# AKADEMIA OBRONY NARODOWEJ

CENTRUM SYMULACJI
I KOMPUTEROWYCH GIER WOJENNYCH

# SYMULACYJNY MODEL WALKI
# NA SZCZEBLU TAKTYCZNYM

## Użytkowanie symulacyjnych systemów walki

MODELOWANIE-2
7.2.2.0



WARSZAWA

# AKADEMIA OBRONY NARODOWEJ

## CENTRUM SYMULACJII KOMPUTEROWYCH GIER WOJENNYCH



# SYMULACYJNY MODEL WALKI NA SZCZEBLU TAKTYCZNYM

## Użytkowanie symulacyjnych systemów walki

płk dr inż. Ryszard WIELEBA

ppłk dr inż. Janusz WOCIAL

**MODELOWANIE-2**
**7.2.2.0**



Warszawa 2003

Pracę naukowo-badawcza „**SYMULACYJNY MODEL WALKI NA SZCZEBLU TAKTYCZNYM Użytkowanie symulacyjnych systemów walki**" wykonał płk dr inż.. Ryszard WIELEBA oraz ppłk dr inż. Janusz WOCIAL.

Poszczególni członkowie zespołu opracowali:

| | |
|---|---|
| płk dr inż. Ryszard WIELEBA | Rozdział 2; 3,4,5,7-współautor; |
| ppłk dr inż. Janusz WOCIAL | Rozdział 1, 6; 3,4,5,7-współautor. |

# Spis treści

# Wprowadzenie

W **analizie systemów** *wielkich* i *złożonych*[1], albo systemów nie poddających się badaniom ze względu na swoją naturę (a takimi są systemy militarne realizujące swój podstawowy cel, jakim jest walka zbrojna) stosować należy metody innej klasy niż czysto eksperymentalne. Wielkie znaczenie metod eksperymentalnych tkwi w tym, że dostarczają materiału empirycznego, na którego podstawie weryfikować można orzeczenia wyprowadzone innymi metodami (np. dedukcyjno – indukcyjnymi) albo zmieniać przeświadczenia dotychczas uznane za poprawne.

W naukach wojskowych, ze względu na przedmiot badania, jakim są siły zbrojne i ich podstawowa funkcja – walka zbrojna, nie poddają się badaniom empirycznym. Dlatego stosuje się badania tzw. paraempiryczne[2], tj. oparte o pewien **model** odwzorowujący realny przedmiot i jego cechy. Modele te mogą być różne, niemniej przedstawiać powinny atrybuty i związki zachodzące między nimi w taki sposób, jak w realnym systemie (izomorficznie) i powinny być istotne z punktu widzenia celu dla realizacji którego prowadzimy proces badawczy.

**Modele symulacyjne** od dawna zdobyły uznanie, co do swoich możliwości eksperymentalnych. Od dawna też znane są ich podstawowe niedostatki, tkwiące w zbyt dużym redukcjonizmie i w zbyt daleko posuniętych ograniczeniach. Wynika to z faktu dużej złożoności i wielostronnych związków będących w różnorodnych interakcjach, jakie zachodzą w systemach realnych.

Przedstawione opracowanie dotyczy symulacyjnych modeli walki w aspekcie ich użytkowania. Nie dotyczy jednak zagadnień organizatorskich (zespołów ćwiczących i roli poszczególnych ich członków), ale problemów czysto metodyczno – merytorycznych. Poczynając od metodologii stosowania systemów symulacyjnych w ogólności, jak i w poszczególnych fazach, po poprawne planowanie (projektowanie) eksperymentów symulacyjnych i jego realizację. W aspekcie merytorycznym odniesiono się do problemów adekwatności modeli i analizy wyników oraz wnioskowania. Te problemy przedstawione zostały, najpierw w ujęciu logicznym, a następnie w oparciu o metody ilościowe, tj. statystyczne.

---

[1] Patrz Gutenbaum – *wielki* – bo dużo istotnych zmiennych uwzględniać należy, *złożony* – bo w wielu istotnych interakcjach są te zmienne.

[2] M. Pelc, Wybrane problemy metodologiczne wojskowych badań naukowych, AON, 1998

Autorzy mają nadzieję, że powyżej nakreślona problematyka – poprawnego użytkowania systemów symulacyjnych w naukowych badaniach wojskowych, poddana zostanie głębszej analizie badawczej przez szersze grono pracowników naukowo – badawczych AON. Potrzeba takiego działania wynika przynajmniej z trzech powodów:

- (świadomościowych) mocno rozbudowanych oczekiwań tak wielu oficerów od systemów symulacyjnych, które eksploatowane mają być w Centrum Symulacji i Komputerowych Gier Wojennych AON,
- (metodycznych) umiejętności poprawnego użytkowania dostępnych systemów symulacyjnych. Począwszy od powzięcia merytorycznie uzasadnionej hipotezy merytorycznej, poprzez stosowne dla jej weryfikacji - zaplanowanie eksperymentów symulacyjnych, ich realizację, aż do uzasadnionego wnioskowania, statystycznie potwierdzonego.
- (merytorycznych) ograniczoności określonych systemów symulacyjnych w zakresie indykacji pewnych problemów operacyjno – taktycznych.

# 1 Metody badania systemów

Są dwa źródła wiedzy o rzeczywistości: (1) nasze **doświadczenie**: empiryczny kontakt ze światem przez obserwację, eksperyment oraz działania podejmowane w celu uzyskania konkretnych praktycznych efektów oraz (2) nasza **wyobraźnia,** czyli zdolność odgadywania ograniczeń, jakim podlega bieg rzeczy, a więc praw, jakie biegiem tym rządzą.

Obie zdolności, a więc zdolność postrzegania określonych stanów rzeczy, jak i zdolność budowania na podstawie zebranego doświadczenia (lub być może nawet niezależnie od niego) odpowiednich teorii jest immanentną cechą człowieka. W historii filozofii różni myśliciele przypisywali tym zdolnościom różne znaczenia [6], [20].

W skrajnym przypadku, kwestionując znaczenie refleksji teoretycznej, usiłowano podać i uzasadnić reguły, wyznaczające sposób przechodzenia od danych jednostkowych do uogólnień (*reguły indukcji*), czyli generalizacji. Wiodącym przekonaniem było tu założenie, że w nauce wolno posiłkować się tylko takimi metodami, które gwarantują poprawność wniosków. Logika indukcji, również w tym zakresie, w jakim jej przedmiotem są zasady uogólnień z danych empirycznych, przeżywa obecnie swój renesans. Stała się obszerną dziedzina badań matematycznych, choć do czasów niezbyt odległych jej szczytowym osiągnięciem były logiczne kanony Milla [1861r].

Pozostawmy jednak te doniosłe problemy wzajemnych związków pomiędzy empirią a aprioryczną refleksją i orzeczeniem prymatu jednej z nich nad drugą.

Jeśli jeszcze reguła przechodzenia od danych jednostkowych do uogólnień nie jest dostatecznie uzasadniona, a więc pojęcie jej akceptacji zastąpić należałoby pojęciem stopnia przekonania o jej prawdziwości (np. na skali od 0 do 1), to dychotomiczny problem: uznać – nie uznać, staje się problem częściowego uznania (nie uznania), czyli uznania z pewnym prawdopodobieństwem. W metodologii jest to problem Bayesowski (ze względu na rolę, jaką w nim odgrywa twierdzenie Bayesa). Proponuje utożsamienie pojęcia akceptacji z dostatecznie dużym prawdopodobieństwem. Ten problem we współczesnej filozofii nauki jest także otwarty [6].

Dla nas tym bardziej istotny, że realizując proces badawczy i zachowując wszelką poprawność metodyczną i rzeczową (merytoryczną), wykrywane związki i zależności w badanym systemie będą prawdziwe, co najwyżej **statystycznie**, a nie **obiektywnie**.

## 1.1 Badania empiryczne (na systemach)

Z punktu widzenia prowadzonych rozważań interesować nas będą **systemy działania**. Pod pojęciem **systemu** rozumiemy każdy złożony obiekt wyróżniony z badanej rzeczywistości i stanowiący całość tworzoną przez zbiór elementów i powiązań (relacji) pomiędzy nimi. System, tak rozumiany, jest więc całością czyli czymś odmiennym niż przypadkowe zbiorowisko części. Ma określony skład (kompozycję) – czyli zbiór tworzących go elementów oraz strukturę – czyli zbiór istotnych relacji między tymi elementami. **System do byt przejawiający istnienie przez synergiczne współdziałanie swych części.** Natomiast pod pojęciem systemu działania rozumieć będziemy system socjo – techniczny zorientowany celowościowo (teleologicznie)

Jak zatem prowadzić można badania empiryczne takich systemów? Jak dokonywać pomiaru[3] ważnych (z punktu widzenia celu badawczego) charakterystyk tych systemów? Jak obserwować ich zmiany zachodzące w czasie? Jak wreszcie pozyskiwać można wiarogodne dane statystyczne w wymienionych aspektach? Są to wszystko pytania należące do sfery **identyfikacji**. Dalej idące potrzeby podmiotu dotyczą **oceny** i **sterowania**. Chcemy bowiem tak wpływać na zmienne wejściowe systemu albo zmienne stanu systemu, aby uzyskać pożądany efekt na wyjściu. Chcemy określić optymalne sterowanie systemu. Aby odpowiedzieć na te pytania, należy przeprowadzić wszechstronne badania tego systemu. Aby określić wartości zmiennych systemu i wykryć związki ilościowe pomiędzy nimi należy przeprowadzić serię eksperymentów badawczych.

**Eksperyment**[4] jest podstawowym źródłem wiedzy nie tylko w naukach empirycznych. Stosuje się specjalne metody zbierania i opisu danych statystycznych jako źródła wiedzy o rzeczywistości, gromadzi się je najczęściej w wyniku specjalnie wykonywanych eksperymentów. Nazywamy je „***danymi empirycznymi***", które następnie poddajemy analizie statystycznej, by wykryć i określić związki występujące między nimi.

---

[3] Ogólnie biorąc istnieje duże przekonanie o możliwości i prawomocności stosowania pomiaru poza dziedziną nauk ścisłych. Natomiast sprawa użytku, jaki można zrobić z danych ilościowych przy formułowaniu twierdzeń kwantytatywnych jest źródłem niejasności i nieporozumień. Nieporozumienia te skupiają się wokół dwóch spraw: rozmaitości typów skal oraz związku między typem użytych skal a dopuszczalną postacią zdań, stwierdzających zależności miedzy mierzonymi wielkościami.

[4] Przez eksperyment rozumie się serię doświadczeń, umożliwiającą utworzenie opisu matematycznego (modelu matematycznego) bądź poprawienie działania rozważanego systemu. Inaczej mówiąc eksperyment (seria doświadczeń) ma umożliwić **identyfikację** bądź **optymalizację** badanego systemu lub jednocześnie identyfikację i optymalizację.

Każde ***doświadczenie*** jest ciągiem ustalonych wcześniej czynności prowadzących do uzyskania możliwie najbardziej wiarygodnych informacji o interesującym nas zjawisku. W ścisłych doświadczeniach naukowych zwykle bada się wpływ konkretnych czynników kontrolowanych na występowanie lub natężenie zjawisk będących przedmiotem badań, z możliwym wyłączeniem innych, nieinteresujących czynników, mogących zakłócić zbierane informacje. W tzw. ***doświadczeniu jednoczynnikowym*** na przykład, które jest najprostszym możliwym typem eksperymentu naukowego porównawczego, tylko jeden czynnik podlega zmianom zgodnie z intencjami i możliwościami eksperymentatora, inne zaś są utrzymywane na stałym poziomie lub nieobecne. Na ogół jednak występują nie dające się kontrolować wpływy zróżnicowanego materiału doświadczalnego, zewnętrznych warunków, czy nawet samej techniki obserwacji. Wszystkie te dodatkowe elementy są przyczyną tego, że wyniki dwóch eksperymentów identycznie zaplanowanych i przeprowadzonych różnią się między sobą. To niekontrolowane zróżnicowanie towarzyszące właściwemu doświadczeniu musi być przez eksperymentatora akceptowane jako ***błąd doświadczenia***. Stąd wynika wniosek, że aby doświadczenie pozwalało na ocenę interesującego nas zjawiska, konieczne jest rozdzielenie zmienności spowodowanej wpływem badanego czynnika i zmienności losowej. Rozdział tych dwu różnych zmienności w doświadczeniu jest wykonalny, jeżeli badania będą powtarzane w niezmienionych warunkach, przy ustalonych poziomach kontrolowanych czynników. Układ doświadczenia musi zatem spełniać pewne warunki formalne, aby można było korzystać z metod analizy statystycznej danych empirycznych.

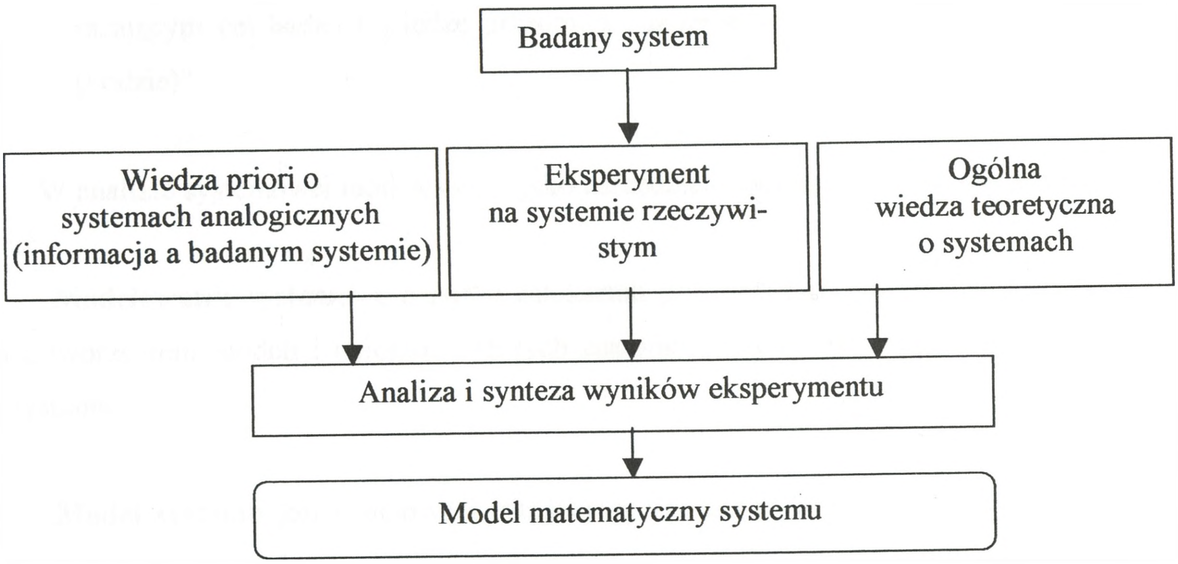
## 1.2 Badania paraempiryczne (na modelach)

Efektywne sterowanie procesami zachodzącymi w systemie możliwe jest wówczas, gdy znany jest jakościowy i ilościowy wpływ określonych czynników na ich realizację. Ujmuje się go w postaci **modelu matematycznego** systemu, który pozwalać powinien na:

- analizowanie funkcjonowania systemu (lub jego podsystemów) w określonych warunkach;
- projektowanie systemu o określonych wymaganiach;
- wyznaczanie optymalnego sterowania procesami zachodzącymi w rozpatrywanym systemie.

Model matematyczny funkcjonowania badanego systemu opracowywany jest najczęściej na podstawie (rys.1.):

- wiedzy o funkcjonowaniu systemów analogicznych lub podobnych;
- ogólnej wiedzy teoretycznej o systemach, jak też systemach danej klasy;
- wyników badań eksperymentalnych na systemie.




Rys.1. Źródła informacji przy opracowaniu modeli matematycznych funkcjonowania systemu

Na podstawie wymienionych źródeł informacji o systemie, w wyniku jej **analizy**, **syntezy**, **idealizacji** i **abstrahowania** od wpływu mniej istotnych czynników na funkcjonowanie systemu, opracowuje się **model matematyczny funkcjonowania systemu, który przedstawia się w postaci określonego rodzaju równań** (np. różniczkowych, algebraicznych itp.).

Dla ustalonego systemu realnego podstawową informacją do opracowania jego modelu matematycznego są wyniki z eksperymentu. Wyróżnia się dwa rodzaje eksperymentów przeprowadzanych na systemach rzeczywistych: bierne i czynne. Eksperyment bierny polega na obserwacji wartości określonych wielkości systemu w trakcie jego normalnego funkcjonowania, zaś eksperyment czynny jest planowany i przeprowadzany przy określonych założeniach, w celu zidentyfikowania postaci modelu matematycznego badanego systemu. W eksperymencie planowanym tak dobiera się wartości zmiennych niezależnych (punkty pomiarowe), aby uzyskać model jak najbliższy jego postaci rzeczywistej.

Z badaniami paraempirycznymi nierozłącznie związane jest pojęcie ***modelu***. W literaturze - podobnie jak w przypadku pojęcia ***system*** – przytacza się wiele definicji tego pojęcia. Poniżej przedstawiono niektóre z nich:

- „Model jest konkretnym interpretacyjnym wyrazem teorii jednej lub kilku hipotez".
- „Model oznacza uproszczone odwzorowanie, często połączone z pewną schematyzacją lub stylizacją".
- „Model jest rezultatem modelowania, tzn. obrazem danego przedmiotu badań, wyrażającym cel badań i wiedzę przedmiotu, przedstawionym w przyjętym języku (kodzie)".

W analizie systemowej modelowanie jako narzędzie badawcze definiowane jest następująco:

„**Modelowanie systemowe** oznacza całokształt przedsięwzięć poznawczych, związanych z tworzeniem modeli i obiektów, których znajomość cech skłania do traktowania go jako systemu".

zaś

„**Model systemu** jest ilościową i jakościową reprezentacją statycznej i dynamicznej struktury systemu; pozwala przedstawić wpływ czynników istotnych z punktu widzenia prowadzonych badań na zachowanie się systemu".

W literaturze można spotkać różnorodne klasyfikacje modeli, tworzone głównie w celu przybliżenia potencjalnym użytkownikom możliwości ich racjonalnego wykorzystania w praktyce. Na przykład w celu dokonania klasyfikacji podstawowych modeli stosowanych w badaniach systemowych organizacji, prof. P. Sienkiewicz przyjął trzy podstawowe kryteria podziału [18]:

Ze względu na **cel poznawczy** (rezultat modelowania), wyróżnia się:

- ***modele ocenowe***, których celem jest uzyskanie ocen, czyli wypowiedzi wyrażających aprobatę lub dezaprobatę dla stanu (przeszłego, bieżącego, przyszłego) systemu;
- ***modele decyzyjne***, których celem jest uzyskanie określonych decyzji, niezbędnych do zapewnienia stanu systemu pożądanego z uwagi na przyjęte kryterium;

- *modele desygnujące (wyjaśniające)*, których celem jest uzyskanie pożądanego wyjaśnienia istoty cech (zjawisk) systemu.

Ze względu na **formę przekazu** (język modelowania), rozróżnia się:

- ***modele opisowe*** wyrażane w języku naturalnym;
- ***modele formalne*** wyrażane w języku logiki, głównie logiki matematycznej;
- ***modele matematyczne*** wyrażane w języku matematyki (np. teorii mnogości, algebry, analizy funkcjonalnej, probabilistyki).

Trzecie kryterium podziału, związane z przyjmowanym **aspektem badań systemowych**, pozwala na opisanie:

- **morfologii** (struktury, budowy) systemu;
- **funkcjonowania** (zachowania, działania) systemu;
- **rozwoju** (ewolucji, przemian) systemu.

Opisy wynikające z przyjmowanego aspektu badań wyrażają także postępujący **stopień poznania systemu**:

- pierwszy stopień wiąże się z poznaniem budowy systemu (jego elementów i powiązań między nimi);
- drugi - z poznaniem funkcjonowania systemu, a więc realizowanych w nim procesów;
- trzeci - z poznaniem praw rozwoju systemu, czyli określeniem kierunków przemian jego struktur, funkcji, procesów, itp.;
- „zerowy" poziom poznania systemu stanowi opis parametryczny, polegający na specyfikacji cech systemowych.

### 1.2.2 Klasyfikacja modeli matematycznych

Spotykane w literaturze klasyfikacje modeli matematycznych najczęściej stosują następujące kryteria podziału:

- **własności zbioru X;**
- **interpretację elementów zbioru X;**
- **własności zbioru R;**

- **dostępność informacji o wartościach zmiennych ze zbioru X w chwili podejmowania decyzji** (wdrożenia projektu oddziaływania na rzeczywistość).

Mówiąc o własnościach zbioru $\mathbf{X}=\{ <X_1,X_1>, <X_2,X_2>, \dots \dots <X_M,X_M>\}$, zwraca się uwagę na własności matematyczne par $<X_m,X_m>$ lub samych zbiorów $X_m$ ($m=1,2, \dots , M$).

- ***Modelem dyskretnym*** nazywa się model, w którym wszystkie zbiory $X_1,X_2, \dots \dots ,X_M$ są zbiorami dyskretnymi (np. przeliczalnymi).
- ***Modelem ciągłym*** nazywa się model, w którym wszystkie zbiory $X_1,X_2, \dots \dots ,X_M$ są zbiorami ciągłymi (np. zbiorami liczb rzeczywistych).

Ponadto istnieją modele **ciągło-dyskretne**, przykładowo znane w teorii procesów stochastycznych[5] procesy dyskretne w stanach i ciągłe w czasie.

Jeżeli wszystkie pary $<X_M,X_M>$ opisują wielkości deterministyczne, to taki model nazywa się ***deterministycznym***. Gdy przynajmniej jedna zmienna $X_M$ jest zmienną losową lub procesem stochastycznym, a pozostałe są zmiennymi deterministycznymi, to taki model nazywany jest ***probabilistycznym*** lub ***stochastycznym***. Jeżeli przynajmniej w jednym przypadku wyrażenie $X_M$ należy do zbioru rozmytego $X_M$ i nie występują zmienne losowe, to taki model nazywa się ***rozmytym***. Oczywiście mogą występować również modele rozmyto-probabilistyczne.

Z punktu widzenia interpretacji zbioru **X** wyróżnia się najczęściej ***modele z czasem*** i ***modele bez czasu***. W pierwszym przypadku jedna ze zmiennych $X_M$ przyporządkowana jest nazwie „czas" występującej w werbalnym opisie cech obiektu.

Z punktu widzenia potrzeb badawczych wyróżnia się ***modele korelacyjne***, które zbiorem **R** opisują zaobserwowane lub hipotetyczne korelacje[6] między cechami. Podklasą modeli korelacyjnych są ***modele przyczynowo-skutkowe*** opisujące rzeczywiście istniejące związki przyczynowo-skutkowe między cechami.

Biorąc pod uwagę własności zależności opisujących zbiór **R** wydziela się :

---

[5] *Proces stochastyczny (losowy)* – to proces (uporządkowany w czasie zbiór zdarzeń dotyczących określonego przedmiotu), który przebiega we wskazany sposób z zadanym prawdopodobieństwem. Dokładnie: dane są prawdopodobieństwa zdarzeń polegających na tym, że w danych chwilach $t_1, \dots, t_n$ stany spełniają warunki $W_1, \dots, W_n$. Chwilowe stany procesu losowego są więc zmiennymi losowymi, które mają dany łączny rozkład prawdopodobieństwa.

[6] *Korelacja* – związek pomiędzy dwoma zmiennymi losowymi (dwie zmienne losowe są skorelowane, jeśli wartość średnia jednej z nich zmienia się w zależności od zmian drugiej). Stopień w jakim zmienne losowe są ze sobą związane jest określany przez współczynnik korelacji.

- ***modele liniowe***, w których wszystkie relacje $R_i$ (i=1,2,..., I) opisywane są zależnościami liniowymi;
- ***modele nieliniowe***, w których w których przynajmniej jedna relacja $R_i$ nie jest opisana zależnością liniową.

Wśród modeli z czasem wyróżnia się ***modele dynamiczne***, tzn. takie modele, w których wartości przynajmniej jednej zmiennej w ustalonym momencie zależą od wartości zmiennych w przynajmniej jednym poprzednim momencie. Jeżeli ta zależność występuje tylko dla jednego momentu dla każdej zmiennej, to mówi się o ***modelach dynamicznych z opóźnieniem***, jeżeli zaś zależy od wielu momentów dla tych samych zmiennych, to takie modele nazywa się ***modelami dynamicznymi z akumulacją***. ***Modelem statycznym*** nazywa się (w odróżnieniu od dynamicznego) model bez czasu lub taki model z czasem, w którym wartości zmiennych dla każdego momentu zależą wyłącznie od wartości innych zmiennych w tym samym momencie lub od zmiennych niezależnych od czasu.

### 1.2.3 Metody uzyskiwania rozwiązania na podstawie modelu

Mając formalny (matematyczny) model pewnego systemu, możemy rozwiązać go dwoma różnymi sposobami. Pierwszy opiera się na dedukcyjnym podejściu, poprzez stosowanie ***analizy matematycznej***. Drugi natomiast na postępowaniu indukcyjnym, czyli ***analizie numerycznej***.

