

*
AKADEMIA OBRONY NARODOWEJ

Płk prof.dr hab. Piotr SIENKIEWICZ
Por. dr Henryk SPUSTEK

ZASTOSOWANIE TECHNIKI KOMPUTEROWEJ
W DOWODZENIU WOJSKAMI

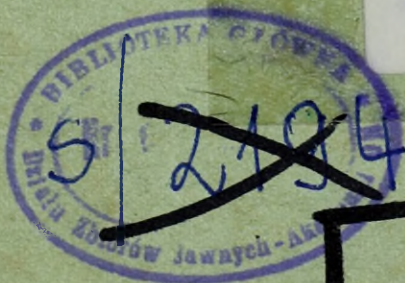
CZĘŚĆ I: OPTYMALIZACJA PROCESU WALKI

1
Biblioteka Główna
Akademii Obrony Narodowej

~~S/2194 cz. 1~~



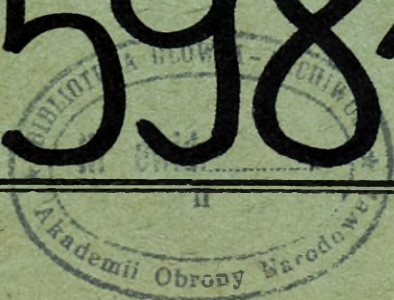
~~05-002194-001-0~~



59819

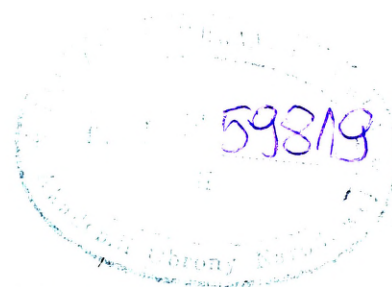
WARSZAWA

1993



AKADEMIA OBRONY NAŘODOWEJ

CENTRUM INFORMATYKI



ZASTOSOWANIE TECHNIKI KOMPUTEROWEJ
W DOWODZENIU WOJSKAMI

Opracowanie modeli matematycznych

1-2

CZEŚĆ I : OPTIMALIZACJA PROCESU WALKI

~~5/2194~~

płk prof.dr hab. Piotr SIENKIEWICZ
por.dr Henryk SPUSTEK

Temat

$\frac{1}{8.1}$ " MIKROKOMPUTERY "

Warszawa

wrzesień

1993 r.

SPIS TREŚCI

1.	WSTĘP	1
2.	PODSTAWOWE RÓWNANIA OPISUJĄCE PROCES	3
3.	ZASTOSOWANIE MODELU DO TRADYCYJNYCH RODZAJÓW PROWADZENIA OGNI A	18
	3.1. PROWADZENIE OGNI A DO CELÓW ROZŚRODKOWANYCH	18
	3.1. PROWADZENIE OGNI A DO CELÓW ZEŚRODKOWANYCH	19
	3.2. OSTRZELIWANIE POWIERZCHNIOWE	20
4.	PRĘDKOŚĆ PRZESUWANIA SIĘ LINII STYCZNOŚCI WALCZĄCYCH STRON	21
5.	RÓWNANIE LINII STYCZNOŚCI FRONTU	52
6.	ZAKOŃCZENIE	58

1. WSTEP

Jednym z wymagań stawianych modelom opisującym różnego rodzaju procesy jest ich zamkniętość. Wszystkie wielkości występujące w modelu dzieli się na trzy rodzaje. Do pierwszego rodzaju odnoszą się wielkości będące szukanymi funkcjami swoich argumentów (w danym przypadku współrzędnych i czasu), zwanych zmiennymi fazowymi. Do drugiego rodzaju zaliczamy znane funkcje współrzędnych i czasu zwane parametrami modelu. Do trzeciego rodzaju odnoszą się funkcje kierowania wypracowane przez uczestników procesu.

Model jest zamknięty wówczas, gdy znany jest stan początkowy procesu i warunki na granicach obszaru przestrzeni w którym dany model funkcjonuje, jak również znane są w tym obszarze w wybranym przedziale czasowym, parametry modelu i kierowania. Właśnie taki zbiór powiązań pomiędzy wyszczególnionymi wielkościami, pozwala na określenie w danym obszarze przestrzennym i przedziale czasowym wszystkich zmiennych fazowych, a tym samym pozwala na pełne przedstawienie procesu.

W rozważanym modelu, zmiennymi fazowymi są : gęstości jednostek bojowych μ_i, ν_j ; parametrami modelu - funkcje $k_{ji}^A, k_{ij}^B, F_i^A, F_j^B$; prędkości rozmieszczenia u_i, v_j ; szybkostrzelność α_i, β_j oraz funkcje podziału celów ϕ_i, ψ_j przyjętych jako funkcje kierowania. Funkcje kierowania wymagają tutaj wyjaśnienia. Przeważnie, gdy mówimy o kierowniu, mamy na myśli pewien organ kierowniczy - kogoś kto kieruje. Podczas prowadzenia działań bojowych wiele zależy od poszczególnych jednostek bojowych. Poczynania tych jednostek nie zawsze są zgodne z funkcjami, które zaplanuje organ kierowania.

Na taki stan rzeczy może mieć wpływ wiele przyczyn a mianowicie:

- przeciwdziałanie przeciwnika,
- brak informacji,
- słaba łączność,
- ograniczenia psychologiczne,
- niski poziom dyscypliny,
- inne nieprzewidziane okoliczności.

Istotne ograniczenia do procesu kierowania wprowadzają także taktyczno-techniczne charakterystyki uzbrojenia, techniki i warunki topologiczne terenu.

