_3=0$; $x_4=0$; $x_5=12,7$; $x_6=0$ a wówczas funkcja celu będzie minimalna, $F(x)=10$ gdy zostaną użyte nosiciele

pierwszego typu, 6 nosicieli a piątego 12. Wynika z tego, że w tej sytuacji nie należy uzbrajać nosicieli typu 2, 3, 4 i 6 oczekiwane straty nosicieli wyposażonych w wymaganą ilość uzbrojenia nie powinny być większe niż 10^{60}

Szczególnym przypadkiem optymalizacji liniowej jest binarne zadanie optymalizacji liniowej, zwane także programowaniem liniowym zerojedynkowym. W zadaniach tych zmienna decyzyjna przyjmuje tylko dwie wartości 1 lub 0. Przykładowo zadanie tego typu może mieć postać:

$$F(x) = \sum_{i=1}^n c_i x_i \rightarrow \min$$

przy ograniczeniach

$$\sum_{j=1}^n a_{ij} x_j \geq b_i \rightarrow b_i, i = 1, 2, \dots, m$$

$$x_j = \begin{cases} 1 \\ 0 \end{cases}, i = 1, 2, \dots, n$$

$$c_j \geq 0$$

Klasycznym zadaniem binarnym optymalizacji liniowej jest tzw. zadanie komiwojażera, należy "odwiedzić" $n-1$ punktów i powrócić do punktu startu. W jakiej kolejności należy te punkty "odwiedzać" pod warunkiem, że każdy punkt jest odwiedzany jeden i tylko jeden raz, aby droga przebyta była jak najkrótszą. Z zadania wynika, że dane jest macierz $C = c_i$ ($i=1, 2, \dots, n$) odległości /lub kosztów/ między punktami i poszukuje się macierzy $X = [x_{ij}]$. takiej, aby minimalizowana była funkcja

$$F(x) = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n c_i x_i \rightarrow \min$$

przy ograniczeniach

$$\sum_{i=1}^n x_{ij} = 1$$

$$\sum_{j=1}^n x_{ij} = 1$$

gdzie:

$x_{ij} = 1$ - gdy przebywana jest droga z punktu i do punktu j

$x_{ij} = 0$ - przeciwnym przypadku

⁶⁰ Przyjęte prawdopodobieństwa i warunki zadania ze względu na charakter pracy są dalekie od rzeczywistych dlatego podane dane w zadaniu mogą spełniać funkcję edukacyjną.

PRZYKŁAD 5⁶¹

Baterie dysponuje pięcioma rakietami przeznaczonymi do niszczenia celów. Prawdopodobieństwa pij zniszczenia i-tę raketę j-tego celu przedstawiono w tabeli. Należy dokonać optymalnego przydziału rakiet do niszczenia celów, tzn. takiego przydziału, który maksymalizuje wartość oczekiwaną liczby zniszczonych celów

Tabela

	1	2	3	4	5
1	0.12	0.02	0.5	0.43	0.15
2	0.71	0.18	0.81	0.05	0.26
3	0.84	0.76	0.26	0.37	0.52
4	0.22	0.45	0.83	0.81	0.65
5	0.49	0.02	0.50	0.26	0.67

Zadanie optymalizacji ma postać

$$F(x) = \sum_{i=1}^5 \sum_{j=1}^5 p_{ij} x_{ij}$$

gdzie jeżeli rakieta niszczy cel przypisujemy wartość 1 w przeciwnym wypadku zero

$x_{ij} = 1$ jeżeli i -ta rakieta niszczy j -ty cel;

$x_{ij} = 0$ w przeciwnym przypadku

Ograniczenia wynikają z liczby celów i rakiet:

$$\sum_{j=1}^5 x_{ij} = 1, i = 1, \dots, 5$$

$$\sum_{i=1}^5 x_{ij} = 1, j = 1, \dots, 5$$

$$x_{ij} \geq 0$$

⁶¹ Sienkiewicz P. Teoretyczne podstawy optymalizacji w systemach dowodzenia AON Warszawa 1996

Rozwiązanie zadania przedstawia tabela

Tabela

	1	2	3	4	5
1				1	
2			1		
3		1			
4					1
5	1				

Wartość oczekiwana liczby zniszczonych celów przyjmuje wartość maksymalną, gdy rakieta nr 1 niszczy cel nr 4. Rakieta nr 2 niszczy cel nr 3, rakieta nr 3 niszczy cel nr 2, rakieta nr 4 niszczy cel nr 5 a rakieta nr 5 niszczy cel nr 1.

Uniwersalną metodą rozwiązywania programów liniowych jest algorytm „Simpleks”. Istota algorytmu polega na badaniu kolejnych rozwiązań bazowych (dopuszczalnych) w taki sposób, że⁶²:

- znajdujemy (dowolne) rozwiązanie bazowe programu;
- sprawdzamy czy jest ono optymalne;
- jeżeli dane rozwiązanie bazowe nie jest optymalne konstruujemy następne (lepsze).

Postępowanie kończymy w momencie osiągnięcia optymalnego rozwiązania bazowego.

Zapis modelu w postaci macierzowej:

$$F(x) = \sum_{j=1}^n c_j x_j,$$

$$Ax \leq b;$$

$$x_j \geq 0$$

gdzie :

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix}, \quad x = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}, \quad b = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{bmatrix}, \quad c = [c_1 \quad c_2 \quad \cdots \quad c_n]$$

Przed przystąpieniem do budowy pierwszej tablicy Simpleks zmieniamy wszystkie nierówności na równania przez wprowadzenie nowych zmiennych (*swobodnych*), które stanowią początkowe rozwiązanie bazowe.

⁶² Wagner M.H., Badania operacyjne PWE Warszawa 1990

W przypadku nierówności typu $\geq$ od lewej strony odejmujemy zmienne swobodne i dodajemy *zmienne sztuczne*. Zmienne sztuczne wchodzi do pierwszej bazy. Do definicji celu zmienne swobodne wchodzi ze współczynnikami $= 0$ a zmienne sztuczne ze współczynnikami M ($M \rightarrow \infty$)⁶³.

PRZYKŁAD 6

Należy zniszczyć cel grupowy składający się z trzech celów cząstkowych minimalną liczbą rakiet. Dysponujemy trzema rodzajami rakiet w wystarczającej ilości. Wymaga się aby straty wyrządzone w każdym z celów cząstkowych wyniosły 100% . Stopień skuteczności rakiet każdego typu wyrażono w procentach cij. Jest on różny w zależności od rodzaju celu cząstkowego (tabela)

Tabela

cel \	R ₁	R ₂	R ₃
A ₁	9	4	2
A ₂	5	2	8
A ₃	7	10	6

Przez x_i , $i=1, 2, 3$ oznaczmy liczbę pocisków i -tego typu. Wielkość strat przeciwnika rośnie proporcjonalnie do liczby wykonanych strzelań. Zadanie polega na ustaleniu liczby rakiet każdego rodzaju, którymi należy ostrzelać cel grupowy aby suma zużytych rakiet była jak najmniejsza.

Zadanie programowania liniowego polega na minimalizacji funkcji celu:

$$F(x) = \sum_{j=1}^3 x_j \rightarrow \min,$$

przy ograniczeniach wynikających z warunków zadania

$$9x_1 + 4x_2 + 2x_3 \geq 100$$

$$5x_1 + 2x_2 + 8x_3 \geq 100$$

$$7x_1 + 10x_2 + 6x_3 \geq 100$$

$$x_j \geq 0$$

⁶³ Wagner M.H., Badania operacyjne PWE Warszawa 1990

Tablica bazowa do przykładu 6

Rakiety \ Cele	X1	X2	X3		
Min	1	1	1		
C1	9	4	2	$\geq$	100
C2	5	2	8	$\geq$	100
C3	7	10	6	$\geq$	100

2.2 Idea metody simpleks:

- zbiór rozwiązań dopuszczalnych jest wypukły, domknięty, o skończonej liczbie wierzchołków
- wszystkie bazowe rozwiązania dopuszczalne odpowiadają wierzchołkom zbioru rozwiązań dopuszczalnych
- metoda simpleks jest iteracyjną procedurą przechodzenia od jednego bazowego rozwiązania dopuszczalnego do drugiego, do momentu znalezienia rozwiązania optymalnego
- punkt startowy pierwsze bazowe rozwiązanie dopuszczalne
- liczba zmiennych większa od liczby ograniczeń
- wszystkie zmienne decyzyjne nieujemne
- metoda simpleks generuje w każdej iteracji jedno bazowe rozwiązanie dopuszczalne, które nie jest gorsze od poprzedniego.
- gdy wartość funkcji celu nie może być już w ten sposób poprawiona, znaczy to, że wyznaczone bazowe rozwiązanie dopuszczalne jest rozwiązaniem optymalnym

Etapy metody simpleks

1. Ustala się wstępną postać bazową i odpowiadające jej wstępne rozwiązanie bazowe.
2. Sprawdza się przy użyciu tzw. kryteriów simpleks, czy dane rozwiązanie bazowe jest optymalne. Jeśli tak, to STOP - znaleziono rozwiązanie optymalne. Jeśli nie, to 3 .
3. Tworzy się nową bazę będącą modyfikacją poprzedniej bazy taką, że
 - a) kierując się określonymi regułami z bazy, usuwa się jedną zmienną dotychczas bazową;

b) na jej miejsce, na dopuszczalnie największym poziomie, wprowadza się tę zmienną dotychczas niebazową, dla której kryterium simpleks jest najkorzystniejsze.

4 Określa się nową postać bazową odpowiadającą tej nowej bazie oraz nowe rozwiązanie bazowe.

Po czym przechodzi się do punktu 2

Etap przygotowawczy metody Simpleks. Wstępna postać bazowa

Przed rozwiązywaniem zadania metodą simpleks należy sformułować zadanie w postaci kanonicznej i to takiej, że w macierzy współczynników występują wektory tworzące macierz jednostkową I_B stopnia r (r - liczba warunków).

Zmienne związane z tymi wektorami są wstępnymi zmiennymi bazowymi.

Ponadto należy doprowadzić do tego, że warunki znakowe orzekają nieujemność zmiennych, tzn. $x_j \geq 0$, a wektor wyrazów wolnych nie ma składowych ujemnych.

Jeśli w macierzy współczynników postaci kanonicznej nie ma tylu wektorów jednostkowych, ażeby tworzyły one macierz jednostkową, to:

- a) albo na drodze elementarnych przekształceń wierszowych, przekształcamy macierz współczynników tak, żeby wystąpiła w niej macierz I_B ,
- b) albo "sztucznie" tworzymy taką macierz, uzupełniając macierz współczynników o odpowiednią liczbę brakujących wektorów jednostkowych.

Jest to tzw. metoda sztucznej bazy.

Zmienne sztuczne

Zmienna sztuczna jest to zmienna związana z wprowadzonym dodatkowo wektorem jednostkowym. Każdemu takiemu wektorowi odpowiada jemu właściwa zmienna sztuczna.

Waga zmiennej sztucznej w funkcji celu jest taka, że nie jest opłacalne pozostawianie tej zmiennej w rozwiązaniu (jest bardzo duża dodatnia w wypadku zadania na minimum oraz ujemna i co do modułu bardzo duża - w wypadku zadania na maksimum).

Użycie zmiennych sztucznych jest tylko chwytem rachunkowym, czynionym po to, by we wstępnej postaci bazowej wystąpiła macierz jednostkowa I_B .

Jeśli w rozwiązaniu optymalnym pozostanie jakaś zmienna sztuczna na poziomie niezerowym, znaczy to, że zadanie decyzyjne jest sprzeczne.

W wersji simpleksowej zadania decyzyjnego wystąpić mogą więc trzy rodzaje zmiennych:

- "oryginalne" zmienne decyzyjne,
- zmienne swobodne
- zmienne sztuczne.

W metodzie simpleks postać bazową przedstawia się zazwyczaj w formie tzw. **tablicy simpleksowej**. W przykładzie tablica ta mogłaby mieć formę:

Pierwsza tablica simpleksowa dla podanego przykładu 6

Zmienne bazowe		X1	X2	X3	SC1	SC2	SC3	AC1	AC2	AC3	Wynik	Iloraz
Baza	C(j)	1,0	1,0	1,0	0	0	0	0	0	0		
AC1	M	9,0	4,0	2,0	-1,0	0	0	1,0	0	0	100,0	11,1
AC2	M	5,0	2,0	8,0	0	-1,0	0	0	1,0	0	100,0	20,0
AC3	M	7,0	10,0	6,0	0	0	-1,0	0	0	1,0	100,0	14,3
	C(j) - Z(j)	1,0	1,0	1,0	0	0	0	0	0	0	0	
	Big M	-21,0	-16,0	-16,0	1,0	1,0	1,0	0	0	0	0	

W macierzy współczynników postaci kanonicznej nie ma podmacierzy jednostkowej stopnia $r = 3$. Występują wprawdzie kolumny $[0 \ 0 \ -1]$ związana ze zmiennymi swobodnymi (SC1, SC2, SC3), ale brak jest wektorów $[1 \ 0 \ 0]^T$ oraz $[0 \ 1 \ 0]^T$, $[0 \ 0 \ 1]^T$. Żeby uzyskać! brakujące wektory jednostkowe, wprowadzamy:

- zmienne sztuczne (AC1, AC2, AC3) z kolumną współczynników $[1 \ 0 \ 0]^T$, $[0 \ 1 \ 0]^T$, $[0 \ 0 \ 1]^T$.

Ponieważ zadanie jest na minimum, więc wagi zmiennych sztucznych będą w stosunku do wag autentycznych są bardzo duże⁶⁴.

Danej zmiennej x_j przy danej bazie odpowiada jej właściwe kryterium simpleks KS_j . Kryteria simpleks dla zmiennych bazowych zawsze są zerowe, natomiast dla zmiennych niebazowych mogą być zerowe i niezerowe.

⁶⁴ Taką zmienną sztuczną – bardzo dużą oznacza się literą M

Kryterium simpleks dla zmiennej niebazowej określa o ile (w stosunku do wartości w danym rozwiązaniu bazowym) zmieni się wartość funkcji celu, jeśli tę zmienną niebazową wprowadzi się do rozwiązania na poziomie jednostkowym.

Kryterium simpleks dla zmiennej x_j określone jest wzorem

$$KS_j = c_j - z_j$$

gdzie c_j –waga zmiennej

z_j – jest iloczynem kolumny współczynników postaci bazowej i odpowiadającej zmiennej x_j przez kolumnę wag zmiennych bazowych

Za pomocą kryterium simpleks można ocenić:

- Czy dane rozwiązanie bazowe jest optymalne:
- Czy istnieje jedno , czy też więcej bazowych rozwiązań optymalnych :
- Które zmienne nie bazowe opłaca się wprowadzić do rozwiązania..

Druga tablica simpleksowa do przykładu 6

Zmienne bazowe		X1	X2	X3	SC1	SC2	SC3	AC1	AC2	AC3	Wynik	Iloraz
Baza	C(j)	1,0	1,0	1,0	0	0	0	0	0	0		
X1	1,0	1,0	0,4	0,2	– 0,1	0	0	0,1	0	0	11,1	50,0
AC2	M	0	– 0,2	6,9	0,6	– 1,0	0	– 0,6	1,0	0	44,4	6,5
AC3	M	0	6,9	4,4	0,8	0	– 1,0	– 0,8	0	1,0	22,2	5,0
	C(j) – Z(j)	0	0,6	0,8	0,1	0	0	– 0,1	0	0	11,1	
	Big M	0	– 6,7	– 11,3	– 1,3	1,0	1,0	2,3	0	0	0	

Ustalanie zmiennej niebazowej, którą opłaca się wprowadzić do rozwiązania

Rozwiązanie bazowe nie jest optymalne, gdy przynajmniej dla Jednej zmiennej niebazowej kryterium simpleks jest:

- w zadaniach na maksimum dodatnie,
- w zadaniach na minimum ujemne.

W takiej sytuacji można poprawić wartość funkcji celu poprzez wprowadzenie tej zmiennej niebazowej do rozwiązania. Jeśli dane rozwiązanie bazowe nie jest optymalne, do rozwiązania wprowadza się tę zmienną niebazową, dla której kryterium simpleks jest:

w wypadku zadania na maksimum - największe (i dodatnie),

w wypadku zadania na minimum - najmniejsze (i ujemne).

Rozwiązanie bazowe jest optymalne, gdy kryteria simpleks dla wszystkich zmiennych niebazowych są:

- w zadaniach na maksimum zerowe lub ujemne (czyli niedodatnie),
- - w zadaniach na minimum zerowe lub dodatnie (czyli nieujemne).

Reguła ta wynika z interpretacji kryteriów simpleks. Jeśli bowiem efektem wprowadzenia zmiennej niebazowej do rozwiązania będzie albo brak zmian funkcji celu (na co wskazuje zerowe kryterium simpleks), albo pogorszenie funkcji celu (wzrost - w zadaniu na minimum, spadek - w zadaniu na maksimum), oznacza to, że rozwiązania już nie poprawimy, czyli oznacza, że dane rozwiązanie jest najlepsze.

W przykładzie do bazy wchodzi zmienna x_1 gdyż jej kryterium simpleksowe jest największe a bazę opuszcza zmienna sztuczna AC1 dlatego bo jej iloraz był najmniejszy (druga tablica simpleksowa do przykładu 6)

Trzecia tablica simpleksowa do przykładu 6

Zmienne bazowe		X1	X2	X3	SC1	SC2	SC3	AC1	AC2	AC3	Wynik	Iloraz
Baza	C(j)	1,0	1,0	1,0	0	0	0	0	0	0		
X1	1,0	1,0	0,1	0,0	-0,2	0	0,1	0,2	0	-0,1	10,0	200,0
AC2	M	0,0	-10,9	0,0	-0,6	-1,0	1,5	0,6	1,0	-1,5	10,0	6,5
X3	1,0	0,0	1,5	1,0	0,2	0	-0,2	-0,2	0	0,2	5,0	M
	C(j) - Z(j)	0	-0,6	0	0,0	0	0,2	0,0	0	-0,2	15,0	
	Big M	0	10,9	0	0,6	1,0	-1,5	0,3	0	2,5	0	

Jest zrozumiałe, że zmienną niebazową dającą poprawę rozwiązania opłaca się wprowadzać na możliwie największym dopuszczalnym poziomie.

Poziom ten określany jako najmniejszy z ilorazów typu: "wartość zmiennej bazowej przez współczynnik postaci bazowej występujący w wierszu zmiennej bazowej i kolumnie wprowadzanej zmiennej niebazowej".

Pod uwagę bierze się tylko przypadki, gdy współczynnik postaci bazowej jest dodatni.

Ponieważ przejście do nowej bazy sprowadza się tylko do wymiany jednej zmiennej bazowej, dlatego "nową" postać bazową określa się zazwyczaj na podstawie "starej" postaci bazowej. Mianowicie dokonuje się takich elementarnych przekształceń na wierszach macierzy współczynników "starej" postaci bazowej, w których wyniku przy zmiennych bazowych nowej bazy wystąpi macierz jednostkowa.

W macierzy tej:

- wektor jednostkowy związany ze zmienną bazową "przechodzącą" ze "starej" bazy jest taki, jak w "starej" postaci bazowej;
- wektor jednostkowy związany ze zmienną wprowadzoną jest taki, jak wektor przy zmiennej, którą usunięto ze "starej" bazy.

Czwarta tablica simpleksowa do przykładu 6

Zmienne bazowe		X1	X2	X3	SC1	SC2	SC3	AC1	AC2	AC3	Wynik
Baza	C(j)	1,0	1,0	1,0	0	0	0	0	0	0	
X1	1,0	1,0	0,5	0,0	-0,1	0,0	0	0,1	0,0	0	9,7
SC3	0	0	-7,0	0	-0,4	-0,6	1,0	0,4	0,6	-1,0	6,5
X3	1,0	0,0	0,0	1,0	0,1	-0,1	0	-0,1	0,1	0	6,5
	C(j) - Z(j)	0	0,6	0	0,0	0,1	0	0,0	-0,1	0	16,1
	* Big M	0	0	0	0	0	0	1,0	1,0	1,0	0

Tabela rezultatów

	Zmienne	Wartość	C(j)		Status
1	X1	9,7	1,0	0	bazowa
2	X2	0	1,0	0,6	niebazowa
3	X3	6,5	1,0	0	bazowa

Wyprowadzenie zrewidowanej metody simpleks

Rozważmy zagadnienie programowania liniowego w standardowej postaci i załóżmy, że macierz A jest rzędu m jeśli B jest dowolną nieosobliwą podmacierzą stopnia m macierzy A , a N jest pozostałą podmacierzą A , to możemy zapisać w postaci

$$[B, N] \begin{bmatrix} x_B \\ x_N \end{bmatrix} = b$$

gdzie x_B i x_N , mają odpowiednio, m i n - składowych. Wygodnie jest założyć, że B składa się z pierwszych m kolumn macierzy A .