Rozwiązanie analityczne jest całkowicie ogólne, jak też całkowicie abstrakcyjne. W procedurze analitycznej nie rozważamy każdego poszczególnego zbioru wartości zmiennych sterowanych, ale zdążamy bezpośrednio do rozwiązania[7]. W procedurach numerycznych natomiast wypróbowujemy różne wartości zmiennych sterowanych i wybieramy te, które prowadzą do najlepszych wyników. Z przyczyn oczywistych pierwszeństwo daje się procedurom analitycznym wszędzie tam, gdzie dają się zastosować. Niemniej w wielu przypadkach (brak metod analitycznych, duże koszty) stosowanie metod numerycznych daje dobre wyniki.[8]

**Metody analityczne**. W równaniach zawierających tylko jedną zmienną sterowaną, jej wartość optymalną, jeśli istnieje i jest wyznaczana analitycznie, można wyznaczyć przez

---

[7] Na mocy twierdzeń i metod udowodnionych jako poprawne w tzw. konstruktywnym nurcie matematyki.
[8] Nie odnosimy się tutaj do aspektów metodycznych wyboru najlepszej metody analitycznej czy numerycznej, którą należy zastosować do uzyskania rozwiązania na podstawie modelu.

różniczkowanie. Znajduje się pochodną zmiennej wynikowej względem zmiennej sterowanej, przyrównuje do zera i rozwiązuje się (twierdzenia dotyczące warunku koniecznego i wystarczającego istnienia ekstremum funkcji). Jeżeli jest więcej niż jedna zmienna sterowana, to znajduje się pochodną cząstkową zmiennej wynikowej względem każdej zmiennej sterowanej i przyrównuje się ją do zera. Wówczas przy zachowaniu pewnych warunków, rozwiązanie powstałego układu równań prowadzi do wyznaczenia optymalnych wartości zmiennych sterowanych. Gdy wartości zmiennych sterowanych są ograniczone przez jedno lub więcej równań bądź nierówności i gdy tych ograniczeń jest niewiele, możemy użyć mnożników Lagrange'a. Jeżeli chcemy znaleźć wartość optymalną pewnej funkcji, a nie zmiennej, to należy zastosować rachunek wariacyjny. Niemniej, niewiele problemów tej klasy potrafimy rozwiązać analitycznie. Wtedy metody numeryczne są jak najbardziej w cenie.

**Metody numeryczne**. Można powiedzieć, że wywodzą się z metody „prób i błędów", tyle że w metodach numerycznych zagwarantowano zbieżność do rozwiązania. Metoda, która zmierza do rozwiązania w kolejnych krokach, nazywana jest *iteracyjną*. **Wszystkie metody programowania matematycznego są iteracyjne**. Wysiłki uczonych koncentrują się na opracowywaniu algorytmów o możliwie najmniejszej złożoności obliczeniowej (tak teoretycznej, jak i praktycznej) przy zachowaniu przez nie, przynajmniej stabilności numerycznej, a najlepiej – poprawności numerycznej.

**Metody symulacyjne**[9]. Mają zastosowanie wtedy, kiedy miara stopnia osiągnięcia celu jest parametrem statystycznym pewnego rozkładu wyników. W tych przypadkach wartości optymalne zmiennych sterowanych nie mogą być uzyskane na podstawie modeli ani analizą abstrakcyjną, ani analizą numeryczną. W analizie numerycznej wartości liczbowe zmiennych sterowanych i nie sterowanych są zawarte w modelu, a wynik jest obliczany za pomocą operacji arytmetycznych. Wypróbowując pewną liczbę możliwych rozwiązań można zidentyfikować i wybrać najlepsze (lub w przybliżeniu najlepsze). Stosując symulację także, ogólnie biorąc, wypróbowujemy pewną liczbę rozwiązań, ale jej odmienność od zwykłej metody numerycznej polega na sposobie, w jaki każde z rozwiązań jest obliczane. Obliczanie lub sprawdzanie proponowanego rozwiązania modelu za pomocą symulacji polega na prześledzeniu systemu dla pewnego zbioru wartości zmiennych sterowanych, w celu wytworzenia

[9] Symulacja jest w istocie eksperymentowaniem nie tyle z samym zjawiskiem, ile raczej z jego modelem, czyli jest ona eksperymentowaniem zastępczym.

dostatecznej liczby realizacji wyników, tak, aby, można było wyznaczyć ich rozkład. Na podstawie tych „obserwacji" oszacowuje się szukany parametr.

# 2 Badanie symulacyjne systemu

Jak powiedziano w p. 1.2.3., jeżeli niemożliwym jest znalezienie (metodami analitycznymi albo numerycznymi) rozwiązania modelu matematycznego systemu (przedstawianego zazwyczaj w postaci równania bądź układu równań różniczkowych / różnicowych albo całkowych) nadto, przynajmniej jedna zmienna modelu jest zmienną losową (nie przyjmuje ściśle określonej wartości w każdych warunkach), wówczas rozwiązania poszukiwać należy stosując metody symulacji. Badanie systemu realizowane za pomocą tak określonego jego modelu dostarczyć może (i powinno) danych ilościowych do kwantytatywnego określenia związków zachodzących pomiędzy wybranymi zmiennymi modelu (atrybutami systemu).

## 2.1 Istota symulacji

Symulacja jest to proces konstruowania **historii stanów**[10]. Dokładniej symulacja - to **konstruowanie w chronologicznym porządku opisów stanów tworzących historię stanów**. Taka metoda może być na przykład przeciwstawiona możliwości generowania informacji do historii stanów w porządku innym niż chronologiczny, a następnie składania lub organizowania tych informacji tak, aby utworzyć historię stanów. Historia stanów skonstruowana przy pomocy metody symulacyjnej jest w rzeczywistości historią stanów modelu, a nie systemu. Ponieważ jednak model reprezentuje system, można przyjąć, iż tak otrzymana historia jest historią stanów modelowanego systemu. Mając więc system oraz jego model można powiedzieć, że symulacja jest to zastosowanie modelu w celu chronologicznego wygenerowania historii stanów tegoż modelu, która jest uważana za historię stanów modelowanego systemu. Kontynuując tok myślenia, można powiedzieć, że modelowaniem symulacyjnym nazywa się proces budowy modelu systemu rzeczywistego oraz przeprowadzania eksperymentów symulacyjnych na tym modelu w celu poznania zachowania się systemu pod wpływem wewnętrznych i zewnętrznych czynników lub dokonania oceny strategii zapewniających funkcjonowanie badanego systemu. W ten sposób modelowanie symulacyjne obejmuje nie tylko budowę

---

[10] *Stan systemu (modelu)* – to najmniejsza liczba danych, których znajomość w danej chwili, przy znajomości wielkości wejściowych, począwszy od tej chwili – pozwala jednoznacznie określić stan i wielkości wyjściowe systemu (modelu) w przyszłości.

modelu lecz także analityczne wykorzystanie modelu do zbadania (poznania lub rozwiązania) określonego problemu.

Istota metody modelowania symulacyjnego polega na zbudowaniu modelu badanego systemu, który w jednych elementach jest zgodny z systemem rzeczywistym, w innych zaś różni się od niego i który jest badany przy pomocy różnych metod i środków. Wyniki uzyskane z eksperymentów symulacyjnych przeprowadzonych na modelu są przenoszone drogą wnioskowania[11] przez analogię[12] na badany system.

**Modelowanie symulacyjne stanowi niejako skojarzenie metody matematycznej i eksperymentalnej**, bowiem budując model opisuje się formalnie mechanizm zachodzących procesów, podobnie jak przy stosowaniu metod matematycznych, natomiast sposób uzyskiwania wyników jest taki, jak w metodach eksperymentalnych z tą tylko różnicą, że proces rzeczywisty zastępuje się symulacją tego procesu na przykład na komputerze [7]. Metoda ta jest z jednej strony swego rodzaju narzędziem pozwalającym sprawdzić praktyczne wyniki badań teoretycznych, z drugiej zaś strony - metodą teoretycznego rozwiązywania niektórych problemów wysuwanych przez praktykę. Można zatem przyjąć, że modelowanie symulacyjne zajmuje pośrednie miejsce między logicznymi i empirycznymi metodami i stanowi wiążące ogniowo miedzy teorią i praktyką.

Modelowanie symulacyjne, jako metoda badania złożonych systemów działania, jest ciągle w fazie opracowywania. Dlatego odpowiedź na pytanie: kiedy poszukiwać rozwiązań analitycznych, a kiedy stosować symulację? – pozostaje nadal zagadnieniem otwartym.

Niezależnie od powyższego warto zaznaczyć, że modelowanie symulacyjne pozwala: opisać zachowanie się systemu;

- budować teorie i hipotezy, które mogą objaśniać obserwowane zachowanie się systemu;
- stosować te teorie i hipotezy do przewidywania przyszłego zachowania się systemu, tj. do przewidywania tych przyszłych stanów systemu, które mogą wynikać ze zmiany elementów systemu lub sposobów jego działania.

---

[11] *Wnioskowanie* – ogólnie mówiąc -jest aktem uznania pewnego zdania (zwanego wnioskiem lub konkluzją) na podstawie pewnych innych, wcześniej uznanych zdań (zwanych przesłankami tego wnioskowania).

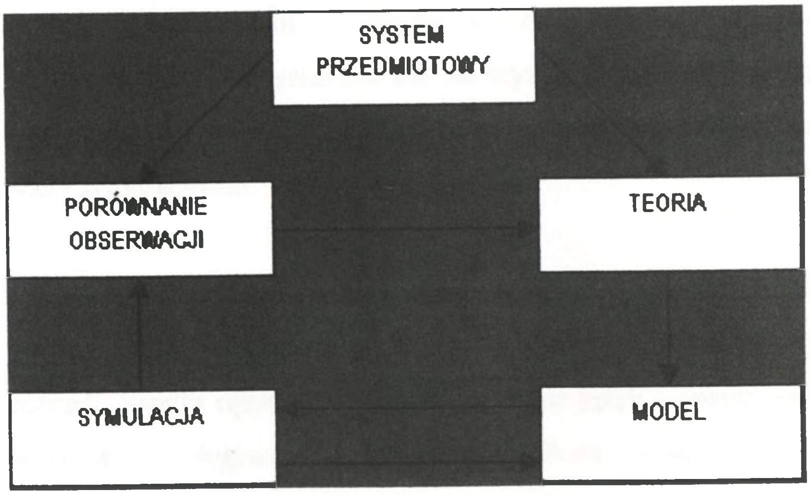
[12] *Wnioskowanie przez analogię* – to taki rodzaj rozumowania, w którym na podstawie przesłanek stwierdzających, że jakieś kolejno napotkane przedmioty pewnego rodzaju, a więc przedmioty podobne do siebie pod wieloma względami, miały pewną określoną własność, wyprowadzamy wniosek, że następny napotkany przedmiot tego rodzaju będzie również posiadał tę własność. (Nie jest to zatem wnioskowanie *dedukcyjne*, ani *indukcyjne*)

Metody badań symulacyjnych mogą służyć do:

- odtwarzania funkcjonowania systemów aktualnie już nie istniejących (tzw. symulacja odtwarzająca);
- odwzorowywania działania systemów aktualnie funkcjonujących (tzw. symulacja bieżąca);
- przewidywania działania badanych systemów w przyszłości (tzw. symulacja prognostyczna).

**Pod pojęciem symulacji należy rozumieć zbudowanie, a następnie przeprowadzenie eksperymentów na abstrakcyjnym modelu badanego systemu, przy czym model oznacza tu mniej lub bardziej dokładne odwzorowanie formalne systemu rzeczywistego.**

Takie ujęcie symulacji powoduje, że zebrane w trakcie symulacji na modelu wnioski możemy odnieść do systemu przedmiotowego, a tym samym wynikającego z niego modelu. Doprowadza to do iteracyjnej metody badawczej, w której zmiany obejmują także model i jego nowa wersja zostaje poddana symulacji. Sytuację taką przedstawia rys.2.




Rys. 2. System przedmiotowy, model, symulacja.

Niezbędnym warunkiem przydatności symulacji jest **relacja izomorfizmu**[13], jaka powinna zachodzić między modelem i systemem przedmiotowym. Można wówczas wnioskować o dynamice modelowanego systemu na podstawie jego zachowania. Model powinien

[13] *Relacja izomorfizmu* – relacja tożsamości (zwrotna, symetryczna, przechodnia) modelu i systemu w dowolnym aspekcie: strukturalnym, funkcjonalnym, rozwojowym.

odzwierciedlać w możliwie wierny sposób system przedmiotowy, jednak zależny od charakteru modelu lub prowadzonych badań.

W większości przypadków podczas analizy systemów powstają modele matematyczne, które reprezentują system za pomocą logicznych i kwantyfikatorowych relacji. Relacjami tymi manipuluje się w ten sposób, aby określić jak model reaguje na zmiany, a wiec jak zachowałby się istniejący system, pod warunkiem, ze model matematyczny jest odpowiednio zaprojektowany.

Zbudowany **model matematyczny musi zostać przeanalizowany w celu sprawdzenia, czy może być zastosowany do opisu badanego systemu**. Jeśli model jest wystarczająco prosty, istnieje możliwość zbadania działania systemu przy pomocy metod matematycznych i otrzymania w ten sposób rozwiązania analitycznego. Niektóre metody analityczne mogą być jednak niezwykle rozbudowane, co pociągałoby za sobą olbrzymia liczbę obliczeń. Znane są także przykłady, kiedy matematyczna formuła znana jest doskonale, ale jego rozwiązania dalekie jest od prostoty.

W przypadku, kiedy model matematyczny jest znany, a związane z nim obliczenia nie są zbyt skomplikowane, zazwyczaj zaleca się, aby zamiast symulacji wybrać drogę analityczną. Jednakże, wiele systemów ma tak wysoki stopień złożoności, ze ich matematyczne modele wykluczają możliwość analitycznego rozważania. Wtedy badany model musi być analizowany symulacyjnie.

Procesy, które chcemy badać w oparciu o modele musimy najpierw opisać. Sposób opisu zależy z jednaj strony od środków opisu, którymi dysponujemy, z drugiej strony - od potrzeb. Środki opisu wyznaczone są przez język - aparat matematyczny, którym potrafimy skutecznie posługiwać się. Potrzeby wynikają z celu badań procesów (systemu) i przyjętej metody osiągnięcia celu. Jeżeli chcemy badać system, na podstawie obserwacji procesów analogicznych (w sensie mechanizmu procesu) do zachodzących w systemie, to zmuszeni jesteśmy je odtwarzać - symulować. Symulację będziemy przeprowadzać przy użyciu komputerów. W badaniu procesów zachodzących w systemie metodami symulacji cyfrowej wyróżniamy dwa podstawowe, równolegle przebiegające procesy:

- symulacja procesu badanego;

- obserwacja wartości określonych wielkości procesu symulowanego. Wyniki obserwacji stanowią dane do statystycznego wnioskowania o wartościach interesujących nas charakterystyk.

### 2.1.1 Symulacja badanego procesu

Początkowo rozporządzamy zwykle opisem procesu badanego w języku potocznym. Na taj podstawie staramy się opisać proces formalnie tak, aby otrzymać algorytm tej symulacji w postaci umożliwiającej jego zapis w ustalonym języku programowania.

W najbardziej ogólnym przypadku przebieg procesu jest wypadkową działania pewnego mechanizmu wewnętrznego oraz pewnych czynników zewnętrznych. Poniżej przedstawimy sposób opisu mechanizmu wewnętrznego, tzn. opisu praw procesu.
Ograniczając rozważania nad badaniami symulacyjnymi do metody symulacji cyfrowej, procesy zachodzące w systemach badanych będziemy opisywać procesami dyskretnymi w stanach i w czasie.

Procesem dyskretnym w czasie nazywamy proces, dla którego zbiór wartości wyróżnionych w chwilach T jest przeliczalny, zaś procesem dyskretnym w stanach nazywamy proces, dla którego zbiór stanów S jest przeliczalny. Zmiany stanu procesu dyskretnego nazywamy zdarzeniami.

### 2.1.2 Obserwacja realizacji określonych wielkości w procesie symulacji

Symulacja procesu rzeczywistego nie dostarczy badającemu żadnych informacji o badanym systemie, jeżeli nie zostanie zorganizowana odpowiednia (zgodnie z celem badań) obserwacja procesu symulacyjnego (modelu symulacyjnego).

Stan modelu symulacyjnego oraz czasy znajdowania się systemu w określonych stanach mogą być obserwowane z inną dokładnością niż są generowane w procesie obliczeniowym algorytmu symulacyjnego. Historię stanów (ciąg wartości obserwowanych) na podstawie obserwacji modelu symulacyjnego wyznacza się za pomocą funkcji obserwacji zmiany stanu:

$$\Phi^0 : X = T \times S \to \hat{Y}$$

gdzie: $\hat{Y}$ oznacza zbiór wyników obserwacji określonych wielkości modelu symulacyjnego.

W szczególnym przypadku, gdy obserwacja dokonywana jest z taką samą dokładnością, z jaką generowany jest ciąg: $x_0$, $x_1$, $x_2$, ...., to ciąg wyników obserwacji może być równy: $y_0=x_0$, $y_1=x_1$, $y_2=x_2$,....

### 2.1.3 Eksperyment symulacyjny.

Badanie procesów zachodzących w systemie rzeczywistym w oparciu o ich model symulacyjny opisuje funkcja:

$$\mathbf{G^e = (G, G^o)}$$

będąca złożeniem funkcji przejścia i funkcji obserwacji modelu symulacyjnego.

Parę

$$\mathbf{A^e = (X^e, G^e)}$$

gdzie: $X^e = X \times \hat{Y}$ nazywamy **algorytmem symulacyjnego badania systemu**.

Algorytm symulacyjnego badania systemu zapisany w języku programowania nazywa się **programem badania symulacyjnego systemu**. Eksperyment przeprowadzony przy wykorzystaniu algorytmu symulacyjnego badania systemy nazywamy **eksperymentem symulacyjnym**.

Celem eksperymentu symulacyjnego jest **wnioskowanie statystyczne**[14] o wartościach określonych charakterystyk systemu rzeczywistego i związkach zachodzących między nimi. Zaplanowanie i organizacja eksperymentu symulacyjnego, podobnie jak i realizacja eksperymentu na systemie rzeczywistym, należy do podmiotu badającego system.

Podczas eksperymentu symulacyjnego obserwowany jest model symulacyjny systemu, a dokładnie proces (procesy) zachodzące w badanym systemie. Wyniki obserwacji uzyskane podczas eksperymentu symulacyjnego są danymi (empirycznymi) przeznaczonymi do analizy i statystycznego wnioskowania o wartościach charakterystyk badanego systemu i związkach zachodzących między nimi.

---

[14] *Wnioskowanie statystyczne* – to taki rodzaj rozumowania, w którym wniosek o charakterze probabilistycznym (czyli z określonym prawdopodobieństwem) dotyczy nie pojedynczych przedmiotów czy zdarzeń, ale odnosi się do całego zbioru pewnych elementów, nazywanego populacją (generalną). Wniosek tego typu wskazuje zwykle wartość pewnej liczby, charakteryzującej jakąś cechę rozważanego zbioru. Wartości takie nazywają się **parametrami statystycznymi**.

### 2.1.4 Porównanie metod badania systemów

**Symulacyjna metoda badania systemów jest skojarzeniem metody analitycznej z metodą eksperymentalną**. Opracowując algorytm symulacji, w istocie rzeczy, opisuje się formalnie mechanizm badanego systemu działania (głównego jego procesu): podobnie jak przy stosowaniu metody analitycznej. Niemniej sposób uzyskania rozwiązania jest zupełnie odmienny (p.1.2.3.). W celu przeprowadzenia eksperymentu symulacyjnego, algorytm symulacji uzupełnia się (rozszerza) o funkcje obserwacji określonych wielkości symulowanego procesu. Uzyskuje się w ten sposób algorytm symulacyjnego badania systemu. **Uzyskiwanie wyników jest takie samo jak przy eksperymentalnym badaniu systemu rzeczywistego**, z tym, że proces rzeczywisty zastępuje się jego modelem symulacyjnym (obliczeniami symulacyjnymi).

Algorytm symulacji służy jedynie do odtwarzania przebiegu badanego procesu, więc jego złożoność nie powinna powodować istotnych trudności w oszacowaniu wartości określonych charakterystyk i związków zachodzących między nimi.

Ze specyfiki symulacyjnej metody badania systemów wynikają jej pewne wady zarówno w stosunku do badania eksperymentalnego systemu rzeczywistego, jak i do metody analitycznej (jeżeli oceniać będziemy jednokryterialnie, tj. z punktu widzenia „jakości" uzyskanego rozwiązania – mówiąc w ogólności).

Po pierwsze, opis mechanizmu procesu badanego odpowiada rzeczywistości tylko z pewnym przybliżeniem, co może wywierać ujemny wpływ na uzyskane wyniki (ale też może być jednym możliwym rozwiązaniem problemu). W związku z powyższym wyłania się problem weryfikacji adekwatności opisu mechanizmu procesu (algorytmu symulacyjnego) do procesów zachodzących w systemie realnym.

Po drugie, wyniki uzyskuje się w postaci histogramów lub wartości określonych charakterystyk, zachodzi więc konieczność opracowywania wyników po zakończeniu eksperymentu symulacyjnego lub po zakończeniu badania symulacyjnego. Ale poniesiony trud aproksymacji (i obróbki) uzyskanych wyników umożliwia rozwiązanie problemu w ogóle.

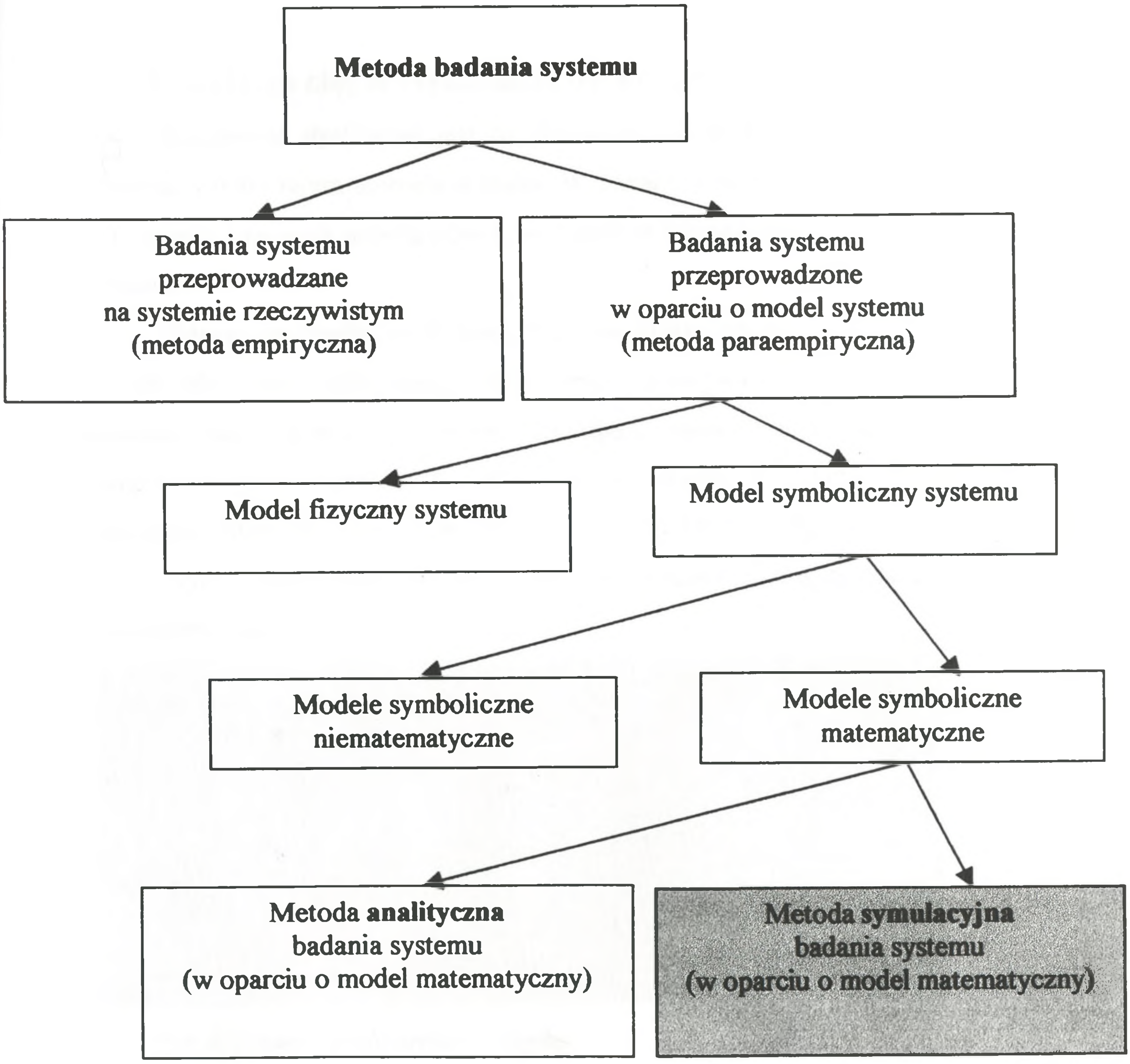
W tabeli 1. przedstawione zostały charakterystyki porównawcze analitycznej i symulacyjnej metody badania systemów.

Tabela 1. Charakterystyki porównawcze analitycznej i symulacyjnej metody badania systemów

| **Metoda badania systemu** | |
|---|---|
| **Analityczna** | **Symulacyjna** |
| **1. Model** | |
| Model jest zazwyczaj układem równań opisującym proces zachodzący w badanym systemie.<br><br>Zmiany założeń, dotyczące mechanizmu procesu, mogą istotnie wpływać na sposób i możliwość rozwiązania problemu | Złożoność algorytmu symulacji funkcjonowania systemu w niewielkim stopniu wpływa na możliwość rozwiązywania problemu. Zmiany właściwości procesu symulacyjnego wyrażają się jedynie w zmianie postaci funkcji opisujących te właściwości. Może jednakże wzrosnąć czas opracowania algorytmu badania symulacyjnego oraz czas trwania eksperymentu. |
| **2. Adekwatność modelu** | |
| Adekwatność modelu badanego systemu uwarunkowana jest możliwością analitycznego wyznaczania interesujących zależności. W wielu przypadkach nie można opracować adekwatnego modelu systemu, w oparciu o który można byłoby uzyskać rozwiązanie problemu. | Adekwatność modelu symulacyjnego do procesu rzeczywistego wynika, ze (.) znajomości mechanizmu badanego procesu (praw fizycznych), (..) możliwości opisu tego mechanizmu za pomocą języków posiadających implementację na dostępnych komputerach oraz możliwościami tych komputerów. |
| **3. Rozwiązanie problemu** | |
| Interesujące charakterystyki systemu podawane są w postaci wzorów, wykresów lub tabel. | Otrzymuje się oszacowanie pożądanych charakterystyk w postaci tabel lub wykresów. Zależności funkcyjne (w postaci wzorów), uzyskuje się wykorzystując aparat statystyki matematycznej, np. analiza regresji. |
| **4. Interpretacja wyników** | |
| Rozwiązanie problemu uzyskane w postaci wzorów jest dogodne do analizy funkcjonowania systemu. Bezpośrednio widoczny jest wpływ poszczególnych wielkości na charakterystyki badanych systemów. | Wykresy są komunikatywną formą przedstawiania wyników. Dokonanie analizy wpływu określonych wielkości na interesujące charakterystyki wymaga przeprowadzenia znacznej liczby eksperymentów symulacyjnych (przy minimalnych założeniach) |
| **5. Dokładność wyników** | |
| Zgodność uzyskanych wyników badań z rzeczywistymi wartościami charakterystyk zależy od adekwatności modelu | Zgodność uzyskanych wyników badań z rzeczywistymi wartościami charakterystyk zależy od:<br>• adekwatności modelu symulacyjnego;<br>• przyjętych statystyk do oszacowania określonych charakterystyk;<br>• liczby obserwacji wartości estymowanej wielkości. Np. prawdopodobieństwa zajętości resursu od liczby obserwacji |

Zwracamy uwagę, że przedstawione porównanie metod badania systemu ma na celu nie przeciwstawianie ich sobie, lecz wyeksponowanie ich właściwości, których znajomość pozwoli stosować właściwą metodę przy rozwiązywaniu określonego problemu.