Widać stąd, że modele społeczne prawie nigdy nie występują jako zamknięta całość, w pełni tego słowa znaczeniu. Oczywiście, zwykle są one "domykane" przez przyjęcie określonego systemu hipotez i założeń w stosunku do zachowania się ludzi uczestniczących w procesie. Jest to podstawą przy opracowywaniu algorytmów gwarantowanego wyniku dla różnych wariantów informacyjności stron. Należy przy tym pamiętać, że nie można w pełni wykluczyć elementu ryzyka.

2. PODSTAWOWE RÓWNANIA OPISUJĄCE PROCES

Rozpatrzmy konflikt wojenny, przedstawiający sobą starcie dwóch stron - A i B.

Przyjmujemy, że każdy z przeciwników ma do dyspozycji określoną liczbę obiektów, nazywanych dalej elementarnymi jednostkami bojowymi, które przygotowane są do prowadzenia ognia i przemieszczania się w przestrzeni.

Podzielimy elementarne jednostki bojowe na rodzaje. Niech strona A posiada M - rodzajów jednostek bojowych, przy czym w i -tym rodzaju zawiera się p_i jednostek bojowych. Odpowiednio, dla strony B ustalimy N - rodzajów i w j -tym rodzaju g_j jednostek bojowych.

Dla uproszczenia opisu przyjmujemy, że działania bojowe prowadzone są w przestrzeni dwuwymiarowej a więc na płaszczyźnie.

Wprowadzamy następujące oznaczenia :

$r_{ip}^*(t')$ - promień wodzący punktu płaszczyzny w którym znajduje się p -ta jednostka bojowa i -tego rodzaju strony A w momencie czasu t' ,

$\rho_{jq}^*(t')$ - wektor wodzący punktu płaszczyzny w którym znajduje się q -ta jednostka bojowa j -tego rodzaju strony B w momencie czasu t' ,

$u_{ip}^*(t')$ - wektor prędkości q -tej jednostki bojowej j -tego rodzaju strony B w momencie czasu t' ,

$v'_{jq}(t')$ - wektor prędkości q-tej jednostki bojowej j-tego rodzaju strony B w momencie czasu t' .

Dane są oczywiste zależności :

$$\left[\begin{array}{l} \frac{dr'_{ip}(t')}{dt'} = u'_{ip}(t') \\ \\ \frac{dp'_{jq}(t')}{dt'} = v'_{jq}(t') \end{array} \right. \quad \begin{array}{l} (1) \\ \\ (2) \end{array}$$

Powyższe równania kinematyczne pozwalają, przy znanych $u'_{ip}(t')$ i $v'_{jq}(t')$, określić za pomocą całkowania położenie jednostek bojowych w dowolnym momencie czasu t' .

Kontynuując spis oznaczeń przyjmujemy :

τ^A_{ip} - moment zniszczenia p-tej jednostki bojowej i-tego rodzaju strony A ,

τ^B_{jq} - moment zniszczenia q-tej jednostki bojowej j-tego rodzaju strony B ,

$P_{ip}(t')$ - prawdopodobieństwo wystąpienia zdarzenia : $\tau_{ip}^A \leq t'$,

$Q_{jq}(t')$ - prawdopodobieństwo wystąpienia zdarzenia : $\tau_{jq}^B \leq t'$.

Innymi słowy, $P_{ip}(t')$ i $Q_{jq}(t')$ jest prawdopodobieństwem tego, że odpowiednie jednostki bojowe zostały zniszczone do chwili czasu t' . W celu otrzymania równań wzajemnego oddziaływania ogniowego wykorzystujemy procedurę uśredniania parametrów procesu w czasie i przestrzeni podobnie jak przy modelowaniu środowiska płynnego.

Zacznijmy od tego, że wprowadzimy uogólnioną gęstość jednostek bojowych. Pod pojęciem uogólnionej gęstości jednostek bojowych i -tego rodzaju strony A będziemy rozumieć :

$$\mu_i'(r', t') = \sum_{p=1}^{P_i} [1 - P_{ip}(t')] \delta[r' - r'_{ip}(t')] \quad (3)$$

gdzie:

$\delta[r' - r'_{ip}(t')]$ - funkcja δ -Diraca .

Odpowiednio, dla j-tego rodzaju jednostek bojowych strony B mamy :

$$\nu_j(\rho', t') = \sum_{q=1}^{q_j} [1 - Q_{jq}(t')] \delta[\rho' - \rho'_{jq}(t')] \quad (4)$$

Całka z uogólnionej gęstości jednostek bojowych danego rodzaju po wybranym obszarze S jest równa oczekiwanej liczbie niezniszczonych jednostek bojowych danego rodzaju rozmieszczonych w tym obszarze w momencie czasu t'.

Oczywiście zachodzi:

$$\begin{aligned} \int_S \mu_j(\rho', t') dS_{\rho'} &= \sum_{p=1}^{P_j} [1 - P_{jp}(t')] \int_S \delta[\rho' - \rho'_{jp}(t')] dS_{\rho'} = \\ &= \sum_{p^*} [1 - P_{jp^*}(t')] \end{aligned} \quad (5)$$

gdzie

p^* określa się z warunku

$$\rho'_{jp^*}(t') \in S$$

Analogicznie dla strony B :

$$\int_S v'_j(\rho', t') dS_{\rho'} = \sum_{q^*} [1 - Q_{jq^*}(t')] \quad , \quad \rho'_{jq^*}(t') \in S \quad .$$

(6)

Wprowadzamy funkcję uśredniającą $R(r-r', t-t')$
o następujących własnościach :

1° $R(r-r', t-t') \equiv R_0[(r-r')^2] T[(t-t')^2] .$

2° $R(r-r', t-t') > 0$, przy jednocześnie spełnionych warunkach :
 $|r-r'| < \lambda$, $|t-t'| < \tau$

w przeciwnym wypadku :

$R(r-r', t-t') \equiv 0$ (λ i τ - parametry uśredniania) .