Jeśli $x_N = 0$, to rozwiązanie nazywa się **rozwiązaniem bazowym** $x_B = B^{-1}b$, a nieosobliwą macierz B nazywa się *bazą*. Jeśli ponadto $x \geq 0$, to mówimy, że x jest bazowym rozwiązaniem dopuszczalnym.

Następujące twierdzenie określa ważną rolę bazowych rozwiązań dopuszczalnych⁶⁵:

Jeśli istnieje rozwiązanie dopuszczalne (to istnieje bazowe rozwiązanie dopuszczalne).

Jeśli istnieje rozwiązanie optymalne minimalizujące $F(x) = z$, to istnieje optymalne rozwiązanie bazowe.

To podstawowe twierdzenie stanowi klucz do **algorytmu simpleks**, najpotężniejszej metody rozwiązywania programów liniowych. Istnieje kilka różnych wersji tej metody i wiele implementacji numerycznych. Poniżej opiszę metodę

⁶⁵ Siwak T., Badania operacyjne dla inżynierów Wyd. AGH Kraków 1998

simpleks w wersji zrewidowanej, która jest najpopularniejszą metodą rozwiązywania zadań programowania liniowego⁶⁶.

Zauważmy najpierw, że dzieląc wektor kosztów c na dwa zbiory elementów związanych z x_B i x_N , możemy wyrazić funkcję celu x następująco:

$$F(x) = z = c_B^T x_B + c_N^T x_N$$

Po podstawieniu

$$x_B = B^{-1}b - B^{-1} N x_N$$

otrzymamy

$$F(x) = z = c_B^T B^{-1}b + (c_N^T - c_B^T B^{-1}N)x_N = z_0 + p^T x_N$$

gdzie:

$$z_0 = c_B^T B^{-1}b$$

$$p^T = c_N^T - c_B^T B^{-1}N$$

Wartość funkcji celu z można polepszyć w następnej iteracji, jeśli znajdziemy ujemną składową w p i wprowadzimy odpowiadającą jej niebazową zmienną do bazy. Wektor p może być wygodnie obliczony w dwóch krokach:

⁶⁶ Przedstawiona metodyka opiera się na materiałach: Siwak T., Badania operacyjne dla inżynierów Wyd. AGH Kraków 1998, Trzaskalik T., Badania operacyjne z komputerem, seria: Metody badań operacyjnych, Absolwent, Łódź, 1997., Wagner M.H., Badania operacyjne PWE Warszawa 1990

$$B^T \lambda = c_B \quad \text{oraz} \quad p^T = c_N^T - \lambda^T N,$$

gdzie λ nazywa się *wektorem mnożników simpleksowych*, a p - *wektorem względnych kosztów*. Jeżeli

$$p_k = c_{Nk} - \lambda^T a_k \leq 0$$

dla pewnego $m+1 \leq k \leq n$, to a_k jest niebazową kolumną macierzy A , która może wejść do bazy B w następnej iteracji, a wartość funkcji celu zostanie zmniejszona. Pozostaje znaleźć kolumnę macierzy B , którą należy usunąć z bazy. Oznaczając bieżące bazowe rozwiązanie dopuszczalne przez x_0 , żądamy by:

$$x_B = x_0 - B^{-1} a_k x_{Nk} \geq 0,$$

czyli by

$$x_B = x_0 - y x_{Nk} \geq 0,$$

gdzie y otrzymuje się jako rozwiązanie układu $By = a_k$. Nierówność (1.9) musi być spełniona, aby zachować dopuszczalność następnego rozwiązania x_B . Kolumnę opuszczającą bazę można znaleźć, rozpatrując x_{0i}/y_i dla $y_i > 0$, $i = 1, 2, \dots, m$.
Jeśli

$$\theta = \frac{x_{0l}}{y_l} = \min \left[\frac{x_{0i}}{y_i} \mid y_i > 0, \quad 1 \leq i \leq m \right]$$

to zmienna x_{Bl} staje się zerem i jest przesuwana do zbioru niebazowego. Odpowiednio, kolumna a_i przechodzi do macierzy niebazowej N .

Programowanie liniowe całkowite liczbowe algorytm podziału i ograniczeń

W wielu sytuacjach praktycznych pożądane jest wyznaczenie rozwiązania zadania optymalizacyjnego w liczbach całkowitych. Może to być, na przykład, żądanie ażeby wielkość występujących w planie optymalnym elementów podawać w liczbach całkowitych (np. liczba użytych samolotów, wykonanych strzelań rakietowych czy transportowanych rakiet). W zadaniu może występować problem wykorzystania dużych niepodzielnych obiektów – turbin, samolotów, rakiet itp. Również w zadaniach

optymalizacji transportu towarów niepodzielnych konieczne jest uzyskanie rozwiązania w liczbach całkowitych. Problem matematyczny, jaki stąd wynika, polega na znalezieniu najkrótszej drogi do wyznaczenia optymalnego rozwiązania w liczbach całkowitych – bez uciekania się do rozpatrzenia wszystkich możliwych kombinacji.

Niekiedy rozwiązanie zadania optymalizacyjnego w liczbach całkowitych można uzyskać w sposób najprostszy, choć zarazem trywialny – tzn. drogą zaokrąglenia ułamków (występujących w rozwiązaniu) do liczb całkowitych. Najczęściej jednak postępowanie takie nie jest możliwe i musimy posłużyć się jedną ze specjalnie opracowanych metod. Większość tych metod przewiduje dwa etapy wyznaczenia optymalnego rozwiązania⁶⁷:

- w etapie pierwszym wyznacza się rozwiązanie w liczbach ułamkowych
- w etapie drugim sprowadza się rozwiązanie w liczbach ułamkowych do rozwiązania w liczbach całkowitych

Metoda Landa-Doiga⁶⁸ opracowana ponad 30 lat temu przewiduje takie właśnie, dwuetapowe postępowanie optymalizacyjne. Warunki uboczne układu oraz warunki brzegowe wyznaczają obszar rozwiązań dopuszczalnych dla szukanych danych. Na obszarze tym należy wyznaczyć minimum (maksimum) funkcji.

W tym etapie wyznaczyliśmy wierzchołek optymalny (rozwiązanie optymalne). Punkt ten leży na prostej będącej zbiorem punktów, z których każdy wyznacza jednakową (minimalną – maksymalną) wartość funkcji.

Niestety, ani wierzchołek optymalny, ani inne punkty leżące na prostej nie spełniają wszystkich równocześnie wszystkich warunków ubocznych i brzegowych. Należy, więc przejść do etapu drugiego.

W etapie drugim przechodzi się od wierzchołka optymalnego równoległe do prostej wartość funkcji, do punktu, który wyznacza nowe rozwiązanie zadania – tym razem rozwiązania w liczbach całkowitych.

⁶⁷ Wagner M.H., *Badania operacyjne* PWE Warszawa 1990

⁶⁸ Siwak T., *Badania operacyjne dla inżynierów* Wyd. AGH Kraków 1998

Metoda Gomory'ego⁶⁹ przewiduje również dwuetapowe postępowanie optymalizacyjne:

- za pomocą jednej z metod programowania liniowego wyznacza się wierzchołek optymalny, któremu odpowiadają zmienne wyrażone (najczęściej) w liczbach ułamkowych.
- Następnie do układu warunków ubocznych zadania dodaje się pewien nowy warunek (i pewną dodatkową zmienną), w wyniku czego obszar rozwiązań zostaje zmniejszony tak aby nowe rozwiązanie było w liczbach całkowitych.

W większości rozpatrywanych zadań programowania liniowego zmienne decyzyjne mogły przyjmować dowolne wartości nieujemne. W zapisie formalnym wyrażały to warunki nieujemności $x_j \geq 0$ ($j=1, 2, \dots, n$). Jednak w wielu zagadnieniach praktycznych potrzeba ograniczenia wartości zmiennych decyzyjnych do nieujemnych liczb całkowitych jest warunkiem koniecznym, aby możliwe było dokonanie sensownej interpretacji uzyskanego rozwiązania. Matematyczny model problemu wyboru decyzji optymalnej, którą muszą wyrażać liczby całkowite, nazywamy *całkowitoliczbowym zadaniem optymalizacyjnym*

Niech D_C oznacza zbiór rozwiązań dopuszczalnych zadania programowania liniowego z żądaniem, aby wartości zmiennych decyzyjnych (niekoniecznie wszystkie) przyjmowały wartości całkowite. Przez D oznaczmy zbiór rozwiązań dopuszczalnych osłabionej wersji tego zadania.

Z zależności $D_C \subset D$ wynikają inne ważne numerycznie własności.

Własność 1.

$$f^M = \max_{x \in D_C} f(x) \leq \max_{x \in D} f(x) = f$$

$$f^m = \min_{x \in D_C} f(x) \geq \min_{x \in D} f(x) = f$$

⁶⁹ Siwak T., Badania operacyjne dla inżynierów Wyd. AGH Kraków 1998

tzn. Optymalna wartość funkcji celu zadania całkowitoliczbowego jest zawsze ograniczona przez optymalną wartość funkcji celu z wersji osłabionej tego zadania: od góry – przy kryterium maksymalizacji; od dołu – przy kryterium minimalizacji.

Własność 2.

$$(x^0 \in D^{opt} \wedge x^0 \in D_C) \Rightarrow x^0 \in D^{opt}_C$$

tzn. Jeśli x^0 jest decyzją optymalną osłabionej wersji zadania całkowitoliczbowego i jednocześnie spełnia warunek całkowitoliczbowości, to x^0 jest decyzją optymalną zadania całkowitoliczbowego, z którego utworzono wersję osłabioną.

Rozwiązując zadanie optymalizacji liniowej w liczbach całkowitych, stosuje się *metodę podziału i ograniczeń*. Polega ona na rozwiązywaniu serii odpowiednio budowanych zwykłych zadań optymalizacji liniowej. Termin *podział* w nazwie metody pochodzi stąd, że zbiory decyzji dopuszczalnych rozwiązywanych zadań otrzymuje się z podziału zbioru D początkowej wersji osłabionej zadania na mniejsze podzbiory. Optymalne wartości tej samej funkcji celu są *ograniczane*, zgodnie z własnością 1, odpowiednio przez jej wartość optymalną osiąganą przed przeprowadzonym podziałem. Specyficzny podział zbioru D na mniejsze fragmenty i stosowanie określonych reguł przy obliczeniach spowoduje, że decyzja optymalna ze zbioru D_C stanie się w pewnym momencie wierzchołkiem i jednocześnie decyzją optymalną reprezentowaną przez wierzchołek jednego z utworzonych podzbiorów.

2.3 Zagadnienia transportowe

Celem zagadnień transportowych jest opracowanie planu przewozu towaru pomiędzy dostawcami, a odbiorcami tak by łączne koszty transportowe były możliwie najniższe. Plan taki ma określić ile towaru powinien dostarczyć i -ty dostawca j -temu odbiorcy.

Zagadnienie transportowe jest odmianą zagadnień programowania liniowego, zarówno funkcja celu jak i ograniczenia mają postać liniową

Zamknięte zagadnienie transportowe

Zamknięte zadanie transportowe (ZZT) występuje gdy łączne możliwości dostawców są równe łącznemu zapotrzebowaniu odbiorców

Metoda minimalnego elementu macierzy polega na rozmieszczeniu przewozów przede wszystkim na tych trasach, na których koszty są najniższe. Punktem wyjścia jest przekształcenie macierzy kosztów do takiej postaci, by w każdym wierszu i w każdej kolumnie występowało co najmniej jedno zero. Można to uzyskać, odejmując od elementów poszczególnych wierszy macierzy kosztów najmniejszy element znajdujący się w danym wierszu, a następnie od poszczególnych kolumn otrzymanej w ten sposób macierzy odejmując element najmniejszy znajdujący się w danej kolumnie. Mając tak przekształconą macierz staramy się rozmieścić przewozy na trasy, gdzie koszty są najniższe, czyli gdzie występują zera.

Otwarte zagadnienie transportowe

Otwarte zagadnienie transportowe (OZT) występuje gdy łączne możliwości dostawców są większe od łącznego zapotrzebowania odbiorców.

Zagadnienie transportowe (ZT) jest specyficznym problemem z zakresu zastosowań programowania liniowego. ZT wykorzystuje się najczęściej do optymalnego planowania transportu towarów, przy minimalizacji kosztów, lub czasu wykonania zadania. Można również przy jej pomocy rozwiązać zadania optymalnego rozdziału zasobów lub wysiłku na poszczególne obiekty ataku, w celu maksymalizacji efektów działania sił powietrznych. Stosuje się oryginalną metodę budowy modelu matematycznego oraz technikę jego optymalnego rozwiązywania. Przyjmując m punktów posiadających określone zasoby lub określony potencjał do realizacji zadania bojowego oraz n punktów odbioru tzn. wyznaczone cele, które określonym wysiłkiem należy zniszczyć lub bazy, do których określone zasoby należy dostarczyć, uzyskuje się macierz połączeń pomiędzy nimi w postaci tabeli o wymiarach $m \times n$, gdzie każdy element przedstawia określoną ilość jednostek potencjału bojowego lub masy towaru przesłany od wykonawców i do punktu odbioru j . (w tym wypadku odbiorcą

potencjału bojowego może być niszczony cel) wprowadzając dodatkowe oznaczenia kosztu transportu jednej jednostki zbudować można model matematyczny odwzorowujący problem transportowy.

Zagadnienie można rozwiązywać metodą Simpleks, jednak jest ona w tym przypadku mało efektywna. Najczęściej stosuje się metodę potencjałów oraz najprostszą metodę – kąta północno-zachodniego. Służy ona do znalezienia pierwszego wewnętrznie zgodnego rozwiązania bazowego.

Istnieje duża grupa wyspecjalizowanych zagadnień programowania liniowego, które są sformułowane jako zagadnienia sieciowe. Należą do nich takie zagadnienia, jak zagadnienie transportowe i jego uogólnienia, zagadnienie przydziału, zagadnienie sieci komputerowych, zagadnienie lokalizacji i zagadnienie przepływu wielotowarowego. Zagadnienia tego typu opisują szerokie spektrum zastosowań w ramach dowodzenia siłami powietrznymi na przykład, planowanie przewozów lotniczych i okrętowych, optymalna gospodarka uzbrojeniem i zasobami logistycznymi, planowanie kadr osobowych, planowanie obciążenia dla poszczególnych załóg. W teorii modele te mogą być rozwiązywane za pomocą ogólnych algorytmów liniowych, ale często wymagałoby to nadmiernie długich czasów obliczeń i znacznie więcej pamięci niż potrzebują specjalne metody liniowe i sieciowe. W zagadnieniu transportowym należy znaleźć minimum

$$F(x) = z = \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n c_{ij} x_{ij}$$

przy warunkach

$$\sum_{j=1}^n x_{ij} \leq a_i,$$

$$i = 1, 2, \dots, m,$$

$$\sum_{i=1}^m x_{ij} \geq b_j,$$

$$j = 1, 2, \dots, n,$$

$$x_{ij} \geq 0,$$

$$i = 1, 2, \dots, m;$$

$$j = 1, 2, \dots, n.$$

Zagadnienie transportowe ma prostą interpretację sieciową. Przypuśćmy, że mamy sieć skierowaną (zwaną także *diagramem ważonym*), określoną za pomocą zbioru wierzchołków V i zbioru łuków (tj. skierowanych łuków) E . W zagadnieniu transportowym sieć jest *dwudzielna i pełna*, tzn. wszystkie jej wierzchołki można podzielić na dwie grupy, na węzły dostawy ponumerowane $i = 1, 2, \dots, m$ i węzły odbioru ponumerowane $j = 1, 2, \dots, n$, a każdy wierzchołek dostawy ma n łuków wychodzących z niego do wszystkich wierzchołków odbioru. Dla każdego łuku jest określony jednostkowy koszt c_{ij} transportowanego dobra.

Zagadnienie polega na wyznaczeniu takich wielkości przewozu x_{ij} , które minimalizują całkowity koszt transportu $F(x) = z$. Pierwszych m nierówności odnosi się do wierzchołków dostawy, następne n nierówności odnosi się do wierzchołków odbioru. Zagadnienie transportowe ma rozwiązanie dopuszczalne, gdy

$$\sum_{i=1}^m a_i \geq \sum_{j=1}^n b_j$$

a ograniczenia odbioru stają się równościami dla rozwiązania optymalnego, tj.

$$\sum_{i=1}^m x_{ij} = b_j,$$

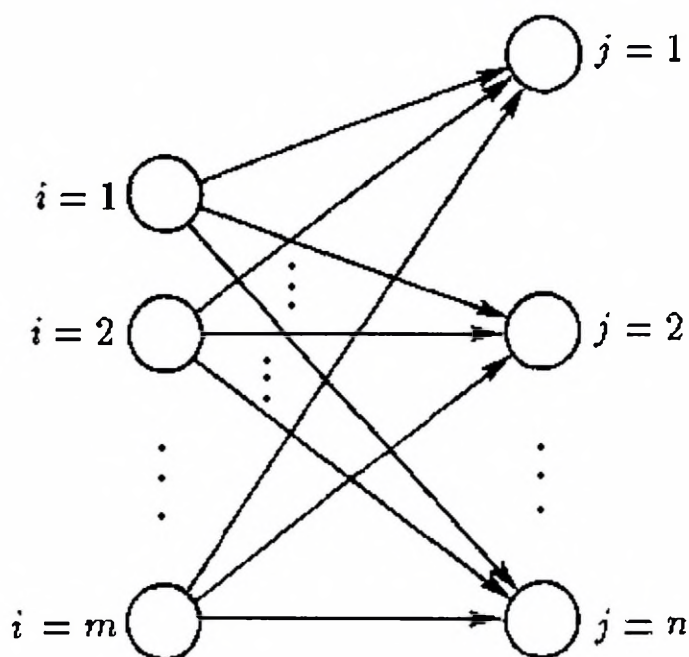
dla wszystkich j . Ponadto, jeśli

$$\sum_{i=1}^m a_i = \sum_{j=1}^n b_j$$

to każde rozwiązanie dopuszczalne spełnia wszystkie nierówności jako równości.

Bez utraty ogólności można przyjąć, że są równościami, ponieważ zawsze możemy wprowadzić fikcyjny wierzchołek odbioru $n+1$ z odbiorem i kosztami $c_{i, n+1} = 0$, $i = 1, 2, \dots, m$.

$$b_{n+1} = \sum_{i=1}^m a_i - \sum_{j=1}^n b_j$$



Rysunek 2 Przykładowy schemat zagadnienia transportowego

Zagadnienie transportowe jest szczególnym przypadkiem zagadnienia programowania liniowego i może być rozwiązywane za pomocą metody Sympleks. Istnieje inne podejście, znane jako metoda prymalno-dualna⁷⁰, oparte na iteracyjnym użyciu algorytmu największego przepływu. Metoda ta wykorzystuje konieczne i wystarczające warunki na to, by program liniowy był optymalny.

Sieciowe problemy optymalizacyjne.

Wiele problemów dowodzenia siłami powietrznymi, na przykład planowania użycia lotnictwa, problemy transportu uzbrojenia, problemy dostawy rakiet przeciwlotniczych można sprowadzić do zadania maksymalizacji lub minimalizacji przepływu przez sieć. Metody rozwiązujące dla tego typu zadań nazywane są metodami sieciowymi lub metodami programowania sieciowego.

Rozważać będziemy przedsięwzięcie jako wyodrębniony zbiór czynności powiązanych ze sobą technologią, tj. sposobem wykonania.

⁷⁰ Siwak T., Badania operacyjne dla inżynierów Wyd. AGH Kraków 1998

Sieć czynności

Sieć czynności to graf spójny antycykliczny, który ma jeden wierzchołek początkowy i jeden wierzchołek końcowy. Łuki sieci reprezentują czynności, wierzchołki zaś zdarzenia.

Do wykreślenia sieci czynności dla dowolnego projektu niezbędnego są informacje dotyczące czynności wchodzących w skład przedsięwzięcia oraz ustalenie kolejności ich występowania. Ponadto w trakcie wykreślenia sieci powinny być przestrzegane następujące zasady⁷¹:

1. zdarzenie początkowe nie ma czynności poprzedzających,
2. zdarzenie końcowe nie ma czynności następujących,
3. dwa kolejne zdarzenia mogą być połączone tylko jedną czynnością,
4. wszystkie zdarzenia w sieci, z wyjątkiem początkowego lub końcowego, powinny być początkiem i końcem co najmniej jednej czynności.