Miejsce metody symulacyjnej badania systemów wśród innych metod ilustruje rys. 3.




Rys. 3. Metoda symulacyjna w zbiorze innych metod badawczych

## 2.2 Klasyfikacja modeli symulacyjnych

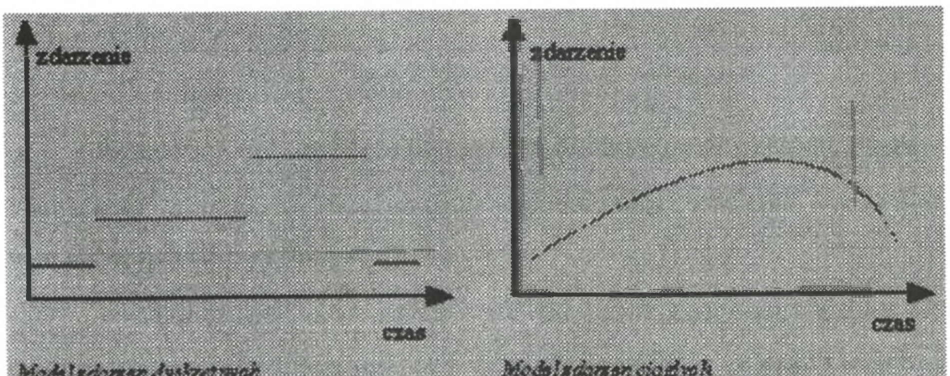
Kiedy zdecydujemy, ze model matematyczny badanego systemu poddamy eksperymentowi symulacyjnemu, wtedy należy dokonać wyboru narzędzia odpowiedniego do specyfiki analizowanego problemu. W takich przypadkach celowa jest znajomość klasyfikacji modeli symulacyjnych wzdłuż trzech wymiarów: ciągłe – dyskretne, statyczne – dynamiczne, deterministyczne – stochastyczne..

### Symulacja ciągła i symulacja dyskretna

**Zdarzenie dyskretne** jest to chwilowa (migawkowa) operacja pojawiająca się w pewnym, wyjątkowym momencie czasu. Wyróżnienie w systemie tego typu zdarzeń pomaga w przyjęciu pewnych przedziałów czasowych w których pojawiły się istotne zmiany stanu systemu.

**Zdarzenie ciągłe** jest to takie działanie, które trwa bez przerw. Ciągłość zdarzenia nie jest tak, jak w przypadku zdarzeń dyskretnych, przerywana jakimiś chwilowymi operacjami. Rosnąca cały dzień, a potem spadająca nocą temperatura wody w jeziorze, przepompowywanie paliwa do tankowca oto proste przykłady zdarzeń ciągłych, które zazwyczaj opisać można stosując tempo zmian (np. litr/godzinę).

Rys. 4. przedstawia w sposób graficzny różnice pomiędzy zdarzeniem dyskretnych, a zdarzeniem ciągłym.




*Rys 4. Zdarzenia dyskretne i ciągłe*

Oczywiście w praktyce trudno jest znaleźć system, którego zdarzenia byłyby całkowicie ciągłe, czy całkowicie dyskretne, ale zazwyczaj można stwierdzić, która z charakterystyk (ciągła czy dyskretna) dominuje w badanym systemie.

### Statyczne i dynamiczne modele symulacyjne

**Statyczny model symulacyjny** to taki model, w którym zmiana czasu nie ma wpływu na wynik eksperymentu, czyli upływanie godzin, minut, sekund, nie odgrywa żadnej roli. Dobrym przykładem jest model symulacyjny opisujący rzut kostką. Wynik (1,2,3,4,5 lub 6) nie jest w żaden sposób uzależniony od czasu. Przykładem metod symulacyjnych dla modeli statycznych jest metoda Monte Carlo.

**Dynamiczne modele symulacyjne** to modele, na które upływ czasu ma istotny wpływ. Stan modelu zmienia się stopniowo wraz z upływem sekund, minut, godzin.

### Stochastyczne i deterministyczne modele symulacyjne

**Symulacja stochastyczna** opiera się na procesach stochastycznych, to znaczy takich, które zbudowane są z sekwencji losowo wygenerowanych wartości. Okresy czasów pomiędzy momentami, kiedy psuje się maszyna, czy tez czasy potrzebne do jej naprawy to przykłady procesów stochastycznych. Wartości (czasy) zmieniają się w sposób losowy i wymagają zastosowania metod z zakresu rachunku prawdopodobieństwa.

Modele **symulacji deterministycznej** to takie modele, w których nie wykorzystuje się losowych zdarzeń. Oznacza to, ze przebieg eksperymentu symulacyjnego nie podlega prawdopodobieństwa.

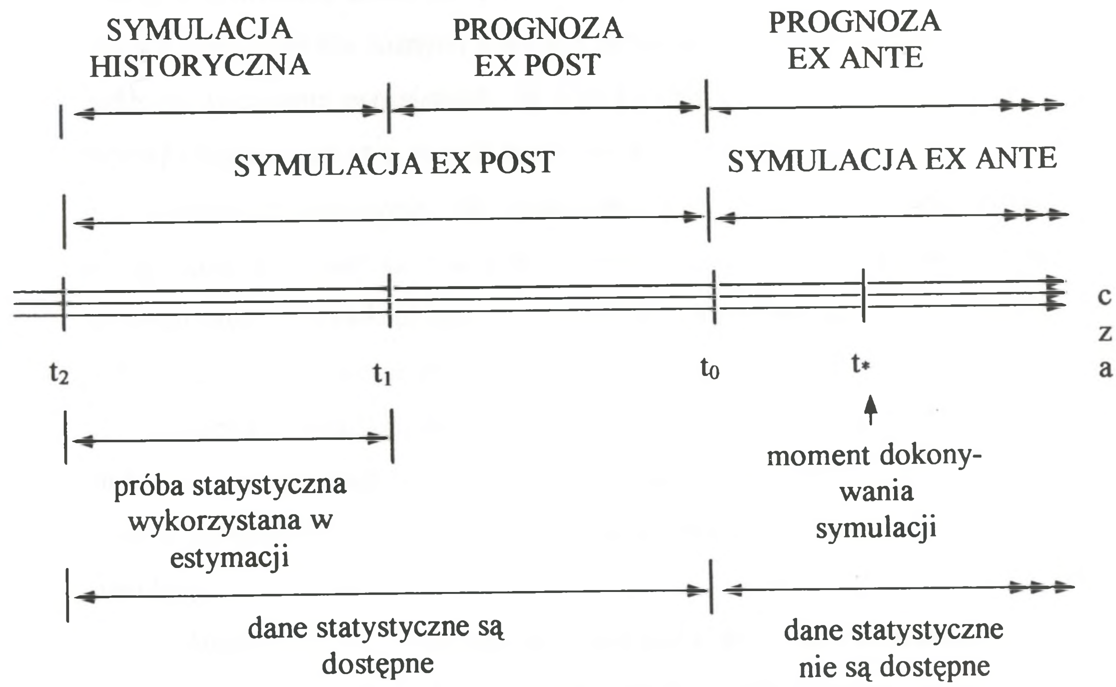
## 2.3 Rodzaje symulacji

Symulacji dokonuje się najczęściej dla kolejnych okresów czasu, w wyniku czego dla wszystkich zmiennych modelu otrzymuje się ciągi wartości liczbowych zwane ścieżkami rozwojowymi (lub czasowymi).

Symulacja dotycząca przeszłości, dla której znane są wartości zmiennych występujących w modelu, określana jest jako *ex post*. ***Symulacja ex post*** może być przeprowadzona w odniesieniu do okresu, na podstawie którego estymowano parametry modelu i wówczas nazywana jest historyczną. Może też wykraczać poza próbę statystyczną i mieć charakter *prognozy ex post*. Szczególny rodzaj symulacji *ex post* stanowi eksperyment, w którym wartości przyjęte dla zmiennych egzogenicznych różnią się od *de facto* zaobserwowanych w przeszłości. Taką symulację nazywa się ***kontrfaktyczną*** ("wbrew faktom").

***Symulacji ex ante (prognozy)*** dokonuje się na okres, dla którego nie istnieją informacje statystyczne, dotyczące zmiennych występujących w modelu. Założenia odnoszące się do zmiennych egzogenicznych pochodzą wówczas z innych badań lub opierają się na doświadczeniu przeprowadzającego symulację. Prognoza *ex ante*, w której wartości zmiennych egzogenicznych zostały przyjęte na poziomie realizacji z ostatniego okresu, nosi nazwę *zamrożonej*.

`Relacje, zachodzące pomiędzy horyzontem czasowym a rodzajami symulacji, zostały zilustrowane na rys. 5.




Rys. 5. Horyzont czasowy a rodzaje symulacji

U w a g a: W schemacie przyjęto założenie, że w momencie dokonywania symulacji nie cała informacja dotycząca przeszłości jest dostępna eksperymentatorowi (punkty $t_0$ i $t_*$ nie pokrywają się).

Rozwiązanie modelu , w którym wartości zmiennych endogenicznych opóźnionych są przyjmowane na poziomie faktycznych realizacji, jest nazywane ***symulacją statyczną***. Jeśli natomiast wartości te pochodzą z rozwiązania modelu dla poprzednich okresów, to mamy do czynienia z ***symulacją dynamiczną***. Oczywiście, rozwiązanie statyczne i dynamiczne modelu, w którym nie występują opóźnienia czasowe są równoważne; symulacja dynamiczna przeprowadzona na jeden okres jest tożsama z symulacją statyczną; symulacja statyczna może mieć w zasadzie wyłącznie charakter *ex post*.

Przeprowadzenie symulacji wymaga także przyjęcia założeń dotyczących struktury stochastycznej modelu. Najczęściej ignoruje się składniki losowe oraz zakłada, że parametry strukturalne są ustalone, a symulacja nazywana jest wówczas ***deterministyczną***.

W przypadku ***symulacji stochastycznej*** należy w pierwszym rzędzie określić rozkłady poszczególnych składników losowych oraz /lub estymatorów parametrów strukturalnych, występujących w kolejnych równaniach modelu. W odniesieniu do tych pierwszych przyjmuje się najczęściej, że odpowiadają one rozkładowi reszt postaci strukturalnych modelu. Podobnie postępuje się w przypadku estymatorów, przyjmując jako wartość oczekiwaną i wariancję odpowiednie oceny uzyskane na podstawie próby. Następnie przeprowadza się wielokrotnie symulacje dla różnych wartości zaburzeń losowych, generowanych przez rozkłady o zadanych wcześniej parametrach. W wyniku tego otrzymuje się dla każdej zmiennej endogenicznej i każdego okresu serię N wartości, na podstawie których można wyznaczyć momenty poszczególnych zmiennych. Dla modeli liniowych przy $N \to \infty$, wartość oczekiwana zmierza do tej, która zostałaby uzyskana w symulacji deterministycznej. W przypadku modeli nieliniowych nie ma takich gwarancji, ponieważ nieliniowa funkcja wartości oczekiwanych nie jest równa wartości oczekiwanej tej funkcji.

Każda z symulacji stochastycznych, traktowanych w sposób izolowany, jest symulacją deterministyczną przeprowadzoną na modelu, którego odpowiednie równania zostały uzupełnione o zaburzenia losowe, będące jednakże ustalonymi liczbami w obrębie poszczególnych symulacji.

Dotychczasowe doświadczenia wskazują na to, że ewentualne obciążenia wynikające z zastosowania symulacji deterministycznej w miejsce stochastycznej, są nieduże. Koszt natomiast przeprowadzania symulacji stochastycznej jest wysoki, należy bowiem rozwiązać model ok. 500-600 razy. W związku z powyższym analizę modeli ekonometrycznych ogranicza się zwykle do symulacji deterministycznych.

## 2.4 Opracowanie modelu funkcjonowania systemu (analizy)

Opracowanie modelu matematycznego funkcjonowania systemu (dokładnie: weryfikacja hipotezy o istnieniu współzależności pomiędzy wektorem zmiennych egzogenicznych a obserwowaną zmienną endogeniczną) realizuje się w następujących etapach (rys. 6.) [10]:

- **dobór postaci analitycznej modelu** (np. regresji[15]) na podstawie informacji a priorycznych o funkcjonowaniu systemu[16];
- zaplanowanie eksperymentu;
- przeprowadzenie eksperymentu - dokonanie serii obserwacji dla ustalonych wartości zmiennych niezależnych (egzogenicznych);
- estymacja[17] współczynników (parametrów strukturalnych) przyjętego modelu (w tym przypadku, modelu regresji);
- ocena adekwatności[18] wyznaczonego modelu (w tym przypadku, modelu regresji).

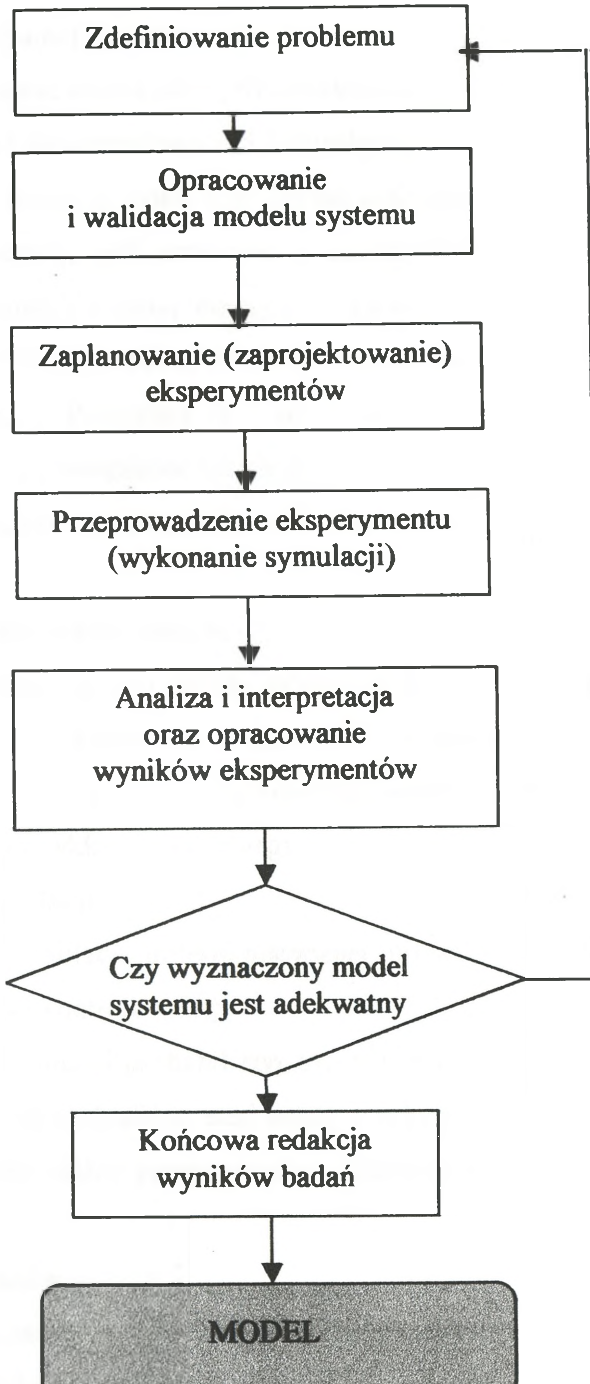
---

[15] *Analiza regresji* – to analiza form związków określających ilościowe współzależności między zmiennymi losowymi badanego procesu losowego

[16] Jeżeli metodą analizy regresji zamierzamy badać związki zmiennych modelu.

[17] *Estymacja*- ocenianie wartości parametrów charakteryzujących populację generalną na podstawie statystyk będących funkcjami próby.

[18] *Ocena adekwatności* – dowolnego modelu oznacza poddanie go testowi (próbie) czy jest on „prawdziwy" dla uprzednio określonego zbioru kryteriów, które umożliwiają odróżnienie modelu adekwatnego od nieadekwatnego.




Rys. 6. Etapy opracowania modelu matematycznego funkcjonowania system

**Zdefiniowanie problemu**

Zawiera przede wszystkim cele projektu i określenie przyczyn stosowania symulacji. Użytkownik powinien zdefiniować zarówno atrybuty interesujących cech jak i miary jakości rozwiązania. Ponadto należy określić zakres projektu i pożądany poziom szczegółowości.

**Stworzenie i walidacja modelu.**

Ogólnie rzecz biorąc model identyfikuje kluczowe elementy problemu oraz ich relacje i ma przetransformować niekontrolowane i kontrolowane (decyzyjne) wejścia w zamierzone dane wyjściowe. Jeśli możemy dokładnie opisać zmienne niekontrolowane to mówimy o symulacji deterministycznej, jeśli zmienne te są opisane rozkładami statystycznymi - o symulacji probabilistycznej. Zmienne mogą mieć charakter dyskretny lub ciągły.

Estymacji parametrów modelu dokonuje się na podstawie bezpośrednich obserwacji lub danych historycznych. Parametry te i założenia modelu powinny być zweryfikowane przez doświadczonych użytkowników lub ekspertów. Po oprogramowaniu modelu, należy go zweryfikować statystycznie wprowadzając doń dane historyczne. W razie potrzeby należy model przebudować.

**Zaprojektowanie eksperymentu.**

W projekcie eksperymentu należy przede wszystkim określić warunki początkowe Jako że eksperyment ma dostarczyć odpowiedzi na pytania decydenta, należy ponadto przewidzieć wszystkie interesujące użytkownika wartości zmiennych decyzyjnych, dla których będą prowadzone oddzielne przebiegi.

**Wykonanie symulacji.**

W przypadku symulacji deterministycznej prowadzimy tylko jeden przebieg dla każdej wartości zmiennej kontrolowanej.

W przypadku symulacji probabilistycznej wartości zmiennych niekontrolowanych są losowane z odpowiednich rozkładów, stąd każdy przebieg daje inne wyniki. By wyniki były statystycznie wiarygodne należy przeprowadzić kilkadziesiąt przebiegów dla każdej wartości zmiennej decyzyjnej.

**Analiza rezultatów.**

Analiza obejmuje porównanie symulowanych wyników otrzymanych z wyspecyfikowanych działań. Ponieważ w przypadku symulacji probabilistycznej mamy do czynienia z rozkładem wyników, należy stosować narzędzia statystyczne (analiza wariancji[19], analiza spektralna i testy istotności[20]) do oceny otrzymanych wyników. Z reguły analiza wystarcza do wyboru najlepszej polityki spośród zbadanych. Czasem wyniki wskazują, że potrzebne są dalsze badania (ze zmianą modelu włącznie).

Ocena adekwatności modelu

---

[19] *Analiza wariancji* – statystyczna metoda analizy wyników obserwacji zależnych od różnych, jednocześnie działających czynników, wyboru czynników najważniejszych i oszacowania ich wpływu.

[20] Miara, zgodnie z którą uzyskanie wyniku w sposób przypadkowy jest mało prawdopodobne.

**Ocena adekwatności modelu symulacyjnego**, działania badanego systemu do rzeczywistej realizacji w nim procesów, w istocie sprowadza się do weryfikacji hipotezy[21] o zgodności rozkładów, parametrów rozkładów, bądź regresji ustalonych wielkości, ze względu na które dokonywana jest ta ocena. Brak podstaw do odrzucenia wymienionych hipotez interpretujemy jako brak podstaw do odrzucenia pierwotnej hipotezy o adekwatności modelu symulacyjnego działania systemu, generowanego za pomocą opracowanego algorytmu badania symulacyjnego systemu.

Z analizy statystycznej modeli wyznaczonych eksperymentalnie wynika, że na dokładności oceny współczynników postulowanego modelu istotny wpływ ma plan eksperymentu. Oznacza to, ze stosując eksperymenty czynne można uzyskać pożądaną dokładność oceny współczynników modelu systemu, dokonując minimalnej liczby eksperymentów. Wynika stąd, że planując eksperyment czynny w wielu przypadkach można zmniejszyć nakłady czasu i środków w stosunku do eksperymentu biernego.

Etap opracowania i analizy wyniku eksperymentu obejmuje:

- **eliminację** błędnych wyników eksperymentów;
- **statystyczne wnioskowanie** o wartościach parametrów modelu
- **estymację** wartości parametrów bądź też ich weryfikację.

Istotnym zagadnieniem przy ustalaniu postaci modelu systemu jest określenie liczby czynników (zmiennych niezależnych) od których będzie on zależał - jego wymiarowości. Formalnie rzecz biorąc, powinno się przyjąć model dostatecznie rozbudowany, aby nie opuścić żadnego czynnika wpływającego na wynik rozwiązania problemu. Komplikuje to jednak, a nieraz uniemożliwia, jego uzyskanie. Wymaganiem będzie zatem, aby model był adekwatny do rozwiązywanego problemu.

Sposób realizacji poszczególnych etapów opracowania modelu matematycznego funkcjonowania systemu i strategię opracowania modelu określa teoria planowania eksperymentów.

---

[21] Wyjaśnienie za pomocą hipotezy jest skuteczne tylko wówczas, gdy istnieją podstawy do uznania tej hipotezy za prawdziwą.

## 2.5 Statystyczne aspekty symulacji

We wszystkich symulacjach probabilistycznych występują elementy losowe (rozkład cen, czasy obsługi itp.). Dlatego wynik symulacji nie jest dokładną odpowiedzią, lecz szeregiem liczb o losowym rozkładzie.

W symulacjach występuje wiele problemów statystycznych, specyficznych dla tej metody takie jak:

- wygenerowanie ciągu liczb losowych o zadanym rozkładzie opisującym zmienną losową,
- statystyczna analiza modelu,
- statystyczna analiza wyników.

### Liczby losowe

W przypadku symulacji stochastycznej podstawowe znaczenie ma generowanie liczb z rozkładu jednostajnego, gdyż przez jego przekształcenie można uzyskać liczby losowe o dowolnym rozkładzie.

Rozkład jednostajny to taki rozkład, w którym prawdopodobieństwa wylosowania dowolnej wartości z danego przedziału (np. [0...1]) są sobie równe.

*Losowy* oznacza, że nie da się przewidzieć, jakie liczby otrzymamy. Należy generować ciąg takich liczb, które:

- są od siebie statystycznie niezależne,
- mają rozkład jednostajny (równomierny, prostokątny),
- można odtwarzać,
- nie powtarzają się w ciągu o określonej długości,
- dadzą się generować z dużą szybkością,
- wymagają minimalnej pojemności pamięci operacyjnej.

Spośród różnych metod otrzymywania liczb losowych (specjalne urządzenia, rzuty kostkami, tablice) najwygodniejsze i najszybsze jest generowanie liczb za pomocą zależności rekurencyjnej. Generowane w ten sposób liczby nie są, ściśle rzecz ujmując, losowe i dlatego nazywamy je *liczbami pseudolosowymi*. Liczby te spełniają warunki 1, 5 i 6, natomiast stopień spełnienia pozostałych warunków zależy od własności stosowanych zależności rekurencyjnych.

Metody generowania liczb pseudolosowych opierają się na koncepcji *kongruencji*. Dwie liczby całkowite $a$ i $b$ są w kongruencji z modułem $m$, jeśli ich różnica jest liczbą całkowitą, stanowiącą wielokrotność $m$. Relację kongruencji zapisujemy jako: $a \equiv b \pmod{m}$, $a$ jest kongruentne z $b$ modulo $m$.

Przykład: $1897 \equiv 7 \pmod{5}$

Dla wszystkich metod opartych na kongruencji liczb podstawowe znaczenie ma następujący wzór rekurencyjny:

$$\boldsymbol{n_{i+1} \equiv [a \cdot n_i + b] \pmod{m}}$$

gdzie:

$n_i$, $a$, $b$, $m$ są liczbami całkowitymi nieujemnymi, $a$ - stały mnożnik, $b$ - stała dodatkowa, $n_0$ - wartość początkowa.

Następującymi kolejno po sobie liczbami $\{n_i\}$ są całkowicie zdeterminowane liczby całkowite tworzące ciąg reszt dla mod $m$. Oznacza to, że wszystkie $n_i < m$.

Z liczb występujących w ciągu $\{n_i\}$ można otrzymać właściwe liczby z przedziału [0...1] tworząc ciąg $\{r_i\} = \{n_i/m\}$.

Czy istnieje najmniejsza wartość $i = h$, że $n_h = n_0$, gdzie $h$ jest okresem ciągu? Jeżli bowiem $i = h$, to $n_{h+1} = n_1$, $n_{h+2} = n_2$, itd. Można wykazać, że taka liczba $h$ zawsze istnieje i że jej wartość maksymalna zależy od $m$.