3° $R_0[(r-r')^2]$ i $T[(t-t')^2]$ jest różniczkowane potrzebną ilość razy po swoich parametrach.

$$4^{\circ} \int_{-\infty}^{+\infty} dt' \int R(r-r', t-t') dS_r = \pi \lambda^2 2\tau = 2S_{\lambda} \tau$$

gdzie znak \int oznacza całkowanie po całym obszarze działań bojowych, a $S_{\lambda} = \pi \lambda^2$ jest wielkością płaszczyzny uśredniania.

Uśrednione gęstości mają postać :

$$\mu_1(r, t) = \frac{1}{2S_{\lambda} \tau} \sum_{p=1}^{P_1} \int_{-\infty}^{+\infty} [1 - P_{ip}(t')] R[r-r'_{ip}(t'), t-t'] dt' \quad (7)$$

$$\nu_j(\rho, t) = \frac{1}{2S_{\lambda} \tau} \sum_{q=1}^{Q_j} \int_{-\infty}^{+\infty} [1 - Q_{jq}(t')] R[\rho-\rho'_{jq}(t'), t-t'] dt' \quad (8)$$

Oznaczmy przez l średnią odległość pomiędzy sąsiednimi jednostkami bojowymi (analogia do drogi swobodnej ruchu cząsteczki w środowisku płynnym). Wówczas procedura uśredniania w przestrzeni (tu: na płaszczyźnie) będzie w pełni poprawna dla $\lambda \geq l$.

Wartość parametru τ powinna przewyższać charakterystyczny (średni) odstęp czasu pomiędzy wystrzałami. Jednakże, zarówno

wartość λ jak i τ nie może być zbyt duża, ponieważ przy uśrednianiu zachodzi duże prawdopodobieństwo pominięcia (zagubienia) informacji o różnych szczegółach procesu. Oba te parametry powinny być dostatecznie małe w porównaniu z zakresem przestrzenno-czasowym samego procesu działań bojowych.

Wyprowadzimy równanie opisujące zmianę gęstości występowania jednostek bojowych obu stron.

W tym celu różniczkujemy równanie (7) po czasie t .

$$\frac{\partial \mu_i}{\partial t} = \frac{1}{2S_\lambda \tau} \sum_{p=1}^{P_i} \int_{-\infty}^{+\infty} (1 - P_{ip}) \frac{\partial R}{\partial t} dt', \quad i = 1, 2, 3, \dots, M. \quad (9)$$

Można dowieść, że

$$\frac{\partial R}{\partial t} = - \frac{\partial R}{\partial t'} - \frac{\partial R}{\partial r} \frac{d r'_{ip}}{dt'} \quad (10)$$

Podstawiając (10) do (9) i uwzględniając przy tym (1) otrzymujemy :

$$\frac{\partial \mu_i}{\partial t} = - \frac{1}{2S_\lambda \tau} \sum_{p=1}^{P_i} \int_{-\infty}^{+\infty} (1 - P_{ip}) \left(\frac{\partial R}{\partial t'} + \frac{\partial R}{\partial r} u'_{ip} \right) dt', \quad (11)$$

Przekształcamy całkę :

$$\int_{-\infty}^{+\infty} (1-P_{ip}) \frac{\partial R}{\partial t'} dt' , \quad (12)$$

całkując ją przez części.

$$\int_{-\infty}^{+\infty} (1-P_{ip}) \frac{\partial R}{\partial t'} dt' = (1-P_{ip}) R \Big|_{-\infty}^{+\infty} + \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dP_{ip}}{dt'} R dt'$$

Na mocy własności 2^o funkcji R, pierwszy składnik sumy jest równy zeru.

Stąd

$$\int_{-\infty}^{+\infty} (1-P_{ip}) \frac{\partial R}{\partial t'} dt' = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dP_{ip}}{dt'} R dt' , \quad (13)$$

Drugą całkę w (11) można przedstawić w postaci :

$$\int_{-\infty}^{+\infty} (1-P_{ip}) \frac{\partial R}{\partial t'} u'_{ip} dt' = \operatorname{div}_r \int_{-\infty}^{+\infty} (1-P_{ip}) u'_{ip} R dt' , \quad (14)$$

Podstawiając (13) i (14) do prawej strony równania (11), otrzymujemy:

$$\frac{\partial \mu_i}{\partial t} + \operatorname{div}_r \frac{1}{2S_\lambda \tau} \sum_{p=1}^{P_i} \int_{-\infty}^{+\infty} (1 - P_{ip}) u'_{ip} R dt' + \frac{1}{2S_\lambda \tau} \sum_{p=1}^{P_i} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dP_{ip}}{dt} R dt' = 0. \quad (15)$$

Wprowadzając uśrednioną prędkość jednostek bojowych w punkcie r w danej chwili czasu t według zależności :

$$u_i(r, t) = \frac{\sum_{p=1}^{P_i} \int_{-\infty}^{+\infty} [1 - P_{ip}(t')] u'_{ip}(t') R[r - r'_{ip}(t'), t - t'] dt'}{\sum_{p=1}^{P_i} \int_{-\infty}^{+\infty} [1 - P_{ip}(t')] R[r - r'_{ip}(t'), t - t'] dt'} \quad (16)$$

można napisać równanie (15) w następującej formie :

$$\frac{\partial \mu_i}{\partial t} + \operatorname{div}_r \mu_i u_i + \frac{1}{2S_\lambda \tau} \sum_{p=1}^{P_i} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dP_{ip}}{dt} R dt' = 0. \quad (17)$$

Nietrudno jest zauważyć, że wielkość :

$$\gamma_1^A(r, t) = \frac{1}{2S_\lambda \tau} \sum_{p=1}^{P_i} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dP_{ip}(t')}{dt'} R[r-r'_{ip}(t'), t-t'] dt' \quad (18)$$

przedstawia sobą uśrednioną wartość oczekiwanej liczby jednostek bojowych, niszczonych w jednostce czasu na jednostkowej płaszczyźnie, w otoczeniu punktu r w danej chwili czasu t .