Wyróżniamy następujące etapy konstruowania sieci⁷²:

1. ustalenie listy czynności,
2. ustalenie zdarzenia początkowego i końcowego przedsięwzięcia,
3. określenie kolejności wykonywania czynności,
4. numerowanie wierzchołków.

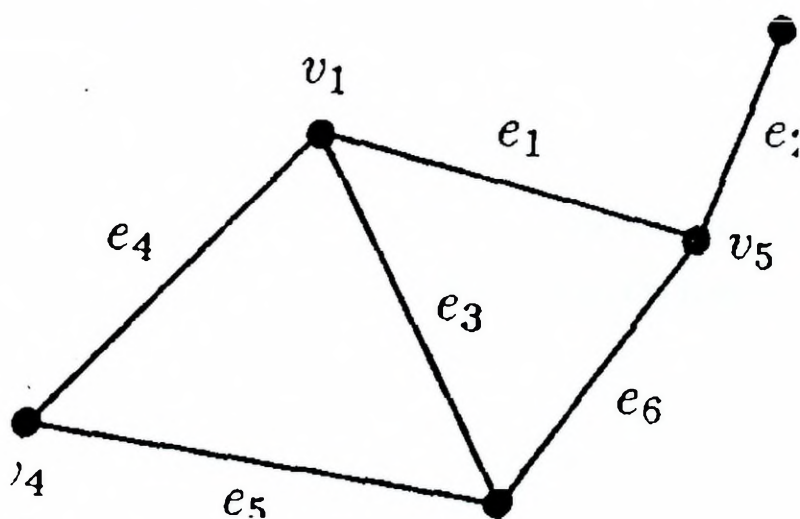
Duża liczba systemów transportowych, dystrybucyjnych i komunikacyjnych jest projektowana i badana za pomocą modeli sieciowych. Przykładami mogą być tutaj, trasy komunikacji lotniczej, sieci telefoniczne, system dystrybucji amunicji itp. Pojawiające się w tych problemach grafy są tak duże, że analiza, bez pomocy komputera, jest praktycznie niemożliwa. Możliwości rozwiązywania problemów rzeczywistych technikami sieciowymi są więc takie jak możliwości analizy dużych sieci za pomocą komputera. Efektywne algorytmy rozwiązywania problemów sieciowych mają zatem duże znaczenie praktyczne. Najczęściej spotykane *problemy optymalizacyjne* na sieciach to:

⁷¹ Siwak T., Badania operacyjne dla inżynierów Wyd. AGH Kraków 1998

⁷² Tamże.

- problem najkrótszych dróg
- problem najkrótszego drzewa rozpinającego
- problem maksymalnego przepływu w sieci
- problem najtańszego przepływu
- problem komiwojażera
- problemy transportowe

Graf nieskierowany $G = (V, E)$ składa się ze skończonego zbioru wierzchołków $V = \{v_1, v_2, \dots, v_n\}$ i skończonego zbioru krawędzi $E = \{e_1, e_2, \dots, e_n\}$ (zob. rys. 2). komputerowych implementacjach algorytmów grafowych przyjmujemy najczęściej $V = \{1, 2, \dots, n\}$. Każdej krawędzi e odpowiada nieuporządkowana para różnych wierzchołków (u, v) , o których mówimy, że są *incydentne* z e . Graf nazywamy *skierowanym* lub w skrócie *digrafem*, jeśli para wierzchołków (u, v) incydentnych z krawędzią e (nazywaną w tym przypadku *łukiem*) jest parą uporządkowaną. Mówimy wtedy, że *łuk e jest skierowany z wierzchołka u do wierzchołka v* , a kierunek ten jest zaznaczony na rysunku grotem strzałki. Siecią nazywamy graf skierowany (lub nieskierowany), w którym każdemu łukowi (lub krawędzi) jest przyporządkowana liczba, zwana najczęściej wagą. W sieci o praktycznym znaczeniu, waga może reprezentować długość drogi, koszt jej budowy, czas przejazdu, niezawodność połączenia, prawdopodobieństwo przejścia, przepustowość lub jakąkolwiek inną podobną cechę ilościową przyporządkowaną łukowi (lub krawędzi).



Rysunek 3. Przykład grafu

Maksymalny przepływ w sieci

Rozważmy sieć $N = (V, E)$, w której dwa wierzchołki są wyróżnione jako *źródło* s i *odpływ* t .

Każdemu łukowi sieci przyporządkowana jest nieujemna liczba całkowita k_{ij} , zwana *przepustowością łuku*.

Przepływem w sieci N nazywamy przyporządkowanie każdemu łukowi takiej liczby rzeczywistej x_{ij} (zwanej *przepływem łukowym*), że⁷³:

1. $0 \leq x_{ij} \leq k_{ij}$ dla wszystkich łuków $(i, j) \in E$.
2. W każdym wierzchołku j , różnym od s i t , spełnione jest równanie zachowania przepływu

$$\sum_i x_{ij} - \sum_l x_{il} = 0$$

gdzie i odnosi się do zbioru łuków wchodzących do wierzchołka j , a l - do zbioru łuków wychodzących z wierzchołka j .

Wartość (wielkość) przepływu $f(t)$ określa się jako sumę przepływów łukowych wpływających do wierzchołka odpływu.

Zagadnienie największego przepływu polega na znalezieniu dla wszystkich łuków takich wartości x_{ij} , by $f(t)$ było maksymalne. Aby znaleźć największy przepływ, można wykorzystać technikę ścieżki powiększającej. *Ścieżka powiększająca* jest ciągiem łuków, z których dowolne dwa kolejne są sąsiednie, prowadzącym z s do t i umożliwiającym powiększenie wartości przepływu. Jeśli skierowanie łuku (i, j) jest zgodne z kierunkiem ścieżki, to, w celu powiększenia przepływu, x_{ij} musi być mniejsze od k_{ij} . Jeśli zaś łuk (i, j) jest niezgodnie skierowany, to aby powiększyć wartość przepływu, trzeba zmniejszyć przepływ łukowy, czyli wymaga się, aby $x_{ij} > 0$.

⁷³ Siwak T., Badania operacyjne dla inżynierów Wyd. AGH Kraków 1998

3. Modele growe w dowodzeniu siłami powietrznymi

3.1 Pojęcia podstawowe

Teoria gier zajmuje się logiczną analizą sytuacji konfliktu i kooperacji. O grze w takim rozumieniu możemy mówić wszędzie tam, gdzie⁷⁴:

- 1) Można wskazać, co najmniej dwóch graczy. Graczem może być człowiek, ale także firma, państwo, czy nawet gatunek w znaczeniu biologicznym.
- 2) Każdy gracz ma do wyboru pewną liczbą możliwych strategii, określających sposób rozgrywania przez niego gry.
- 3) Wynik gry jest determinowany przez kombinację strategii wybranych przez poszczególnych graczy.
- 4) Każdemu możliwemu wynikowi gry odpowiada zestaw wypłat dla poszczególnych graczy, których wysokość można wyrazić liczbowo.

Wypłaty określają wartość wyniku gry dla poszczególnych graczy.

W dalszym ciągu tej pracy zasadnicze dla teorii gier pojęcia graczy, strategii, wyniku i wypłat zostaną zdefiniowane w sposób bardziej precyzyjny - na razie możemy się nimi posługiwać intuicyjnie.

Teoria gier bada, jak gracze powinni racjonalnie rozgrywać grę. Każdy z nich powinien dążyć do takiego jej zakończenia, które daje mu możliwie najwyższą wypłatę. Gracz wpływa na przebieg gry, wybierając swoją strategię; ostateczny wynik zależy jednak nie tylko od niego, ale także od decyzji pozostałych uczestników - i właśnie tutaj jest miejsce na konflikt i kooperację. Konflikt - ponieważ zwykle każdy z graczy dąży do innego wyniku gry. Są jednak sytuacje, gdy kilku graczy koordynując swoje strategie może doprowadzić do wyniku dającego każdemu z nich wyższą wypłatę - i wtedy możliwa jest kooperacja. Racjonalna rozgrywka wymaga, by każdy gracz, decydując o wyborze strategii mającej mu przynieść korzystny rezultat, uwzględniał prawdopodobne decyzje pozostałych graczy - dążących do wyników korzystnych dla siebie⁷⁵. Istotne są także decyzje społeczne - kto, z kim i jak będzie kooperował.

⁷⁴ Wagner M.H., *Badania operacyjne* PWE Warszawa 1990

⁷⁵ Nosal Cz.S., *Psychologia myślenia i działania menedżera*, Akade, Kraków 2001.

„Normalne” gry, takie jak szachy, brydż lub poker, są oczywiście grami w sensie teorii gier, która bierze swój ą nazwę właśnie stąd, że uogólnia analizę gier tego rodzaju. Ale za jej pomocą można też opisać wiele istotnych sytuacji społecznych. Firmy realizujące „strategie korporacyjne” rozgrywają ą pewną grę. Politycy prowadzący kampanię wyborczą, posłowie dążący do przyjęcia lub odrzucenia jakiejś ustawy, państwa wchodzące w interakcje z innymi państwami uczestniczą w jakichś grach. Nawet zwierzęta można traktować jako uczestników gry, w której wypłatami są szansę na przekazanie genów następnemu pokoleniu.

Kompletna teoria racjonalnego rozgrywania takich gier miałaby bardzo szerokie zastosowanie: mogłaby wskazać najwłaściwszy sposób postępowania w każdej sytuacji konfliktu i kooperacji. Póki, co jednak cele teorii gier są znacznie skromniejsze. Istnieją, co najmniej trzy powody, dla których tak ogólna teoria nie jest możliwa. Po pierwsze, gry rozgrywane w rzeczywistym świecie są zwykle bardzo skomplikowane: trudno wskazać w nich wszystkich graczy, dokładnie opisać ich możliwe strategie i wskazać, do jakich wyników prowadzą, trudno jest także przypisać do poszczególnych wyników wartości wypłat. Daje się jedynie konstruować proste gry, modelujące niektóre istotne elementy rzeczywistości, ale samo tworzenie i analiza takich modeli może nam coś o tej rzeczywistości powiedzieć⁷⁶.

Drugi problem polega na tym, iż teoria gier zakłada, że gracze zachowują się racjonalnie. Każdy z nich analizuje grę w poszukiwaniu sposobu uzyskania pożądanego wyniku, uwzględniając fakt, że pozostali robią to samo - inaczej mówiąc, racjonalny gracz zakłada, że jego przeciwnicy także postępują ą racjonalnie; w realnym świecie rzadko kiedy można to powiedzieć o wszystkich uczestnikach gry. Z drugiej strony, kwestia, w jakim stopniu uczestnicy sytuacji konfliktu i kooperacji postępują racjonalnie, sama w sobie jest interesująca, a właśnie teoria gier daje narzędzia pozwalające to ocenić⁷⁷.

Trzecim i chyba najpoważniejszym ograniczeniem jest fakt, że teoria gier nie potrafi dokładnie przewidzieć przebiegu gier, w których interesy obu graczy nie są dokładnie przeciwstawne, a także takich, w których bierze udział więcej niż dwóch

⁷⁶ Długosz M., Gry decyzyjne w badaniach i doskonaleniu organizacji, PWN, Warszawa 1990.

⁷⁷ Crozier M., Friedberg E., Człowiek i system PWN, Warszawa 1986

graczy. Dla takich gier istnieje szereg rozwiązań cząstkowych, przykładów, analiz i pomysłów

Matematyka oferuje komfort pewności - w przeciwieństwie do niepewnych i wieloznacznych twierdzeń humanistyki i nauk społecznych. Naturalna jest wobec tego nadzieja, że zastosowanie metod matematycznych do badania zjawisk zachodzących pomiędzy ludźmi - a takie metody proponuje teoria gier - doprowadzi i tam do uzyskania jednoznacznych wyników, a to, co przedtem było mętne i niejednoznaczne, stanie się klarowne i pewne⁷⁸.

Teoria gier to matematyczna teoria sytuacji konfliktowych to znaczy takich, w których ścierają się interesy dwóch albo więcej stron dążących do różnych celów. Zatem z założeń teorii gier wynika, że ona doskonale nadaje się do rozwiązywania problemów wojskowych i militarnych. Gra to sytuacja konfliktowa określona (ograniczona) pewnymi prawidłami, z których powinno być wiadomo⁷⁹:

- kolejność wykonywania działań uczestników (ruchów, posunięć);
- - reguły, według których ten ruch powinien być realizowany;
- - ogół rezultatów, do których prowadzą poszczególne sekwencje ruchów.

Partia to jedna z możliwości zrealizowania powyższych prawideł. Strategią gracza nazywamy zbiór prawideł, którymi kieruje się gracz podczas gry.

Macierz gry

Rozpatrzmy grę, w której gracz A (my) ma do dyspozycji m strategii, a gracz B (przeciwnik) n strategii. Taką grę nazywamy grą $m \times n$. Strategie gracza A będziemy oznaczać $A_1, A_2, \dots, A_m$; strategie przeciwnika $B_1, B_2, \dots, B_n$. Załóżmy że każda ze stron wybrała określoną strategię: strona A - A_i a strona B - B_j . Jeżeli w grze biorą udział tylko dwie strony to przyjęte strategie A_i, B_j oznaczają zakończenie gry rezultat gry (przegraną albo wygraną oznaczmy a_{ij}). Ponieważ wygrana jest wypadkową strategii przyjmowanych przez strony z pewnym prawdopodobieństwem to właściwą oceną rezultatów gry powinna być wartość oczekiwana prawdopodobnej wygranej.

⁷⁸ Tamże.

⁷⁹ Straffin P.D., Teoria gier Wydawnictwo Naukowe SCHOLAR Warszawa 2001

Założmy że znamy wartości gry a_{ij} dla każdej pary strategii. Grę można, zatem opisać przy pomocy tablicy:

	B_1	B_2	...	B_n
A_1	a_{11}	a_{12}	...	a_{1n}
A_2	a_{21}	a_{22}	...	a_{2n}
...	...	...	...	...
A_m	a_{m1}	a_{m2}	...	a_{mn}

Taką tablicę nazywamy *macierzą gry*. Wydaje się dość oczywiste, że skonstruowanie macierzy gry przy dużej liczbie strategii samo w sobie nie jest prostym zadaniem. Przykładowo gra w szachy posiada tak ogromną liczbę strategii, że nawet trudno sobie wyobrazić taką macierz gry. Jednak jak się okazuje z pomocą współczesnych komputerów opracowano całkiem skuteczne rozwiązania nawet tak skomplikowanej gry.

Dolna i górna wartość gry

W celu ułatwienia dalszych rozważań opracujmy macierze gry dla kilku elementarnych przykładów.

Przykład 7. „Gra w chowanego”

Gra znana każdemu dziecku - jest dwóch graczy – gracz A ukrywa się a gracz B poszukuje. W opisywanej grze są dwa ukrycia, do których może schować się gracz A. Warunki gry są następujące: jeżeli gracz B znajdzie gracza A to ten płaci mu złotówkę, jeżeli gracz B wybierze to ukrycie w którym nie będzie gracza A to z kolei gracz B płaci graczowi A. Zbudujmy macierz gry.

Rozwiązanie:

Obydwaj gracze posiadają dwie strategie: gracz A

- A_1 - ukryć się w schowku I,
- A_2 - ukryć się w schowku II.

Gracz B

- B_1 - szukać w schowku I,
- B_2 - szukać w schowku II.

Zatem macierz gry wygląda następująco:

	B ₁	B ₂
A ₁	-1	1
A ₂	1	-1

Na przykładzie tak prostej gry można wyjaśnić kilka zasad teorii gier. Na początek należy zaznaczyć, że przy grze jednorazowej, trudno tu dyskutować o wyższości jednej strategii nad drugą, każdy z graczy może przyjąć dowolną z nich. Gdy gra jest wielokrotnie powtarzana i gracz A wybrał jedną strategię np. A₁ to po kilku partiach gracz B będzie poszukiwał tylko w ukryciu nr. I i zacznie wygrywać. Podobnie będzie przy strategii II. Wynika z tego, że nie należy na stałe stosować jednej i tej samej strategii. Oczywistym jest również, że jeżeli zastosujemy określony klucz zmian to przeciwnik z czasem go rozpozna i zastosuje najmniej korzystne dla nas rozwiązanie. Zatem sposobem dającym nadzieję na wygraną jest taki wybór, którego wcześniej byśmy nie znali – przykładowo rzut monetą. Jeżeli wypadnie orzeł wybieramy ukrycie I, a gdy reszka ukrycie II.

Podobnie może zachować się gracz B, dla którego również prawdziwe są wcześniejsze rozważania. Zatem strategią optymalną dla obydwu graczy jest strategia mieszana, w której możliwe „czyste” strategie graczy stosowane są z tym samym prawdopodobieństwem.

Taką troszeczkę intuicyjną metodą doszliśmy do jednego z podstawowych pojęć teorii gier – strategii mieszanej – to znaczy stosowania określonych strategii „czystych” z odpowiednim prawdopodobieństwem. W przedstawionym przykładzie ze względu na symetrię gry jasno wynika, że strategię A₁ i A₂ należy stosować z jednakowym prawdopodobieństwem, w bardziej złożonych sytuacjach rozwiązania nie muszą być tak trywialne.

Przykład 8. „Trzy palce”

Gracze A i B jednocześnie niezależnie jeden od drugiego pokazują jeden, dwa albo trzy palce. Wygraną albo przegraną określa się na następujących zasadach: jeżeli suma wszystkich palców jest parzysta to wygrywa gracz A. Jeżeli nie jest parzysta to wygrywa gracz B. Wygrana jest równowartością sumy liczoną w złotych.

Grę można opisać następującą macierzą:

	B ₁	B ₂	B ₃
A ₁	2	-3	4
A ₂	-3	4	-5
A ₃	4	-5	6

Każdy gracz ma trzy strategie pokazać jeden, dwa albo trzy palce, wyniki poszczególnych strategii przedstawione w powyższej tablicy. Jak widać na każdą strategię gracza A przeciwnik może odpowiedzieć strategią przynoszącą określone korzyści. Przykładowo, jeżeli gracz A wybierze strategię A₁ to B odpowie B₂ i A przegra trzy złote. Na strategię A₂ Przeciwnik odpowie B₃ i kolejna strata pięciu złotych. Należy jednak zauważyć, że przy strategii A₁ straty są najmniejsze. Marne to pocieszenie dla gracza.

Popatrzmy jednak od strony przeciwnika, jego położenie też nie jest godne pozazdroszczenia. Jeżeli B wybierze B₁ to A – A₃ i odzyskuje cztery złote, jeżeli B₂ to A₂ i kolejne cztery złote wraca do kieszeni A, jeszcze gorzej, gdy B pokaże trzy palce (B₃) bo A odpowie tym samym (A₃) i sześć złotych dla A.

Wynika z tego że gra nie przyniesie korzyści żadnemu z graczy?! To pozwala przypuszczać, że należy zastosować strategie mieszane – to prawda, ale ich zastosowanie nie jest tak proste jak w przykładzie poprzednim. Dlatego troszeczkę później wrócę do tego przykładu i przedstawię rozwiązanie. Wcześniej rozwiążmy inny przykład.

Przykład 9. Gra „Rakieta – samolot”

Do osłony „obiektu” strona A może zastosować jeden z trzech typów rakiet A₁, A₂, A₃; Strona przeciwna B chcąc zniszczyć broniony obiekt może użyć jeden z trzech typów samolotów B₁, B₂, B₃. Zadaniem strony A jest zniszczyć samolot przed rubieżą wykonania zadania, strona B nie może dopuścić do straty samolotu. Zatem gra polega dla strony A na wyborze typu rakiet a strony B na wyborze odpowiedniego typu samolotu. W grze występują jeszcze kolejne warunki Rakieta typu A₁ niszczy samoloty typu B₁, B₂, B₃ odpowiednio z prawdopodobieństwem 0.5, 0.6, 0.8; Rakieta typu A₂ z prawdopodobieństwem 0.9, 0.7, 0.8; a typu A₃ – z prawdopodobieństwem

0.7, 0.6, 0.5.