Najpopularniejszą metodą tworzenia liczb pseudolosowych opartą na kongruencji jest generator multiplikatywny, w którym stała dodatkowa $b$=0:

$$\boldsymbol{n_{i+1} \equiv a \cdot n_i \pmod{m}}$$

Generator ten ma bardzo dobre własności statystyczne tzn. liczby nie są ze sobą skorelowane i mają rozkład równomierny, a przy założeniu pewnych warunków na $a$, $n_0$ i $m$. możemy zapewnić maksymalny okres ciągów $h$. Ponadto ciągi te można powtarzać, a same obliczenia są bardzo szybkie.

Podano wiele reguł doboru $a$, $n_0$ i $m$. Dla komputerów dwójkowych o słowie 32-bitowym przyjmujemy, że $m=2^{31}-1$ (=2147483647). Algorytm wygląda następująco:

- za wartość początkową $n_0$ podstaw całkowitą liczbę nieparzystą.
- jako $a$ wybierz dużą liczbę całkowitą pierwszą,
- oblicz $n_1 = a \cdot n_0 \pmod{m}$
- oblicz pierwszą zmienną losową o rozkładzie równomiernym $r_1 = n_1/m$
- powtarzaj dwa ostatnie kroki w celu otrzymania kolejnych liczb losowych.

## Liczby pseudolosowe

Własności statystyczne liczb pseudolosowych powinny odpowiadać własnościom liczb losowych (niezależne, równe szanse). Jako że liczby generowane przez programy komputerowe nie są liczbami losowymi w powyższym sensie, muszą być poddawane testom statystycznym, które pozwalają uznać te liczby za "prawdziwie" losowe lub nie.

Z drugiej strony jak zauważył Marshall "wydaje się, że fałszywy charakter losowości wygenerowanej sekwencji nie wpływa na obliczenia Monte Carlo, w każdym razie nie wykryły tego różne testy statystyczne, którym te sekwencje były poddane i przez które przeszły z zupełnym powodzeniem".

Testy statystyczne, które umożliwiają testowanie losowości liczb pseudolosowych:

- test wskaźnika struktury,
- test autokorelacji,
- test serii,
- test na losowość luki,
- test pokerowy.

### Test wskaźnika struktury

Niech $p$ oznacza frakcję takich elementów w zbiorowości statystycznej, które mają pewną wyróżnioną cechę ($0<=p<=1$); parametr może być interpretowany jako prawdopodobieństwo wylosowania z tej zbiorowości elementu z wyróżnioną cechą.

**$H_0$: $p = p_0$ wobec $H_1$: $p <> p_0$**

Niech $X$ oznacza liczbę elementów z cechą wyróżnioną w próbie losowej, a $n$ - liczność próby. Zmienna losowa $Z$

$$Z = \frac{X - n\pi}{\sqrt{n\pi(1-\pi)}}$$

ma rozkład normalny $N(0,1)$.

### Pobieranie próbek z rozkładów

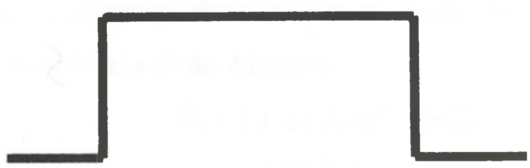
Wykonując operacje matematyczne na liczbach losowych o rozkładzie równomiernym [0, 1], można tworzyć liczby losowe o innych rozkładach.

Ciąg liczb $R'$=1-$R$ ($R$={$r_i$}) ma też rozkład jednostajny w przedziale [0, 1] i nazywany jest ciągiem przeciwnym. Ciągi takie są ważnym środkiem zmniejszania wariancji w symulacjach stochastycznych.

**Rozkład prostokątny w przedziale [a, b]**

$$P = a+(b-a)\cdot R$$

ma rozkład prostokątny w [a, b].



**Zmienne losowe o danym rozkładzie dyskretnym**

Wykonujemy mapowanie liczb losowych z [0, 1] na dystrybuantę:

- określ prawdopodobieństwa, że zmienna przybiera określone wartości,
- utwórz dystrybuantę (skumuluj prawdopodobieństwa),
- przyporządkuj przedziały liczb losowych do dystrybuanty,
- wylosuj liczbę z [0, 1],
- znajdź tę liczbę w przedziałach dystrybuanty,
- odczytaj wartość zmiennej, której przyporządkowano ten przedział.

**Zmienne losowe o danym rozkładzie ciągłym**

Ogólna metoda polega na odwróceniu dystrybuanty $F(x)$.

Weź liczbę losową $R$ o rozkładzie jednostajnym w przedziale [0, 1] i rozwiąż równanie $F(X) = R$ lub $F(X) = 1-R$ . Wtedy $X$ ma szukany rozkład i nazywa się *liczbą losową o dystrybuancie* $F(x)$.

**Liczby losowe o rozkładzie wykładniczym**

$$F(x) = 1-e^{-lx} \text{ (} x>=0 \text{, wartość oczekiwana } 1/l\text{).}$$

Weź liczbę losową $R$ o rozkładzie jednostajnym w przedziale [0, 1] i oblicz $X = -\ln(R)/l$.

Dowód:

$$F(X) = 1-R$$

$$1-e^{-lX} = 1-R$$

$$e^{-lX} = R$$
$$-lX = \ln(R)$$
$$X = -\ln(R)/l$$

Ważnym zastosowaniem liczb losowych o rozkładzie wykładniczym jest generowanie tzw. procesów Poissona.

**Liczby losowe o rozkładzie normalnym**

Przy użyciu dwóch niezależnych liczb losowych $R_1$ i $R_2$ o rozkładzie jednostajnym w [0, 1] można otrzymać dwie niezależne liczby losowe o rozkładzie normalnym $N(0,1)$. Jest to tzw. przekształcenie *Boxa-Mullera*:

$$N_1 = (-2 \ln(R_1))^{1/2} \cos(2pR_2)$$
$$N_2 = (-2 \ln(R_1))^{1/2} \sin(2pR_2)$$

Tworząc liczby $m+s\,N_1$ i $m+s\,N_2$ otrzymujemy zmienne losowe o rozkładzie $N(m,s)$.

## 2.6 Czas systemowy

Zmienną niezależną podczas symulacji cyfrowej badanego procesu jest bieżący czas symulacji zwany często **czasem systemowym**. Minimalny przyrost jego wartości w eksperymencie symulacyjnym jest równy przyjętej jednostce. Czas systemowy jest zatem zmienną dyskretną, przyjmującą wartości ze zbioru liczb naturalnych. Nie stanowi to jednak istotnego ograniczenia z punktu widzenia dokładności odtwarzania badanego procesu, gdyż wartość kwantu czasu rzeczywistego przyporządkowana jednostce czasu systemowego ustala badający. Istnieje zatem możliwość odtwarzania badanych procesów z dowolną dokładnością.

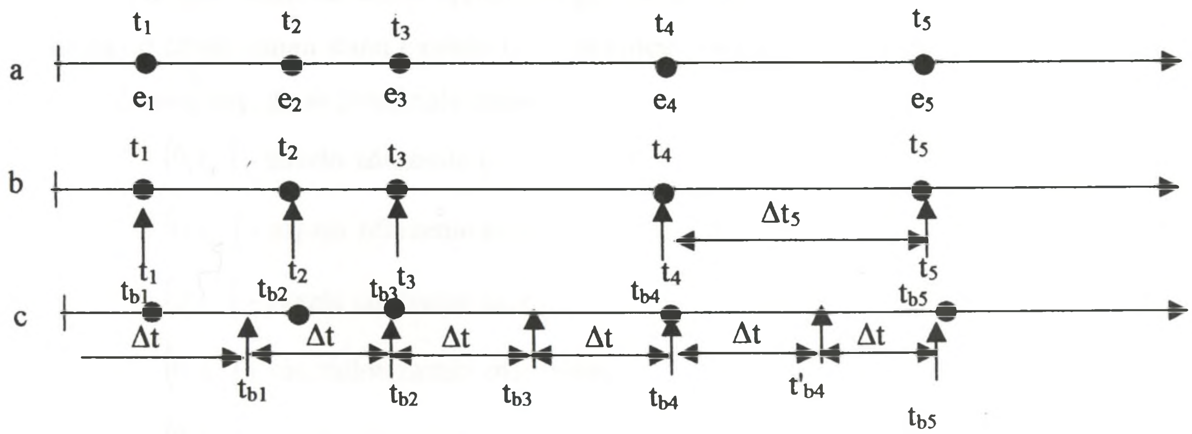
Wyróżnia się dwie metody przyrostu czasu systemowego podczas eksperymentu symulacyjnego:

- metodę kolejnych zdarzeń;
- metodę stałego przyrostu zwaną również metodą stałego kroku.

W metodzie kolejnych zdarzeń po zajściu określonego zdarzenia czas systemowy jest zwiększany do chwili, w której zaplanowane zostało w oparciu o funkcję planującą zajście kolejnego zdarzenia.

W metodzie stałego przyrostu czas systemowy zwiększany jest o ustaloną, w danym eksperymencie symulacyjnym stałą wartość, po czym realizowane są zdarzenia, których zajście zostało zaplanowane w przedziale czasu odpowiadającym temu przyrostowi.

Przyrost czasu systemowego w przypadkach wyróżnionych metod ilustruje rys. 7.




Rys. 7. Zasady realizacji przyrostu czasu systemowego

a. chwile zajścia kolejnych zdarzeń

b. przyrosty czasu systemowego w metodzie kolejnych zdarzeń;

c. przyrosty czasu systemowego w metodzie stałego przyrostu.

Oznaczenia na rys. 7:

- $e_1 .e_2 ,...$ - zdarzenie elementarne (zmiana etanu elementu systemu:
- $t_i$ - kolejne-wartości czasu systemowego, w których zaplanowano zmiany stanu modelu symulacyjnego ;
- $t_{bi}$ - kolejne wartości czasu systemowego, w których nastąpiły (zrealizowano) zmiany stanu modelu symulacyjnego.

W przypadku metody kolejnych zdarzeń bieżący czas systemowy przyjmuje wartości zaplanowanych chwil zajścia kolejnych zdarzeń

$t_{bi} = t_i, \ i = 1,2,... i$

W chwili $t_b$ realizowane są dwa zdarzenia $e_4$ i $e_5$. Kolejne przyrosty czasu systemowego są równe:

$\Delta t_i = t_i - t_{i-1} \quad , i = 1,2:...$

Czas systemowy każdorazowo jest zwiększany do chwili zajścia najbliższego zdarzenia, po czym następuje realizacja tego zdarzenia (lub zdarzeń). Stąd też nazwa metody.

W metodzie stałego kroku czas systemowy przyjmuje wartości:

$t_{bi} = i\ \Delta t$

Kolejne wartości czasu systemowego zdeterminowane są wartością przyrostu $\Delta t$ i nie zależą od chwil zmian stanu modelu symulacyjnego (występowania zdarzeń).

Zauważmy, że w przedziale czasu:

$(0, t'_{b_1}]$ - zaszło zdarzenie $e_1$;

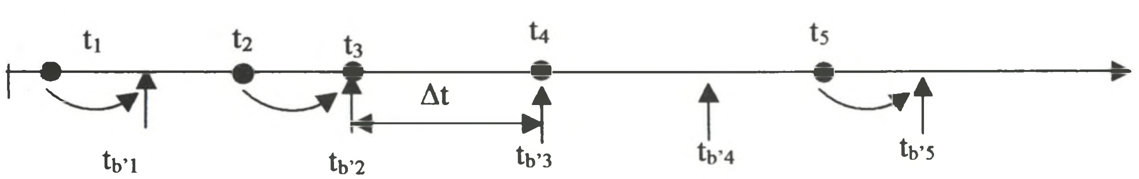
$(0, t'_{b_2}]$ - zaszło zdarzenie $e_2$ i $e_3$;

$(0, t'_{b_3}]$ - zaszło zdarzenie $e_4$ i $e_5$;

$(0, t'_{b_4}]$ - nie żadne zaszło zdarzenie;

$(0, t'_{b_5}]$ - zaszło zdarzenie $e_6$;

Zdarzenia zachodzące w odstępach między kolejnymi przyrostami są traktowane jako zdarzenia równoczesne i są przetwarzane grupowo, występuje przesuwanie w czasie realizacji zdarzeń w stosunku do czasu zaplanowanego




Rys. 8. Przesuwanie w czasie realizacji zdarzeń w metodzie stałego przyrostu

Wartość przyrostu $\Delta t$ należy ustalać bardzo rozważnie. Niewłaściwy dobór może doprowadzić do absurdalnych wyników symulacji.

Przyjęcie zbyt dużego przyrostu czasu systemowego w stosunku do dynamiki zmian stanów powoduje małą dokładność estymacji charakterystyk czasowych procesu w oparciu o model symulacyjny. Małe przyrosty czasu systemowego wydłużają z kolei czas trwania eksperymentu symulacyjnego.

Porównując przedstawione metody zwiększania czasu systemowego podczas eksperymentu symulacyjnego można stwierdzić, że:

- metoda kolejnych zdarzeń pozwala na znaczne skrócenie czasu trwania eksperymentu symulacyjnego w stosunku do metody stałego przyrostu w przypadkach, gdy występuje duży rozrzut odstępu czasu między kolejnymi zdarzeniami;
- efektywność metody stałego przyrostu wzrasta ze wzrostem złożoności badanego systemu.

Należy jednak zauważyć, że w większości języków symulacji dyskretnej stosowana jest metoda kolejnych zdarzeń.

## 2.7 Klasyfikacja narzędzi symulacyjnych.

Wybór narzędzia, przy pomocy którego realizowany jest eksperyment symulacyjny jest bardzo istotny i zależy od wielu czynników: doświadczenia modelującego, specyfiki problemu, wymaganego poziomu dokładności itp.

Tabela 2. przedstawia cztery klasy narzędzi symulacyjnych.

Tabela 2. Narzędzia symulacyjne i ich cechy

| | Arkusze kalkulacyjne | Narzędzia do szybkiej symulacji | Symulatory | Języki symulacyjne |
|---|---|---|---|---|
| Czas budowania modelu | minimalny | minimalny | średni | Średni do długiego |
| Kontrola modelu i złożoność problemu | słaba przy modelach dynamicznych | średnia | w ramach ograniczeń programu | doskonała, praktycznie każdy poziom złożoności systemu |
| Wyniki | definiowane i projektowane przez modelującego | statystyczne możliwości, zorientowane na raport | zróżnicowane w zależności od programu, zazwyczaj zorientowane na raport | definiowane przez modelującego, odpowiednie do specyfiki problemu |
| Dokładność | generalnie nieodpowiednie do systemów dynamicznych | dobre do pobieżnej analizy systemu | w zależności od założeń | doskonałe |
| Czas zaznajamiania się z narzędziem | minimalny | średni, często wykorzystywane arkusze kalkulacyjne jako interfejs do użytkownika | średni | średni do dużego |
| Najlepsze rezultaty przy zastosowaniu do | systemy statyczne i deterministyczne | mało skomplikowane pod względem prawdopodobieństwa problemy | średnio skomplikowane pod względem prawdopodobieństwa problemy, zastosowania specyficzne | problemów złożone, szerokie zastosowanie |

**Arkusze kalkulacyjne**

Pierwszą kategorię w powyższej tabeli stanowią arkusze kalkulacyjne (*Spreadsheets*) takie jak: LOTUS 1-2-3, EXCEL etc. Chociaż na ogół nie są one znane ze swych możliwości symulacyjnych, to jest jednak możliwe wykonanie eksperymentu symulacyjnego przy użyciu funkcji, występującej praktycznie w każdym arkuszu kalkulacyjnym, generującej liczby losowe (w większości narzędzi jest to funkcja "@RAND" lub podobna).

Budowanie eksperymentu symulacyjnego przy użyciu arkuszy kalkulacyjnych zabiera minimalną ilość czasu. Częste przykłady zastosowań arkuszy kalkulacyjnych jako narzędzi symulacyjnych można znaleźć np. w bankowości, gdzie wykorzystywane są do określania spodziewanych zysków, analizy portfela inwestycyjnego itp.

Arkusze kalkulacyjne pozwalają na zaprezentowanie wyników w formie graficznej (wykresy), czy też w postaci tabel. Daje to możliwość szybkiej analizy problemu, co w świecie współczesnego buisnessu jest wielką zaletą. Należy jednak pamiętać, że zastosowanie arkuszy kalkulacyjnych ogranicza się jedynie do symulacji systemów statycznych.

**Narzędzia „szybkiej" symulacji**

Kolejną kolumnę w powyższej tabeli zajmują tzw. narzędzia do "szybkiej" symulacji (*rapid modelling tools*) do których zaliczyć można *ManuPlan/SimStarter*. Zadaniem tych narzędzi jest szybka ocena takich zagadnień jak przepustowość czy wąskie gardła w procesie produkcyjnym. Zazwyczaj symulacja przy użyciu tych narzędzi ogranicza się do analizy najistotniejszych elementów badanego systemu. W wielu przypadkach, określony z grubsza wynik, jest wystarczający, kiedy na stawiane pytania wymagana była szybka odpowiedź.

**Symulatory**

Symulatory są to programy, pozwalające na szybką budowę modeli symulacyjnych specyficznych zagadnień. Przykładem może być SLAM II. Jest to program przeznaczony do symulacji przede wszystkim systemów produkcyjnych, gdzie znajdują się predefiniowane elementy, które ograniczają rolę modelującego jedynie do logicznego połączenia tych elementów i dostarczenia danych do obróbki. Symulatory nie wymagają praktycznie żadnych znajomości z zakresu programowania, choć należy zaznaczyć, ze można często poszerzyć możliwości stosowanego programu poprzez uzupełnienie dodatkowym kodem. Zazwyczaj symulatory zapewniają atrakcyjną prezentację wyników w postaci graficznej. Umożliwiają one też często eksportowanie zbiorów z wynikami symulacji do innych programów graficznych. Należy jednak pamiętać, że symulowanie innych problemów, niż te określone przez producenta, jest z reguły niemożliwe.

Symulatory nie wymagają długiego okresu przeszkolenia i przeważnie kilka dni wystarcza, aby samemu zbudować eksperyment symulacyjny.

**Języki symulacyjne**

Ostatnia kolumna w tabeli 2. odnosi się do Języków Symulacyjnych. W praktyce spotyka się języki programowania o ogólnym zastosowaniu (Pascal, C++, Delphi, itd.), które również mogą być zastosowane do budowania eksperymentów symulacyjnych. Zdarza się, tak jak jest to w przypadku programu SlamSystem, posiadającego typowe cechy symulatora (predefiniowane elementy), że można tworzyć dodatkowe aplikacje używając języków ogólnego zastosowania (w przypadku SlamSystem jest to Fortran).

Na rynku dostępne są także języki programowania, których zastosowanie ogranicza się przede wszystkim do rozwiązywania problemów symulacyjnych. Jako przykłady mogą służyć SIMAN - język do symulacji systemów produkcyjnych (SIMulation ANalysis program), czy GPSS (*General Purpose Simulation System*) - język przeznaczony do wybranych typów symulacji zdarzeń dyskretnych. Inne popularne języki symulacyjne to SIMSCRIPT i SIMULA.

Zastosowanie języków symulacyjnych pozwala na bardzo szczegółowe badanie analizowanych modeli, co w przypadku wyżej wspomnianych narzędzi jest utrudnione, ze względu na ich z góry określoną specyfikę zastosowań. Wadą ich jest natomiast to, że próby rozwiązania nawet stosunkowo prostych problemów wymagają długiego okresu czasu i podstawowej wiedzy z zakresu programowania.

Należy pamiętać, ze wszelkie klasyfikacje stają się utrudnione wraz z rozwojem technik symulacyjnych, gdyż wszystkie poszczególne klasy przenikają się nawzajem. Możliwe są także bardziej szczegółowe podziały narzędzi symulacyjnych, np. w ramach symulatorów często w literaturze wyróżnia się:

- "czyste" symulatory,
- symulatory z możliwością programowania.

A w przypadku języków symulacyjnych:

- języki symulacyjne z pewnymi elementami symulatorów
- języki symulacyjne.

### 2.7.1 Wady i zalety badania symulacyjnego systemów

Badanie zachowania się systemów przy użyciu modeli symulacyjnych są dobrze dostosowane do problemów, które są trudne lub wręcz niemożliwe do analitycznego rozwiązania. **Do najważniejszych zalet tej metody można zaliczyć**:

- **Możliwość analizy "what if".** Modele optymalizacyjne odpowiadają na pytanie, jakie wartości zmiennych decyzyjnych są najlepsze dla przyjętej funkcji celu. Przyczyną powstania trudności jest zwykle złożoność rozpatrywanego modelu. Zastosowanie zwykłych metod analitycznych wymaga przyjęcia nierealistycznych założeń i uproszczeń. W tej sytuacji decydent może woleć określić zbiór decyzji, symulować rezultaty i obserwować, co się dzieje z kryterium.

- **Łatwa w użyciu**. Symulacja nie wymaga skomplikowanego aparatu matematycznego. Decydent, który zna strukturę systemu może bez trudu opracować jego model przy użyciu aplikacji menadżerskich (np. arkusz kalkulacyjny). Model opisuje problem z punktu widzenia decydenta, który w łatwy sposób może go zrozumieć i kontrolować.

- **Kontrolowany eksperyment**. Model symulacyjny *explicite* pokazuje najważniejsze relacje w rozważanym problemie. Dlatego decydenci używają modeli do systematycznego szacowania proponowanych strategii działania w symulowanych warunkach i do oceny wpływu kluczowych elementów na system. Eksperymenty te prowadzone są bez naruszania działania aktualnego systemu. Można w ten sposób uniknąć decyzji prowadzących do fatalnych następstw ekonomicznych, politycznych czy socjalnych.

- **Kompresja czasu**. Eksperyment, który w rzeczywistym systemie trwałby miesiące czy lata, można przeprowadzić w ciągu kilku minut przy użyciu jego symulacyjnego modelu.

- **Laboratorium zarządzania.** Model ilustruje i pozwala lepiej poznać rzeczywisty proces. Gry wojenne, menadżerskie pozwalają uczestnikom zrozumieć relacje między zmiennymi decyzyjnymi a rezultatami oraz rozwinąć umiejętności decyzyjne.

Metoda ta posiada jednak wiele **ograniczeń, zktórych najbardziej istotne** to:

- **Nie gwarantuje optymalnego rozwiązania**. Podczas eksperymentu badane są tylko warianty podane przez użytkownika. Zawsze mogą istnieć lepsze układy zmiennych decyzyjnych, o których eksperymentator nie zdaje sobie sprawy.

- **Kosztowna**. Modelowanie złożonego systemu, wykonywanie wielu obserwacji oraz pisanie programów jest bardzo pracochłonne nawet przy użyciu wyspecjalizowanych narzędzi. W celu oszacowania pojedynczej statystyki należy wielokrotnie powtarzać przebieg symulacji.

- **Pozorna łatwość stosowania**. Często istnieje pokusa by stosować ją tam, gdzie można wyznaczyć rozwiązanie optymalne przy użyciu metod analitycznych. Ponadto nadmiar szczegółów wbudowanych w model może utrudnić przeprowadzenie eksperymentów

# 3 Symulacyjny model walki

Rozpatrzymy model dynamiki walki, przyjmując za podstawę model Lanchestera[22]. Najprostszym jest liniowy model, który w sposób stosunkowo prosty i dobrze przybliżający rzeczywistość opisuje walkę grup jednostek elementarnych o dużej licznosci.

Pierwsze prawo Lanchestera odnoszące się do wojen, w których „broń bezpośrednio przeciwstawiała się broni", a więc ogólnie rzecz biorąc, na szczeblach strategicznych do I wojny światowej. Sens prawa wyrażony jest równaniem:

$$E = \frac{n(t_0) - n(t_k)}{m(t_0) - m(t_k)} = \frac{N - n(t_k)}{M - m(t_k)}$$

gdzie $n(t_0) = N \; m(t_0) = M$ wyrażają ilości środków stron przed rozpoczęciem walki,

a

$n(t_k) m(t_k)$ odpowiednie siły po jej zakończeniu.

Pierwsze prawo Lanchestera wynika z następującego opisu dynamiki walki:

$$\begin{cases} \dfrac{dn}{dt} = \dfrac{1}{1+E} \\ \dfrac{dm}{dt} = \dfrac{1}{1+E} \end{cases}$$

Drugie prawo Lanchestera (zależność kwadratowa) odpowiada wojnom współczesnym (do II wojny światowej), gdy należy uwzględniać również możliwości bezpośredniego oddziaływania środków walki:

$$E = \frac{N^2 - n^2(t_k)}{M^2 - m^2(t_k)}$$

Klasyczny model Lanchestera oparty jest na następujących założeniach:

---

[22] W. F. Lanchester, Aircraft in Modern Warfare, the Dawn of the Fourtf Arm. Constable and co, London 1916.

- każdy środek dopóki nie jest zniszczony realizuje losowy strumień strzałów ze średnią szybkostrzelnością $\lambda^A$ ($\lambda^B$), który jest procesem Poissona;
- jednym strzałem nie można zniszczyć więcej niż jeden środek;
- jeżeli ostrzeliwana jednostka została rażona, ogień natychmiast przenosi się na inna tego typu, a jednostka rażona nie bierze udziału w walce;
- czas lotu pocisku do celu można nie uwzgledniać w porównaniu z ogólnym czasem trwania walki;
- sumaryczny potencjał bojowy każdej strony jest proporcjonalny do wartości oczekiwanej liczby ocalałych środków.

Sformułujmy problem optymalizacji procesu walki dla przypadku niejednorodnych środków walki[23]

Niech dany będzie zbiór typów środków walki poszczególnych stron:

$$\mathbf{J^A = \{1, ..., i, ..., I^A\}}$$
$$\mathbf{J^B = \{1, ..., j, ..., J^B\}}$$

oraz znane są charakterystyki tych środków

$$\mathbf{M_i,\ \lambda^A_i,\ P^A_{ij}(t) \quad oraz \quad N_j,\ \lambda^B_j,\ P^B_{ji}(t)}$$

**dla $\mathbf{i \in J^A,\ j \in J^B}$.**

Określa się wielkości, które posłużą jako zmienne decyzyjne:

$X^A_{ij}(t)$ – stosunek liczności tej części grupy środków typu i, która w chwili t prowadzi ogień do środków typu j – do całkowitej liczności grupy środków typu i;

$Y^B_{ji}(t)$ - stosunek liczności tej części grupy środków typu j, która w chwili t prowadzi ogień do środków typu i – do całkowitej liczności grupy środków typu j.