Zapiszemy zatem równanie (17) w postaci :

$$\frac{\partial \mu_1}{\partial t} = - \operatorname{div}_r \mu_1 u_1 - \gamma_1^A$$

i scałkujemy jego człony po niektórych, wybranych obszarach S .
Otrzymamy następującą zależność :

$$\frac{\partial}{\partial t} \int_S \mu_1 dS_r = - \oint_C \mu_1 u_1 n dl_r - \int_B \gamma_1^A dS_r \quad (19)$$

gdzie :

\oint - całka po zamkniętym obwodzie C ,

n - wektor jednostkowy normalny do powierzchni zamkniętej obwodem C .

Powyższa zależność opisuje bilans "siły życiowej".

Zmiana ilości jednostek bojowych w obszarze S w jednostce czasu równa się liczbie jednostek bojowych, które wyszły z tego obszaru w danej jednostce czasu, powiększonej o jednostki zniszczone w tym obszarze w rozpatrywanej jednostce czasu.

Wielkość $\gamma_1^A(r, t)$ będziemy nazywać jednostkowym ubytkiem bojowych jednostek i -tego rodzaju strony A .

Przez analogię do hydrodynamiki, wielkość ta może być interpretowana jako przestrzenna gęstość "kanałów ściekowych" rozmieszczonych na obszarze zajętych przez jednostki bojowe i -tego rodzaju strony A .

Jednakże, analogia ta nie zawsze jest sensowna ponieważ jednostki bojowe strony A niszczone są w obszarze S w skutek wystrzeliwanych pocisków przez stronę B .

Takie rozumowanie pozwoli nam wyrazić ubytek jednostkowy γ_1^A od parametrów charakteryzujących stronę B . W tym celu wprowadzimy charakterystyki ogniowe oddziaływania stron na siebie, nie uwzględniając dyskretnej struktury jednostek bojowych, tzn. traktując ich zbiór jako środowisko ciągłe. Takie ujęcie problemu, pozwoli nam wykorzystać w dalszym ciągu parametry uśrednione w czasie i przestrzeni.

Wprowadzamy zatem kolejne wielkości :

$\alpha_i(r, t)$ - szybkostrzelność prowadzenia ognia jednostki bojowej i -tego rodzaju strony A w chwili czasu t z punktu r ,

$\beta_j(\rho, t)$ - szybkostrzelność prowadzenia ognia jednostki bojowej j -tego rodzaju strony B w chwili czasu t z punktu ρ ,

$F_j^B[\rho, \psi_j(\rho, t), r, t] dS_r$ - prawdopodobieństwo trafienia celu przez pocisk wystrzelony przez jednostkę bojową j-tego rodzaju strony B z punktu ρ w chwili czasu t , w otoczeniu (dS_r) punktu r ,

$k_{ji}^A(\rho, t)$ - ilość jednostek bojowych j-tego rodzaju strony B, zniszczonych w otoczeniu (dS_ρ) punktu ρ w momencie czasu t , przy trafieniu w to otoczenie jednym pociskiem jednostki bojowej i-tego rodzaju strony A

$k_{ij}^B(r, t)$ - ilość jednostek bojowych i-tego rodzaju strony A, zniszczonych w otoczeniu (dS_r) punktu r w momencie czasu t , przy trafieniu w to otoczenie jednym pociskiem jednostki bojowej j-tego rodzaju strony B

$\phi_i(r, t)$ i $\phi_j(\rho, t)$ - oczekiwane liczby punktów trafienia t. j.

$$\phi_i(r, t) \equiv \int \rho F_i^A[r, \phi_i(r, t), \rho, t] dS_\rho$$

$$\phi_j(\rho, t) \equiv \int r F_j^B[\rho, \psi_j(\rho, t), r, t] dS_r$$

Wiadomo przy tym, że :

$$\int \rho F_i^A[r, \phi_i(r, t), \rho, t] dS_\rho = 1$$

$$\int r F_j^B[\rho, \psi_j(\rho, t), r, t] dS_r = 1$$

Dla uproszczenia, czas lotu pocisku pominięto.

Ubytki jednostek bojowych w czasie walki sumują się, tzn. że w jednakowych warunkach od n pocisków zostanie średnio zniszczonych n razy więcej jednostek niż od jednego pocisku. Wobec tego, straty zadane jednostkom 1-tego rodzaju strony A w jednostce czasu na płaszczyźnie S przez ogień wszystkich jednostek bojowych strony B, będą wyrażone następującym równaniem :

$$\int_S \gamma_i^A dS_r = \sum_{j=1}^N \int_S k_{ij}^B \left(\int F_j^B \beta_j \nu_j dS_\rho \right) dS_r \quad (20)$$

Stąd, kierując się zasadą dowolnego wyboru płaszczyzny S otrzymujemy:

$$\gamma_i^A(r, t) = \sum_{j=1}^N k_{ij}^B(r, t) \int F_j^B(\rho, \psi_j(\rho, t), r, t) \beta_j(\rho, t) \nu_j(\rho, t) dS_\rho \quad (21)$$

Analogiczna wielkość (wydatek jednostkowy) dla strony B ma postać:

$$r_j^B(\rho, t) = \sum_{i=1}^M k_{ji}^A(\rho, t) \int F_i^A(r, \phi_i(r, t), \rho, t) a_i(r, t) \mu_i(r, t) dS_r \quad (22)$$