Macierz gry dla przykładu 9

	B ₁	B ₂	B ₃
A ₁	0,5	0,6	0,8
A ₂	0,9	0,7	0,8
A ₃	0,7	0,5	0,6

W tej grze wygraną jest prawdopodobieństwo zniszczenia samolotu. Strona A musi je maksymalizować a strona B minimalizować. Jak widać nad tą grą należy się troszeczkę głębiej zastanowić, postawmy się w roli gracza A i przeanalizujmy jego strategię:

Na A₁ przeciwnik odpowie B₁, na A₂ – B₂ a na A₃ ponownie B₂. Jak widać strategia A₂ posiada pewną przewagę nad pozostałymi, bo prawdopodobieństwo zniszczenia samolotu jest największe 0,7. Z punktu widzenia strony B na strategię B₁ strona A odpowiada A₂ i prawdopodobieństwo zniszczenia samolotu jest równe 0,9. Na strategię B₂ gracz A odpowiada A₂, a na B₃ może dowolnie zastosować A₁ lub A₂ w obydwu przypadkach prawdopodobieństwo zniszczenia jest jednakowe 0,8. Zauważmy, że dla gracza B najkorzystniej jest stosować strategię B₂ wówczas jego szanse są największe. Zatem strategia A₂, B₂ z wynikiem 0,7 dla obu stron jest korzystna.

Dalej będziemy mogli zobaczyć, że takie strategie będą strategiami optymalnymi i nazywać je będziemy rozwiązaniem gry.

Rozpatrzmy grę $m \times n$

	B ₁	B ₂	...	B _n
A ₁	a_{11}	a_{12}	...	a_{1n}
A ₂	a_{21}	a_{22}	...	a_{2n}
...	...	...	...	...
A _m	a_{m1}	a_{m2}	...	a_{mn}

Chcąc znaleźć najlepszą strategię dla gracza A należy kolejno wszystkie strategie A₁, A₂, ..., A_m przeanalizować i wybrać jak najbardziej korzystną. Wybierając najkorzystniejszą strategię A_i musimy uwzględnić jak w danej sytuacji zachowa się strona przeciwna, która będzie szukać strategii B_j spełniającej jej

oczekiwania. Zatem znajdziemy najmniejszą wartość a_{ij} w wierszu A_i macierzy gry, którą oznaczać będziemy α_i :

$$\alpha_i = \min_j a_{ij}$$

Znak „min” oznacza minimalne znaczenie danego parametru przy wszystkich możliwych j . Wypiszmy wszystkie wartości minimalne po prawej stronie macierzy gry w dodatkowej kolumnie.

	B ₁	B ₂	...	B _n	α_i
A ₁	a_{11}	a_{12}	...	a_{1n}	α_1
A ₂	a_{21}	a_{22}	...	a_{2n}	α_2
...	...	...	...	...	...
A _m	a_{m1}	a_{m2}	...	a_{mn}	α_m
β_j	β_1	β_2	...	β_n	

Pamiętając, że nasz wybór jest funkcją rozumnego działania strony przeciwnej wybieramy spośród wartości minimalnych największe α_i .

$$\alpha = \max_i \alpha_i$$

Możemy zapisać:

$$\alpha = \max_i \min_j a_{ij}$$

Wartość α nazywamy dolną wartością gry lub maksminimum. Tego typu strategia gracza A również jest nazywana maksyminimową strategią. Wydaje się dość oczywiste, że jeżeli będziemy stosować strategię tego typu to wygrana będzie nie mniejsza niż α i dlatego nazywana jest dolną wartością gry⁸⁰. Zatem grając w ten sposób, zapewniamy sobie nie podejmując żadnego ryzyka, minimalną wartość gry.

Podobne rozważania można przeprowadzić z punktu widzenia gracza B. Gracz ten zainteresowany jest tym ażeby minimalizować wygrane gracza A. Zatem analizując wszystkie swoje strategie szuka takiej, która daje największe wygrane. Wypiszmy w ostatnim (dodatkowym) wierszu maksymalne wartości z poszczególnych kolumn.

⁸⁰ Straffin P.D., Teoria gier Wydawnictwo Naukowe SCHOLAR Warszawa 2001, Ameliańczk A Teoria gier WAT Warszawa 1978

$$\beta_j = \max_i \alpha_{ij}$$

A spośród nich znajdujemy wartość minimalną

$$\beta = \min \beta_j$$

czyli:

$$\beta = \min_j \max_i \alpha_{ij}$$

Wielkość tę nazywamy *górną wartością gry*⁸¹ lub minimaksem, a odpowiadająca tej wartości strategia gry nazywana jest strategią minimaksu.

Przeciwnik stosując tę strategię jest pewny, że nie przegra więcej jak β . Przedstawiona zasada ostrożności stosowana przez graczy w teorii gier nazywa się zasadą minimaksu. Ona wynika z założenia rozumnego działania strony przeciwnej i racjonalnego określania celów przez grające strony.

Ciekawym doświadczeniem wydaje się określenie górnej i dolnej wartości gry dla gry "w chowanego".

Przykład 10

Określając wartości minimalne w wierszach i maksymalne w kolumnach otrzymujemy macierz gry:

	B ₁	B ₂	α_i
A ₁	-1	1	-1
A ₂	1	-1	-1
β_j	1	1	

Jak widać wielkości α_i i β_j są stałe odpowiednio równe -1 i +1, zatem dolna i górna wartość gry odpowiednio równe $\alpha = -1$ i $\beta = +1$.

Dowolna strategia gracza A jest jego maksminową a gracza B minimaksową strategią. Prosty wybór pozwala na pewność że nie przegra się więcej jak złotówkę.

Kolejną wcześniej analizowaną grą była gra w trzy palce, tu sytuacja nie jest tak prosta. Zapiszmy macierz gry:

	B ₁	B ₂	B ₃	α_i
A ₁	2	-3	4	-3
A ₂	-3	4	-5	-5
A ₃	4	-5	6	-5
β_j	4	4	6	

⁸¹ Tanze.

Wypisując wartości minimalne w wierszach zauważymy, że największą wartością jest $\alpha = -3$, a spośród wartości maksymalnych w kolumnach najmniejszą jest $\beta = 4$. Wynika z tego, że systematycznie stosowana strategia A_1 zapewnia nie większą przegraną niż trzy złote. Strategia strony B (dowolnie B_1 lub B_2) gwarantuje nie większą przegraną jak cztery złote. Odstąpienie od tych strategii np. A_2 (strony A) może spowodować przegranie pięciu złotych (B_3) ale strona B ryzykuje utratę sześciu złotych w wypadku A_3 .

Należy zwrócić uwagę, że w tym przykładzie strategie minimaksowe nie są stałe. Przykładowo przeciwnik (strona B) stosuje swoją minimaksową strategię B_1 i powtarza ją w kilku kolejnych partiach. Nauczona doświadczeniem strona A odejdzie od A_1 do A_3 i wówczas zacznie wygrywać zamiast dwóch złotych cztery. W odpowiedzi B zastosuje B_2 i wygra pięć złotych; A – zmieni na A_2 itd.

Zatem strategie, przy których obie strony miały otrzymywać stałe wartości wygranych okazały się płynne (niestabilne) i zależne od strategii stosowanej przez przeciwnika. Jednak taka płynność nie jest cechą charakterystyczną wszystkich gier.

Przypomnijmy grę „rakieta – samolot”

	B_1	B_2	B_3	α_i
A_1	0, 5	0, 6	0, 8	0, 5
A_2	0, 9	0, 7	0, 8	0, 7
A_3	0, 7	0, 5	0, 6	0, 5
β_j	0, 9	0, 7	0, 8	

W tym przypadku dolna wartość gry jest równa górnej:

$$\alpha = \beta = 0,7$$

Strategie minimaksowe A_2 i B_2 okazują się stałe. Jeżeli jedna ze stron odstąpiłaby od tej strategii pozwoliłaby odnieść korzyść stronie przeciwnej. Takie rozwiązanie gry nazywamy czystą wartością gry lub rozwiązaniem optymalnym. Takie rozwiązanie charakteryzuje się tym, że jeżeli jeden z graczy posiada i stosuje strategię optymalną to dla drugiego odstąpienie od tej strategii może przynieść tylko straty. Jest to **punkt siodłowy gry**, to znaczy, że żadnej ze stron nie opłaca się odejść od strategii optymalnej.

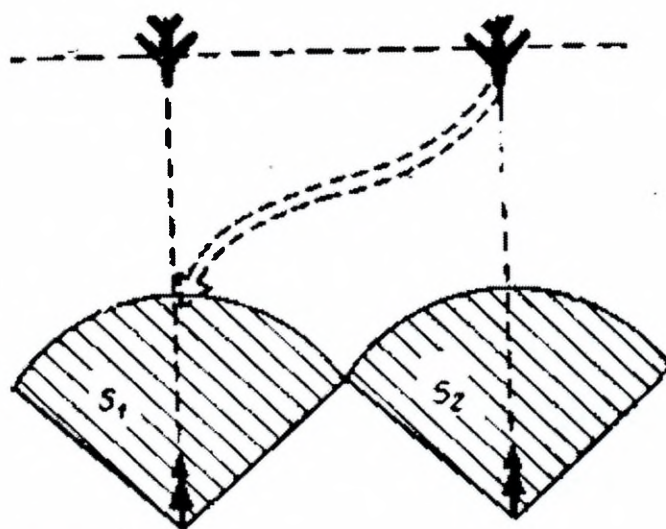
Wyobraźmy sobie macierz gry w której są dwa punkty siodłowe.

	B ₁	B ₂	B ₃	B ₄	B ₅	α_i
A ₁	2	2	1	1	2	1
A ₂	0	1	1	1	1	0
A ₃	1	1	1	1	2	1
A ₄	1	2	1	1	2	1
β_j	2	2	1	1	2	

Przykładowo w powyższej macierzy istnieje sześć punktów siodłowych $\alpha = \beta = v = 1$ i odpowiadające im strategie optymalne A₁ B₃, A₁ B₄, A₃ B₃, A₃ B₄, A₄ B₃, A₄ B₄. Nie wydaje się trudne do zauważenia, że jeżeli w macierzy gry występuje kilka punktów siodłowych to wszystkie one dają tę samą wartość wygranej.

Przykład 11

Strona A środki obrony przeciwlotniczej (bronią) osłaniają przed uderzeniami z powietrza określony zadaniem obiekt. Do wykonania zadania zostały wyznaczone dwa zestawy rakietowe nr 1 i nr 2, których strefy rażenia zostały przedstawione na rysunku. Każdy z zestawów może prowadzić ogień tylko do tego samolotu, który znajduje się w jego strefie rażenia, dlatego wcześniej prowadzi obserwację stacją wstępnego poszukiwania w celu przygotowania danych do strzelania. Dla uproszczenia założmy, że jeżeli cel zostanie ostrzelany w strefie rażenia to prawdopodobieństwo zniszczenia jest równe 1.



Rysunek 4 Ilustracja przykładu 11

Strona B dysponuje dwoma samolotami, każdy z nich może być skierowany na dowolną strefę. W momencie gdy strona A dokona podziału celów (postawi zadanie do strzelania), samoloty mogą wykonać manewr atakując jedną z wybranych stref. Zadaniem strony A jest maksymalizować liczbę zniszczonych samolotów, samolotów strony B minimalizować straty. Należy znaleźć optymalne strategie grających stron.

Strona A posiada cztery możliwe strategie:

A_1 – Każdy zestaw śledzi kierujący się w jego strefę samolot (cel)

A_2 - Każdy zestaw śledzi „na krzyż” cel na kierunku sąsiada

A_3 – Obydwa zestawy śledzą cel nr 1.

A_4 - Obydwa zestawy śledzą cel nr 2.

Strona B również posiada cztery strategie:

B_1 – Każdy z celi (samolotów) atakuje w swojej strefie

B_2 – Obydwa samoloty wykonują manewr zmiany strefy ataku

B_3 – Cel numer 1 wykonuje manewr zmiany strefy i atakuje wspólnie z celem nr 2.

B_4 - Cel numer 2 wykonuje manewr zmiany strefy i atakuje wspólnie z celem nr 1.

Otrzymujemy następującą macierz gry:

	B_1	B_2	B_3	B_4	α_i
A_1	2	0	1	1	0
A_2	0	2	1	1	0
A_3	1	1	1	1	1
A_4	1	1	1	1	1
β_j	2	2	1	1	

Znajdujemy wartości minimalne w wierszach i maksymalne w kolumnach. Przekonujemy się, że dolna i górna wartość gry są jednakowe i równe 1.

W tym przypadku mamy cztery punkty siodłowe, każdemu z nich odpowiada para optymalnych strategii gry. Wartość gry jest równa 1 to oznacza, że przy optymalnej strategii strona B nieuchronnie traci samolot. Strategia optymalna polega na tym, że zestawy rakietowe skupiają się na jednym celu a samoloty na jednym obiekcie, co potwierdza starą zasadę walki - skupienie wysiłku.

3.2 Strategie mieszane

Gry z punktem siodłowym wzbudzają zainteresowanie z punktu widzenia teorii i praktyki. Tej klasy gry nazywane są grami z pełną informacją. To znaczy, że gracz biorący udział w grze zna wszystkie poprzednie i przyszłe kroki i ich spodziewane rezultaty. Przykładowymi grami z pełną informacją mogą być szachy, warcaby czy gra „w kółko i krzyżyk”.

W teorii gier udowodniono, że każda gra z pełną informacją posiada punkt siodłowy i rozwiązanie w ramach strategii czystych. Oznacza to że w każdej grze z pełną informacją występuje para strategii po jednej i drugiej stronie dająca stałą wygraną równą wartości gry.

Jednak spośród gier spotykanych w rzeczywistości bardzo rzadko trafia się na grę, w której dolna i górna wartość gry są jednakowe. Analizując macierze takich gier można dojść do wniosku, że jeżeli każdemu z graczy dać wybór jednej strategii to w rezultacie rozmyślnego działania przyjmą zasadę minimaksu. Gwarantuje to graczowi A dolną wartość gry α . Powstaje pytanie czy nie istnieje strategia inna, dająca wyższą wygraną. Może nie ze zbioru strategii czystych pojedynczych a strategia składająca się z kilku strategii „czystych”. Takie strategie składające się z kilku przypadkowo stosowanych strategii czystych w teorii gier nazywa się „strategiami mieszanymi”⁸².

Stosując strategię mieszaną przed każdą partią gry uruchamia się mechanizm przypadkowego wyboru (rzut monetą, kostką do gry lub generator liczb losowych) w celu wyboru z odpowiednim prawdopodobieństwem określonej strategii „czystej”.

Strategie mieszane są matematycznym modelem zmieniającej się elastycznej taktyki przy której przeciwnik nie może rozpoznać wcześniej z jaką sytuacją przyjdzie mu się spotkać.

Wprowadźmy specjalne oznaczenia dla strategii mieszanych. Wyobraźmy sobie, że istnieje gra „G” w której po stronie A istnieją strategie $A_1, A_2, \dots, A_m$; a po stronie przeciwnej B występuje n strategii $B_1, B_2, \dots, B_n$. Strategię mieszaną strony A oznaczmy S_A :

$$S_A = (p_1, p_2, \dots, p_m)$$

⁸² Tamże

Jest to strategia w której poszczególne strategie „czyste” $A_1, A_2, \dots, A_m$ będziemy stosować z odpowiadającym im prawdopodobieństwem $p_1, p_2, \dots, p_m$, przy czym $p_1 + p_2 + \dots + p_m = 1$. Analogicznie sytuacja się ma z mieszaną strategią strony B.

$$S_B = (q_1, q_2, \dots, q_n)$$

gdzie : $q_1 + q_2 + \dots + q_n = 1$.

Zauważyć należy, że strategia czysta jest szczególnym przypadkiem strategii mieszanej. Wszystkie strategie oprócz niej posiadają prawdopodobieństwo równe zero a ona równe 1. Okazuje się zatem, że w takiej sytuacji dla każdej gry można znaleźć rozwiązanie to znaczy parę optymalnych strategii dla graczy obu stron.

Rozwiązaniem gry nazywamy parę optymalnych strategii S_A^*, S_B^* , w ogólnym przypadku mieszanych, które spełniają następujące warunki: jeżeli jeden z graczy stosuje swoją optymalną strategię to drugi nie chcąc przegrać musi stosować swoją strategię optymalną. Wygrana odpowiadająca rozwiązaniu gry nazywana jest wartością gry⁸³ i oznaczamy ją v .

Z powyższych rozważań i ogólnej teorii gier wynika, że każda gra posiada rozwiązanie i swoją wartość, która leży pomiędzy dolną a górną wartością gry.

$$\alpha \leq v \leq \beta$$

Odpowiednio α jest maksymalną gwarantowaną wygraną, którą może sobie zapewnić gracz A stosując tylko strategie „czyste”. Stosując strategie mieszane ta wartość nie zostanie pomniejszona.

Analogicznie ma się sytuacja ze stroną B tylko tam $v \leq \beta$.

Założmy, że w grze $m \times n$ znaleziono odpowiednio dwie optymalne strategie

$$S_A^* = (p_1, p_2, \dots, p_m) \quad S_B^* = (q_1, q_2, \dots, q_n)$$

W ogólnym przypadku niektóre z przedstawionych prawdopodobieństw $p_1, p_2, \dots, p_m$; $q_1, q_2, \dots, q_n$, mogą być równe zero, tzn. że nie wszystkie strategie wchodzą w skład mieszanej strategii optymalnej. Te strategie, które wchodzą w skład mieszanej strategii optymalnej będziemy nazywać aktywnymi strategiami gracza. Zatem wśród

⁸³ Tamże

mieszanych strategii graczy jedne są strategiami aktywnymi a drugie nie. Załóżmy, że pierwsze k strategii gracza A i pierwsze l strategii gracza B są aktywne natomiast pozostałe są strategiami nieaktywnymi. Rozwiązanie gry będzie wyglądało następująco:

$$S_A^* = (p_1, p_2, \dots, p_k, 0, \dots, 0) \quad (p_1 + p_2 + \dots + p_k = 1)$$

$$S_B^* = (q_1, q_2, \dots, q_l, 0, \dots, 0) \quad (q_1 + q_2 + \dots + q_l = 1)$$

Nie zmieni to faktu, że wygrana nadal jest równa wartości gry v . Utwierdza nas to w przekonaniu, że jeżeli będziemy stosować strategię S_A^* stosując swoje strategie $B_1, B_2, \dots, B_l$ (tylko nie $B_{l+1}, B_{l+2}, \dots, B_n$) w dowolnej konfiguracji to wartość gry się nie zmieni i dalej będzie równa v .

Jeżeli gra $m \times n$ nie posiada punktu siodłowego to jej rozwiązanie przy m i n znacznie większym od 1 staje się zadanie bardzo trudnym. Czasami jednak takie zadanie daje się uprościć.

Rozwiążmy przykład gry z podaną macierzą gry:

	B ₁	B ₂	B ₃	B ₄
A ₁	1	2	4	3
A ₂	0	2	3	2
A ₃	1	2	4	3
A ₄	4	3	1	0

Z tablicy widać, że strategia A₁ jest dublowana przez strategię A₃, dlatego dowolnej z tych strategii można się pozbyć. Dalej przyglądając się strategii A₁ i A₂ widzimy, że każdy element strategii A₂ nie jest większy od strategii A₁. Zatem możemy usunąć z tablicy strategię A₂ i A₃.

Wówczas tablica gry przyjmie postać:

	B ₁	B ₂	B ₃	B ₄
A ₁	1	2	4	3
A ₄	4	3	1	0

Niekiedy udaje się uprościć grę wprowadzając w miejsce strategii czystych strategię mieszaną.

Przykładowo mamy grę 3×4 .

	B ₁	B ₂	B ₃	B ₄
A ₁	0	5	5	2
A ₂	5	0	2	5
A ₃	5	5	1	1

W tym przykładzie można dostrzec pewną symetrię pomiędzy strategiami B₁ B₂ i B₃ B₄, a także wiersze A₁ i A₂. Jeżeli te strategię miałyby tworzyć strategię mieszaną to powinny do niej wejść z jednakowym prawdopodobieństwem występowania. W ten sposób może powstać pomysł scalenia strategii B₁ i B₂ w jedną B₁₂, analogicznie należy postąpić ze strategią B₃ i B₄. W ten sposób otrzymujemy równoważną matrycę gry:

	B ₁₂	B ₃₄
A ₁	2, 5	3, 5
A ₂	2, 5	3, 5
A ₃	5	1

Ponieważ A₁ i A₂ są strategiami jednakowymi możemy jedną z nich wykreślić i otrzymujemy uproszczoną macierz gry

	B ₁₂	B ₃₄
A ₁₂	2, 5	3, 5
A ₃	5	1

W ten sposób gra 3×4 została zredukowana (uproszczona) do postaci 2×2 .