Wielkości te spełniają następujące warunki:

$0 <= X^A_{ij}(t), \quad 0 <= Y^B_{ji}(t)$

---

[23] A. Chojnacki, Modelowanie matematyczne i algorytmizacja planowania działań bojowych. Rozprawa doktorska, WAT, 1976.

$$\sum_{j=1}^{J^B} X_{ij}^A(t) \leq 1, \quad \sum_{i=1}^{I^A} Y_{ji}^B(t) \leq 1$$

Wtedy równania dynamiki walki mają postać:

$$\begin{cases} \dfrac{dm_i(t)}{dt} = & -\sum_{j=1}^{J^B} \lambda_j^B P_{ji}^B(t) Y_{ji}^B(t) n_j(t) \\ \dfrac{dn_j(t)}{dt} = & -\sum_{i=1}^{J^A} \lambda_i^A P_{ij}^A(t) X_{ij}^A(t) m_i(t) \end{cases}$$

dla warunków początkowych $m_i(0)=M_i$, $n_j(0)=N_j$.

Wprowadźmy funkcje oceny efektywności dla stron walczących, posiadające sens różnicy ważonych strat:

Dla strony A:

$$E_A = \sum_{j=1}^{J^B} \omega_j^B (N_j - n_j(t)) - \sum_{i=1}^{I^A} \omega_i^A (M_i - m_i(t))$$

Dla strony B – analogicznie.

Ponieważ rozwiązanie problemu $\langle m(t), n(t) \rangle$ zależy od wyboru $(x, y) \in X \times Y$, gdzie:

$$\mathbf{X=\{X^A_{ij}: i \in J^A, j \in J^B\}, Y=\{Y^B_{ji}: j \in J^B, i \in J^A\},}$$

więc także m(T) i n(T) zależy od (x, y) przy ustalonym T>0, wtedy możemy zapisać, że:

$$\begin{cases} E_A = E_A(x,y) \\ E_B = E_B(x,y) \end{cases}$$

Strona A wybiera taki sposób sterowania ogniem $x^* \in X$, aby zmaksymalizować swój efekt $E_A$ przewidując odpowiednie przeciwdziałanie nieprzyjaciela, tzn.

$$E_A(x^*, y) = \max_{x \in X} E_A(x, \hat{y}) = \max_{x \in X} \min_{y \in Y} E_A(x, y)$$

Analogicznie zakładamy postępowanie strony B:

$$E_B(x, y^*) = \max_{y \in Y} E_B(\hat{x}, y) = \max_{y \in Y} \min_{x \in X} E_B(x, y)$$

W ten sposób, wychodząc od modelu walki typu Lanchestera, otrzymujemy zagadnienie optymalizacji sterowania ogniem (uderzenia ogniowego). Do rozwiązania tego złożonego problemu stosowana jest zasada maksimum Pontriagina.

Uogólniając dotychczasowe rozważania powiemy, że w procesie modelowania systemu walki dążymy do:

**opisu dynamiki walki** – intensywności wzajemnego oddziaływania ogniowego stron walczących

$$\begin{cases} \dfrac{d\,PB^A(t)}{dt} = \varphi_A^B(x, y, t) \\ \dfrac{d\,PA^B(t)}{dt} = \varphi_B^A(x, y, t) \end{cases}$$

dla $\mathbf{PB^A(t_0) = PB^A_0 > 0, PB^B(t_0) = PB^B_0 > 0}$.

W celu obserwacji zmian potencjału bojowego stron walczących w badanym okresie czasu, ze szczególnym uwzględnieniem takiego momentu $t_g$, w którym nastąpi spadek potencjału jednej ze stron poniżej pewnej przyjętej wartości granicznej, tj.

$\mathbf{PB^A(t_g) < PB_g}$ **lub** $\mathbf{PB^B(t_g) < PB_g}$.

**określenia funkcji (funkcjonału) efektywności walki**, pozwalającej określić wielkość uzyskanych korzyści stron walczących, zależnej od przyjętych zmiennych opisujących proces walki:

$$\begin{cases} E_A = E_A\left(PB^A(t), PB^B(t), x(t), y(t), t\right) \\ E_B = E_B\left(PB^A(t), PB^B(t), x(t), y(t), t\right) \end{cases}$$

**sformułowania, a następnie rozwiązanie problemu optymalizacji** decyzji walczących stron, tj. określenia takich decyzji do walki, które zapewniają maksymalne efekty danej stronie walczącej:

$$x^*: \quad E_A(x^*) \geq E_A(x) \qquad dla\ x \in X$$

lub

$$y^*: \quad E_B(y^*) \geq E_B(y) \qquad dla\ y \in Y$$

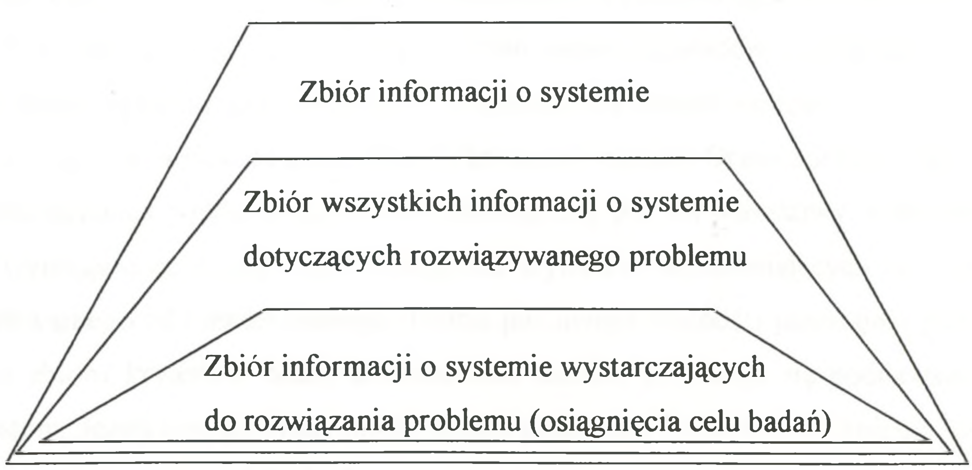
Rozważane modele były typu deterministycznego. Dla modeli tych istnieją odpowiednie modele probabilistyczne, z reguły bardziej skomplikowane. Stanowią one zapewne lepsze przybliżenie rzeczywistej walki, niż w przypadku założeń o determinizmie. Jednakże w obu przypadkach mamy do czynienia ze znacznym poziomie ogólności i znacznym idealizowaniem rzeczywistego współczesnego pola walki. Nie przesądza to bynajmniej o użyteczności tych modeli w procesie systemowego modelowania procesów walki. Komputerowa realizacja tych modeli pozwala na analizę wpływu poszczególnych czynników na przebieg walki, prognozowanie stosunku sił i dynamiki zmian potencjału bojowego, itp. Korzyści płynące z tego typu badań mogą być zatem znaczne, oczywiście w warunkach pełnej świadomości przyjętych uproszczeń i założeń idealizujących złożoną rzeczywistość (walkę, bitwę, operację).

# 4 Ocena adekwatności modelu symulacyjnego

Ocena adekwatności modelu symulacyjnego, działania badanego systemu do rzeczywistej realizacji w nim procesów, w istocie sprowadza się do weryfikacji hipotezy o zgodności rozkładów parametrów bądź regresji ustalonych wielkości, ze względu na które dokonywana jest ta ocena. Brak podstaw do odrzucenia wymienionych hipotez interpretujemy jako brak podstaw do odrzucenia pierwotnej hipotezy o adekwatności modelu symulacyjnego działania systemu, generowanego za pomocą opracowanego algorytmu badania symulacyjnego systemu.

## 4.1 Istota zagadnienia oceny adekwatności modelu symulacyjnego

Każdy model matematyczny systemu, w oparciu o który przeprowadzana jest analiza jego działania, stanowi odzwierciedlenie naszej wiedzy o zjawiskach /procesach/ zachodzących w badanym systemie. Dokładność opisu tych zjawisk zalety od celu badań, do których realizacji opracowuje się model, Dlatego też przy opracowywaniu modelu systemu ważnym zagadnieniem jest ustalenie informacji /wielkości charakteryzujących badany system i relacji między nimi/, mających istotny wpływ na wynik rozwiązania problemu. Zależność między zbiorem informacji o działaniu systemu dotyczących rozwiązywanego problemu i zbiorem informacji wystarczających do rozwiązania problemu pokazuje rys. 9.




Rys. 9. Relacje pomiędzy zbiorami informacji w systemie

Model uwzględniający zbyt wiele czynników staje się nadmiernie rozbudowany (w stosunku do celu), a tym samym stwarza duże trudności w wyznaczeniu pożądanych charakterystyk działania systemu, Stopień szczegółowości modelu, przy stosowaniu symulacyjnej metody badania systemu, może być ograniczony: pojemnością pamięci systemu komputerowego (na którym będą przeprowadzone eksperymenty symulacyjne), czasem trwania eksperymentów, dopuszczalnym czasem trwania badań. Z kolei, w przypadku małej szczegółowości modelu systemu, cel badań może nie być osiągnięty w stopniu zadowalającym.

Model spełnia swoje zadania wtedy, gdy za jego pośrednictwem otrzymujemy, zgodnie z celem badań, informacje o zachowaniu się systemu. Charakterystyki jego działania, wyznaczone na podstawie modelu, zależą od jego adekwatności do rzeczywistości. Adekwatność modelu rozumiana jest jako zgodność opisu procesów badanych z ich rzeczywistym przebiegiem (w sensie przyjętego wskaźnika). Konieczne jest zatem zdefiniowanie wskaźnika adekwatności (dobroci modelu), na podstawie którego można byłoby ocenić jego jakość. Gdy okaże się, że jakość modelu według przyjętego wskaźnika jest niezadowalająca, w kolejnym kroku można ją poprawić poprzez uwzględnienie większej liczby czynników (zmiennych) w modelu, bądź też przez uszczegółowienie zależności między nimi. Pożądanym byłoby, aby wskaźnik adekwatności modelu ujmował takie składowe, jak:

- cena modelu nie ulepszonego;
- koszt wprowadzenia ulepszenia;
- niezbędne badania dodatkowe systemu rzeczywistego i czas ich trwania,

W praktyce modele systemów opracowuje się iteracyjnie. W metodzie iteracyjnej modele o pierwszym stopniu złożoności charakteryzuje się prostym opisem matematycznym. Na podstawie wyników uzyskanych w oparciu o ten model doświadczenie oraz wyników dodatkowych badań systemu rzeczywistego, opracowuje się model następny. Proces iteracyjny trwa aż do uzyskania modelu adekwatnego do rzeczywistości. Ocena adekwatności dowolnego modelu oznacza poddanie go testowi (próbie), czy jest on prawdziwy. Poddanie modelu testowi wymaga uprzedniego określenia zbioru kryteriów, umożliwiających odróżnienie modelu adekwatnego od nieadekwatnego. Biorąc pod uwagę trudności powstające przy próbach ustalenia zbioru kryteriów oceny adekwatności modeli, proponuje się poddawanie modelu kilku testom, Jeżeli rozpatrywany model będzie pomyślnie "przechodził" kolejne testy, nasze zaufanie, pokładane w modelu, będzie wzrastać.

Zagadnienie oceny adekwatności modelu symulacyjnego, najogólniej, polega na opracowaniu reguły decyzyjnej, która na podstawie wyników eksperymentów przeprowadzonych na badanym systemie lub wyników badań jego modeli - całości bądź fragmentów) i zaobserwowanych realizacji modelu symulacyjnego działania systemu, uzyskanego w oparciu o opracowany algorytm symulacyjny, pozwala stwierdzić:

- nie ma podstaw do odrzucenia hipotezy o adekwatności modelu symulacyjnego do procesu zachodzącego w badanym systemie, bądź;
- uzyskane wyniki przeczą prawdziwości hipotezy o adekwatności modelu symulacyjnego.

Zagadnienie oceny adekwatności modelu symulacyjnego sprowadzamy zatem do weryfikacji postulowanej hipotezy (sądu) o jego zgodności z procesem symulowanym, zachodzącym w badanym systemie. Jest to ocena ostrożna - nie mówimy bowiem, że model jest adekwatny - i jednocześnie typowa dla teorii weryfikacji hipotez statystycznych.

## 4.2 Metody oceny adekwatności modelu symulacyjnego

Wyniki pośrednie eksperymentu symulacyjnego pozwalają przeprowadzić predykcję retrospektywną procesów zachodzących w badanym systemie (rzeczywistym lub projektowanym) przy określonych założeniach. Uzyskana predykcja umożliwia ocenę zgodności modelu symulacyjnego z rzeczywistym procesem badanym.

Wyróżnia się dwa etapy oceny adekwatności modelu symulacyjnego (uzyskanego na podstawie algorytmu symulacji) do procesu badanego, w oparciu o predykcję retrospektywną:

- ocena poprawności wyznaczania historii stanów modelu symulacyjnego (ocena jakościowa/;
- ocena zgodności wartości określonych charakterystyk uzyskanych z eksperymentu symulacyjnego z wartościami charakterystyk otrzymanych z eksperymentu na systemie badanym lub wyznaczonych na drodze analitycznej /ocena ilościowa/.

Oceny poprawności wyznaczania historii stanów modelu symulacyjnego dokonuje się na podstawie pośrednich wyników obliczeń programu badania symulacyjnego, Sprawdza się zgodność w czasie realizacji zdarzeń /stanów/ modelu symulacyjnego /procesu symulującego proces badany/ i procesu badanego.

Ponadto sprawdza się, czy w czasie realizacji eksperymentów, właściwie realizowany jest proces obserwacji tych wielkości, które będą wykorzystywane do statystycznego wnioskowania o wartościach wyznaczanych charakterystyk systemu.

W etapie drugim, w oparciu o przyjęte kryteria /zbiór kryteriów/, dokonywana jest ilościowa ocena adekwatności modelu symulacyjnego.

Pożądanym jest, aby weryfikację adekwatności modelu symulacyjnego przeprowadzać w oparciu o wyniki uzyskane na podstawie eksperymentu symulacyjnego i eksperymentu na systemie badanym, Polega ona na porównaniu zgodności (w sensie przyjętego kryterium/ wartości estymatorów określonych charakterystyk uzyskanych w oparciu o wyniki obserwacji procesu badanego i jego modelu symulacyjnego (podczas eksperymentów przeprowadzonych przy tych samych założeniach/. W przypadku zgodności wyników możemy przyjąć, że model symulacyjny jest adekwatny do procesu badanego ze względu na dane charakterystyki przy danym kryterium, przy przyjętych założeniach. Pozwoli to nam postawić hipotezę, że przy zmienianych założeniach również wystąpi zgodność. modelu symulacyjnego i procesu badanego.

Jeżeli eksperymenty na systemie rzeczywistym mogą być przeprowadzone jedynie na poziomie podsystemów danego systemu, wówczas postępowanie jest analogiczne, z tym, że przy podawaniu wyników oceny adekwatności należy szczegółowo określić warunki, (założenia) w jakich dokonano oceny.

W przypadku modeli symulacyjnych działania systemów projektowanych lub systemów, na których nie można przeprowadzić badań empirycznych, stopień adekwatności modelu można określić w oparciu o odpowiednie charakterystyki badanego procesu wyznaczone analitycznie.

## 4.3 Kryteria ilościowej oceny adekwatności modeli symulacyjnych

Podstawowym zagadnieniem **ilościowej oceny adekwatności** modelu symulacyjnego jest ustalenie <u>wskaźnika zgodności modelu symulacyjnego z badanym procesem</u> oraz <u>aparatu matematycznego</u>, który umożliwiałby rozstrzygnięcie, czy dany model jest, czy też nie jest adekwatny.

Wyróżnia się dwa podstawowe rodzaje wskaźników adekwatności modeli symulacyjnych:

- **wskaźniki efektywności działania systemu,**
- **wskaźniki, statystycznej zgodności właściwości probabilistycznych badanego procesu i jego modelu symulacyjnego**.

W pierwszym przypadku, jeżeli (przy identycznych założeniach) efektywności działania systemu wyznaczone na podstawie obserwacji działania badanego systemu oraz na podstawie eksperymentu symulacyjnego są statystycznie zgodne, w sensie przyjętego kryterium, to nie ma podstaw do odrzucenia hipotezy o adekwatności modelu symulacyjnego do procesu zachodzącego w badanym systemie. Przykładowymi wskaźnikami efektywności działania systemu mogą być: liczba zniszczonych środków walki strony przeciwnej, ilość wytwarzanych wyrobów w jednostce czasu, zysk ekonomiczny zakładu w jednostce czasu itp,

W przypadku drugim na podstawie obserwacji wartości określonych wielkości podczas eksperymentu na systemie badanym i eksperymentu symulacyjnego /jego wyników/ ustala się zgodność właściwości probabilistycznych procesu zachodzącego w badanym systemie i modelu symulacyjnego badanego procesu.

W obu wyróżnionych przypadkach zachodzi konieczność wyznaczenia obszaru krytycznego dla przyjętego wskaźnika zgodności procesu badanego z jego modelem. Wyznaczony obszar krytyczny pozwoli jednoznacznie rozstrzygnąć o adekwatności modelu symulacyjnego. Obszar krytyczny wskaźnika adekwatności modelu symulacyjnego, a więc stopień dokładności reprezentowania właściwości badanego procesu przez model symulacyjny, zależy od celu badań. Wzrost stopnia adekwatności modelu wiąże się zazwyczaj ze złożonością algorytmu symulacyjnego. Zwiększa się przez to czas jego opracowania oraz czas trwania eksperymentów, a w konsekwencji czas trwania badań i uzyskania rozwiązania problemu.

Dalsze rozważania dotyczące adekwatności modeli symulacyjnych zostaną przeprowadzone w oparciu o wskaźniki statystycznej zgodności właściwości probabilistycznych badanego systemu i jego modelu.

## 4.4 Sformułowanie problemu statystycznej ocenu adekwatności modelu symulacyjnego

Rozpatrywać będziemy procesy zachodzące w systemach badanych, które możemy opisać za pomocą procesów stochastycznych, ergodycznych[24] i stacjonarnych[25] w szerszym sensie[26], Ze względu na stacjonarność procesów stochastycznych nie-będą nas interesować wartości parametru t, dla których rejestrowane są wyniki obserwacji procesów fizycznych; lecz kolejność dokonywania obserwacji. Wprowadzimy następujące oznaczenia:

$$(Y_k)_{k=\overline{1,m}} = (Y(t_k))_{t_k \in \Pi} \quad ; k = \overline{1,m},$$

$$(\widetilde{Y}_i)_{i=\overline{1,n}} = (Y(t_i))_{t_i \in \Pi} \quad ; i = \overline{1,n},$$

gdzie:

- $Y_k$ - wektor losowy otrzymany z eksperymentu na systemie rzeczywistym, przy czym jego realizacje $(Y_k)$ $y_k \in \Re^p, p \in N$
- m - liczba obserwacji stanu systemu rzeczywistego;
- p - liczba wielkości (procesów składowych działania systemu), uwzględnianych przy ocenie adekwatności modelu symulacyjnego działania badanego systemu;
- $\widetilde{Y}_i$ - wektor losowy otrzymany z eksperymentu symulacyjnego, przy czym jego realizacje: $\widetilde{y}_k \in \Re^p, p \in N$
- n - liczba obserwacji uzyskanych podczas eksperymentu symulacyjnego, przeprowadzonego w celu dokonania oceny adekwatności modelu symulacyjnego badanego systemu,

Przyjmiemy założenie, że elementy ciągów losowych otrzymane z eksperymentu na systemie rzeczywistym oraz, elementy ciągów losowych otrzymane z eksperymentu symulacyjnego mogą posiadać zarówno korelację wzajemną, jak i autokorelację.

---

[24] *Ergodyczny proces stochastyczny* – to proces o niezmiennych stanach.

[25] *Stacjonarny proces stochastyczny* – to proces losowy X(t), jeżeli pierwszy i drugi moment nie zależy od czasu. Oznacza to, że E[X(t)] nie zależy od t, a E[X(t)X(t+τ)] zależy tylko od τ.

[26] *Proces stacjonarny w węższym sensie* (*ściśle stacjonarny*) – gdy wszystkie jego charakterystyki nie zmieniają się przy zmianie punktu odniesienia na osi czasu. *Proces stochastyczny w szerszym sensie* (*słabo stacjonarny*) – gdy ma stałą wartość oczekiwaną, a jego funkcja korelacyjna zależy wyłącznie od różnicy argumentów.

Wprowadzimy miarę odległości wyników eksperymentu symulacyjnego od wyników eksperymentu w systemie rzeczywistym i oznaczymy:

$$W_{mn} = w\left(\left(Y_k\right)_{k=\overline{1,m}}, \left(\widetilde{Y}_i\right)_{i=\overline{1,n}}\right)$$

Wyniki obserwacji $Y_k$ i $\widetilde{Y}_i$ są zmiennymi losowymi, stad wielkość $W_{mn}$ jest również zmienną losową. Oceny adekwatności modelu symulacyjnego działania systemu będziemy dokonywać za pomocą funkcji decyzyjnej określonej wzorem:

$$d\left(w_{mn}\right) = \begin{cases} a_0, jezeli & w_{mn} \notin WI_{mn}^{kr} \\ a_1, jezeli & w_{mn} \in WI_{mn}^{kr} \end{cases}$$

gdzie:

- $a_0$ – nie ma podstaw do odrzucenia hipotezy o adekwatności uzyskanego modelu symulacyjnego do procesu zachodzącego w badanym systemie - opracowany algorytm badania symulacyjnego poprawnie odtwarza badany proces fizyczny;
- $a_1$ – uzyskane wyniki przeczą prawdziwości hipotezy o adekwatności uzyskanego modelu symulacyjnego do procesu zachodzącego w badanym systemie – opracowany algorytm badania symulacyjnego nie odtwarza poprawnie badanego procesu. Zachodzi konieczność jego modyfikacji.

$WI_{mn}^{kr}$ - zbiór krytyczny wartości zmiennej losowej $W_{mn}$, w teście.

**Algorytm postępowania przy ocenie adekwatności modelu symulacyjnego w oparciu o predykcję retrospektywną procesów zachodzących w badanym systemie**

Bezpośrednim efektem symulacji działania systemu badanego jest retrospektrywna predykcja procesów zachodzących w tym systemie. Każdy eksperyment symulacyjny jest przeprowadzany przy określonych założeniach zgodnych z warunkami działania badanego systemu. Wówczas, porównując wyniki, dokonanych podczas działania systemu oraz eksperymentu symulacyjnego obserwacji ustalanych wielkości, możemy wypowiedzieć się o zgodności mechanizmów generowania procesów przyjętych w algorytmie symulacyjnym z mechanizmami procesów w rozpatrywanym systemie.

Postępowanie umożliwiające ocenę adekwatności modelu symulacyjnego do procesu badanego, dla ustalonego celu badania systemu, przy iteracyjnej metodzie opracowywania algorytmu badanie przedstawiono na rys. 9.

Liczba wielkości, ze względu na które dokonywana jest ocena adekwatności modelu symulacyjnego, może być większa od jedności (p>1). Wówczas w wyniku eksperymentów na systemie badanym i symulacyjnego uzyskujemy dwa ciągi wartości wektorów losowych.

Współrzędne każdego z tych wektorów mogą posiadać autokorelację oraz mogą być statystycznie zależne lub posiadać korelację wzajemną. Jeżeli między poszczególnymi współrzędnymi wektorów losowych, zarówno $Y \; i \; \widetilde{Y}$ nie ma zależności statystycznej, to oceny adekwatności dokonuje się na postawie funkcji decyzyjnej.

$$d\left(\left(Y_k\right)_{k=\overline{1,m}}, \left(\widetilde{Y}_i\right)_{i=\overline{1,n}}\right) = \begin{cases} a_0 - jezeli \bigcap\limits_{l=\overline{1,p}} Y^l_{\varphi_a} \widetilde{Y}^l \\ a_1 - w \; pozostalych \; przypadkach \end{cases}$$

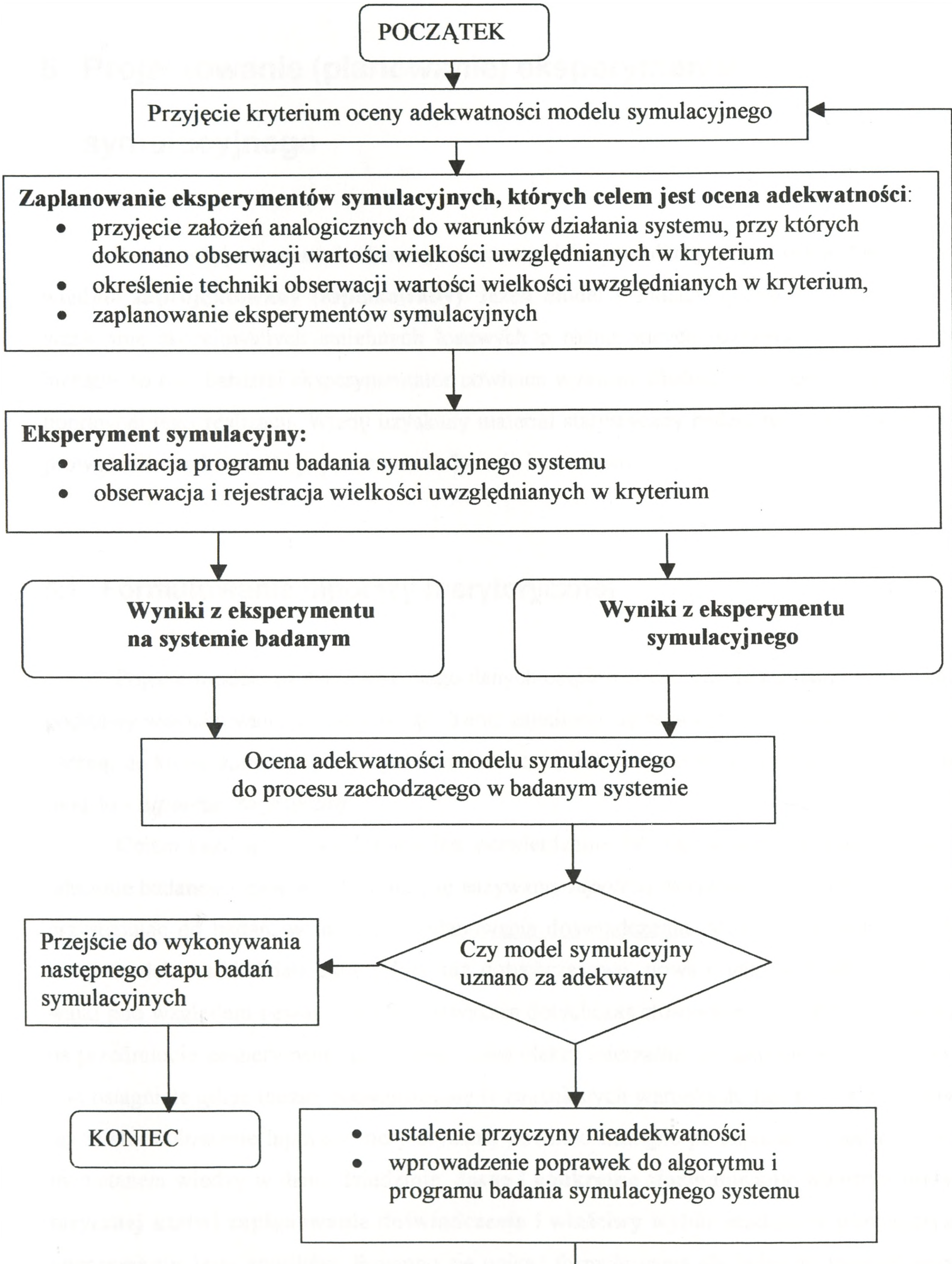
gdzie:

- $a_0$ – nie ma podstaw do odrzucenia hipotezy adekwatności uzyskanego modelu symulacyjnego do procesu zachodzącego w badanym systemie, opracowany algorytm badania symulacyjnego poprawnie odtwarza badany proces fizyczny;
- $a_1$ – uzyskane wyniki przeczą prawdziwości hipotezy o adekwatności uzyskanego modelu symulacyjnego do procesu zachodzącego w badanym systemie – opracowany algorytm badania symulacyjnego nie odtwarza poprawnie badanego procesu. Zachodzi konieczność jego modyfikacji.