Wobec tego, równania ogniowego oddziaływania stron na siebie przyjmują następującą postać :

$$\frac{\partial \mu_i(r, t)}{\partial t} + \operatorname{div}_r \mu_i(r, t) u_i(r, t) + \sum_{j=1}^N k_{ij}^B(\rho, t) \int F_j^B(\rho, \psi_j(\rho, t), r, t) \beta_j(\rho, t) v_j(\rho, t) dS_\rho = 0, \quad (23)$$

gdzie : $i = 1, 2, \dots, M$

oraz

$$\frac{\partial v_j(\rho, t)}{\partial t} + \operatorname{div}_\rho v_j(\rho, t) v_j(\rho, t) +$$

(24)

$$+ \sum_{i=1}^M k_{ji}^A(\rho, t) \int F_i^A(r, \phi_i(r, t), \rho, t) \alpha_i(r, t) \mu_i(r, t) dS_r = 0,$$

gdzie : $j = 1, 2, \dots, N$

Do powyższych równań należy dołączyć równania kinematyczne :

$$\frac{dr}{dt} = u_i(r, t) \quad , \quad i = 1, 2, \dots, M$$

(25)

$$\frac{d\rho}{dt} = v_j(\rho, t) \quad , \quad j = 1, 2, \dots, N.$$

Na bazie tak stworzonego modelu rozpatrzemy kolejno tradycyjne rodzaje prowadzenia ognia konkretyzując dla każdego rodzaju współczynniki efektywności k_{ji}^A i k_{ij}^B . Ponadto w dalszych rozważaniach postaramy się unikać stosowania skomplikowanych przeliczeń, dążąc do końcowego rezultatu mającego charakter jakościowo-ogólny.

3. ZASTOSOWANIE MODELU DO TRADYCYJNYCH RODZAJÓW PROWADZENIA OGNI A

3.1. PROWADZENIE OGNI A DO CELÓW ROZŚRODKOWANYCH

W tym przypadku, promień rażenia pociskami jest mniejszy od przyjętego promienia odległości pomiędzy sąsiednimi jednostkami bojowymi, do których prowadzi się ogień. Punkty celowania pokrywają się z konkretnymi jednostkami bojowymi przeciwnika. Współczynnik efektywności w tym przypadku, można przedstawić w następującej postaci :

$$k_{ji}^A(\rho, t) = \xi_{ji}(\rho, t) \chi_{ji}^A(\rho, t) \theta[v_j(\rho, t)] ,$$
$$k_{ij}^B(r, t) = \eta_{ij}(r, t) \chi_{ij}^B(r, t) \theta[\mu_i(r, t)] ,$$

(26)

gdzie

$$\sum_{j=1}^N \xi_{ji}(\rho, t) = 1 ,$$

$$\sum_{i=1}^M \eta_{ij}(r, t) = 1 ,$$

$$\theta(x) = \begin{cases} 1 & \text{dla } x > 0 ; \\ 0 & \text{dla } x \leq 0 . \end{cases} \quad (27)$$

3.2. PROWADZENIE OGNI DO CELÓW ZEŚRODKOWANYCH

W tym przypadku, promień rażenia pociskiem znacznie przewyższy charakterystyczną odległość pomiędzy sąsiednimi jednostkami bojowymi do których prowadzi się ogień.

Punkty celowania wybiera się w otoczeniu środka grupy do której prowadzi się ogień.

Współczynnik efektywności (w tym przypadku) można przedstawić w następującej postaci :

$$k_{ji}^A(\rho, t) = \chi_{ji}^A(\rho, t) \nu_j(\rho, t) .$$

(28)

$$k_{ij}^B(r, t) = \chi_{ij}^B(r, t) \mu_i(r, t) .$$

3.3. OSTRZELIWANIE POWIERZCHNIOWE

Promień rażenia pocisku, zgodnie z przyjętą zasadą, przewyższa charakterystyczne odległości pomiędzy sąsiednimi jednostkami bojowymi przeciwnika. Punkty celowania są równomiernie rozłożone na odcinkach domniemanego ześrodkowania przeciwnika. Współczynnik efektywności w tym przypadku, można przedstawić w następującej postaci :

$$k_{ji}^A(\rho, t) = \chi_{ji}^A(\rho, t) v_j(\rho, t) ,$$

(29)

$$k_{ij}^B(r, t) = \chi_{ij}^B(r, t) \mu_i(r, t) .$$

4. PRĘDKOŚĆ PRZESUWANIA SIĘ LINII STYCZNOŚCI WALCZĄCYCH STRON

Powróćmy obecnie do równań (23) i (24). Przejdziemy do zmiennych Lagrange'a, zachowując jednocześnie dotychczasowe oznaczenia dla wszystkich funkcji i wprowadzając indeks "o" dla promienia wodzącego jednostek w ich początkowym położeniu.

W układzie nowych zmiennych, równania przyjmują postać :

$$\begin{aligned} & \frac{\partial \mu_i(r_i^o, t)}{\partial t} + \mu_i(r_i^o, t) \frac{\partial}{\partial t} \ln J_i^A(r_i^o, t) + \\ & + \sum_{j=1}^N k_{ij}^B(r_i^o, t) \int F_j^B(\rho_j^o, \psi_j(\rho_j^o, t), r_i^o, t) \beta_j(\rho_j^o, t) v_j(\rho_j^o, t) \times \\ & \times J_j^B(\rho_j^o, t) dS_{\rho_j} = 0 \end{aligned} \quad (30)$$

gdzie : $i = 1, 2, \dots, M$;

$$\frac{\partial \mu_j(\rho_j^0, t)}{\partial t} + v_j(\rho_j^0, t) \frac{\partial}{\partial t} \ln J_j^B(\rho_j^0, t) +$$

(31)

$$+ \sum_{i=1}^M k_{ji}^A(\rho_j^0, t) \int F_i^A(r_i^0, \phi_i(r_i^0, t), \rho_j^0, t) \alpha_i(r_i^0, t) \mu_i(r_i^0, t) \times$$

$$\times J_i^A(r_i^0, t) dS_{r_i} = 0 \quad ,$$

gdzie : $j = 1, 2, \dots, N$.