Przystępując do rozwiązania dowolnej gry $m \times n$ koniecznym jest wykonanie kilku kroków⁸⁴:

- należy sprawdzić czy w macierzy gry nie istnieje punkt siodłowy, jeżeli istnieje to rozwiązanie gotowe;
- jeżeli punkt siodłowy w badanej grze nie występuje, należy szukać możliwości redukcji gry i wyeliminowania strategii zdublowanych lub zdecydowanie przegranych;
- zredukować strategie czyste zamieniając je mieszanymi.

⁸⁴ Grzybowski W., Rzyka I decyzje gospodarcze PWN, Warszawa 1995.

Najprostszą postacią gry jest gra 2×2 w której każda ze stron posiada tylko dwie strategie. Zobaczmy na przykładzie macierzy gry:

	B_1	B_2
A_1	a_{11}	a_{12}
A_2	a_{21}	a_{22}

W tej grze mogą wystąpić dwie sytuacje:

1. gra posiada punkt siodłowy;
2. gra nie posiada punktu siodłowego.

W pierwszej sytuacji rozwiązaniem gry jest para strategii krzyżująca się w punkcie siodłowym. Nietrudno wykazać, że jeżeli gra 2×2 ma punkt siodłowy to w takiej grze pozostałe strategie mogą być zredukowane jako nieprzydatne.

W drugim przypadku kiedy w grze punkt siodłowy nie występuje – dolna wartość gry jest różna od górnej wartości gry $\alpha \neq \beta$. Rozwiązaniem gry może być strategia mieszana – spróbujmy ją znaleźć⁸⁵.

Para optymalnych strategii to: $S_A^* = (p_1, p_2)$, $S_B^* = (q_1, q_2)$.

Na początek znajdziemy optymalną strategię S_A^* . Zgodnie z tym co stwierdziliśmy wcześniej, jeżeli będziemy stosować strategię optymalną wygrana będzie nie mniejsza niż wartość gry. W grze 2×2 obydwie strategie są aktywne – gdyby było inaczej gra posiadałaby punkt siodłowy. Znaczący to, że jeżeli gracz A zastosuje swoją optymalną strategię $S_A^* = (p_1, p_2)$, to przeciwnik nie zmniejszając wygranej może zastosować dowolną ze swoich strategii czystych. Otrzymujemy dwa równania:

$$\begin{cases} a_{11}p_1 + a_{21}p_2 = v \\ a_{12}p_1 + a_{22}p_2 = v \end{cases}$$

⁸⁵ Na podstawie Straffin P.D., Teoria gier Wydawnictwo Naukowe SCHOLAR Warszawa 2001

z których, przyjmując założenie że $p_1 + p_2 = 1$, otrzymujemy:

$$\begin{cases} p_1 = \frac{a_{22} - a_{21}}{a_{11} + a_{22} - a_{12} - a_{21}}, \\ p_2 = 1 - p_1 = \frac{a_{11} - a_{12}}{a_{11} + a_{22} - a_{12} - a_{21}} \end{cases}$$

Wartość gry otrzymamy podstawiając p_1 lub p_2 do dowolnego z wcześniej wyliczonych równań;

$$\begin{cases} v = \frac{a_{22}a_{11} - a_{12}a_{21}}{a_{11} + a_{22} - a_{12} - a_{21}}, \end{cases}$$

Analogicznie możemy znaleźć optymalną wartość gry dla strony B

$$S_B^* = (q_1, q_2)$$

Z równań :

$$\begin{cases} a_{11}q_1 + a_{12}q_2 = v \\ a_{21}q_1 + a_{22}q_2 = v \end{cases}$$

wyliczamy prawdopodobieństwa

$$\begin{cases} q_1 = \frac{a_{22} - a_{12}}{a_{11} + a_{22} - a_{12} - a_{21}}, \\ q_2 = 1 - q_1 \end{cases}$$

A oto prosty przykład opisywanej wcześniej gry „w chowanego”

	B ₁	B ₂
A ₁	-1	1
A ₂	1	-1

Gra nie posiada punktu siodłowego $\alpha = -1$, $\beta = +1$. korzystając z wcześniej wyprowadzonych formuł obliczamy:

$$p_1 = \frac{1}{2}, p_2 = \frac{1}{2}; v = 0; q_1 = \frac{1}{2}, q_2 = \frac{1}{2};$$

$$S_A^* = \left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right); S_B^* = \left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right).$$

Zatem strategią optymalną każdego gracza jest stosować swoje czyste strategie z prawdopodobieństwem $\frac{1}{2}$; przy tym średnia wygrana będzie równa zero (do takich samych wniosków doszliśmy również drogą intuicyjną). Zobaczmy przykład, który nie jest tak oczywisty:

Przykład 12 :Gra „dwa bombowce i myśliwiec”

Strona A wysyła w ugrupowanie przeciwnika B dwa bombowce I i II, Bombowce lecą jeden za drugim jeden jest wykonującym zadanie a drugi rozpoznawczym (rozpoznaje cel i skutki zrealizowanego zadania). Nad terenem przeciwnika należy spodziewać się ataków samolotów myśliwskich przeciwnika. Obydwa myśliwce wyposażone są w działka służące do zwalczania myśliwców przeciwnika. Jednak jeżeli myśliwiec atakuje z tylnej półsfery bombowiec będący z tyłu to ogień do niego może prowadzić tylko drugi bombowiec i może go porazić z prawdopodobieństwem 0,3. Jeżeli myśliwiec atakuje pierwszy bombowiec w ugrupowaniu to ogień do niego mogą prowadzić dwa samoloty i niszczyć z prawdopodobieństwem 0,51.

$$1 - (1 - 0,3)^2 = 0,51$$

Jeżeli myśliwiec nie zostanie zniszczony ogniem samolotów bombowych to wówczas on może zniszczyć dowolnie wybrany bombowiec z prawdopodobieństwem 0,8. Zadaniem bombowców jest donieść bomby nad cel a myśliwca uniemożliwić to. Należy znaleźć optymalną strategię dla obu stron gry.

Zbudujmy macierz gry dla której znajdziemy wartość średnią wygranej dla poszczególnych kombinacji strategii.

1. $A_1 B_1$ – bomby niesie pierwszy bombowiec, myśliwiec atakuje pierwszego nosiciela. Nosiciel bomb nie zostanie zniszczony, jeżeli wcześniej obydwa bombowce zniszczą myśliwca, lub gdy myśliwiec nie trafi do swojego celu. Prawdopodobieństwo tego, że dwa bombowce razem niszczą cel jest równe 0,51. Dlatego

$$a_{11} = 0,51 + (1 - 0,51)(1 - 0,8) = 0,608$$

2. $A_2 B_1$ – bomby niesie drugi bombowiec, myśliwiec atakuje pierwszego

$$a_{21} = 1$$

3. $A_1 B_2$ - bomby niesie pierwszy bombowiec, myśliwiec atakuje drugiego

$$a_{12} = 1$$

4. $A_2 B_2$ - bomby niesie drugi bombowiec, myśliwiec atakuje drugiego

$$a_{22} = 0,3 + 0,7 \cdot 0,2 = 0,44.$$

Macierz gry będzie wyglądała następująco:

	B_1	B_2	α_i
A_1	0,608	1	0,608
A_2	1	0,44	0,44
β_j	1	1	

Dolna wartość gry $\alpha=0,608$, górna wartość gry $\beta=1$. Gra nie posiada punktu siodłowego, zatem rozwiązań należy szukać w zbiorze strategii mieszanych. Zgodnie z wcześniej wyprowadzonymi formułami obliczamy rozwiązanie gry:

$$p_1 = \frac{0,44 - 1}{0,608 + 0,44 - 1 - 1} = 0,588$$

$$p_2 = 1 - p_1 = 0,412$$

$$v = \frac{0,44 \cdot 0,608 - 1 \cdot 1}{0,608 + 0,44 - 1 - 1} = 0,768$$

$$q_1 = 0,588; q_2 = 0,412.$$

Wynika z tego, że optymalne strategie gry są jednakowe:

$$S_A^* = (0,588, 0,412)$$

$$S_B^* = (0,588, 0,412)$$

$$v = 0,768$$

Optymalna strategia polega na tym, że w 58,8% wszystkich przypadków nosicielem bomb powinien być pierwszy bombowiec, a w 41,2% bombowiec nr II.

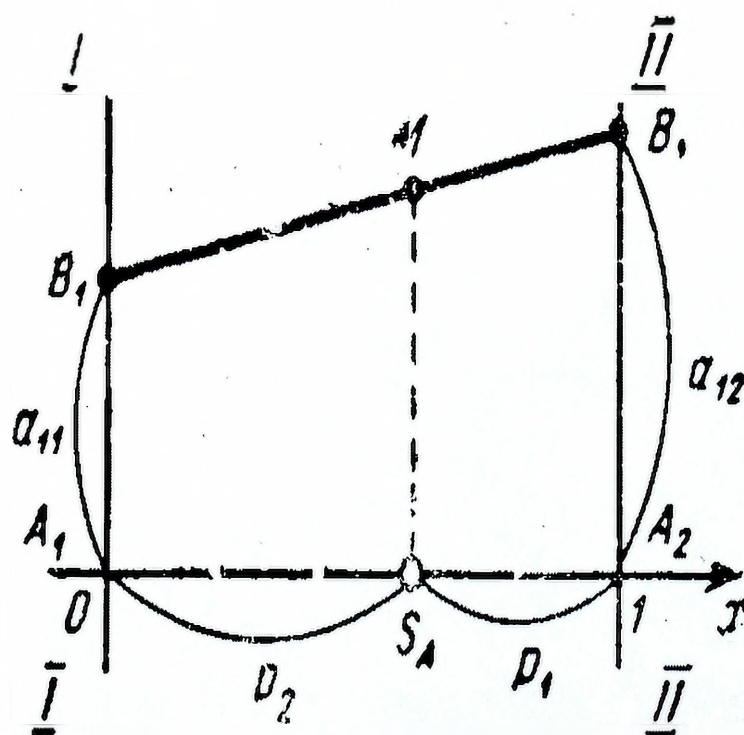
Analogicznie myśliwiec z prawdopodobieństwem 0,588 powinien atakować pierwszy bombowiec, a drugi z prawdopodobieństwem 0,412. W takich warunkach strona A będzie mogła zrealizować swoje zadania z prawdopodobieństwem 0,768, co więcej nie mniejszym niż 0,608.

3.3 Graficzna interpretacja gry

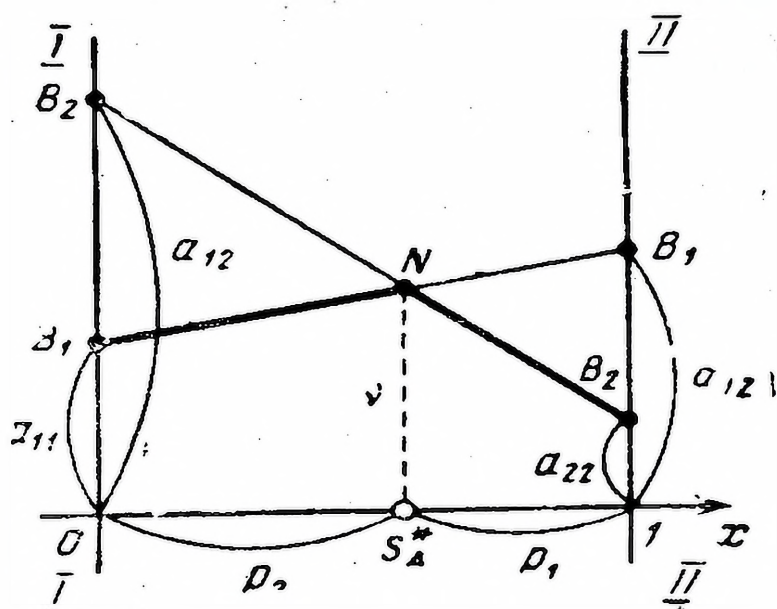
Rozwiązując grę 2×2 można przedstawić interpretację geometryczną. Zrobimy to na podstawie przykładu ogólnego.

	B_1	B_3
A_1	a_{11}	a_{12}
A_2	a_{21}	a_{22}

Weźmy odcinek osi odciętych o długości jeden. Lewy koniec będzie początkiem układu współrzędnych $x = 0$. W tym miejscu umieścimy oś, na której będziemy zaznaczać strategię A_1 , prawy koniec odcinka $x = 1$ przedstawiał będzie strategię A_2 . Wszystkie punkty na osi x będą wyobrażały mieszane strategie gracza A , przy czym prawdopodobieństwo p_1 strategii A_1 będzie równe odległości punktu S_A do prawego końca wyznaczonego odcinka, a prawdopodobieństwo p_2 strategii A_2 odległości do jego lewego końca. Przez punkty A_1 i A_2 przeprowadzimy proste prostopadłe I i II, na których będziemy zaznaczać na I wygraną przy strategii A_1 a na II wartość wygranej przy strategii A_2 .



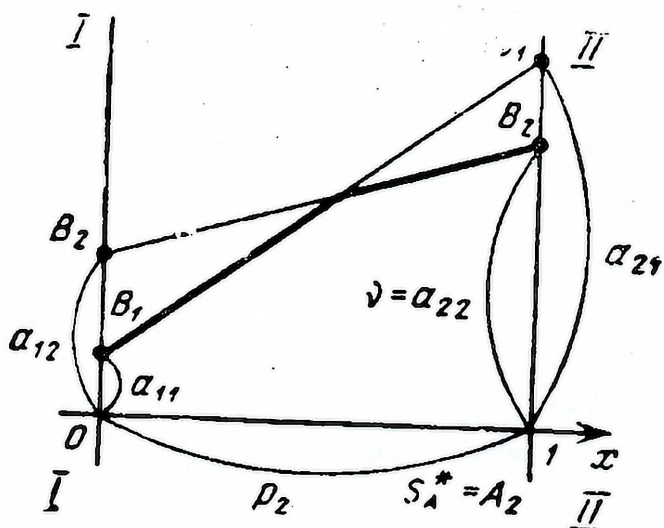
Rysunek 5. Interpretacja graficzna gry



Rysunek 6 Interpretacja graficzna wartości gry

Założmy, że strona B stosuje strategię B_1 ; takie działanie daje rezultaty, które zaznaczamy na osi I i II, odpowiednio oznaczając a_{11} i a_{21} . Przeprowadźmy prostą przechodzącą przez punkty $B_1 B_1$. Oczywiście przy strategii mieszanej $S_A = (p_1, p_2)$ wygrana jest reprezentowana odległością punktu S_A od punktu N leżącego na prostej $B_1 B_1$. Prostą $B_1 B_1$ będziemy nazywać strategią B_1 . Oczywiście jest, że w ten sam sposób możemy narysować strategię B_2 .

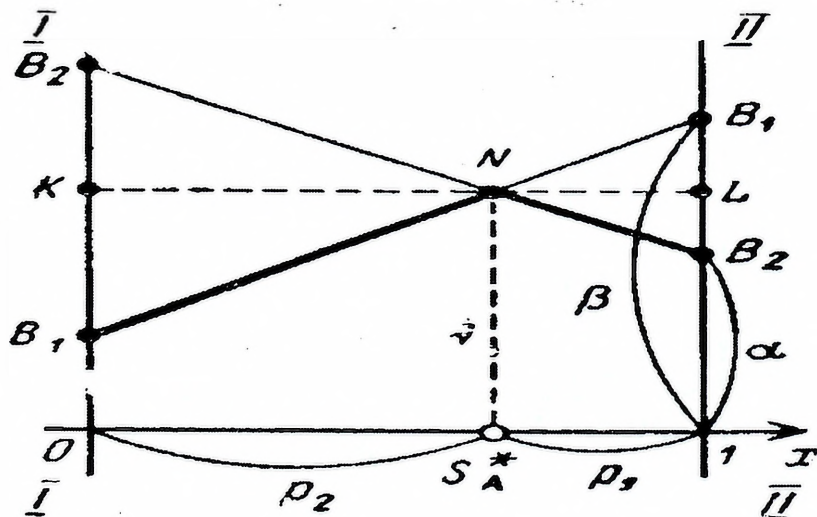
Naszym zadaniem jest wyznaczenie strategii optymalnej S_A^* tzn. takiej, przy której nasza minimalna wygrana zmierza do maksimum. Dlatego wyznaczymy dolną granicę wygranej przy strategii $B_1 B_2$. Jest to linia łamana $B_1 N B_2$ (rysunek 6). Na tej to granicy będzie leżała minimalna wygrana gracza A przy dowolnie stosowanej strategii mieszanej. Punkt N przedstawia sobą maksimum wygranej i określa wartość gry. W naszym przykładzie rozwiązaniem gry jest punkt przecięcia strategii $B_1 B_2$.



Rysunek 7 Graficzna interpretacja rozwiązania gry „czysta strategia A_2 ”

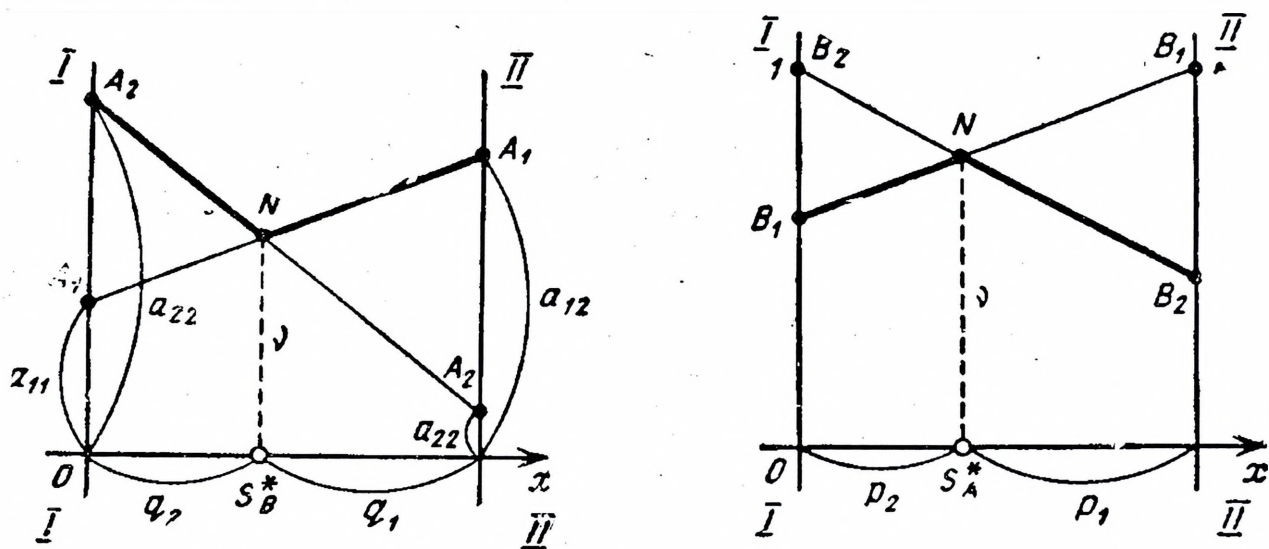
Na rysunku można również dać graficzną interpretację optymalnej strategii gracza B.

$$\begin{aligned} S_{\beta}^* &= (q_1, q_2) \\ q_1 &= \frac{KB_2}{KB_1 + KB_2} \\ q_2 &= \frac{LB_2}{LB_1 + LB_2} \end{aligned}$$



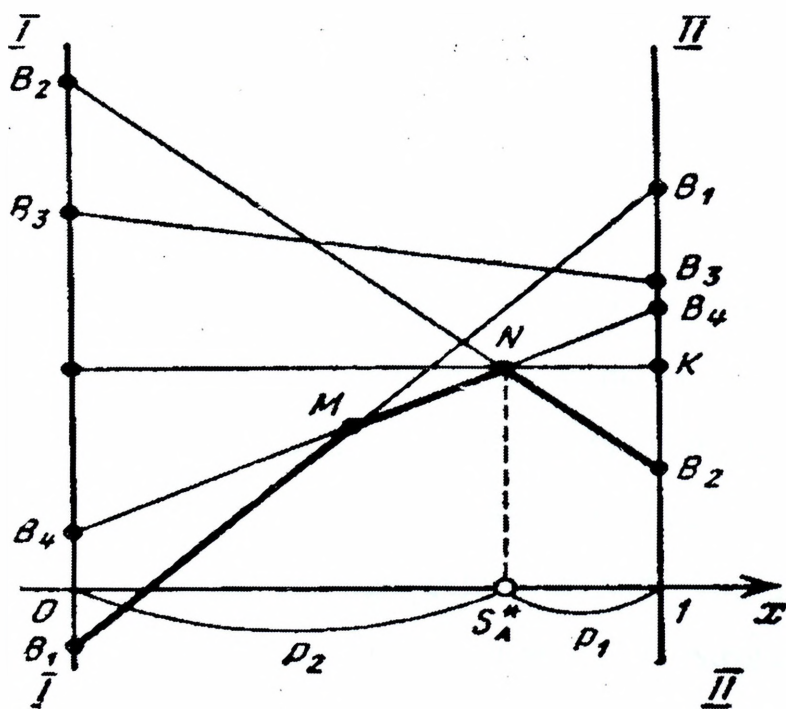
Rysunek 9 Graficzna interpretacja rozwiązania optymalnej strategii gracza B

Optymalną strategię $S_B^* = (q_1, q_2)$ innym nie bezpośrednim sposobem. Jeżeli byśmy zamienili miejscami gracza A i B, a w miejsce maksimum dolnej granicy wygranej rozpatrzyli minimum górnej granicy gry, to wówczas mamy mieszaną strategię gracza B.