W przypadku statystycznej zależności, bądź korelacji między współrzędnymi wektorów $Y \; i \; \widetilde{Y}$, oceny adekwatności można dokonać różnymi metodami. Wybór zależy od właściwości probabilistycznych obu wektorów losowych $Y \; i \; \widetilde{Y}$. Jeżeli wektory te mają rozkłady normalne lub można je sprowadzić do rozkładu normalnego, oceny adekwatności można dokonać za pomocą testu Hotellinga. Funkcja decyzyjna w tym teście ma postać:

$$d\left(w_{mn} = t^2_{mn}\right) = \begin{cases} a_0, & jezeli \; t^2_{mn} \notin WI^{kr}_{mn} \\ a_1, & jezeli \; t^2_{mn} \in WI^{kr}_{mn} \end{cases}$$

Zbiór krytyczny $WI^{kr}_{mn}$ funkcji decyzyjnej wyznacza się na podstawie statystyki $T^2$ Hotellinga.




Rys. 10. Algorytm oceny adekwatności modelu do badanego systemu

# 5 Projektowanie (planowanie) eksperymentu symulacyjnego

Każdy **eksperyment badawczy**, a szczególnie symulacyjny **powinien być odpowiednio zaprojektowany (zaplanowany)**. Jeżeli model symulacyjny jest złożony z wielu wzajemnie skorelowanych zmiennych losowych o różnorodnych rozkładach prawdopodobieństw, to tym bardziej eksperymentator powinien wykazać dbałość o zachowanie prawideł poprawnej jego realizacji. Wtedy uzyskany materiał statystyczny będzie wartościowy, a wyprowadzone stąd wnioski poprawne metodycznie i rzeczowo.

## 5.1 Formułowanie hipotezy merytorycznej

Pojęcie modelu probabilistycznego danych empirycznych przedstawiliśmy omawiając podstawy wnioskowania statystycznego. Teraz zajmiemy się relacją między ***hipotezą merytoryczną***, do której sprawdzenia danych ma dostarczyć doświadczenie, a jej odpowiednikiem w modelu - ***hipotezą statystyczną***.

Celem każdego doświadczenia jest potwierdzenie lub zaprzeczenie pewnej hipotezie odnośnie badanego zjawiska. Hipotezę tę nazywamy *hipotezą merytoryczną*. Formułuje się ją przystępując do badań, w momencie planowania doświadczenia. Może to być hipoteza, że nowy środek walki działa skuteczniej niż dotychczasowe, nowa organizacja sił i środków walki pod względem pewnych cech przewyższa dotychczas stosowane, czy jakiś inny zabieg na przedmiocie eksperymentu przyniesie nowe efekty mierzalne lub jakościowe czy też wyniki osiągnięte gdzie indziej potwierdzą się w zmienionych warunkach. Jest rzeczą zrozumiałą, że sformułowanie hipotezy merytorycznej powinno nastąpić po zapoznaniu się z aktualnym stanem wiedzy w danej dziedzinie. **Jasne i konkretne sformułowanie hipotezy merytorycznej ułatwi zaplanowanie doświadczenia i właściwy wybór modelu w późniejszym opracowaniu jego wyników**. Powinno się unikać formułowania dla jednego doświadczenia zbyt złożonych hipotez, ażeby możliwa była realizacja jego celu - jednoznaczna odpowiedź na postawione pytania. Właśnie dążenie do jednoznaczności wyniku weryfikacji hipotezy leży u podłoża zasady prostoty i oszczędności w planowaniu doświadczeń: doświadczenie powinno zawierać jak najmniej elementów zmiennych, a porównywane grupy jednostek doświadczalnych powinny różnić się w miarę możliwości tylko czynnikiem badanym.

## 5.2 Formułowanie hipotezy statystycznej

Z drugiej strony, ***hipoteza statystyczna***, którą weryfikuje się za pomocą testów statystycznych, musi być jednoznacznym odwzorowaniem hipotezy merytorycznej, tak, aby wnioski statystyczne mogły być bez zastrzeżeń i wątpliwości transponowane na wnioski merytoryczne. Czasami, ze względu na wymóg testowania hipotez prostych, hipoteza statystyczna jest zaprzeczeniem hipotezy merytorycznej.

Wielką rolę w doświadczalnictwie odgrywają modele liniowe, prowadzące do analizy wariancji (bądź analizy regresji) wyników eksperymentów. Stwierdzić należy, że matematyczne modele liniowe zwane w literaturze statystycznej również *hipotezami liniowymi,* są adekwatnymi modelami wielkiej klasy hipotez merytorycznych, sprawdzanych doświadczalnie. Zachodzi to w tych eksperymentach, w których badamy wpływ czynników kontrolowanych (czy jednego czynnika) na cechy mierzalne jednostek doświadczalnych, przy czym każdy z czynników występuje co najmniej w dwóch poziomach. Hipoteza merytoryczna w doświadczeniach czynnikowych dotyczy zróżnicowanego oddziaływania ich poziomów na określone cechy jednostek zbiorowości będącej przedmiotem badań. Znajduje ona odzwierciedlenie w hipotezie liniowej w postaci addytywnych składników wartości oczekiwanej każdej obserwacji. Testując hipotezę o zerowaniu się tych składników sprawdzamy hipotezę merytoryczną. Podobnie hipotezy o współzależnościach między cechami jednostek badanych w doświadczeniu sprawdza się ***metodą analizy regresji***, ***analizy związku stochastycznego*** między zmiennymi losowymi, będącymi modelami probabilistycznymi cech obserwowanych doświadczalnie.

### 5.2.1 Zasady statystyczne planowania eksperymentów

Wątpliwości temu podobnych nie będzie, jeżeli wyraźnie określimy, bądź uświadomimy sobie, co stanowi populację generalną, dla której są formułowane wnioski z danych empirycznych, a właściwie - czego dotyczy hipoteza merytoryczna. Ostateczne wyjaśnienie tych kwestii poprzedzimy wprowadzeniem bardzo ogólnego modelu, któremu podlega każda obserwacja ilościowa $\mathbf{y_i}$ uzyskiwana doświadczalnie:

$$y_i = m + a + e_i,$$

gdzie:

- $i$ - jest numerem jednostki doświadczalnej;
- $m$ - jest średnią ogólną w populacji generalnej, poziomem odniesienia badanej wielkości.
- $a$ - reprezentuje w modelu efekty spowodowane zmiennymi czynnikami kontrolowanymi w eksperymencie (odmiany, technologie, zabiegi itp.)
- e - jest specyficznym efektem przyczyn losowych, nie poddających się kontroli eksperymentatora, nazywanym *błędem losowym*

Składnik $a$ może być rozdzielony na części, gdy w doświadczeniu bada się równocześnie zmiany kilku czynników, tzn. kilku źródeł zmienności obserwacji. Również składnik $e$ może ulec dekompozycji na losowe wprawdzie, ale dające się wyodrębnić źródła zmienności. Wartość oczekiwana obserwacji $y_i$ jest równa $m+a$, zaś wariancja $D^2(y_i) = D^2(e_i)=\sigma^2_e$, czyli równa jest wariancji błędu losowego.

Wyodrębniając różne źródła zmienności losowej zakłada się, że są one niezależne i rozdziela się ich wariancję na części: jeżeli $e_i = e_i^1 + e_i^2 + \ldots$, to... $\sigma_e^2 = \sigma_{e_1}^2 + \sigma_{e2}^2 + \cdots$ Jeżeli na tej samej jednostce można zaobserwować wielokrotnie (r razy) efekt działania danego źródła (np. drugiego) i obserwacja $y_i$ jest średnią pomiarów z tych powtórzeń, to

$$\sigma_e^2 = \sigma_{e_1}^2 + \frac{1}{r}\sigma_{e2}^2$$

Tak więc, zwiększając wielokrotność r można wyeliminować efekt tego źródła ze zmienności (tu: drugiego). To postępowanie jest uzasadnione, gdy $\sigma_{e_1}^2 \approx \sigma_{e2}^2$. Gdy $\sigma_{e_1}^2 \geq \sigma_{e2}^2$ powtarzanie pomiarów jest bezprzedmiotowe.

Aby uściślić wnioskowanie o stałych parametrach modelu (***m*** i ***a***), trzeba zwiększyć liczbę obserwacji przy ustalonych warunkach wszystkich czynników kontrolowanych.[27]

---

[27] Błąd średniej jest praktycznie proporcjonalny do pierwiastka kwadratowego z liczby badanych obiektów [21].

Obserwacje uzyskiwane z różnych jednostek doświadczalnych w tym samym obiekcie nazywamy *powtórzeniami*. Konieczność istnienia powtórzeń, czyli obserwacji różnych jednostek doświadczalnych, wynika z dwóch powodów:

- zapewnienia możliwości oceny wariancji błędu losowego $\sigma^2_e$,
- zwiększenia reprezentatywności próby przez zmniejszenie błędów ocen średnich stanowiących podstawę wnioskowania.

### 5.2.2 Dobór czynników i obiektów doświadczalnych, sformułowanie modelu matematycznego dla układu empirycznego

**Dobór czynników i określenie obiektów doświadczalnych** jest kolejnym etapem planowania doświadczenia po sformułowaniu hipotezy merytorycznej. Hipoteza merytoryczna określa zestaw czynników kontrolowanych, których zmienne poziomy będą uwzględnione w doświadczeniu, pozostałe powinny być ustalone na jednakowym poziomie dla zapewnienia porównywalności obiektów. Jednakże często nie udaje się ustalić na określonym poziomie, a przez to wyeliminować wpływu czynników zakłócających.

Ustalając czynniki nie interesujące badacza, a występujące w naturalnym środowisku, na ustalonym poziomie należy mieć świadomość ograniczoności wnioskowania z tak zaplanowanego eksperymentu ze względu na często występujący synergizm, współdziałanie czynników. Zwykle te pomijane czynniki ustalane są na pewnym średnim poziomie.

Jeżeli badane czynniki, lub część z nich, mają charakter ilościowy, to z reguły chodzi o wyznaczenie optymalnych ich poziomów, tzn. takiej kombinacji, przy której pożądane cechy mierzalne jednostek doświadczalnych osiągają wartości maksymalne. Wtedy z punktu widzenia późniejszej analizy statystycznej wyników doświadczenia pożądane byłoby ułożenie poziomów tych czynników w doświadczeniu w równych odstępach.

W **doświadczeniach wieloczynnikowych** obiekty doświadczalne tworzymy na zasadzie kombinacji poziomów wszystkich uwzględnionych w doświadczeniu czynników. Najczęściej tworzy się tzw. *klasyfikację krzyżową* łącząc każdy poziom pierwszego czynnika $A$ z każdym poziomem drugiego czynnika $B$, a te kolejno ze wszystkimi poziomami następnych czynników. Oznaczając symbolem

$\{A_i, i = 1, 2, \ldots, a\}$ zbiór poziomów czynnika A,

$\{B_j, j = 1, 2, \ldots, b\}$ - zbiór poziomów czynnika B,

$\{C_k, k = 1, 2, \ldots, c\}$ - zbiór poziomów czynnika C itd.,

obiekty oznaczamy symbolami $A_1B_1, A_1B_2, \ldots, A_iB_j$ - w doświadczeniu dwuczynnikowym, $A_iB_jC_k$ - w doświadczeniu trójczynnikowym itd.

Łącznie zatem w doświadczeniu jednoczynnikowym otrzymujemy *a* obiektów, w doświadczeniu dwuczynnikowym - *ab* obiektów, w doświadczeniu trójczynnikowym - *abc* obiektów itd. Jak widać, liczba obiektów szybko rośnie wraz ze wzrostem liczby czynników i ten fakt narzuca ograniczenia liczby czynników badanych równocześnie w jednym eksperymencie.

Drugim sposobem łączenia poziomów czynników badanych jest ustawienie ich w hierarchii i gniazdowe umieszczanie poziomów czynnika podrzędnego w poziomach nadrzędnego. Zazwyczaj hierarchia taka wynika z natury badanego zjawiska.

Model w przypadku doświadczenia wieloobiektowego, a zwłaszcza wieloczynnikowego podlega rozszerzeniu przez wprowadzenie efektów związanych z każdym obiektem doświadczalnym. W doświadczeniu trójczynnikowym np. model ten można syntetycznie zapisać jako

$Y_{ijkl} = m + abc_{ijk} + e_{ijkl}$,

gdzie stosownie do numeracji obiektów ponumerowaliśmy obserwacje przy pomocy trzech wskaźników plus wskaźnik powtórzeń.

### 5.2.3 Wielkość doświadczenia, ustalanie liczby powtórzeń

O rozmiarze doświadczenia decyduje nie tylko liczba porównywanych obiektów, ale również liczba replikacji (powtórzeń). W przypadku bardzo prostych doświadczeń wstępnych, rozpoznawczych, gdy bada się materiał całkowicie jednorodny i chodzi o poznanie określonych cech lub porównuje się co najwyżej dwa obiekty, to liczbę powtórzeń można ustalić wychodząc z założonej precyzji wnioskowania. Dla doświadczeń wieloobiektowych, a zwłaszcza wieloczynnikowych problem ten sprawia o wiele więcej trudności. Jako jedno z kryteriów można przyjąć precyzję średniej obiektowej i wspomnianą już metodą wyznaczyć n. Zamiast precyzji średniej obiektowej za podstawę ustaleń można przyjąć krytyczną różnicę między średnimi obiektowymi, przy której prawdopodobieństwo błędu drugiego rodzaju osiągnie założony poziom, gdy porównania par średnich będą przedmiotem wnioskowania z danych eksperymentalnych.

Jednakże te metody prowadzą zwykle do wyliczeń tak dużych wartości n, które przekraczają możliwości techniczne lub finansowe eksperymentatora. Ta sytuacja wynika z trudności przyjęcia *a priori*, przed eksperymentem, sensownej precyzji, a chciałoby się uzyskać wnioskowanie nadmiernie precyzyjne. Dlatego rzadko dokonuje się rzetelnego rachunku optymalizacyjnego uwzględniającego nakłady i korzyści związane z eksperymentem, a dopiero *ex post* ocenia się go po wynikach. Z tego też powodu rzadko kontroluje się błąd drugiego rodzaju we wnioskowaniu, a eksperyment uważa się za udany, gdy uzyskuje się choćby częściowe potwierdzenie stawianej merytorycznej hipotezy, tzn. stwierdza się występowanie istotnych różnic międzyobiektowych. W przeciwnym wypadku eksperyment uważa się za nieudany. Jeśli następuje powtórzenie eksperymentu w niezmienionych warunkach, to realizuje się jak gdyby sekwencyjny plan doświadczalny.

Istnieją dwa minimalne warunki, które powinien spełniać każdy plan doświadczalny i one mogą w najgorszym razie stanowić punkt wyjścia w opracowaniu takiego planu. Są to

- minimalna liczba powtórzeń nie mniejsza niż 2 ($n > 2$).
- liczba stopni swobody dla wariancji błędu losowego nie mniejsza niż 20.

W badaniach z czynnikami ilościowymi, gdy w gruncie rzeczy nie chodzi o porównanie par obiektów, ale o integralną analizę związku efekt - czynnik (lub czynniki), ewentualnie o wyznaczenie optymalnych kombinacji tych czynników z punktu widzenia mierzalnego efektu, rezygnuje się z powtórzeń we wszystkich punktach (obiektach) planu, a powtarza się tylko wybrane, najbardziej interesujące, np. w pobliżu oczekiwanego optimum. Naturalnie przyjmuje się założenie, że błąd doświadczalny nie zależy od efektów modelu, tzn. wariancja obserwacji w każdym punkcie planu jest taka sama.

### 5.2.4 Kryteria-planowania eksperymentów

W literaturze przedmiotu wyróżnia się dwie grupy kryteriów optymalności planów eksperymentów:

- grupa kryteriów statycznych;
- grupa kryteriów dynamicznych.

W przypadku **kryteriów statycznych** chodzi o najlepsze, w określonym sensie, rozmieszczanie punktów obserwacji w obszarze zmienności zmiennej niezależnej. Punkty obserwacji określa się za pomocą macierzy planu eksperymentu Stąd właściwości planu eksperymentu utożsamia się z właściwością macierzy planu. Określając właściowość planu w istocie rzeczy stawiamy wymaganie, aby macierz planu charakteryzowała się tymi właściwościami.. W chwili obecnej, w teorii planowania eksperymentów brak jest systematyzacji kryteriów, a właściwie panuje chaos. Wyróżnia się dość znaczną ilość kryteriów i precyzuje się warunki, jakie musi spełniać plan, aby był optymalny z punktu widzenia innych kryteriów. W praktyce trudno jest zazwyczaj przyjąć tylko jedno kryterium przy planu eksperymentu. Zachodzi zatem konieczność porównania wyznaczonego planu z punktu widzenia innych właściwości.

**Kryteria dynamicznej optymalności** planów określają odległość mierzoną według wybranej miary jakości funkcjonowania systemu dla przyjętych wartości zmiennych niezależnych od jej wartości eksperymentalnej. Stosuje się je przy dynamicznej optymalizacji funkcjonowania systemu. W pracy tej grupy kryteriów nie będzie się omawiać.

Podawane w literaturze przedmiotu kryteria optymalizacji planu eksperymentu oparte na analizie właściwości macierzy informacyjnej lub macierzy kowariancyjnej planu eksperymentu. Macierz informacyjną eksperymentu $\underline{X}$ eksperymentu nazywamy macierz określoną wzorem

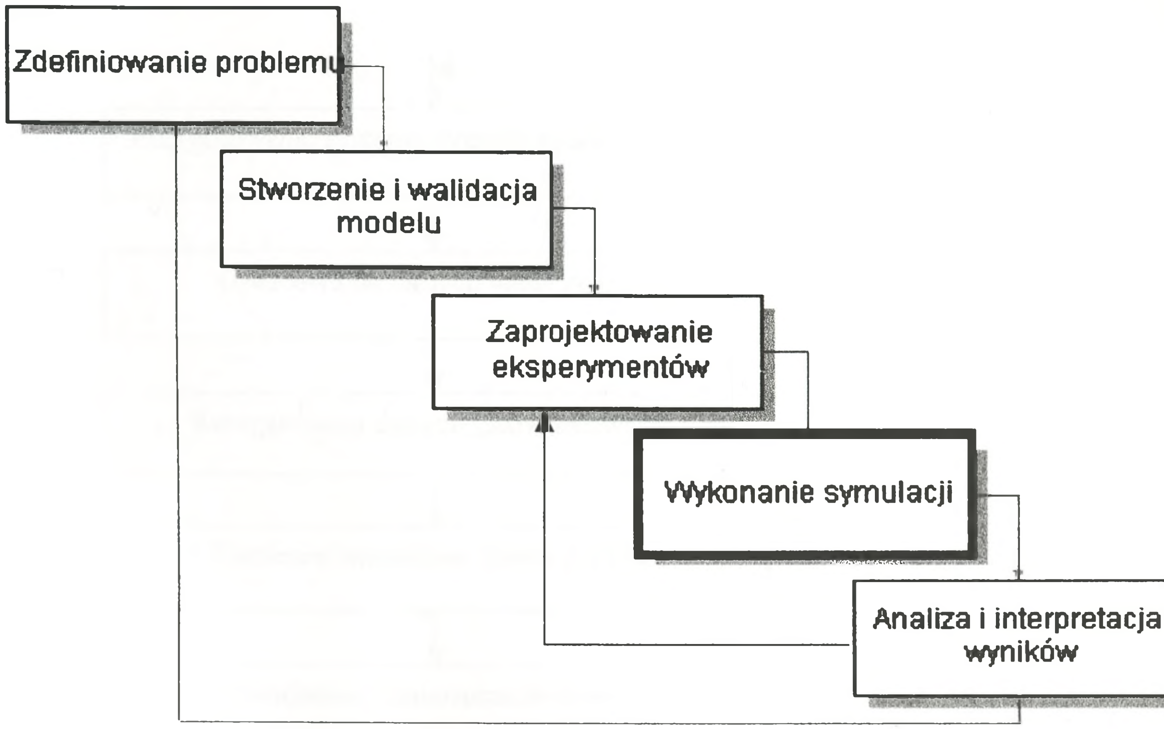
$$\underline{M} = \underline{F}^T \ \underline{F}$$

Macierzą kowariancyjną planu X eksperymentu nazywamy macierz określoną wzorem

$$\underline{C} = \left(\underline{F}^T \ \underline{F}\right)^{-1}$$

# 6 Wykonanie eksperymentu symulacyjnego

Użytkowanie systemu symulacyjnego przebiega w pewnym cyklu (być może nawet iteracyjnie) przedstawionym na rys. 11. Duża pętla opisuje pełny (inicjalizacyjny oraz modyfikacyjny) cykl, w którym (re)definiuje się problem i buduje model matematyczny. Model taki poddaje się następnie ocenie dotyczącej jego adekwatności do postawionego problemu i możliwości osiągnięcia postawionego celu. Po akceptacji powyższego, realizować można badania symulacyjne w „małej" pętli: projektowanie eksperymentu – wykonanie symulacji – analiza i interpretacja wyników.

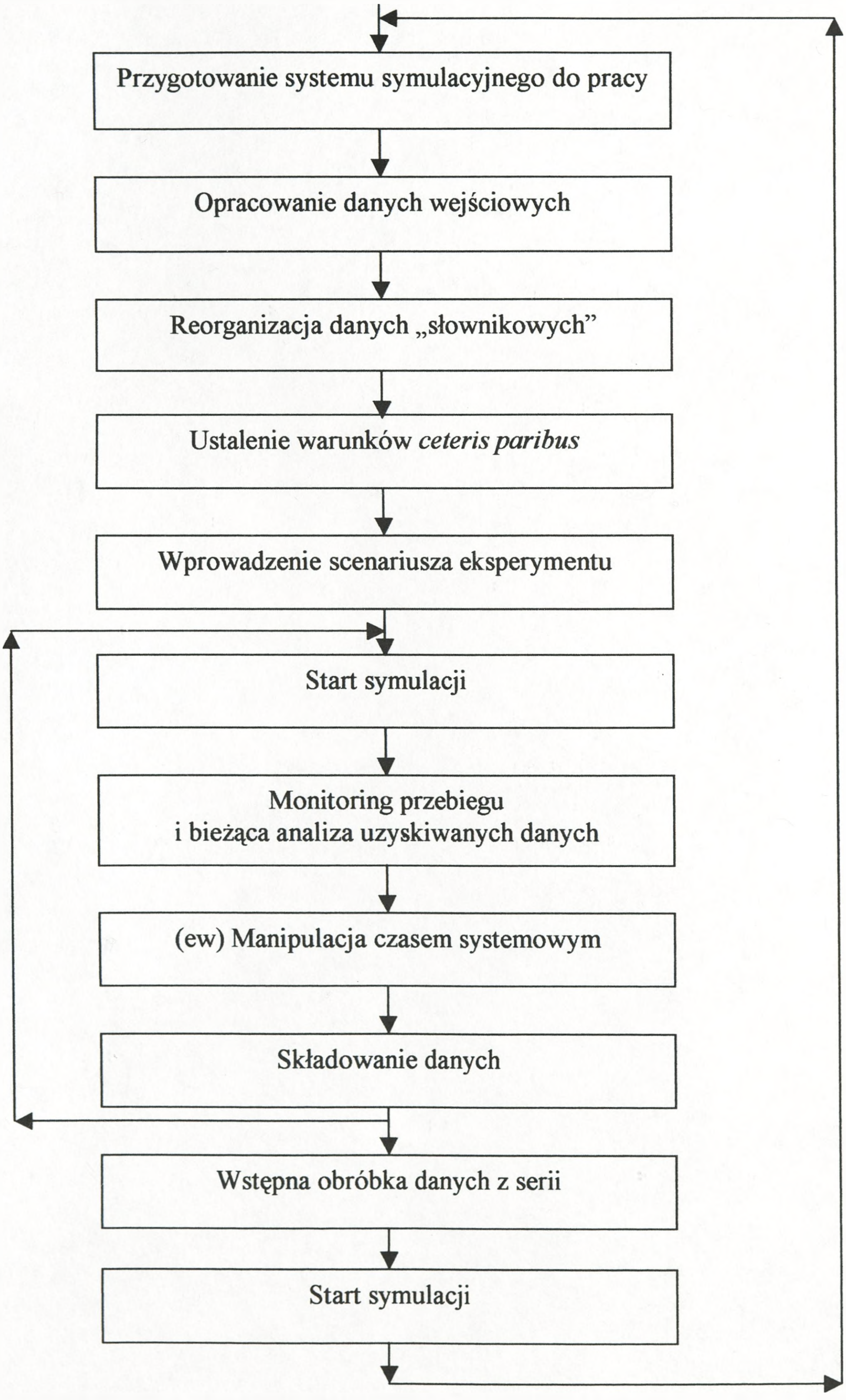



Rys. 11. Cykl realizacji badania symulacyjnego

**Opracowanie i walidacja modelu symulacyjnego** omówiona została w p. 4., **zaprojektowanie (zaplanowanie) eksperymentu symulacyjnego** w p. 5. **Analiza i interpretacja wyników eksperymentów symulacyjnych** omówiona zostanie w p. 7. opracowania. Obecnie odniesiemy się do etapu „**wykonanie symulacji**".