Trajektorie ruchu jednostek bojowych określa się na podstawie równań kinetycznych :

$$(32) \quad \left[\begin{array}{l} \frac{\partial r_i(r_i^0, t)}{\partial t} = u_i(r_i^0, t) \quad i = 1, 2, \dots, M ; \\ \frac{\partial \rho_j(\rho_j^0, t)}{\partial t} = v_j(\rho_j^0, t) \quad j = 1, 2, \dots, N . \end{array} \right.$$

W związku z istnieniem struktury organizacyjnej (jednostki połączone są w pododdziały), nie dochodzi do przemieszczania się jednostek bojowych rozłożonych w odstępach przewyższających parametr uśredniania λ . W związku z tym można uważać, że wektory :

$$\begin{aligned} r_i &= r_i(r_i^0, t) \quad , \\ \rho_j &= \rho_j(\rho_j^0, t) \quad , \end{aligned} \tag{33}$$

spełniają warunki równań (32), ustanawiając wzajemną jednoznaczna zgodność pomiędzy r_i^0, ρ_j^0 a r_i, ρ_j .

Siłą rzeczy, Jakobian $J_i^A(r_i^0, t)$ oraz $J_j^B(\rho_j, t)$ będzie zawsze dodatni. Zachodzą przy tym następujące zależności :

$$J_i^A(r_i^0, 0) = J_j^B(\rho, 0) = 1 \quad \text{ponieważ}$$

$$r_i(r_i^0, 0) \equiv r_i^0 \quad ,$$

$$\rho_j(\rho_j^0, 0) \equiv \rho_j^0 \quad .$$

Dla dalszych rozważań, celowym będzie wprowadzenie w miejsce gęstości μ_i oraz ν_j nowych funkcji :

$$x_i(r_i^0, t) = \mu_i(r_i^0, t) J_i^A(r_i^0, t) \quad i = 1, 2, \dots, M, \quad (34)$$

$$y_j(\rho_j^0, t) = \nu_j(\rho_j^0, t) J_j^B(\rho_j^0, t) \quad j = 1, 2, \dots, N.$$

Równania (30) i (31) przyjmują postać :

$$\frac{\partial}{\partial t} x_i + \sum_{j=1}^N J_i^A k_{ij}^B \int F_j^B \beta_j y_j dS_{\rho_j^0} = 0, \quad (35)$$

$$\frac{\partial}{\partial t} y_j + \sum_{i=1}^M J_j^B k_{ji}^A \int F_i^A \alpha_i x_i dS_{r_i^0} = 0.$$

Posługując się przedstawionym wyżej formalizmem, dokonamy próby oceny zjawisk zachodzących na linii frontu. Przyjmujemy przy tym pewne nieuniknione uproszczenia celem lepszego zrozumienia rozpatrywanego zagadnienia.

Niech strony A i B mają do dyspozycji tylko po jednym rodzaju jednostek bojowych.

Zakładamy dalej, że płaszczyzna na której znajdują się strony A i B została podzielona przez pewną prostą będącą linią rozdzielającą obie strony. Wzdłuż tej prostej, wszystkie parametry procesu nie zmieniają się, a starcie stron zachodzi w kierunku prostopadłym do tej prostej.

Innymi słowy, sprowadzimy problem do zagadnienia jednowymiarowego. Prosta rozdzielająca walczące strony nazwiemy linią styczności lub linią frontu (rys.1).

Przyjmujemy, że jednostki bojowe stron ześrodkowują cały ogień w głównej mierze, w wąskiej strefie przylegającej do linii styczności

$$r = \rho = R(t)$$

Dla funkcji F^A i F^B przyjmujemy następujące zależności:

$$F^A = \frac{1}{\sigma(t)} \theta[(\phi(t) + \alpha(t) - \rho)] \exp \frac{\rho - \phi(t) - \alpha(t)}{\sigma(t)} \quad (36)$$

gdzie

$$\phi(t) = R(t) - \alpha(t) ,$$

$$F^B = \frac{1}{s(t)} \theta[(r - s(t) - \psi(t))] \exp \frac{\psi(t) - s(t) - r}{s(t)} \quad (37)$$

gdzie

$$\psi(t) = R(t) + s(t) , \text{ natomiast } \theta \text{ jest funkcją (27) .}$$

Łatwo też jest się przekonać, że $\phi(t)$ i $\psi(t)$ są punktami celowania, natomiast $\sigma^2(t)$ i $s^2(t)$ jest dyspersją rozkładu F^A i F^B (rys.2)

Wobec tego, dla strony A otrzymujemy następujące zależności :

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \rho F^A d\rho = \int_{-\infty}^{R(t)} \frac{\rho}{\alpha(t)} \exp \frac{\rho - \phi(t) - \alpha(t)}{\alpha(t)} d\rho = \phi(t) ,$$

(38)

$$\int_{-\infty}^{+\infty} (\rho - \phi)^2 F^A d\rho = \int_{-\infty}^{R(t)} \frac{[\rho - \phi(t)]^2}{\alpha(t)} \exp \frac{\rho - \phi(t) - \alpha(t)}{\alpha(t)} d\rho = \sigma^2(t) .$$

Można też napisać analogiczne zależności na $\psi(t)$ i $S^2(t)$ dla strony B.