Rysunek 10 Interpretacja graficzna strategii obydwu graczy

Przekonaaliśmy się, że gra typu 2×2 może być rozwiązana przy pomocy bardzo prostych metod. Zupełnie podobnie można sobie radzić z grami typu $2 \times n$. Macierz takiej gry posiada dwa wiersze i n kolumn. Analogicznie jak poprzednie przykłady taką grę można zinterpretować graficznie, a strategii przeciwnika można przedstawić w formie n prostych (rysunek 11)



Rysunek 11 Interpretacja graficzna gry typu $2 \times n$

Wykreślmy dolną granicę gry (pogrubiana linia łamana B_1MNB_2) i znajdziemy punkt N o maksymalnej współrzędnej, ta wartość to wartość gry v a odległość od punktu zero na osi x będzie równa prawdopodobieństwu p_2 strategii A_2 w optymalnej strategii mieszanej gracza A.

$$S_A^* = (p_1, p_2)$$

Wiedząc jakie strategie przecinają się w punkcie N można wskazać aktywne strategie przeciwnika. W przykładzie na rysunku optymalną mieszaną przeciwnika będzie:

$$S_B^* = (0, q_2, 0, q_4)$$

Składa się ona z dwóch aktywnych strategii B_2 i B_4 , które przecinają się w punkcie N. Strategia B_3 jest poza zakresem zainteresowania (nieskuteczna) a strategia B_1 przynosi straty przy optymalnej strategii S_A^* . Prawdopodobieństwo q_2 i q_4 są równe długości odcinków KB_4 i KB_2 na rysunku 11. Jeżeli A będzie stosował swoją strategię optymalną S_A^* , to wygrana nie zmieni się dla dowolnie stosowanych strategii B za wyjątkiem strategii B_1 i B_3 . Z tego wynika, że dla gier $2 \times n$ zawsze istnieje rozwiązanie, w którym uczestniczą nie więcej jak dwie strategie aktywne. Wystarczy, zatem tylko znaleźć te strategie, a gra $2 \times n$ staje się grą 2×2 której rozwiązanie jak przekonaliśmy się wcześniej jest bardzo proste.

Przykład 13 Rozwiążmy grę „samoloty i obrona przeciwlotnicza”

Strona A – samoloty - wykonuje uderzenie na obiekt strony B – obrona przeciwlotnicza, której zadaniem jest obrona tego obiektu. Strona A posiada dwa samoloty. Strona B trzy zestawy przeciwlotnicze. Każdy z samolotów na pokładzie posiada wystarczająco skuteczny środek ogniowy którym mógł będzie zniszczyć broniony obiekt. Samoloty dla wykonania uderzenia mogą wybrać jeden z trzech możliwych kierunków podejścia. Strona B swoje zestawy przeciwlotnicze również może rozmieścić dowolnie na kierunkach podejścia samolotów. Każdy z zestawów może prowadzić ogień tylko do jednego celu i niestety nie istnieje możliwość oddziaływania ogniowego z jednego kierunku na inny. Strona A nie posiada informacji o rozmieszczeniu środków obrony przeciwlotniczej, a strona, B nie zna kierunków z jakich zostaną wykonane ataki. Zadaniem strony A jest zniszczyć

broniony obiekt a strony B nie dopuścić do tego. Należy znaleźć rozwiązanie gry.

Jeżeli chcielibyśmy przeanalizować wszystkie możliwości wyboru kierunku ataku samolotów i rozmieszczenia zestawów przeciwlotniczych to mielibyśmy całkiem sporą liczbę. (9 z jednej strony i 27 z drugiej). Można jednak ograniczyć strategię tworząc strategię mieszane i tak dla strony A będą tylko dwie strategię:

A_1 – wysłać dwa samoloty na dwa oddzielne kierunki

A_2 – wysłać dwa samoloty na jeden z wybranych kierunków.

Dla strony B podobnie:

B_1 – (1+1+1) – postawić po jednym zestawie na każdym kierunku oddzielnie;

B_2 – (2+1+0) – wyznaczyć kierunek dominujący i osłaniać go dwoma zestawami drugi jednym a trzeci pozostawić nie broniony;

B_3 – (3+0+0) – skupić wysiłek na jednym kierunku, dwa pozostawić nie bronione.

Przy czym zakładamy, że wybór każdego z kierunków jest wyborem przypadkowym z jednakowym rozkładem prawdopodobieństwa.

Zestawiając macierz gry zakładamy obliczenie wygranej strony A – obliczając jakie jest prawdopodobieństwo przerwania się przez obronę chociaż jednego samolotu.

Rozpatrzmy wygraną dla wszystkich strategii

1. A_1B_1 – samoloty lecą z różnych kierunków na każdym kierunku znajduje się jeden zestaw przeciwlotniczy; Wygrana a_{11} – prawdopodobieństwo tego, że przeniknie do obiektu w każdym wypadku jest równe zero - $a_{11}=0$;

2. A_2B_1 – dwa samoloty lecą na jeden wybrany kierunek, na każdym kierunku znajduje się jeden zestaw przeciwlotniczy; Wynika z tego, że jeden z samolotów nie zostanie ostrzelany i dotrze do atakowanego obiektu $a_{21} = 1$

3. A_1B_2 – Samoloty wykonują zadanie pojedynczo na różnych kierunkach, przeciwnik na wybranym kierunku ustawia dwa zestawy, drugiego broni jednym trzeci jest niebroniony (2+1+0). Ażeby jeden z samolotów przerwał się przez obronę musi trafić na niebroniony kierunek. Prawdopodobieństwo takiego zdarzenia możemy znaleźć przez obliczenie prawdopodobieństwa przeciwnego – obydwa samoloty trafią na bronione kierunki.. Prawdopodobieństwo takiego zdarzenia jest równe $-\frac{2}{3} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{3}$,

Zatem zdarzenie przeciwne jest równe $1 - \frac{1}{3} = \frac{2}{3}$.

4. A_2B_2 – Samoloty wykonują atak wspólnie , obrona przeciwlotnicza ustawiona w systemie (1+2+0). Tym razem znajdziemy prawdopodobieństwo, że obydwa samoloty będą zniszczone. Dlatego muszą one trafić na kierunek broniony dwoma zestawami. Prawdopodobieństwo takiego zdarzenia jest równe $1/3$, prawdopodobieństwo zdarzenia przeciwnego jest równe $1 - \frac{1}{3} = \frac{2}{3}$.

5. A_1B_3 – Samoloty lecą na różnych kierunkach a obrona jest skupiona na jednym – w tej sytuacji jeden z samolotów na pewno dotrze do celu $a_{13} = 1$.

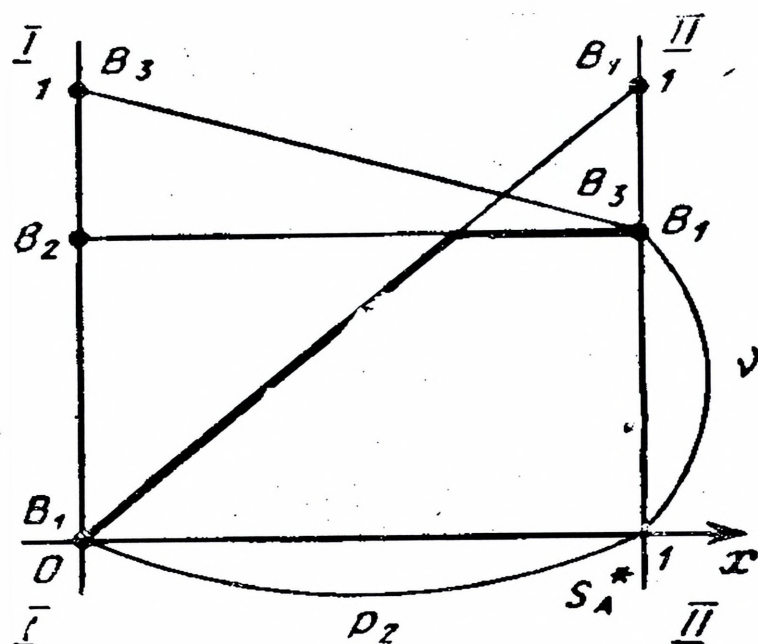
6. A_2B_3 – Samoloty razem atakują jeden kierunek, zestawy rakietowe skupiły się na jednym. Ażeby samoloty zostały zniszczone muszą trafić na broniony kierunek – prawdopodobieństwo takiego zdarzenia jest równe $1/3$, a przeciwne $1 - \frac{1}{3} = \frac{2}{3}$.

	B ₁	B ₂	B ₃	α _i
A ₁	0	2/3	1	0
A ₂	1	2/3	2/3	2/3
β _j	1	2/3	1	

Z tablicy gry wynika, że dolna wartość gry jest równa wartości górnej $\alpha = \beta = v = 2/3$; znaczy to że gra posiada punkt siodłowy i rozwiązaniem są strategie czyste. Strona A powinna zawsze wysyłać samoloty razem (strategia A_2), a strona B zawsze powinna rozdzielać swoje środki w systemie (2+1+0) tzn. stawiać dwa zestawy na jednym kierunku drugiego bronić jednym a kierunek trzeci pozostawić nieosłonięty.

Przykład 14

Zobaczmy inny wariant gry – warunki takie same tylko z tą różnicą, że istnieją cztery kierunki podejścia samolotów i obrona przeciwlotnicza dysponuje czterema zestawami rakietowymi.



Rysunek 12 Interpretacja graficzna gry do przykładu 13

Podobnie jak w poprzednim wariantcie strona A posiada dwie strategie:

A_1 - wysłać dwa samoloty na dwa oddzielne kierunki

A_2 - wysłać dwa samoloty na jeden z wybranych kierunków.

Po stronie B warianty troszeczkę bardziej urozmaicone

B_1 - (1+1+1+1) rozstawić po jednym zestawie na każdym bronionym kierunku;

B_2 - (2+1+1+0) skupić wysiłek dwoma zestawami na jednym kierunku dwa kierunki bronić pojedynczymi zestawami a jeden pozostawić bez osłony przeciwlotniczej;

B_3 - (2+2+0+0) skupić wysiłek dwoma zestawami na dwóch kierunkach, dwa pozostawić bez osłony przeciwlotniczej;

B_4 - (3+1+0+0) jeden z kierunków osłaniać trzema zestawami, drugi jednym pozostałe nie osłaniać;

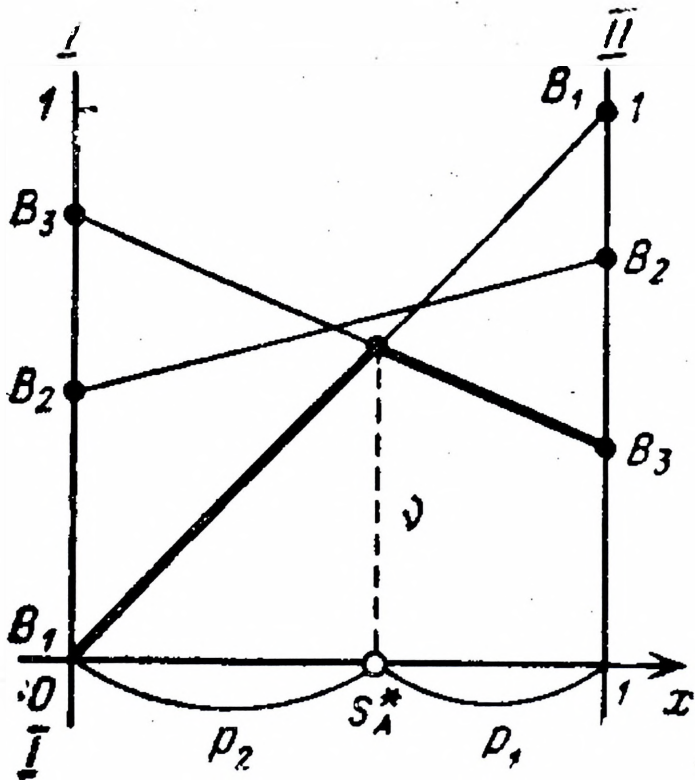
B_5 - skupić wysiłek wszystkich zestawów na jednym kierunku.

Strategie B_4 i B_5 można natychmiast odrzucić gdyż przy założonych warunkach są nieracjonalne. Jeżeli na jednym kierunku może lecieć nie więcej jak dwa samoloty i każdego z nich można niszczyć z prawdopodobieństwem równym jeden to stawianie więcej jak dwa zestawy na jednym kierunku jest pozbawione sensu.

Przyjrzyjmy się macierzy gry:

	B ₁	B ₂	B ₃	α _i
A ₁	0	1/2	5/6	1/2
A ₂	1	3/4	1/2	1/2
β _j	1	3/4	5/6	

Ten wariant gry już nie posiada punktu siodłowego (α = 1/2 β= 3/4). Znajdźmy rozwiązanie wśród strategii mieszanych. Wstępnie spójrzmy na rysunek



Rysunek 13 Interpretacja graficzna gry do przykładu 14

Możemy wydzielić tylko dwie aktywne strategie B₁ i B₃. Grę natomiast sprowadzić do postaci 2×2.

	B ₁	B ₃
A ₁	0	5/6
A ₂	1	1/2

Rozwiązując grę otrzymujemy:

$$p_1 = \frac{3}{8}; p_2 = 1 - p_1 = \frac{5}{8}; q_1 = \frac{1}{4}; q_2 = \frac{3}{4}; v = \frac{5}{8}$$

$$S_A^* = (\frac{3}{8}, \frac{5}{8}) \quad S_B^* = (\frac{1}{4}, \frac{3}{4})$$

W takiej sytuacji dość wyraźnie można rekomendować stronie A ażeby z prawdopodobieństwem równym $\frac{3}{8}$ wysyłała samoloty na różne kierunki a z prawdopodobieństwem $\frac{5}{8}$ wykonywała uderzenia na jeden kierunek dwoma samolotami. Natomiast strona B powinna stosować z prawdopodobieństwem $\frac{1}{4}$ osłonę wszystkich kierunków a system $(2+0+2+0)$ bronić obiektu z prawdopodobieństwem $\frac{3}{4}$.

Przykład 15 „podział wysiłku w natarciu i obronie”

Strona A dysponuje trzema eskadrami lotnictwa taktycznego i zamierza opanować obiekt B. Strona B posiada cztery eskadry i będzie obiekt B bronić. Każda z wykonujących uderzenie eskadr może być skierowana do obiektu na jednym z dwóch dostępnych kierunków. Strona B może skierować swoje eskadry również na te same dwa kierunki. Jeżeli na którejś z dróg lotniczych siły strony B spotkają się z przeważającymi siłami przeciwnika to wówczas on się przedrze i zdobędzie obiekt B.

Jeżeli napotkany przeciwnik będzie mniej liczny to zostanie pokonany i nie podejmie walki natomiast, kiedy spotykające się strony są jednakowo liczne to strona A odnosi zwycięstwo z prawdopodobieństwem 0,4 i zdobywa obiekt, natomiast strona B odpiera uderzenie prawdopodobieństwem 0,6 i cała akcja kończy się niepowodzeniem.

Zadaniem stron jest zdecydować ile i na który kierunek mają udać się eskadry. Wygraną strony A jest zdobycie obiektu B – jakie jest prawdopodobieństwo wykonania tego zadania można się przekonać dokonując analizy gry.

Strategie strony A są następujące:

$A_1 - (2+1)$ skierować dwie eskadry na jedną z dróg, drugą drogą uda się eskadra trzecia;

$A_2 - (3+0)$ Wszystkie trzy eskadry skierować na jedną drogę.

Strona B może stosować następujące strategie:

$B_1 - (2+2)$ skierować na każdą z dróg po dwie eskadry;

$B_2 - (3+1)$ na jedną z dróg skierować trzy eskadry a drugą drogą wyznaczyć marszrutę jednej eskadry;

$B_3 - (4+0)$ wysłać wszystkie eskadry jedną drogą drugą pozostawić bez obrony.

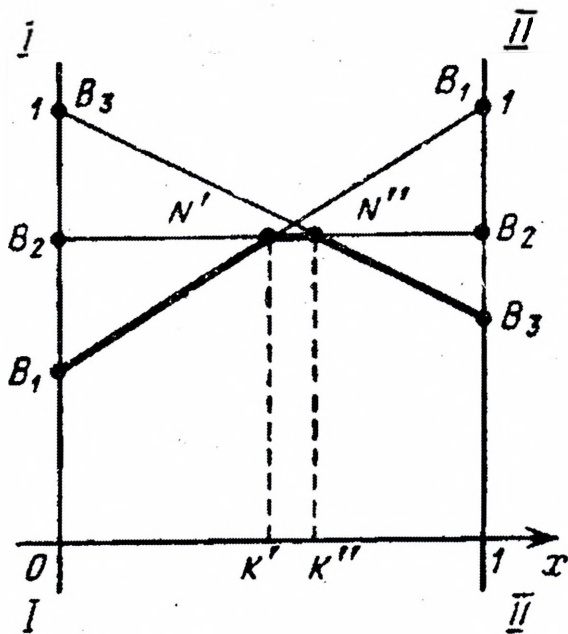
Należało by zestawzić możliwe kombinacje strategii:

1. A_1B_1 – Na jednej z dróg strona A napotyka przeważające siły i musi odstąpić od ataku na drugiej trafia na przeciwnika o takim samym potencjale zatem może odnieść sukces z prawdopodobieństwem $0,4 - a_{11} = 0,4$
2. A_2B_1 – Przy takim rozwiązaniu strona A przebiję się i zwycięży $a_{21} = 1$
3. A_1B_2 – Wybór drogi jest procesem przypadkowym i jednakowo prawdopodobnym, zatem na jednej drodze spotykają się dwie eskadry A z trzema B natomiast na drugiej jedna A z jedną B. Na pierwszej drodze atak zostanie odparty na drugiej z prawdopodobieństwem $0,4$ obiekt B zdobyty. Jeżeli by zaistniała jednakowo prawdopodobna sytuacja, że trzy B trafiają na jeden A i dwa A trafiają na jeden B to wygrana jest pewna. Biorąc pod uwagę prawdopodobieństwo warunkowe możemy obliczyć prawdopodobieństwo sukcesu strony A. $a_{12} = 1/2 \cdot 0,4 + 1/2 \cdot 1 = 0,7$
4. A_2B_2 – Z prawdopodobieństwem $1/2$ na drodze spotykają się trzy eskadry A z trzema B, na drugiej do spotkania nie dojdzie. Zatem prawdopodobieństwo sukcesu strony A jest równe $0,4$. Ale może z prawdopodobieństwem $0,5$ dojść do spotkania trzech eskadr A z jedną B i sukces pewny. Ponownie korzystając z możliwości obliczenia prawdopodobieństwa warunkowego – otrzymujemy: $a_{22} = 1/2 \cdot 0,4 + 1/2 \cdot 1 = 0,7$
5. A_1B_3 – Jeżeli eskadry A idą po dwóch drogach a eskadry B tylko po jednej to w każdej sytuacji A zdobywa obiekt B. $a_{13} = 1$
6. A_2B_3 – w tej sytuacji, jeżeli eskadry trafią na siebie to B wygra jeżeli nie to wygrana będzie po stronie A. Zatem: $1/2 \cdot 1 + 1/2 \cdot 0 = 0,5$.