**Wykonanie symulacji polega na dokładnej realizacji eksperymentu zgodnie z planem jego przeprowadzenia**. Czynności realizowane w tym etapie zestawić można w postaci algorytmu (rys. 12).

- **Przygotowanie systemu do pracy** (do przeprowadzenia) eksperymentu symulacyjnego polega na zainstalowaniu systemu, odpowiedniej konfiguracji, organizacji stanowisk (badawczych), przygotowanie i przetestowanie odpowiednich modułów systemu, itp.
- **Opracowanie danych wejściowych** polega na weryfikacji merytorycznej zakresu i wartości badanych zmiennych zgodnie z wymaganiami formalnymi systemu, wprowadzeniu ich do baz danych, sprawdzeniu ich wewnętrznej spójności, integralności oraz niesprzeczności merytorycznej (być może w tzw. *pre*przebiegach, utworzenie zbiorów i baz pośrednich (jeśli tego system wymaga) albo operacyjnych.




Rys. 12. Algorytm realizacji etapu „wykonanie symulacji"

- **Reorganizacja danych słownikowych** polega na weryfikacji lub modyfikacji parametrów i niesterowanych zmiennych modelu zgodnie z potrzebami eksperymentu wyspecyfikowanych w planie.
- **Ustalenie warunków *ceteris paribus*** polega na tym, aby zagwarantować by wartości pozostałych zmiennych modelu były niezmienne, przyjmowały stałe wartości, albo co najwyżej losowane były z rozkładów o małej wariancji. Realizując eksperyment, w którym badamy związki pomiędzy zmiennymi (analiza regresji), albo poszukujemy (pseudo)optymalnego rozwiązania albo po prosu chcemy określić „mapę" wartości pewnych zmiennych, to zawsze wtedy należy zapewnić każdemu eksperymentowi (w serii prowadzonych eksperymentów) realizację w warunkach ***ceteris paribus*.**
- **Wprowadzenie scenariusza eksperymentu** polega na wprowadzeniu (weryfikacji) wszystkich danych towarzyszących i niezbędnych do przeprowadzenia eksperymentu. Tutaj także należy określić punkty zatrzymań symulacji i składowanie odpowiednich danych oraz określenie typu czasu systemowego (reakcja na zdarzenia, o stałym kroku lub mieszany);
- **Start symulacji** polega na uruchomieniu odpowiednich aplikacji systemu.
- **Monitoring przebiegu symulacyjnego i bieżąca analiza uzyskiwanych danych** polega na takim wyborze opcji pracy systemu, aby możliwe było śledzenie przebiegu eksperymentu, głównych zdarzeń i danych je określających. Bieżąca analiza dotychczasowych danych pozwolić powinna na doraźną ocenę poprawności zachowania się systemu i ocenę skutków (wpływu) zmian wartości zmiennych egzogenicznych na obserwowaną endogeniczną. W przypadku braku akceptacji, zatrzymujemy symulację, korygujemy dane i realizujemy *re*przebieg.
- **Manipulacja czasem systemowym** polega na umiejętnym wykorzystaniu możliwości systemu symulacyjnego odnośnie przyspieszania / zwalniania czasu systemowego.
- **Składowanie danych** polega na zapamiętaniu wymaganych do analizy danych w odpowiedniej strukturze, w odpowiednich plikach. Być może system ma możliwość definiowania odpowiedniej formy i postaci danych, wówczas należy takie raporty opracować.
- **Wstępna obróbka danych**, jeśli system ma taką funkcjonalność, wówczas dane empiryczne pozyskane z (serii) eksperymentów można przetworzyć do postaci zredukowanej i o większej informacyjności.
- **Koniec symulacji** – polega na zatrzymaniu realizacji eksperymentu.

Należy przy tym pamiętać, że

- W przypadku **symulacji deterministycznej** prowadzimy tylko jeden przebieg dla każdej wartości zmiennej kontrolowanej.
- W przypadku **symulacji probabilistycznej** wartości zmiennych niekontrolowanych są losowane z odpowiednich rozkładów, stąd każdy przebieg daje inne wyniki. By wyniki były statystycznie wiarygodne należy przeprowadzić kilkadziesiąt przebiegów dla każdej wartości zmiennej decyzyjnej.[28]

# 7 Analiza i interpretacja wyników eksperymentu symulacyjnego. Wnioskowanie

**Analiza** obejmuje porównanie symulowanych wyników otrzymanych z wyspecyfikowanych serii eksperymentów. Ponieważ w przypadku symulacji probabilistycznej mamy do czynienia z rozkładem wyników, należy stosować narzędzia statystyczne (np. *analiza wariancji*, *analiza spektralna* czy *testy istotności* [10]) do oceny otrzymanych wyników. Z reguły analiza wystarcza do wyboru najlepszego działania spośród zbadanych. Czasem wyniki wskazują, że potrzebne są dalsze badania (ze zmianą modelu włącznie).

## 7.1 Analiza wyników

Analiza wariancji opiera się na rozkładzie estymatorów wariancji wokół prawdziwych wariancji z populacji normalnych. Istotą analizy wyników jest rozbicie na addytywne składniki sumy kwadratów wariancji całego zbioru wyników. Porównanie wariancji wynikającej z działania danego czynnika oraz wariancji resztowej (mierzącej losowy błąd) daje odpowiedź, czy dany czynnik odgrywa istotną rolę w kształtowaniu się wyników eksperymentu.

---

[28] Eksperyment symulacyjny zachowuje cechę powtarzalności, a ponieważ techniki do tego wykorzystywane pozwalają na zmianę warunków początkowych lub zewnętrznych (egzogenicznych w stosunku do modelu), zatem na podstawie wyników kolejnych symulacji można wnioskować o własnościach modelowanego systemu.

## 7.2 Metody logicznej analizy wyników eksperymentów

Reguły logicznego wnioskowania o systemie na podstawie wyników otrzymanych z eksperymentu przeprowadzanego na modelu leżą w klasie metod indukcyjnych. Terminem „indukcja" obejmuje się trzy zasadniczo odmienne rodzaje rozumowań, mianowicie: 1) **indukcję przez proste wyliczenie**, czyli inaczej indukcję enumeracyjną, 2) **indukcję eliminacyjną** oraz 3) tzw. **indukcję matematyczną**. [16]

**Indukcja enumeracyjna** polega na tym, iż na podstawie pewnej liczby szczegółowych przypadków, stwierdzających, że określone przedmioty czy zjawiska należące do danej klasy mają jakąś wspólną własność, formułuje się wniosek ogólny, iż wszystkie przedmioty lub zjawiska danej klasy mają tę własność. Tego rodzaju indukcja może być zupełna (wyczerpująca) albo niezupełna (niewyczerpująca).

I ndukcja jest **zupełna**, jeśli zbiór tych elementów, o których jest mowa w poszczególnych przesłankach, wyczerpuje całą klasę przedmiotów czy zjawisk, jakiej dotyczy wniosek. Tego rodzaju indukcją jest np. rozumowanie nauczyciela, który sprawdzając umiejętność pływania swoich uczniów, o każdym z nich osobno stwierdzi, że umie pływać i na tej podstawie sformułuje wniosek ogólny, iż wszyscy jego uczniowie umieją pływać. Tego rodzaju wnioskowanie jest niezawodne, gdyż wniosek ogólny wynika logicznie z koniunkcji poszczególnych przesłanek; jest to więc pewien rodzaj dedukcji (przy współczesnym rozumieniu tego terminu). Chociaż indukcja zupełna okazuje się niekiedy pożyteczna, możliwość jej zastosowanie w nauce jest jednak ograniczona.

Indukcja **niezupełna** zachodzi wówczas, jeśli wśród przesłanek jest mowa tylko o niektórych elementach danej klasy przedmiotów czy zjawisk, iż posiadają one pewną własność, a jednak na tej podstawie (przy braku stwierdzenia choćby jednego przypadku przeciwnego) formułuje się wniosek ogólny, że własność tę posiadają wszystkie przedmioty bądź zjawiska tej klasy.

Tego rodzaju indukcja jest rozumowaniem zawodnym, gdyż wniosek nie wynika tu logicznie z koniunkcji przesłanek. Zbiór elementów uwzględnionych w przesłankach nie stanowi całej klasy przedmiotów czy zjawisk, o których jest mowa we wniosku. A zatem może on być fałszywy.

Mimo swojej zawodności indukcja niezupełna stosowana jest nadal nie tylko w życiu codziennym, ale i w naukach, zwłaszcza przyrodniczych, chociaż tzw. problem usprawiedliwienia indukcji jest ciągle jednym z najtrudniejszych problemów metodologicznych.

Łatwo zauważyć, że indukcja niezupełna jest szczególnego rodzaju rozumowaniem redukcyjnym, gdyż przesłanki tego rozumowania wynikają logicznie z wniosku. Tak więc kierunek wynikania jest tu odwrotny do kierunku uzasadniania (rację uzasadniania się poprzez następstwo).

**Indukcja eliminacyjna** jest to rozumowanie zmierzające do wykrycia pewnych zależności między zjawiskami na podstawie jednostkowych obserwacji. Stosując to rozumowanie ustala się najpierw (korzystając z obserwacji i pewnej inwencji) możliwie wszystkie okoliczności A, B, C, D, ..., które współwystępują z pewnym interesującym nas zjawiskiem *Z* lub bezpośrednio je poprzedzają i mogą mieć istotny wpływ na zajście tego zjawiska. Następnie spośród powyższych okoliczności wybiera się taki jedyny czynnik, który rzeczywiście pozostaje w ścisłym związku (np. przyczynowo-skutkowym) z zachodzeniem tego zjawiska *Z*. Ponieważ dokonuje się to w drodze eliminowania okoliczności nieistotnych, rozumowanie to przyjęto nazywać „indukcją eliminacyjną".

Teorię indukcji eliminacyjnej sformułował J.St. Mill w postaci schematycznie ujętych reguł, które nazwał **kanonami** (z gr. *kanon* – reguła, wzorzec). Z pięciu kanonów Milla omówimy tu (w uproszczonej formie) tylko trzy podstawowe, mianowicie: jedynej zgodności, jedynej różnicy oraz zmian towarzyszących.

***Kanon jedynej zgodności:*** Jeżeli wśród wielu okoliczności A, B, C, D, ... jakaś jedna okoliczność, np. A, stale towarzyszy występowaniu badanego zjawiska Z, podczas gdy pozostałe zmieniają się (współwystępują bądź nie), to wolno na tej podstawie uznać, że A pozostaje w istotnym związku z Z (jest jego przyczyną lub warunkiem).

***Kanon jedynej różnicy:*** Jeżeli wśród wielu okoliczności A, B, C, D, ... wystąpiło interesujące nas zjawisko Z, natomiast przy braku okoliczności A i nie zmienionych okolicznościach B, C, D, ...zjawisko Z nie występuje, to wolno na tej podstawie uznać, że A pozostaje w ścisłym związku z Z.

***Kanon zmian towarzyszących:*** Jeżeli wśród wielu okoliczności A, B, C, D, ..., w jakich zachodzi interesujące nas zjawisko Z, pewnej zmianie zjawiska Z stale towarzyszy zmiana jednej tylko okoliczności, np. A, to wolno na tej podstawie uznać, że A pozostaje w ścisłym związku z Z.

Kiedy badane zjawiska dają się dokładnie mierzyć, wówczas kanon zmian towarzyszących pozwala wykrywać pewne zależności funkcjonalne, które można wyrazić w postaci równania. Tak np. doszło do sformułowania prawa Ohma, które wyraża ścisłą zależność pomiędzy natężeniem prądu a jego napięciem.

Analizując indukcję eliminacyjną z punktu widzenia teorii rozumowań, należy stwierdzić, że same schematy rozumowań według kanonów jedynej zgodności i jedynej różnicy są dedukcyjne, a więc niezawodne. Pierwsza przesłanka stanowi tu bowiem alternatywę hipotez: $A \vee B \vee C \vee D$ następne przesłanki eliminują wszystkie hipotezy z wyjątkiem jednej: $\sim B \wedge \sim C \wedge \sim D$, a stąd na podstawie reguły opuszczania alternatywy wynika prawdziwość hipotezy A. Oczywiście ta niezawodność schematów nie gwarantuje jednak prawdziwości wniosku, gdyż zawarty w kanonach Milla opis postępowania badawczego stanowi dalece posuniętą idealizację, która w praktyce prawie nigdy nie może zostać zrealizowana. W rzeczywistości nie da się przecież stwierdzić, że to jedynie A występowało zawsze przy występowaniu Z bądź też, że jedynie A nie występowało, gdy nie pojawiło się Z. Dlatego kanony Milla można stosować tylko z pewnym przybliżeniem. Aby zmniejszyć niebezpieczeństwo błędu, można przy badaniu tego samego problemu stosować kilka różnych metod rozumowania, np. łącząc kanon jedynej zgodności z kanonem jedynej różnicy. Mimo swej zawodności, indukcja eliminacyjna odgrywa ważną rolę w naukach empirycznych.

Tzw. **indukcja matematyczna** jest w rzeczywistości rozumowaniem dedukcyjnym. Polega ono na zastosowaniu reguły, zgodnie z którą: jeżeli jakaś własność F przysługuje liczbie 1 i jeżeli przysługuje ona liczbie k, to przysługuje ona także liczbie k + 1, wówczas własność F przysługuje każdej liczbie naturalnej.

## 7.3 Metody statystycznej analizy wyników eksperymentów

Jeżeli konkluzje wypracowane metodami logicznego wnioskowania chcemy udokumentować ilościowo, wówczas materiał empiryczny uzyskany z przeprowadzonych badań symulacyjnych należy poddać obróbce statystycznej, zgodnie z regułami statystyki. Należy zatem skonstruować model matematyczny związków zachodzących pomiędzy badanymi atrybutami systemu (zmiennymi modelu), postawić stosowne hipotezy i zweryfikować je. Wówczas dopiero zasadne będzie przyjęcie za prawdziwe statystycznie, pozytywnie zweryfikowanych hipotez.

### 7.3.1 Analiza regresji i korelacji w próbie

Badanie współdziałania cech mierzalnych jest jednym z ważniejszych problemów doświadczalnictwa. Informacja o występowaniu i formie zależności pewnych cech systemu wnosi ilościowe określenie związków między nimi występujących. Kolejnym istotnym powodem zainteresowania zależnością cech jest możliwość przewidywania, prognozowania pewnych zmiennych, na podstawie wcześniejszych obserwacji innych je determinujących lub szacowania trudno mierzalnych na podstawie łatwo dostępnych.

Obecnie przedstawimy zagadnienia estymacji i weryfikacji hipotez dotyczących funkcji regresji wielocechowych. Wiele z tych zagadnień wygodniej będzie omówić dla przypadku regresji pojedynczej na podstawie próby dwucechowej, a dopiero później uogólnić te rozważania na przypadek wielokrotny [21].

#### *7.3.1.1 **Próba dwucechowa***

***Próbą dwucechową*** będziemy nazywać skończony ciąg dwuwymiarowych zmiennych losowych o tym samym rozkładzie, będącym rozkładem dwucechowej populacji generalnej. Jest to model danych empirycznych składających się z par obserwacji: obserwacji cechy $X$ i odpowiadającej jej obserwacji cechy $Y$. Oznaczymy ją przez $(x_i, y_i)$ $(i = 1, 2, ..., n)$. Każdą parę $(x_i, y_i)$ możemy zinterpretować graficznie jako punkt na płaszczyźnie uzyskując tzw. *punkty empiryczne*.

**Korelacja**. Jeśli dla populacji generalnej przyjmiemy model dwuwymiarowego rozkładu normalnego, to do jej opisu potrzebna jest znajomość pięciu parametrów: średnie i wariancje rozkładów brzegowych oraz współczynnik korelacji. Parametry te grupują się w wektorze średnich $\mathbf{m} = [\mathbf{m_1}, \mathbf{m_2}]$ i macierzy kowariancji[29]

$$\sum = \begin{bmatrix} \sigma_1^2 & \rho\sigma_1\sigma_2 \\ \rho\sigma_1\sigma_2 & \sigma_2^2 \end{bmatrix}$$

Estymatorami tych charakterystyk są wektor średnich z próby

$$\hat{m} = [\overline{x}, \overline{y}] \text{, gdzie } \overline{x} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{2} x_i \text{, } \overline{y} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} y_i$$

oraz macierz korelacji z próby

[29] *Kowariancja*- związek między zmiennymi skorelowanymi.

$$S = \begin{bmatrix} s_1^2 & c_{xy} \\ c_{xy} & s_2^2 \end{bmatrix}$$

przy czym wariancje z próby $s^1{}_2$ i $s^2{}_2$ są zwykłymi estymatorami jak w przypadku jednowymiarowym.

$$s_1^2 = \frac{\operatorname{var} x}{n-1} \quad gdzie \quad \operatorname{var} x = \sum_{i=1}^{n} (x_1 - \bar{x})^2$$

$$s_2^2 = \frac{\operatorname{var} y}{n-1} \quad gdzie \quad \operatorname{var} y = \sum_{i=1}^{n} (y_1 - \bar{y})^2$$

A wzór na kowariancję z próby czy uzyskujemy metoda momentów w postaci

$$c_{xy} = \frac{\operatorname{cov}(xy)}{n-1} \quad gdzie \quad \operatorname{cov}(xy) = \sum_{i-1}^{n} (x_i - \bar{x})(y_i - \bar{y}),$$

czyli jako średni iloczyn odchyleń.

Porównując kowariancję $c_{xy}$ z kowariancja populacji $\rho\sigma_1\sigma_2$, uzyskujemy wzór na współczynnik korelacji z próby r:

$$r = \frac{c_{xy}}{s_1 s_2} = \frac{\operatorname{cov}(xy)}{\sqrt{(\operatorname{var} x)(\operatorname{var} y)}}$$

Jest to estymator nieobciążony[30] $\rho$ *tylko w punkcie zero. Dla* $\rho \neq 0$ występuje niewielkie obciążenie. Dowodzi się, że |r|<=1. Wariancja współczynnika korelacji z próby jest równa

$$D^2(r) = \frac{1-\rho^2}{\sqrt{n-1}}$$

Rozkład wspołczynnika korelacji z próby jest asymetryczny dla $\rho?0$, *a dla* $\rho=0$ *znienna standaryzowana*

$$t_{emp} = \frac{r}{1-r^2}\sqrt{n-2}$$

ma rozkład t Studenta i może być wykorzystana do testowania hipotezy o braku korelacji w populacji generalnej, tzn. hipotezy $H_0$: $\rho=0$. *Jeżeli* $|t_{emp}| > t_{\alpha;n-2}$, *gdzie* $t_{\alpha;n-2}$ jest wartością krytyczna testu *t, to* $H_0$ odrzucamy. Ponieważ statystyka zależy jedynie od wartości r i liczby stopni swobody $v=n-1$, można rozwiązując nierówność $|t_{emp}| > t_{\alpha;v}$ znaleźć wartości krytyczne dla współczynnika korelacji, której przekroczenie przez wartość r z próby świadczy o istotności korelacji. Wartość krytyczną $r_{\alpha;v}$ znajdujemy więc ze związku

---

[30] *Estymator nieobciążony* – W poszczególnych próbach ocena parametru nieznanego może różnić się od wartości parametru, jeśli jednak mamy oszacowanie z serii prób o ustalonej liczności, to jest wskazane, aby wartość oczekiwana tych ocen była równa wartości nieznanego parametru. Wtedy estymator jest *nieobciążony.*

$$r_{\alpha;v} = \frac{t_{\alpha;v}}{\sqrt{v + t^2_{\alpha;v}}}$$

Wartości krytyczne $r_{\alpha;v}$ maleją ze wzrostem liczby stopni swobody $v$, ale dla niewielkich prób są bliskie jedności. Na przykład dla próby pięcioelementowej ($v = 3$) krytyczna wartość wynosi aż 0,878, dla n = 10 osiąga wartość ponad 0,6, by dopiero przy n = 100 spaść poniżej 0,2. Stąd wynika wniosek, że $r$ jest dobrą miarą siły związku między X i Y dopiero dla dużych prób. Dla małych prób nie powinniśmy wypowiadać się o sile korelacji, a jedynie o jej istotności (gdy $r$ przekroczy wartość krytyczną $r_{\alpha;v}$). Dla dużych prób mówimy o silnej korelacji, gdy $r$ przekracza 0,7.

Dla sprawdzenia hipotezy, że o jest równe innej liczbie niż 0, jak również hipotezy o równości dwóch współczynników korelacji z dwóch populacji o $\rho_1=\rho_2$, należy stosować statystykę wynikającą *z transformacji Fishera*

$$z(r) = \frac{1}{2}\ln\frac{1-r}{1+r}$$

która ma rozkład bliski normalnemu $N(z(\rho), (n-3)^{-1}$. Tak więc $H_0$: $\rho=\rho_0$ odrzucimy na poziomie istotności a, gdy

$$z_{emp} = | z(r) - z(\rho_0) | \sqrt{n-3} > z_\alpha$$

gdzie wartość krytyczną $z_\alpha$ odczytujemy z tablicy rozkładu normalnego. Analogicznie $H_0$: $\rho_1=\rho_2$ odrzucimy, gdy

$$zemp = \frac{| z(r_1) - z(r_2) |}{\sqrt{(n_1-3)^{-1} + (n_2-3)^{-1}}} > z_\alpha$$

gdzie $n_1$, $n_2$, $r_1$, $r_2$ są liczebnościami i współczynnikami z porównywanych prób pobranych z populacji o rozkładach normalnych.

**Regresja**. Rozważmy regresję $Y$ względem $X$ na podstawie próby dwucechowej $\{(x_i, y_i)\}$. Można zmienić role zmiennych $X$ i $Y$, ale nie zmieni to istoty problemu. Będziemy zakładać, że zmienna $Y$ ma rozkład normalny, zaś $X$ może być dowolną zmienną, losową lub nie. Założenie to sprecyzujemy tak:

$$Y \sim N(m(x), \sigma^2_{y\cdot x})$$

gdzie m(x) jest funkcją regresji opisującej zależność średnich $Y$ od wartości $X$. Zmienną Y nazywamy *zmienną endogeniczną (objaśnianą), a X - zmienną egzogeniczną (objaśniają-*

*cą).* Wariancja $\sigma^2_{y \cdot x}$ jest wariancją zmiennej *Y* względem funkcji regresji, o której zakładamy, że nie zależy od *X*. Funkcję regresji będziemy estymować przy kolejnym założeniu, że należy ona do pewnej parametrycznej klasy funkcji, o nieznanym parametrze (wektorze parametrów) $\Theta$: m(x, $\Theta$). Zatem problem estymacji sprowadza się do estymacji parametru $\Theta$. W tym punkcie będziemy rozważać jedynie klasę funkcji liniowych o parametrach $\Theta$ = [a, b]. Kolejne założenie możemy sprecyzować jako

m(x) = a + bx .

Często liniowy model funkcji regresji wystarcza w praktycznych zastosowaniach teorii regresji, ponieważ

gdy populacja generalna ma dwuwymiarowy rozkład normalny, to funkcja regresji *Y* względem *X (i* X względem *Y)* jest liniowa;

jeśli funkcja regresji m(x) nie jest liniowa, to często prowadzącemu doświadczenie chodzi o „zgrubną" informację o związku między *X* i *Y*, a gdy związek ten jest słaby, to liniowe przybliżenie w ustalonym przedziale *X*-ów będzie wystarczające.

Z nieliniowymi związkami regresyjnymi spotykać będziemy się głównie wtedy, gdy *X* jest zmienną kontrolowaną, nie losową. Oczywiście przybliżenie liniowe nie może być stosowane, gdy chodzi o wyraźnie nieliniowe zależności, rozpatrywane w szerokim obszarze *X*-ów, a zwłaszcza w tzw. *problemach optymalizacyjnych,* gdy poszukujemy ekstremów funkcji regresji.

Dla każdego elementu próby możemy napisać (9.7)

$y_i = m(x_i) + e_i = a + bx_i + e_i$,

gdzie $e_i$ jest składnikiem losowym zmiennej *Y*, niezależnym od *X*. Z założeń wynika, że $e_i \sim N(0, \sigma^2_{y.x})$. Do estymacji parametrów modelu zastosujemy metodę najmniejszych kwadratów (MNK). Warunkiem minimum będzie

$$\sum e_i^2 = \sum (y_i - a - bx)^2 = \min$$

Intuicyjnie warunek ten oznacza taki wybór położenia prostej regresji, aby kwadraty odległości „punktów empirycznych" (punktów wyznaczonych przez współrzędne $(x_i, y_i)$ ) od tej prostej, liczone wzdłuż (równolegle do) osi Y, były jak najmniejsze.