Przez $d^A(t)$ oznaczmy odległość od linii frontu jednostki bojowej strony A otwierającej ogień do strony B, zaś przez $d^B(t)$ analogiczną odległość dla strony B. Wówczas, szybkostrzelność obu stron ($\alpha(r, t)$ i $\beta(\rho, t)$) można opisać następującymi równaniami :

$$\alpha(r, t) = \alpha(t) \theta \left[\frac{dA(t)}{2} - \left| R(t) + \frac{dA(t)}{2} - r \right| \right] ,$$

(39)

$$\beta(\rho, t) = \beta(t) \theta \left[\frac{dB(t)}{2} - \left| R(t) + \frac{dB(t)}{2} - \rho \right| \right] .$$

Zakładamy dalej, że jednostki bojowe prowadzą skuteczny ogień do celów rozśrodkowanych. W takim przypadku współczynniki efektywności k^A i k^B można opisać zależnościami:

$$k^A = \chi^A(\rho, t) \theta[\nu(\rho, t)] ,$$

(40)

$$k^B = \chi^B(r, t) \theta[\mu(r, t)] .$$

W zależnościami (36 - 40) występowały zmienne Eulera. Dla wygody przejdziemy teraz ponownie do zmiennych Lagrange'a. W tym celu, musimy wyrazić r^0 i ρ^0 przez r i ρ co można zapisać następująco:

$$r^0 = a(r, t) ,$$

(41)

$$\rho^0 = b(\rho, t) ,$$

określając :

$$r^0 \equiv r[a(r, t), t] ,$$

(42)

$$\rho \equiv \rho[b(\rho, t), t] .$$

Zwróćmy uwagę, że linia frontu $r=\rho=R(t)$, na płaszczyźnie działań, w położeniu początkowym odwzorowana jest przez dwie linie:

$$\begin{aligned} r_R^0(t) &= a[R(t), t] , \\ \rho_R^0(t) &= b[R(t), t] . \end{aligned} \tag{43}$$

Sens tych wielkości jest następujący:

$r_R^0(t)$ - jest współrzędną początkową tej jednostki bojowej strony A, która w chwili czasu t wchodzi na linię styczności obu stron,

$\rho_R^0(t)$ - posiada sens analogiczny.

Nie wdając się w pośrednie obliczenia napiszemy od razu równania oddziaływania ogniowego (uwzględniając przy tym wszystkie dotychczas przyjęte współzależności i oznaczenia) przy pomocy zmiennych Lagrange'a :

$$\begin{aligned} \frac{\partial x(r^0, t)}{\partial t} + x^B(r^0, t) \theta[x(r^0, t)] \beta(t) \frac{J^A(r^0, t)}{S(t)} \times \\ \times \exp \frac{R(t) - r(r^0, t)}{S(t)} \int_{\rho_{R-d}^0(t)}^{\rho_R^0(t)} y(\rho^0, t) d\rho^0 = 0 \end{aligned} \tag{44}$$

w obszarze $r \geq r_R^0(t)$,

$$\frac{\partial y(\rho^0, t)}{\partial t} + x^A(\rho^0, t) \theta[y(\rho^0, t)] \alpha(t) \frac{J^B(\rho^0, t)}{\alpha(t)} \times$$

$$\times \exp \frac{\rho(\rho^0, t) - R^0(t)}{S(t)} \int_{r_R^0(t)}^{r_{R+d}^0(t)} x(r^0, t) dr^0 = 0 \quad (45)$$

w obszarze $\rho^0 \leq \rho_R^0(t)$,

gdzie : $r_{R+d}^0(t) = a[R(t) + d^A(t), t]$,

$\rho_{R-d}^0(t) = b[R(t) - d^B(t), t]$.

Przypomnijmy, że zbudowany model oddziaływania ogniowego stron, uzyskano na drodze uśredniania wszystkich charakterystyk przestrzeni. Siłą rzeczy charakterystyki, których zmiana nie jest związana z działalnością ogniową stron, zmieniają się zarówno w czasie jak i przestrzeni, chociaż nie tak intensywnie jak te których zmianę warunkuje oddziaływanie środków rażenia.

Jak już zaznaczyliśmy wcześniej, przeciwnik ześrodkowuje ogień w wąskiej strefie przylegającej do linii frontu. Formalnie oznacza to, że wielkości S_0 i σ_0 są małe w porównaniu ze strukturalnym zakresem zmian gęstości jednostek nie związanych z ogniowym oddziaływaniem i innymi charakterystykami stron. Wynika stąd, że w równaniach (44,45) gdzie opisuje się ubytki stron wynikłe z

działania ognia, można wykorzystać następujące przybliżone zależności:

$$\chi^A(\rho^0, t) \cong \chi^A[\rho_R^0(t), t] = \chi_R^A(t) ,$$

$$\chi^B(r^0, t) \cong \chi^B[r_R^0(t), t] = \chi_R^B(t) ,$$

$$J^A(r^0, t) \cong J^A[r_R^0(t), t] = J_R^A(t) ,$$

(46)

$$J^B(\rho^0, t) \cong J^B[\rho_R^0(t), t] = J_R^B(t) ,$$

$$r(r^0, t) \cong R(t) + [r^0 - r_R^0(t)]J_R^A(t) ,$$

$$\rho(\rho^0, t) \cong R(t) + [\rho^0 - \rho_R^0(t)]J_R^B(t) .$$

Oczywisty też jest fakt, że na rozśrodkowanie lub ześrodkowanie jednostek bojowych jednej ze stron, strona druga odpowie rozśrodkowaniem lub ześrodkowaniem ognia.