Macierz gry będzie wyglądać następująco:

	B ₁ (2+2)	B ₂ (3+1)	B ₃ (4+0)	α _i
A ₁ (2+1)	0,4	0,7	1	0,4
A ₂ (3+0)	1	0,7	0,5	0,5
β _j	1	0,7	1	

Wyraźnie widać, że dolna wartość gry $\alpha = 0,5$; górna wartość gry $\beta = 0,7$; gra nie posiada punktu siodłowego. Należy zatem szukać rozwiązania gry wśród strategii mieszanych. Geometryczna interpretacja gry jak na rysunku 14:



Rysunek 14 Interpretacja graficzna gry z przykładu 15

Dolna granica wygranej dochodzi do maksimum w punkcie N' i N'' . Na całym odcinku między tymi punktami maksimum jest równe wartości gry $v = 0,7$. W tej sytuacji rozwiązanie gry nie jest jednoznaczne. Strona A może zastosować dowolną ze swoich strategii mieszanych odpowiadającym punktom K' i K'' . Należy znaleźć współrzędne punktów N' i N'' , one będą równe odpowiednio p_2' i p_2'' – jest to ograniczenie w którym znajduje się częstotliwość stosowania strategii A_2 . Z rysunku możemy ułożyć proporcje:

$$\frac{0,7 - 0,4}{p_2'} = \frac{1 - 0,7}{1 - p_2'}$$

Jeżeli $p_2' = 0,5$. Analogicznie otrzymujemy:

$$\frac{1 - 0,7}{p_2''} = \frac{0,7 - 0,5}{p_2''}$$

dla $p_2'' = 0,6$

Wynika z tego, że strona A może stosować optymalną strategię mieszaną $S_A^* = (p_1, p_2)$ w której prawdopodobieństwo p_1 i p_2 leży – pierwsze pomiędzy 0,4 i 0,6, drugie odpowiednio 0,6 i 0,5. Jest oczywiste, że skrajne wartości p_1 i p_2 także dają strategię optymalną. Zatem:

$$S_A^* = (0,5; 0,5) \quad S_B^* = (0,4; 0,6)$$

Strategia optymalna strony A polega na tym ażeby z prawdopodobieństwem z przedziału 0,4 - 0,5 wysłać dwie eskadry na jeden kierunek na jedną drogę a trzecią wysłać drugą, w pozostałych przypadkach wyznaczać marszrute wszystkim trzem po jednej drodze. Strona B (jak to widać z rysunku) może stosować tylko jedną czystą strategię B_2 . Z tej strategii wynika, że niezmiennie należy wysłać trzy bataliony na jedną drogę i jeden na drugą wówczas będzie można obronić osłaniany obiekt B z prawdopodobieństwem 0,7 (górna wartość gry).

3.4 Gry i programowanie liniowe

Do tej pory rozpatrywaliśmy bardzo proste przykłady gier typu $2 \times n$ i $m \times 2$, które można było przedstawić w formie graficznej umożliwiając szybkie znalezienie rozwiązania. W grach typu $3 \times n$ lub $m \times 3$ istnieje możliwość przedstawienia interpretacji graficznej, ale jest to dużo bardziej skomplikowane i wymaga rysunku przestrzennego. Sytuacja staje się jeszcze bardziej skomplikowana gdy $m > 3$ i $n > 3$, interpretacja graficzna jest mało wyobrażalna (człowiek generalnie potrafi sobie wyobrazić cztery wymiary przy czym czwarty to czas) a rozwiązanie gry jest tylko możliwe metodami rachunkowymi.

W ogólnym przypadku gry $m \times n$ są zadaniami skomplikowanymi ale nie na tyle ażeby nie można ich było rozwiązać. Takie zadania najprościej sprowadzić do postaci zadania programowania liniowego i wówczas można je rozwiązać ogólnie znanymi metodami programowania liniowego

Rozpatrzmy taki ogólny przykład. Gra $m \times n$ – m strategii gracza A - $A_1, A_2, \dots, A_m$; i n strategii gracza B - $B_1, B_2, \dots, B_n$. Dana jest macierz gry:

	B_1	B_2	...	B_n
A_1	a_{11}	a_{12}	...	a_{1n}
A_2	a_{21}	a_{22}	...	a_{2n}
...	...	...	...	...
A_m	a_{m1}	a_{m2}	...	a_{mn}

Należy znaleźć rozwiązanie gry tzn. dwie optymalne strategie mieszane dla jednego i drugiego gracza

$$S_A^* = (p_1, p_2, \dots, p_m) \quad S_B^* = (q_1, q_2, \dots, q_n)$$

gdzie $p_1 + p_2 + \dots + p_m = 1$) i $q_1 + q_2 + \dots + q_n = 1$)

jest to prawdopodobieństwo stosowania poszczególnych strategii czystych (niektóre z nich mogą być nie aktywne i wówczas prawdopodobieństwo stosowania takiej strategii jest równe zero)

Na wstępie znajdziemy optymalną strategię $S_A^* = (p_1, p_2, \dots, p_m)$. Taka strategia powinna nam zapewnić wygraną nie mniejszą niż wartość gry v , przy dowolnie stosowanych strategiach przez przeciwnika. Wartość gry byłaby równa v tylko w tej sytuacji gdy przeciwnik stosowałby swoją optymalną strategię $S_B^* = (q_1, q_2, \dots, q_n)$.

Na tym etapie rozwiązywania gry wartości v jeszcze nie znamy, ale możemy założyć bez wielkiego błędu, że $v > 0$. Wystarczającym jest ażeby wszystkie elementy macierzy gry były dodatni i wówczas $v > 0$, a ten warunek bez szkody dla rozwiązania gry można spełnić dobierając odpowiednio jednostki wypłat.

Założmy że jesteśmy stroną A, przeciwnik to strona B. Zatem chcąc obliczyć naszą średnią wygraną musimy policzyć:

$$a_j = p_1 a_{1j} + p_2 a_{2j} + \dots + p_m a_{mj}$$

Jak już wcześniej dowiedzieliśmy się przy naszej optymalnej strategii $S_A^* = (p_1, p_2, \dots, p_m)$ nasza wygrana nie może być mniejsza niż wartość gry v ,

[illegible]

Podzielimy wszystkie równania przez wartość gry i wprowadźmy nowe oznaczenie

$$x_1 = \frac{p_1}{\nu}, x_2 = \frac{p_2}{\nu}, \dots, x_n = \frac{p_n}{\nu}$$

Możemy zatem powyższe równanie zapisać w formie:

[illegible]

$x_1, x_2, \dots, x_m$ to zmienne niezależne. Biorąc pod uwagę, że $p_1 + p_2 + \dots + p_m = 1$, zachodzi następująca zależność:

$$x_1 + x_2 + \dots + x_m = \frac{1}{\nu}$$

Jeżeli chcemy maksymalizować gwarantowaną wygraną to z powyższej zależności wynika, że suma zmiennych niezależnych powinna dążyć do minimum.

Zadanie nasze zostało sprowadzone do zadania programowania liniowego polegające na znalezieniu minimum sumy przy określonych ograniczeniach

$$L = x_1 + x_2 + \dots + x_m$$

Rozwiązując zadanie programowania liniowego znajdziemy optymalną strategię gracza A.

Postawmy się teraz po stronie gracza B. Nasze rozważania dokładnie powinny iść tą samą drogą co dla gracza A z tą jednak różnicą, że gracz B będzie chciał minimalizować wielkość $1/v$. Zatem równanie wprowadzające powinno mieć postać:

[illegible]

gdzie $y_1, y_2, \dots, y_m$ to zmienne niezależne dla których prawdziwe są zależności:

$$y_1 = \frac{q_1}{\nu}, y_2 = \frac{q_2}{\nu}, \dots, y_n = \frac{q_n}{\nu}$$

Należy tak wybrać $y_1, y_2, \dots, y_m$, ażeby maksymalizować funkcję :

$$L = y_1 + y_2 + \dots + y_n = \frac{1}{\nu}$$

W ten sposób sprowadziliśmy zadanie rozwiązania dowolnej gry $m \times n$ do postaci dwóch zadań programowania liniowego które już potrafimy rozwiązać

Przykładowo znajdziemy rozwiązanie, metodą programowania liniowego, grę w „trzy palce”, której macierz została przedstawiona poniżej:

$\begin{matrix} & \\ & \end{matrix}$	B_1	B_2	B_3
A_1	2	-3	4
A_2	-3	4	-5
A_3	4	-5	6

We wstępnych rozważaniach założyliśmy, że wszystkie elementy macierzy gry powinny być nie mniejsze od zera. Możemy to osiągnąć dodając do każdego elementu $M=5$. Wówczas macierz będzie wyglądała następująco:

	B ₁	B ₂	B ₃
A ₁	7	2	9
A ₂	2	9	0
A ₃	9	0	11

Przez tę operację wartość gry zwiększy się o 5 a rozwiązanie pozostanie bez zmian. Dla porządku możemy wprowadzić nowe oznaczenie $v' = v + 5$. Znajdźmy strategię optymalną gracza A - $S_A^* = (p_1, p_2, p_3)$. Zapiszmy równanie wynikające z warunków zapisanych w macierzy gry.

$$\begin{cases} 7x_1 + 2x_2 + 9x_3 \geq 1 \\ 2x_1 + 9x_2 \geq 1 \\ 9x_1 + 11x_3 \geq 1 \end{cases}$$

Naszym zadaniem jest maksymalizować funkcję:

$$L = x_1 + x_2 + x_3$$

Po obliczeniach otrzymujemy

Zmienne niezależne	Wartość
X_1	0,05
X_2	0,10
X_3	0,05
$L_{\text{Min}} = 0,20$	

Należy obliczyć wartość gry pamiętając, że zostało wyliczone $v' = 1/L_{\text{min}} = 5$.

Wartość gry wynikająca z warunków zadani $v = v' - 5 = 0$.

$$p_1 = x_1 v' = \frac{1}{20} \cdot 5 = \frac{1}{4}$$

$$p_2 = x_2 v' = \frac{1}{10} \cdot 5 = \frac{1}{2}$$

$$p_3 = x_3 v' = \frac{1}{20} \cdot 5 = \frac{1}{4}$$

Strategia optymalna będzie strategią mieszaną $S_A^* = (\frac{1}{4}, \frac{1}{2}, \frac{1}{4})$ a wartość gry będzie równa $v=0$.

Możemy zaproponować graczom „w trzy palce” następującą strategię – należy pokazywać jeden palec z prawdopodobieństwem $\frac{1}{4}$, dwa palce z prawdopodobieństwem $\frac{1}{2}$, a trzy palce z prawdopodobieństwem $\frac{1}{4}$. Dzięki temu średnia wygrana każdego gracza będzie wynosić zero ($v = 0$).

Rozwiązując poszczególne przykłady gier proponowałem graczom strategie mieszane – należałoby się zastanowić jak takie strategie sprawdziłyby się w rzeczywistości. Obszarem w którym można by dokonać tego typu analiz bez wątpienia jest obrona powietrzna gdzie nietrudno o sytuację konfliktową. Takie sytuacje w pierwszym oglądzie można podzielić na takie które mogą zaistnieć obszarze rozwiązań technicznych i takie które dostrzeżemy w rozwiązaniach taktycznych.

Zastosowania teorii gier w technice pozwala na wybór optymalnych rozwiązań w zakresie parametrów technicznych konstrukcji np. lotniczych poszukując kompromisu pomiędzy osiąganymi a kosztami eksploatacji.

W zadaniach taktycznych bardziej nas interesuje sposób użycia środków bojowych ażeby uzyskać swobodę działań, elastyczność i jak najlepsze rezultaty, zaskoczyć przeciwnika niewielkim kosztem uzyskać maksymalny efekt. Jak uzyskać takie efekty korzystając ze strategii mieszanych?

To, że rozwiązania w obszarze taktyki mają być zaskakujące dla przeciwnika jest rzeczą oczywistą, zatem stosowanie strategii mieszanych z odpowiednim prawdopodobieństwem jest argumentem przemawiającym za tym ażeby je stosować.

Stosowanie zestawów przeciwlotniczych o różnych charakterystykach technicznych w jednym zgrupowaniu jest wynikiem rozwiązań z zakresu teorii gier. W tym przypadku przedmiotem poszukiwań nie jest ilość powtórzeń a proporcje, jakie należałoby zachować dla najlepszej skuteczności takiego zgrupowania wojsk raketowych.

Założmy , że w „Clastrze” znajdują się cztery rodzaje zestawów przeciwlotniczych A_1, A_2, A_3, A_4 , które będą prowadziły ogień do samolotów przeciwnika typu B_1, B_2, B_3, B_4, B_5 o znanych charakterystykach taktyczno technicznych możliwościach bojowych. Niewiadomym jest w jakich proporcjach przeciwnik tych samolotów użyje. Prawdopodobieństwo zniszczenia poszczególnych typów samolotów przez zestawy przeciwlotnicze zostało zamieszczone w tabelce.

	B ₁	B ₂	B ₃	B ₄	B ₅
A ₁	0,2	0,4	0,6	0,4	0,7
A ₂	0,3	0,4	0,6	0,5	0,8
A ₃	0,4	0,5	0,6	0,5	0,8
A ₄	0,7	0,3	0,5	0,2	0,1

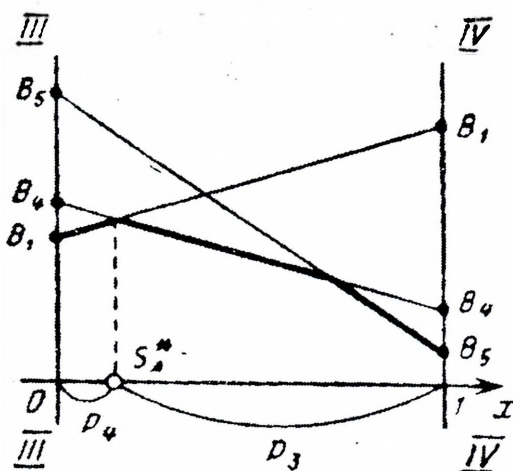
Należy korzystając z zasad teorii gier określić proporcje środków obrony przeciwniczej stosowanych w „Clastrze”

Rozwiązując ten problem dobrze jest zauważyć, że strategia A₁, jest zdecydowanie gorsza od strategii A₂. Dalej strategia A₂, nie wytrzymuje porównania ze strategią A₃. Możemy zatem dokonać redukcji macierzy gry do postaci :

	B ₁	B ₂	B ₃	B ₄	B ₅
A ₃	0,4	0,5	0,6	0,5	0,8
A ₄	0,7	0,3	0,5	0,2	0,1

Popatrzmy na tę tabelę od strony przeciwnika. Strategia B₃ jest zdecydowanie mniej korzystna od strategii B₂ a B₂ jest gorsza od B₄. Ostatecznie otrzymujemy macierz gry 2×3:

	B ₁	B ₄	B ₅
A ₃	0,4	0,5	0,8
A ₄	0,7	0,2	0,1



Rysunek 15 Graficzna interpretacja rozwiązania gry Dominacja strategii B₁ i B₄

Z przedstawionej graficznej interpretacji gry wynika, że gra zdominowana jest dwoma strategiami B_1 i B_4 dzięki czemu grę możemy zredukować do postaci 2×2 .

	B_1	B_4
A_3	0,4	0,5
A_4	0,7	0,2

Rozwiązaniem gry jest strategia optymalna :

$$S_A^* = (0, 0, p_3, p_4)$$

gdzie :

$$p_3 = \frac{0,2 - 0,7}{0,4 + 0,2 - 0,5 - 0,7} = \frac{5}{6};$$

$$p_4 = 1 - p_3 = \frac{1}{6}$$

Wartość gry

$$v = \frac{0,2 \cdot 0,4 - 0,5 \cdot 0,7}{0,4 + 0,2 - 0,5 - 0,7} = \frac{9}{20} = 0,45$$

Z przeprowadzonej analizy wynika, że stosowanie zestawów A_1 i A_2 jest nieuzasadnione, natomiast w ugrupowaniu wojsk raketowych powinny znaleźć się zestawy A_3 i A_4 w proporcji 5:1. W takim wypadku średnie prawdopodobieństwo zniszczenia samolotu przeciwnika będzie największe i nie mniejsze niż 0,45.

Gry z niepełną informacją

Problemy rozwiązywane w ramach teorii gier są siłą rzeczy problemami rozwiązywanymi w warunkach niepewności. Niepewność ta wynika z przeciwdziałania przeciwnika. Przy czym źródłem niepewności nie zawsze jest przeciwnik. Często niepewność wynika z warunków, w jakich działania są prowadzone. Przykładowo może to być pogoda, a również cała masa imponderabiliów wynikająca z niedokładności organizacyjnych, błędów koordynacji i współdziałania.

We wszystkich tego rodzaju sytuacjach powodzenie często nie jest uzależnione od przeciwnika a od złożonych okoliczności w teorii gier i podejmowania decyzji nazywanych „naturą”. Dlatego często w literaturze przedmiotu takie sytuacje występują pod nazwą „gry z naturą”.

Przyjrzyjmy się kilku tego typu sytuacji. Złóżmy, że strona A posiada m możliwych strategii: $A_1, A_2, \dots, A_m$. W odpowiedzi mogą zaistnieć następujące stany natury $N_1, N_2, \dots, N_n$. Wygrana a_{ij} jest funkcją użyteczności przyporządkowaną każdej parze strategii A_i i natury N_j .

	N_1	N_2	...	N_n
A_1	a_{11}	a_{12}	...	a_{1n}
A_2	a_{21}	a_{22}	...	a_{2n}
...	...	...	...	...
A_m	a_{m1}	a_{m2}	...	a_{mn}

Należy wybrać taką strategię gracza A (czystą albo mieszaną), która jest najlepsza w porównaniu z innymi. Na pierwszy rzut oka może się wydawać, że sytuacja jest dużo prostsza niż w przypadku gry – przecież nie ma przeciwnika. Rzeczywiście w grze z naturą można uzyskać większe korzyści niż w grze z przeciwnikiem jednak trudniej wybrać właściwą strategię gdyż nie można kierować się rozsądkiem przeciwnika. W grze z przeciwnikiem można kierować się tym, że cele przeciwnika są diametralnie różne i tym samym pomniejszamy niepewność gry (nieokreśloność). W sytuacji, gdy takiego założenia nie możemy przyjąć stopień niepewności rośnie.

Sytuacja jest bardzo prosta gdy któraś ze strategii zdecydowanie dominuje pozostałe, jak w tablicy poniżej.

	N_1	N_2	N_3	N_4
A_1	1	2	3	5
A_2	7	4	4	5
A_3	3	4	4	1
A_4	7	4	2	2

Strategia A_2 jest zdecydowanie najlepsza, w każdej sytuacji przynosi największą wygraną. Jeżeli jednak nie ma takiej strategii, która by dominowała to jak należy jej szukać? Przykładowo w tablicy poniżej występuje taka sytuacja, że istnieją dwie dominujące strategie A_3 i A_4 . W ten sposób możemy macierz gry zredukować do postaci 2×5 .

	N ₁	N ₂	N ₃	N ₄	N ₅
A ₁	5	3	4	2	1
A ₂	5	3	2	1	1
A ₃	1	2	5	4	3
A ₄	7	6	7	3	1
A ₅	1	2	3	4	3

Zwróćmy uwagę, że przy grze z rozumnym przeciwnikiem analizując sytuację odrzucilibyśmy jego strategię N_3 , jako najbardziej niekorzystną dla niego. W grze z naturą tego robić nie wolno. Natura wszystkie swoje zdarzenia traktuje jednakowo i nie stara się ażeby nam najbardziej zaszkodzić.

	N ₁	N ₂	N ₃	N ₄	N ₅
A ₃	1	2	5	4	3
A ₄	7	6	7	3	1

Czym zatem należy się kierować kiedy nie występuje strategia dominująca? Z pewnością chcielibyśmy uzyskać jak największą użyteczność z gry . Znaczy to że jeżeli dla strategii A_i i stanu natury N_j użyteczność jest większa niż dla strategii A_k i stanu natury N_l to wówczas wybierzemy tę strategię dla której użyteczność gry jest większa. Czyli a_{ij} .

$$a_{ij} > a_{kl} .$$

Takie rozwiązanie jest korzystne dla pojedynczego przypadku, lecz nie mamy żadnej pewności, że natura nie zmieni swojej strategii. Należy znaleźć taki wskaźnik, który

dawałby informacje o wygranej w każdej sytuacji, wskazywałby szanse powodzenia i ich brak przy wyborze określonej strategii. W tym celu wprowadźmy pojęcie ryzyka. Ryzyko gracza przy zastosowaniu strategii A_i w warunkach N_j nazywamy różnicę pomiędzy wygraną, którą gracz uzyskałby gdyby znał sposób działania natury (N_j), a wygraną, którą on uzyskał w warunkach przyjęcia strategii A_i .