Obliczając pochodne cząstkowe sumy kwadratów składników $e_i$ względem niewiadomych *a i* b i przyrównując je do zera, otrzymujemy tzw. *układ równań normalnych* (po prostych przekształceniach):

$$na + b\sum x_i = \sum y_i$$
$$a\sum x_i + b\sum x_i^2 = \sum x_i y_i$$

Rozwiązania $\hat{a}$ *i* $\hat{b}$ powyższego układu realizują warunek i są estymatorami MNK parametrów a i b:

$$\hat{a} = \bar{y} - \hat{b}\bar{x} \qquad (stala\ regresji)$$
$$\hat{b} = \frac{\sum x_i y_i - n\overline{xy}}{\sum x_i^2 - n\bar{x}_i^2} = \frac{\operatorname{cov}(xy)}{\operatorname{var} x} \qquad (wspolczynnik\ regresji)$$

Estymatory $\hat{a}$ *i* $\hat{b}$ są estymatorami nieobciążonymi, tzn. $E(\hat{a}) = a \quad E(\hat{b}) = b$. Stąd otrzymujemy *funkcję regresji z próby*

$$\hat{m}(x) = \hat{a} + \hat{b}x$$

Współczynnik regresji *b* ma interpretację, mianowicie określa oczekiwany przyrost cechy *Y* gdy *X* wzrośnie o 1 jednostkę.

Oceny składników losowych $e_i$; wyliczone z po podstawieniu wartości regresyjnych wyliczonych z nazywamy *resztami MNK.* Suma kwadratów reszt MNK jest podstawą oceny wariancji resztowej $\sigma^2_{y.x}$:

$$s^2_{y\cdot x} = \frac{\operatorname{var} E}{n-2}, \quad gdzie \quad \operatorname{var} E = \sum \hat{e}_i^2$$

*Wariancja resztowa z próby* $s_{y.x}$ jest estymatorem nieobciążonym, tzn. $E(s^2_{y\cdot x}) = \sigma^2_{y\cdot x}$.

Zmienność wartości regresyjnych $m(x_i)$ wokół średniej ogólnej y

$$\operatorname{var} E = \sum (\hat{m}(x_i) - \bar{y})^2 = \hat{b}\operatorname{cov}(xy)$$

w sumie ze zmiennością resztową varE daje zmienność całkowitą

$\operatorname{var} y = E(y_i - \bar{y})^2$ tzn. $\operatorname{var} R + \operatorname{var} E = \operatorname{var} y$, czyli

$\operatorname{var} E = \operatorname{var} y - \hat{b} \operatorname{cov}(xy)$.

Podobna relacja zachodzi dla stopni swobody: $n-1 = 1 + (n-2)$, bo $n-1$ jest liczbą stopni swobody dla zmienności var *y*, a var *R* ma 1 stopień swobody. Z dzielenia r zmienności regresji z próby (tzn. var *R*) przez odpowiadającą jej liczbę stopni swobody (tzn. 1) otrzymujemy *wariancję regresji z próby* $s^2_R$:

$$s_R^2 = \frac{\operatorname{var} R}{1} = \operatorname{var} R$$

Wartość oczekiwana tej wariancji jest równa $\sigma^2_{y.x}$, jeśli nie ma zależności *Y od X, tzn.* b = 0. Zatem iloraz

$$F_{emp} = \frac{s_R^2}{s_{y\cdot x}^2}$$

jest funkcją testową dla hipotezy $H_0$: $b = 0$ i ma rozkład F z $v_1 = 1$ i $v_2 = n-2$ stopniami swobody. Hipotezę $H_0$: $b = 0$ odrzucamy, gdy $F_{emp} > F_{\alpha;v1,v2}$, gdzie wartość krytyczną $F_{\alpha;v1,v2}$ odczytujemy z tablicy. Odrzucenie $H_0$: $b = 0$ oznacza istotność regresji *Y* względem *X*. Omówioną wyżej analizę zmienności *Y* zestawiamy w *tabelę analizy wariancji*

Tabela 3. Analiza wariancji w regresji prostej

| Lp. | Źródło Zmienności | Liczba stopni swobody. | Suma kwadratów odchyleń. | Średni kwadrat (wariancja) | $F_{emp}$ |
|---|---|---|---|---|---|
| 1 | Regresja | 1 | var R | $s^2_R$ | $s^2_R / s^2_e$ |
| 2 | Odchylenia od regresji (błąd) | n-2 | varE | $s^2_{y.x}$ | - |
| 3 | Ogółem | n -1 | var y | sY | - |

Iloraz (var *R*)/(var *y*) jest równy określonemu w punkcie współczynnikowi determinacji. Łatwo można sprawdzić, że równy jest on $r^2$.

Funkcją testową dla hipotezy $H_0$: $b = 0$ może być również zmienna

$$t_{emp} = \frac{\hat{b}}{s_{\hat{b}}}$$

gdzie błąd współczynnika regresji z próby jest dany wzorem

$$s_{\hat{b}} = \sqrt{\frac{s_{y\cdot x}^2}{\operatorname{var} x}}$$

$H_0$: $b = 0$ odrzucamy, gdy $|t_{emp}| > t_{\alpha;n-2}$

Obydwa sposoby testowania $H_0 : b = 0$ są ekwiwalentne, gdyż zachodzi związek

$F_{emp} = t^2_{emp}$.

W przypadku stwierdzenia istotności regres, możemy posługiwać się równaniem w celu prognozowania wartości *Y* na podstawie pojawiających się pomiarów zmiennej *X*. Błąd takiej prognozy, będący *błędem wartości regresyjnej*, jest równy

$$s_{\hat{m}(x)} = \sqrt{s_{y\cdot x}^2\left(\frac{1}{n} + \frac{(x-\bar{x})^2}{\operatorname{var} x}\right)}$$

Podstawiając do wzoru x = 0, otrzymujemy błąd stałej a w równaniu regresji. Błędy estymatorów $\hat{a}$, $\hat{b}$, $\hat{m}(x)$, wykorzystujemy do budowy przedziałów ufności[31]:

a) dla stałej regresji: $\hat{a} - ts_{\hat{a}} \le a \le \hat{a} + ts_{\hat{a}}$

b) dla współczynnika regresji: $\hat{b} - ts_{\hat{b}} \le a \le \hat{a} + ts_{\hat{a}}$

c) dla wartości regresyjnej $\hat{m}(x) - ts_{\hat{m}(x)} \le m(x) \le \hat{m}(x) + ts_{\hat{m}(x)}$

gdzie $t = t_{a;v}$; $P(|t|> t_{a;v}) = \alpha$ odczytujemy z tablic krytycznych wartości rozkładu t Studenta dla liczby stopni swobody v = n - 2.

### 7.3.2 Próba wielocechowa

W licznych badaniach empirycznych obserwuje się równocześnie wiele cech charakteryzujących populację przedmiotową. W badaniach technologicznych wytworzony produkt opisywany jest zespołem cech, a ponadto obserwuje się również pewne właściwości surowca, czy surowców i parametry procesu technologicznego mogące wpływać na jakość produktu. We wszystkich tych przypadkach spotykamy się *z populacją generalną wielocechową,* dla której będziemy formułować wnioski.

Pomiary wszystkich interesujących nas cech u wybranego elementu populacji (jednostki doświadczalnej) będą *elementem próby wielocechowej.* Elementem takim będzie zatem wektor, składający się powiedzmy z $k + 1$ liczb $[X_0, X_1, X_2, ..., X_k]$. Jeśli wszystkie $X_h$ dla $h = 0, 1, 2, ..., k$ są losowe, to modelem dla populacji generalnej będzie wielowymiarowa zmienna losowa. Może to być jednak zmienna nawet jednowymiarowa (przynajmniej $X_0$ powinno być losowe, aby można było mówić o modelu probabilistycznym a nie deterministycznym), rozpatrywana jednak w powiązaniu z pozostałymi zmiennymi nielosowymi. Zwykle pierwszą zmienną oznaczać będziemy symbolem $Y$ zamiast $X_0$.

#### *7.3.2.1 Regresja i korelacja wielokrotna.*

Niech $[y_i, x_{1i}, ..., x_{ki}]^T$ będzie próbą z populacji wielocechowej, gdzie $Y$ jest zmienną endogeniczną, $X_1, X_2, ..., X_k$ – zmiennymi objaśniającymi, egzogenicznymi. Poszukiwać będziemy *funkcji regresji wielokrotnej (wielu zmiennych):*

$$m(\mathbf{x}) = E(Y \mid \mathbf{X} = \mathbf{x} |, \quad gdzie \quad \mathbf{x} = [x_1, x_2, ..., x_k]^T,$$

[31] *Przedział ufności* – to przedział wokół wartości średniej, do którego trafią z określonym prawdopodobieństwem (poziom ufności) wartości zmiennej losowej

przy założeniu, że jest ona liniowa, tj.

$m(\mathbf{x}) = b_0 + b_1x_1 + b_2x_2 + ... + b_kx_k = b_0 + \mathbf{x}^T\mathbf{b}$, gdzie $\mathbf{b} = [b_1, b_2, ..., b_k]^T$ .

Współczynniki $b_h$, $h = 1,2,...,k$ , są *cząstkowymi współczynnikami regresji*. Założymy ponadto, że $Y \sim N(m(\mathbf{x}), \sigma^2_{y \cdot x})$, gdzie wariancja resztowa $\sigma^2_{y \cdot x}$ nie zależy od wektora $\mathbf{x}$. Dla danych empirycznych $\{y_i, \mathbf{x}_i^T\}$ $(i=1, 2, ..., n)$ możemy napisać model

$y_i = m(\mathbf{x}_i) + e_i = b_0 + \mathbf{x}_i^T b + e_i \quad (i = 1,2,...,n)$.

Przyjmując oznaczenia: $\mathbf{y} = [y_1, y_2, ..., y_n]^T$ - wektor obserwacji, $\mathbf{1} = [1, 1, ..., 1]^T$ wektor n-elementowy jedynek, $\mathbf{X}$ - macierz obserwacji zmiennych objaśniających o wierszach $[\mathbf{x}_i^T]$, $\mathbf{e} = [e_1, e_2, ..., e_n]^T$ wektor składników losowych, model ten możemy napisać w postaci

$\mathbf{y} = \mathbf{1}b_0 + \mathbf{X}\mathbf{b} + \mathbf{e}.$

Estymatory parametrów funkcji regresji otrzymujemy stosując MNK, minimalizując $\sum e_i^2 = \mathbf{e}^T\mathbf{e}$. Z MNK uzyskujemy układ równań normalnych

$\mathbf{V}\hat{\mathbf{b}} = c, \quad b_0 = \bar{y} - \hat{\mathbf{b}}^T\bar{\mathbf{x}}$

gdzie $\bar{\mathbf{x}}$ jest wektorem kolumnowym średnich zmiennych objaśniających $\bar{X}_h$, $\mathbf{V}_{k \times k}$ jest macierzą sum kwadratów i iloczynów odchyleń zmiennych objaśniających $[\mathrm{cov}(x_h x_{h'})]$ , $\mathbf{c}$ - wektor kolumnowy sum iloczynów odchyleń zmiennych objaśniających i zmiennej endogenicznej $[\mathrm{cov}(x_h y)]$. Elementy macierzy $\mathbf{V}$ i wektora $\mathbf{c}$ wyliczamy ze wzorów

$$\mathrm{cov}(x_h x_{h'}) = \sum (x_{hi} - \bar{x}_h)(x_{h'i} - \bar{x}_{h'}) \qquad (h, h' = 1,2,...,k)$$
$$\mathrm{cov}(x_h y) = \sum (x_{hi} - \bar{x}_h)(y_i - \bar{y})$$

Macierz $\mathbf{V}$ wypisana *explicite* ma postać

$$V = \begin{bmatrix} \operatorname{var} x_1 & \operatorname{cov}(x_1 x_2) & \dots & \operatorname{cov}(x_1 x_k) \\ \operatorname{cov}(x_1 x_2) & \operatorname{var} x_2 & \dots & \operatorname{cov}(x_2 x_k) \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \operatorname{cov}(x_1 x_k) & \operatorname{cov}(x_2 x_k) & \dots & \operatorname{var} x_k \end{bmatrix};$$

naturalnie $\operatorname{var} x_h = \operatorname{cov}(x_h x_h)$. Jak wiadomo, macierz $\mathbf{V}$ jest macierzą symetryczną, a ponadto $|\mathbf{V}| \geq 0$. Jeśli $\mathbf{V}$ jest nieosobliwa, tj. $|\mathbf{V}| > 0$, to istnieje macierz do niej odwrotna $\mathbf{V}^{-1}$. Wtedy estymatory cząstkowych współczynników regresji, czyli wektor $\hat{\mathbf{b}}$, znajdujemy ze wzoru

$$\hat{\mathbf{b}} = \mathbf{V}^{-1}\mathbf{c}$$

Każdy cząstkowy współczynnik regresji interpretujemy następująco: określa on oczekiwany przyrost cechy $Y$, gdy cecha $X_h$ wzrośnie o jednostkę, a pozostałe będą ustalone.

Następnie definiujemy zmienność resztową błędu:

$$\operatorname{var} E = \sum_{i=1}^{n} (y_i - \hat{m}(\mathbf{x}_i))^2$$

oraz zmienność regresji

$$\operatorname{var} R = \sum_{i=1}^{n} (\hat{m}(\mathbf{x}_i) - \bar{y})^2 = \hat{\mathbf{b}}^T \mathbf{c}$$

Zachodzi związek

$$\operatorname{var} R + \operatorname{var} E = \operatorname{var} y$$

Analizę wariancji w regresji i testowania globalnej hipotezy $H_0 : \mathbf{b} = \mathbf{0}$ (wszystkie cząstkowe współczynniki regresji są zerami) przedstawiamy w tabeli 4:

Tabela 4 Analiza wariancji w regresji

| Lp. | Źródła zmienności | Liczba stopni swobody | Suma kwadratów | Średni kwadrat | $F_{emp}$ | $F_\alpha$ |
|---|---|---|---|---|---|---|
| 1 | Regresja | $v_1 = k$ | var R | $s_R^2$ | $\frac{s_R^2}{s_e^2}$ | $F_{\alpha;v_1,v_2}$ |
| 2 | Odchylenie od regresji | $v_2 = n-k-1$ | $\operatorname{var} E$ | $s_{y \cdot x}^2$ | – | – |
| 3 | Ogółem | $v = n-1$ | $\operatorname{var} Y$ | – | – | – |

Wariancje z próby (średnie kwadraty) otrzymujemy dzieląc sumy kwadratów przez odpowiednie stopnie swobody. Jeżeli hipoteza globalna $H_0 : \mathbf{b} = \mathbf{0}$ zostanie odrzucona na poziomie istotności $\alpha$, co zachodzi wtedy, gdy $F_{emp} > F_{\alpha;v_1,v_2}$, to możemy przystąpić do sprawdzania hipotez szczegółowych, że wybrany cząstkowy współczynnik regresji $b_h$ jest zerem. Funkcja testowa ma postać

$$t_{emp}^{(h)} = \frac{\hat{b}_h}{s_{\hat{b}_h}}, \quad gdzie \quad s_{\hat{b}_h} = \sqrt{s_{y \cdot x}^2 v^{hh}}$$

przy czym $v^{hh}$ jest elementem diagonalnym macierzy $V^{-1}$. Hipotezę $H_0 : b_h = 0$ odrzucamy, gdy $| t_{emp}^{(h)} | > t_{\alpha;v'}$, gdzie $t_\alpha$ jest wartością krytyczną rozkładu $t$ dla liczby stopni swobody $v = n - k - 1$.

Zwykle zmienne, dla których $| t_{emp}^{(h)} | < t_{\alpha;v'}$ odrzucamy z modelu regresji jako nieistotne i powtarzamy analizę wyliczając ponownie wektor **b** z równania dla $k' = k-1$. Jeśli równocześnie kilka różnych zmiennych objaśniających okaże się nieistotnymi, to odrzucamy tylko jedną z nich o najmniejszej wartości funkcji testowej $t_{emp}^{(h)}$ i powtarzamy analizę. Zwracamy uwagę, że test pozwala na sprawdzenie istotności wprowadzenia danej zmiennej do modelu, przy założeniu, że pozostałe są tam uwzględnione. Stąd też rola innych zmiennych może się znacznie zmienić, gdy usuwamy którąkolwiek ze zmiennych.

L. Breiman i D. Freedman (1982) proponują inne kryterium usuwania zmiennych z modelu regresji wielokrotnej, mianowicie zmienną (nawet nieistotną) pozostawiamy w modelu, jeśli

$$s_{y \cdot x}^2 = \left(1 + \frac{k}{n-k-1}\right) < s_{y \cdot x}^2(h)\left(1 + \frac{k+1}{n-k}\right),$$

gdzie $s_{y \cdot x}^2(h)$ jest wariancją resztową z próby po usunięciu rozpatrywanej zmiennej $X_h$. Dla ostatecznego zestawu zmiennych objaśniających mamy funkcję regresji z próby

$$\hat{m}(\mathbf{x}) = b_0 + \hat{\mathbf{b}}^T \mathbf{x};$$

którą możemy wykorzystywać do prognozowania wartości cechy $Y$ na podstawie obserwacji cech $X_1, X_2, \ldots, X_k$. *Błąd prognozy* obliczamy ze wzoru

$$s_{\hat{m}(x)} = \sqrt{s^2_{y \cdot x}\left[\frac{1}{n} + (\mathbf{x} - \bar{\mathbf{x}})^T \mathbf{V}^{-1} (\mathbf{x} - \bar{\mathbf{x}}\right]}$$

Współczynnik determinacji obliczamy ze wzoru

$$R^2\% = \frac{\hat{\mathbf{b}}^T \mathbf{c}}{\operatorname{var} y} 100\%$$

Natomiast wzór

$$R = \sqrt{\frac{\hat{\mathbf{b}}^T \mathbf{c}}{\operatorname{var} y}}$$

określa *współczynnik korelacji wielokrotnej* o wartościach z przedziału $\langle 0,1 \rangle$ Interpretacja obu współczynników: determinacji i korelacji jest podobna jak w przypadku dwuwymiarowym. Współczynnik determinacji określa część zmienności cechy $Y$ zdeterminowaną, objaśnioną zależnością od zespołu cech objaśniających. Im $R$ bliższe jest jedności, tym zależność $Y$ od $X_1, X_2, \ldots, X_k$ jest silniejsza.

### 7.3.3 Klasyfikacja pojedyncza

Sumę kwadratów wariancji ogólnej rozbija się na dwa składniki mierzące zmienność między grupami i wewnątrz grup (resztową). Porównując te wariancje testem $F$ rozstrzygamy, czy średnie grupowe różnią się istotnie od siebie czy nie. Jeśli podział na grupy przebiegał ze względu na różne poziomy badanego czynnika, to można wykryć w ten sposób wpływ poziomu na wartość badanej cechy.

Danych jest $k$ populacji normalnych $N(m_i, s_i)$, $i=1,\ldots,k$. Wariancje wszystkich populacji są równe (nie muszą być znane). Z każdej z tych populacji wylosowano niezależnie próby o liczebności $n_i$. Wyniki prób oznaczone są $x_{ij}$ ($j=1,\ldots,n_i$), przy czym $x_{ij}=m_i+e_{ij}$, gdzie $e_{ij}$ jest wartością zmiennej losowej nazywanej składnikiem losowym o rozkładzie $N(0,s)$.

$H_0$: $m_1=m_2=\ldots=m_k$ wobec $H_1$: nie wszystkie średnie są równe

Jeśli $F>=F_a$, to hipotezę o równości średnich w badanych populacjach należy odrzucić, co oznacza udowodnienie istotnego wpływu poziomu czynnika na te populacje.

Jeśli odrzucono hipotezę $H_0$ należy w dalszym etapie analizy wyników zastosować metodę porównywania wielokrotnego (badanie istotności różnic między wartościami średnimi dla wszystkich par czynnika).

Jeśli chcemy zbadać wpływ poziomu dwóch czynników stosujemy klasyfikację podwójną.

## 7.4 Metody redukcji wariancji

Znane są różne metody zmniejszania nakładu pracy (liczby eksperymentów) niezbędnego do osiągnięcia danego poziomu ufności wyników. Jeśli wykona się $n$ niezależnych obserwacji pewnej wielkości, których odchylenie standardowe jest równe $s$, to błąd standardowy średniej tych obserwacji wyniesie $s/n^{1/2}$. Jeśli wykonamy dwa warianty eksperymentu powtarzając je $n_1$ i $n_2$ razy, ich wyniki mają odchylenie standardowe $s_1$ i $s_2$, to jednakową dokładność otrzymamy gdy

$s_1/n_1^{1/2}=s_2/n_2^{1/2}$ czyli $n_1/n_2=s_1^2/s_2^2$.

Ogólnie: jeśli pewien rodzaj eksperymentu redukuje wariancję k-krotnie, to liczbę powtórzeń można zmniejszyć również k-krotnie.

**Powtarzanie ciągów liczb losowych**

Celem symulacji jest zazwyczaj porównanie różnych możliwości. W takim przypadku eksperymentator powinien odtwarzać i ponownie używać tego samego ciągu zdarzeń do różnych przebiegów (ciąg taki jest funkcją liczb pseudolosowych). W ten sposób uzyskuje pożądane wyniki za pomocą znacznie mniejszej próbki, niż gdyby generował niezależne ciągi w każdym przebiegu.

**Ciągi przeciwne liczb losowych**

W tym przypadku eksperymentator wykonuje przebiegi parami korzystając z ciągu liczb losowych i ciągu doń przeciwnego. Następnie należy obliczyć średnie par jako wyniki eksperymentu. Metoda ta zwykle kilkukrotnie zmniejsza koszt obliczeń w porównaniu do użycia ciągów zupełnie niezależnych liczb losowych.

# Zakończenie

W opracowaniu przedstawiona została synteza badań, jakie autorzy przeprowadzili nad systemami symulacyjnymi walki zbrojnej. Badania polegały na analizie literatury przedmiotu i refleksjach ogólnoteoretycznych nad systemami symulacyjnymi. Jak dotychczas zainteresowania autorów koncentrowały się nad konceptualizacją modelu symulacyjnego walki w aspekcie formalnym (matematycznym). Natomiast doświadczenia z realizacji własnej systemu symulacyjnego (Model-5) oraz analiza systemów symulacyjnych funkcjonujących w siłach zbrojnych NATO przyczyniła się do wypracowania poglądów dotyczących aspektów projektowo – programowych właściwych dla systemów informatycznych.

Potrzeba zainteresowania się problemami użytkowania systemów symulacyjnych w aspektach metodyczno – merytorycznych powstała w związku z planami dotyczącymi Centrum Symulacji i Komputerowych Gier Wojennych. Okazuje się bowiem, że eksperymenty badawcze realizowane na modelach symulacyjnych, aby były wartościowe i upoważniały do formułowania poprawnych wniosków, powinny być właściwie zaplanowane i przeprowadzone, a pozyskany materiał empiryczny odpowiednio, zgodnie z metodami statystycznymi - obrobiony.

Prezentowane opracowanie, w zamyśle autorów, powinno zwrócić uwagę użytkowników systemów symulacyjnych na powyższe problemy.

Na podstawie jednego eksperymentu symulacyjnego na modelu **nie można** bowiem wnosić czegokolwiek o systemie rzeczywistym. Konkluzje takie są nieuprawnione.

## Literatura


1. Ackoff R. L., *Decyzje optymalne w badaniach stosowanych*,PWN, 1969
2. Bartosiewicz St., *Ekonometria*, PWE, 1989
3. Bojarski Wł., *Podstawy analizy i inżynierii systemów* PWN,1984
4. Cempel Cz., *Teoria i inżynieria systemów*, http://www.pbn.pl/Delphi/Program/CASE.htm
5. Dorosiewicz Sł. i inni, *Ekonometria*, Wyd. SGH, Warszawa, 1998
6. *Filozofia a nauka. Zarys encyklopedyczny*, PAN, Wydział Nauk Społecznych, Komitet Nauk Filozoficznych, 1987
7. Findeisen Wł. (red), *Analiza systemowa – podstawy i metodologia*, PWN, 1985
8. Fishman G., *Symulacja komputerowa. Pojęcia i metody*, PWE, 1981
9. Gutenbaum J., *Modelowanie matematyczne systemów*, PWN, 1987
10. Kłodziński E., *Metody symulacyjne badania systemów. Wprowadzenie do badań systemów metodą symulacji cyfrowej*, WAT,1984
11. Kłodziński E., *Symulacyjne metody badania systemów*, Zeszyt 1 – 5, WAT, 1983.
12. Mańczak K., *Technika planowania eksperymentu*, WNT, 1976
13. Nowak E., *Problemy informacji w modelowaniu ekonometrycznym*, PWN, 1990
14. M. Pelc, *Wybrane problemy metodologiczne wojskowych badań naukowych*, AON, 1998
15. Pisecki St., Chojnacki A., *Teoria badań operacji. Planowanie operacji wojennych*, WAT, 1973
16. Przybyłowski J., *Logika z ogólną metodologią nauk*,Wyd. Uniwersytetu Gdańskiego, 1995,
17. Rajski J., Tyszer J., *Modelowanie i symulacja cyfrowa*, Wyd. Politechniki Poznańskiej, 1986
18. Sienkiewicz P., *Analiza systemowa. Podstawy i zastosowania*, Wyd. Bellona, 1994
19. Sienkiewicz P., *Inżynieria systemów. Wybrane zastosowania wojskowe*, Wyd. MON,1983
20. Wieleba R., Wocial J., *Symulacyjny model walki szczebla taktycznego*, AON, 2002
21. Wójcicki R., *Teorie w nauce. Wstęp do logiki, metodologii i filozofii nauki*, PAN, Instytut Filozofii i Socjologii, 1991
22. Wójcik A. R., Laudański Z, *Planowanie i wnioskowanie statystyczne w oświadczalnictwie*, PWN, 1989