Oznaczmy r_{ij} ryzyko gracza przy jego strategii A_i w warunkach N_j . Możemy wyrazić wartość ryzyka r_{ij} przez elementy macierzy gry a_{ij} . Oczywiście jeżeliby gracz znał wcześniej strategię natury (stan natury N_j) to wybrałby taką strategię, która dawałaby maksymalną wygraną w danej kolumnie, czyli maksimum w danej kolumnie – oznaczmy je β_j . Możemy, zatem wyliczyć ryzyko gracza.

$$r_{ij} = \beta_j - a_{ij}$$

gdzie : $\beta_j = \max_i a_{ij}$

Z tego wynika, że ryzyko nie jest mniejsze od zera $r_{ij} \geq 0$.

Obliczając wartość ryzyka odpowiadającego każdej strategii przy odpowiednich warunkach natury obliczamy przychylność lub nieprzychylność natury. Macierz ryzyka lepiej odzwierciedla sytuację niż macierz gry.

Przykład 16:

Planując jakieś działania można przewidzieć scenariusze (warianty) zachowań natury: N_1, N_2, N_3, N_4 . Stosownie do tych zachowań przewidujemy strategię działania A_i , oraz wartości wygranych (a_{ij}) dla odpowiadających sobie strategii.

	N_1	N_2	N_3	N_4
A_1	1	4	5	9
A_2	3	8	4	3
A_3	4	6	6	2
β_i	4	8	6	9

Zbudujmy macierz ryzyka – w każdej kolumnie powyższej macierzy znajdziemy wartość największą β_j i odejmijmy wartości poszczególnych strategii a otrzymamy macierz ryzyka.

	N ₁	N ₂	N ₃	N ₄
A ₁	3	4	1	0
A ₂	1	0	2	6
A ₃	0	2	0	7

Analizując macierz wypłat możemy się przekonać, że korzyści wynikające z gry z naturą a_{21} i a_{24} są jednakowe i równe 3. Jednak ta wygrana nie jest jednakowo korzystna, przy stanie natury N_1 mogliśmy wygrać maksymalnie 4, zatem wybór strategii A_2 jest uzasadniony. Ale dla stanu natury N_4 mogliśmy wybrać strategię A_1 i wygralibyśmy całe 6 jednostek więcej, zatem wybór strategii A_2 jest niekorzystny. Wartość ryzyka $r_{21}=1$ a $r_{24}=6$. Wynika z tego, że wybór właściwej strategii nie jest rzeczą prostą. Dlatego przeanalizujemy różne metody wyboru i kryteria decyzyjne.

Najbardziej znane⁸⁶ podejście stosowane do rozwiązywania problemów w warunkach niepewności stosujemy wówczas, gdy znane są nam prawdopodobieństwa zaistnienia poszczególnych stanów natury

$$Q_1 = P(N_1); Q_2 = P(N_2); \dots, Q_n = P(N_n).$$

$$\sum_{j=1}^n Q_j = 1$$

W takiej sytuacji jako kryterium wyboru stosujemy wartość oczekiwaną wygranej w ramach poszczególnych strategii

$$a_i = Q_1 a_{i1} + Q_2 a_{i2} + \dots + Q_n a_{in} = \sum_{j=1}^n Q_j a_{ij}$$

Wynika z tego, że a_i nie jest niczym innym jak średnią ważoną wiersza, gdzie wagami są wartości poszczególnych prawdopodobieństw. Chcąc wybrać właściwą strategię należy wybrać taką, dla której wartość a_i będzie największa. Taki zabieg pozwala zamienić wybór rozwiązania w warunkach niepewności na wybór zdeterminowany. Polegający na wyborze największej średniej oczekiwanej.

⁸⁶ Kozioł J., Gry decyzyjne w teorii i praktyce dowodzenia, AON, Warszawa, 2001

Przykład 17:

Planując operację możemy z pewnym prawdopodobieństwem przewidzieć warunki pogodowe. Poszczególne warianty działania mogą być realizowane w różnych stany natury z odpowiadającymi im prawdopodobieństwami $Q_1=0,1$; $Q_2=0,2$; $Q_3=0,5$; $Q_4=0,2$.

Rezultaty działania w różnych warunkach pogodowych zamieszczone są w tabeli

	N ₁	N ₂	N ₃	N ₄	a _i
A ₁	1	1	5	9	5,2
A ₂	3	8	4	3	4,5
A ₃	4	6	6	2	5,0
Q _j	0,1	0,2	0,5	0,2	

W ostatnim wierszu zaznaczone są prawdopodobieństwa wystąpienia poszczególnych stanów natury (warunków pogodowych) a w ostatniej kolumnie obliczone wartości średnich oczekiwanych poszczególnych strategii działania. Z tego wynika, że strategią optymalną jest strategia A₁. Przy wyborze optymalnej strategii działania w warunkach niepewności przy znanych wartościach prawdopodobieństwa wystąpienia można kierować się nie tylko średnią oczekiwaną, ale również wartością średnią ryzyka (średnim ryzykiem) Dokonując wyboru możemy się kierować minimalnym ryzykiem.

$$r_{ij} = \sum_{i=1}^n Q_i r_{ij}$$

Kryterium pesymizmu A.Walda (nosi ono również nazwę minimaksu- najmniejszej maksymalnej straty albo maximinimu- największej minimalnej zdobyczy) opiera się ono na asekuranckich postawach decydenta. Najbezpieczniejszy zdaniem wyznawców tego kryterium jest taki wariant decyzji, dla którego najmniejsza z możliwych do osiągnięcia wartości jest największa

$$W = \max_i \min_j a_{ij}$$

Kryterium pesymizmu zabezpiecza przed wartościami minimalnymi. Podobnym kryterium równie pesymistycznym jak kryterium Walda⁸⁷ jest kryterium żalu. Inny jest jednak tryb postępowania przy wskazywaniu najlepszego wariantu decyzji. To kryterium jest rekomendowane w warunkach niepewności dla tej strategii, dla której ryzyko jest najmniejsze w sytuacji najmniej korzystnej

$$S = \min_i \max_j r_{ij}$$

Można, zatem uznać, iż w praktyce dowodzenia siłami powietrznymi podejmowanie decyzji w warunkach niepewności jest niezwykle trudnym i odpowiedzialnym zadaniem najczęściej dotyczącym decyzji strategicznych⁸⁸. Decydenci w praktyce unikają podejmowania decyzji w warunkach niepewności, z reguły stosują Napoleońską zasadę odkładania decyzji aż do uzyskania pewnych informacji. Jeżeli jednak postanowią lub zostaną zmuszeni podjąć decyzję w warunkach niepewności znajomość przedstawionych kryteriów może być przydatna.

⁸⁷ Czujew J.W., Podstawy badań operacyjnych w technice wojskowej, MON Warszawa 1970

⁸⁸ Michalak W., Kozioł J., Zarządzanie strategiczne w siłach powietrznych AON Warszawa 2003

Zakończenie

Staralem się w tej pracy zawrzeć zwięzłe i konsekwentne wprowadzenie do metodologii rozwiązywania problemów decyzyjnych identyfikowanych w obszarze sił powietrznych. Opracowanie wykracza poza metody badań operacyjnych, które jak starałem się wykazać mogą służyć rozwiązywaniu problemów występujących w praktyce dowodzenia siłami powietrznymi. Powstają, zatem następne ważne zagadnienia naukowe i praktyczne, dotyczące efektywnego i skutecznego wykorzystania w praktyce sił powietrznych metod rozwiązywania problemów, w tym także metod badań operacyjnych. Obejmują one dwie ważne dziedziny: jak je stosować oraz jak się przygotować do ich stosowania, aby szybko i skutecznie uzyskać zadowalające wyniki? Zagadnienia te zostały w pracy zasygnalizowane, rozwiązane, bądź uporządkowane. Pozostałe wymagają prac badawczych, które będą prowadzone w następnych etapach.

Metody badań operacyjnych nie są lekarstwem absolutnym na podejmowanie racjonalnych decyzji, zależą od wielu czynników. Ich efektywność i skuteczność jest uzależniona przede wszystkim od celu, w którym zostały zastosowane, ich elastyczności w dostosowaniu do wymagań, specyfiki problemu, klimatu i przygotowania kadr dowódczych do ich wykorzystywania.

Wiedzę o metodach badań operacyjnych można uzyskać z literatury, przez wymianę doświadczeń czy też szkolenia. Nabycie umiejętności posługiwania się nimi w praktyce dowodzenia jest znacznie trudniejsze i wymaga często współpracy z doradcą organizacyjnym. Pojawienie się obcej osoby w gronie decydentów może wiązać się z odczuciem zagrożenia i wywoływać działania blokujące.

Przygotowanie, zatem praktyków do wprowadzania metod rozwiązywania problemów, a szczególnie metodami badań operacyjnych jest bardzo ważne i trudne.

Metody rozwiązywania problemów są często niedoceniane, a nawet pomijane, gdyż zakłada się, że właściwe rozstrzygnięcia systemowe, ekonomiczne czy prawne

wystarczają do funkcjonowania podmiotów dowodzenia. Metody te są jednak istotnym uzupełnieniem praktyki dowodzenia, a ogólniej - działalności człowieka. W warunkach dotychczasowego systemu sił powietrznych w Polsce wykorzystywano je głównie z uwagi na pojawiające się mody, często bez należytej dbałości o ich poprawność merytoryczną. Należy oczekiwać, iż to że polskie siły powietrzne są w strukturach NATO zdecyduje zwiększyć zapotrzebowanie na metody rozwiązywania problemów dowodzenia, w tym także na metody badań operacyjnych.

Spis literatury

1. Ackoff R. L., Decyzje optymalne w badaniach stosowanych, PWN Warszawa 1969.
2. Adamczyk H. Badania operacyjne Wiesz Warszawa 1999
3. Adamiecki K., O naukowej organizacji, PWE Warszawa 1970
4. Aganbegian A. G., Bagrinowski K.A., Granberg K.G., Modele matematyczno - ekonomiczne w planowaniu gospodarczym, PWE Warszawa 1974.
5. Antczak S., Organizacja misji w jednostkach lotnictwa sił powietrznych NATO AON Warszawa 2000
6. Antczak S., Zastosowanie niektórych metod badań operacyjnych do oceny pola radiolokacyjnego dla wykrywania obiektów powietrznych na małych wysokościach w brygadzie radiotechnicznej korpusu obrony powietrznej kraju, ASG Warszawa 1978
7. Badach A., Kryński H., Matematyka. Podręcznik dla wydziałów ekonomicznych, Warszawa 1977.
8. Badach A., Kryński H., Zastosowanie matematyki do podejmowania decyzji ekonomicznych, Warszawa 1976.
9. Berger B., Luckmann T., Społeczne tworzenie rzeczywistości PIW Warszawa 1983
10. Bernard Ch. Funkcje kierownicze Wyd. Nowoczesność, Akademia Ekonomiczna Kraków 1997
11. Bolesta - Kukułka Decyzje menedżerskie PWE, Warszawa 2003
12. Czechowski T., Wprowadzenie do zastosowań matematyki w ekonomii, SGPiS, Warszawa 1966
13. Czermiński A., Trzcieniecki J., Elementy organizacji i zarządzania PWN, Kraków 1997
14. Czerwiński Z., Matematyka na usługach ekonomii, PWN, Warszawa 1969.
15. Czujew J.W., Podstawy badań operacyjnych w technice wojskowej, MON Warszawa 1970
16. Drucker P. F., Zarządzanie w czasach burzliwych Wyd. Nowoczesność, Akademia Ekonomiczna Kraków 1995
17. Encyklopedia organizacji i zarządzania, PWE, Warszawa 1981.
18. Gajda J. B., Model ekonometryczny w optymalnym sterowaniu gospodarką, PWE Warszawa 1993.
19. Garfinkel H., Racjonalne cechy działalności naukowej i potocznej PWN, Warszawa 1984
20. Garfinkel R.S., Nemhauser G. L., Programowanie całkowitoliczbowe, Warszawa 1978.
21. Gass S. I., Programowanie liniowe. Metody i zastosowanie, PWN, Warszawa 1980.
22. Goldberger A. S., Teoria ekonometrii, PWE, Warszawa 1972, Rozdział II.
23. Greniewski H., Informacja w zastosowaniu do planowania i zarządzania, PWN, Warszawa. 1991
24. Griffin R. W., Podstawy zarządzania organizacjami, PWN Warszawa 1996
25. Gulski B., Skurzyńska - Sikora K., Szloch Z.M., Podstawy organizacji i zarządzania CSSiA Lublin 1998.
26. H. Steinmann i G. Schreyogg Zarządzanie podstawy kierowania przedsiębiorstwem Oficyna Wydawnicza Politechniki Wrocławskiej Wrocław 1995 s.18
27. Ignasiak E. (red.), Badania operacyjne, PWE, Warszawa, 1996.
28. Ignasiak E., Optymalizacja projektów inwestycyjnych, PWE Warszawa 1994.
29. Ignasiak E., Programowanie sieciowe, Warszawa 1975.
30. J.Antoszkiewicz, Metody heurystyczne, PWE, Warszawa 1990.
31. J.Kozielecki, Myślenie i rozwiązywanie problemów, PWN, Warszawa 1992.
32. J.Kozielecki, Psychologiczna teoria decyzji, PWN, Warszawa 1975.
33. J.Skibiński. Heurystyka w dowodzeniu, ASG, Warszawa 1983.
34. Judin D. B., Golsztein E. G., Metody programowania liniowego, WNT, Warszawa 1964.
35. Kalichman J. L., Algebra liniowa i programowanie, PWN Warszawa 1971.
36. Kalichman J. L., Zadania z algebry liniowej i programowania liniowego, PWN, Warszawa, 1974.
37. Karwacki Z., Konarzewska I., Elementy teorii podejmowania decyzji, seria: Metody badań operacyjnych, Absolwent, Łódź, 1997.
38. Kasprowicz A., Romański J., Ćwiczenia z matematyki. Skrypt dla studentów kierunków ekonomicznych, Uniwersytet Mikołaja Kopernika, Toruń, 1989.
39. Kasprowicz A., Romański J., Wykłady z matematyki. Skrypt dla studentów kierunków ekonomicznych, Uniwersytet Mikołaja Kopernika, Toruń, 1984.
40. Kasprzak T. „Analiza działalności systemów ekonomicznych”, Warszawa 1978.
41. Klepacz H., Porazińska E., Wprowadzenie do zastosowań matematyki w ekonomii. Przykłady i zadania, Wydawnictwo Uniwersytetu Łódzkiego, Łódź, 1978.
42. Kleszcz R., O racjonalności Wyd. Uniwersytetu Łódzkiego Łódź 1998
43. Kolupa M, Elementarny wykład z algebry liniowej dla ekonomistów, PWN, Warszawa 1973.
44. Konarzewska - Gubała E., Programowanie przy wielorakości celów, PWN Warszawa 1980.
45. Kozielecki J., Psychologiczna teoria decyzji, PWN Warszawa 1975.
46. Kozioł J., Gry decyzyjne w teorii i praktyce dowodzenia, AON, Warszawa, 2001
47. Kozioł J., Informacyjne wsparcie decyzji militarnych AON Warszawa 2000.

48. Kozioł J., Metodologiczne aspekty dowodzenia obroną powietrzną, AON, Warszawa, 1994.
49. Kozioł J., Podejmowanie decyzji o obronie powietrznej AON Warszawa 1996
50. Kozioł J., Podejmowanie decyzji o obronie powietrznej, AON, Warszawa 1996,
51. Kozioł J., Zarządzanie ryzykiem w siłach powietrznych, AON, Warszawa 2002.
52. Krawczyń Krawczyń., Badania operacyjne dla menedżerów AE Wrocław 1999
53. Krzyżanowski L., O podstawach kierowania organizacjami inaczej ... PWN, Warszawa 1999.
54. Kukuła K. (red.), Badania operacyjne w przykładach i zadaniach, PWN, Warszawa, 2000.
55. Kurnal J., Encyklopedia Organizacji i Zarządzania, PWE, Warszawa 1982 s. 205
56. Leksykon, PWN, Warszawa 1971.
57. Leon J., Frąckiewicz J., Systemy sprawnego działania ANTYK, Warszawa 2000
58. Lewicka M., Czy jesteśmy racjonalni PWN, Warszawa 1997
59. Losee J., Wprowadzenie do filozofii nauki Prószyński i S-ka Warszawa 2001
60. Łapińska - Sobczak N., Modele optymalizacyjne. Przykłady i zadania, Wydawnictwo Uniwersytetu Łódzkiego, Łódź, 1992.
61. Łapińska - Sobczak N., Modele optymalizacyjne. Przykłady i zadania, Wydawnictwo Uniwersytetu Łódzkiego, Łódź, 1998.
62. Malewski M., Wieczorek A., Sosnowska H., Teoria gier W ekonomii i naukach społecznych, PWN, Warszawa 1997.
63. Mazur M., Cybernetyka i charakter, PWN, Warszawa 1976.
64. Michalak W., Kozioł J., Zarządzanie strategiczne w siłach powietrznych AON, Warszawa 2003
65. Miller D. W., M. L. Starr .Praktyka i teoria decyzji". Warszawa 1971.
66. Miszczyńska D., Miszczyński M., Wybrane metody badań operacyjnych, Wyższa Szkoła Ekonomiczno - Humanistyczna z siedzibą w Skierniewicach, Skierniewice, 1997.
67. Miszczyński M., Programowanie liniowe. Elementy teorii i zadania, seria: Metody badań operacyjnych, Absolwent, Łódź, 1996.
68. Morse P. M., G. E. Kimball „Metodę of Operations Research", New York 1951.
69. Nosal Cz., S., Psychologia myślenia i działania menedżera, Akade, Kraków 2001.
70. Obłój K., „Badania operacyjne - anatomia metody". Organizacja i Kierowanie nr 3-4, 1982.
71. Olszewski S. O technice materialnej i naukach technicznych, Ossolineum, Wrocław 1972.
72. Owen G., Teoria gier, PWN, Warszawa 1975.
73. Penc J., Strategie zarządzania, Placet, Warszawa 2001
74. Porazińska E., Algebra. Zeszyt 4. Układy nierówności liniowych, Absolwent, Łódź, 1995
75. Rogalska D., Programowanie liniowe. Algorytmy i zadania, Wydawnictwo Uniwersytetu Łódzkiego, Łódź, 1998.
76. Scott E.W., Cummings I.I., Zachowanie człowieka w organizacji, PWN, Warszawa 1987
77. Siwak T., Badania operacyjne dla inżynierów Wyd. AGH Kraków 1998
78. Stabryła A., Doskonalenie struktury organizacyjnej, PWE, 1998
79. Stoner J.A.F., Wankel Ch., Kierowanie PWE Warszawa 1992
80. Sutherland S., Rozum na manowcach: dlaczego postępujemy irracjonalnie KiW Warszawa 1996
81. Szymczak M., Słownik Języka Polskiego, PWN, Warszawa 1978.
82. Trzaskalik T. (red.), PROGLIN. Pakiet dydaktyczny programów komputerowych programowania liniowego, Wydawnictwo Akademii Ekonomicznej im Karola Adamieckiego, Katowice 1996.
83. Trzaskalik T., Badania operacyjne z komputerem, seria: Metody badań operacyjnych, Absolwent, Łódź, 1997.
84. Trzaskalik T., Modelowanie optymalizacyjne, seria: Metody badań operacyjnych, Absolwent, Łódź, 1997.
85. Trzaskalik T., Wielokryterialne dyskretne programowanie dynamiczne. Teoria i zastosowanie w praktyce gospodarczej, Wydawnictwo Akademii Ekonomicznej im Karola Adamieckiego, Katowice 1990.
86. Tyszką T. Psychologiczne pułapki oceniania i podejmowania decyzji. Gdańskie Wydawnictwo Psychologiczne, Gdańsk 1999.
87. Wagner M.H., Badania operacyjne PWE Warszawa 1990
88. Webber R.A. Zasady zarządzania organizacjami PWE Warszawa 1996
89. Witkowska D. (red.), Zbiór zadań z badań operacyjnych, seria Wydawnictw Dydaktycznych Wydziału Organizacji i Zarządzania, Politechniki Łódzkiej, Menadżer, Łódź, 2001.
90. Witkowska D., Metody wspomagania podejmowania decyzji w zarządzaniu, seria Wydawnictw Dydaktycznych Wydziału Organizacji i Zarządzania, Politechniki Łódzkiej, Menadżer, Łódź, 2001.
91. Witkowska D., Wprowadzenie do badań operacyjnych, Wydawnictwo Politechniki Łódzkiej, Łódź, 1996.
92. Wróblewski R., Wprowadzenie do strategii wojskowej, AON Warszawa 1998.
93. Zieleniewski J. Organizacja i zarządzanie PWN Warszawa 1979