Pozwala to wyznaczyć :

$$\alpha(t) = \sigma_0 J_R^B(t) ,$$

(47)

$$S(t) = S_0 J_R^A(t) ,$$

gdzie : σ_0 i S_0 - wielkości stałe .

Zauważmy, że gdy x i y są różne od zera, to odpowiednie funkcje $\theta(x)$ i $\theta(y)$ przyjmują wartość równą jedności.

Z uwagi na to, że głębokość urzutowania jednostek znacznie przewyższa głębokość strefy gdzie jest ześrodkowany ogień, oczywistym się staje, że w pobliżu linii frontu będziemy mieli do czynienia z zerową gęstością jednostek bojowych. Dlatego też, we wzorach (44, 45) wolno nam przyjąć :

$$\theta(x) = \theta(y) = 1 .$$

Łącząc na uwadze wszystkie przyjęte założenia, układ równań (44, 45) można przedstawić w następujący sposób:

$$\frac{\partial x(r^{\circ}, t)}{\partial t} + \frac{\chi_R^B(t)\beta(t)}{s_0} \frac{r_R^{\circ}(t) - r^{\circ}}{s_0} \int_{\rho_{R-d}^{\circ}(t)}^{\rho_R^{\circ}(t)} y(\rho^{\circ}, t) d\rho^{\circ} = 0$$

(48)

obszarze $r^{\circ} \geq r_R^{\circ}(t)$

$$\frac{\partial y(\rho^{\circ}, t)}{\partial t} + \frac{\chi_R^A(t)\alpha(t)}{\sigma_0} \frac{\rho^{\circ} - \rho_R^{\circ}(t)}{\sigma_0} \int_{r_R^{\circ}(t)}^{r_{R+d}^{\circ}(t)} x(r^{\circ}, t) dr^{\circ} = 0$$

(49)

obszarze $\rho^{\circ} \leq \rho_R^{\circ}(t)$

Nietrudno zauważyć, że poszukiwanym rozwiązaniem tego układu równań mogą być wyrażenia w postaci:

$$x(r^0, t) = x_0(r^0) - \frac{f(t)}{S_0} \exp \left[\frac{r_R^0(t) - r^0}{S_0} \right], \quad r^0 \geq r_R^0(t),$$

$$y(\rho^0, t) = y_0(\rho^0) - \frac{g(t)}{\sigma_0} \exp \left[\frac{\rho^0 - \rho_R^0(t)}{\sigma_0} \right], \quad \rho^0 \leq \rho_R^0(t). \quad (50)$$

Założmy, że :

$$R(0) = f(0) = g(0) = 0.$$

Wówczas z (50) wynika, że:

$$x_0(r^0) = x(r^0, 0) \quad \text{dla} \quad r^0 \geq 0, \quad (51)$$

$$y_0(\rho^0) = y(\rho^0, 0) \quad \text{dla} \quad \rho^0 \leq 0.$$

Z uwagi na to, że $J^A(r^0, 0) = J^B(\rho^0, 0) = 1$, to $x_0(r^0)$ i $y_0(\rho^0)$ jest niczym innym, jak początkowym rozkładem gęstości jednostek bojowych stron A i B.

Przyjmujemy, że w rezultacie wzajemnego prowadzenia ognia przez obie strony, gęstość jednostek bojowych na linii styczności

jest bliska zeru. W związku z tym, na linii styczności wojsk spełnione są następujące warunki:

$$\begin{aligned}x[r_R^0(t), t] &= 0, \\y[\rho_R^0(t), t] &= 0.\end{aligned}\tag{52}$$

Korzystając z tego oraz z zależności (50), możemy napisać:

$$\begin{aligned}f(t) &= S_0 x_0[r_R^0(t)], \quad g(t) = \sigma_0 y_0[\rho_R^0(t)], \\ \text{lub} & \\ f(t) &= S_0 \mu_0[r_R^0(t)], \quad g(t) = \sigma_0 v_0[\rho_R^0(t)].\end{aligned}\tag{53}$$

Podstawiając (53) do (50) otrzymujemy:

$$x(r^0, t) = \mu_0(r^0) - \mu_0[r_R^0(t)] \exp \frac{r_R^0(t) - r^0}{S_0}, \quad r^0 \geq r_R^0(t)\tag{54}$$

$$y(\rho^0, t) = v_0(\rho^0) - v_0[\rho_R^0(t)] \exp \frac{\rho^0 - \rho_R^0(t)}{\sigma_0}, \quad \rho^0 \geq \rho_R^0(t).$$

Różniczkując powyższe zależności względem czasu t , otrzymujemy:

$$\frac{\partial x(r^0, t)}{\partial t} = -\frac{1}{\delta_0} \left\{ \frac{d\mu_0(r^0, t)}{dr^0} \Big|_{r^0=r_R^0} S_0 + \mu_0[r_R^0(t)] \right\} \times$$

$$\times \left[\frac{\partial a(r, t)}{\partial r} \Big|_{r=R} \dot{R}(t) + \frac{\partial a(r, t)}{\partial t} \Big|_{r=R} \right] \exp \frac{r_R^0(t) - r^0}{S_0}$$

(55)

$$\frac{\partial y(\rho^0, t)}{\partial t} = -\frac{1}{\sigma_0} \left\{ \frac{dv_0(\rho^0, t)}{d\rho^0} \Big|_{\rho^0=\rho_R^0} \sigma_0 + v_0[\rho_R^0(t)] \right\} \times$$

$$\times \left[\frac{\partial b(\rho, t)}{\partial \rho} \Big|_{\rho=R} \dot{R}(t) + \frac{\partial b(\rho, t)}{\partial t} \Big|_{\rho=R} \right] \exp \frac{\rho^0 - \rho_R^0(t)}{S_0}$$

Oczywiście:

$$\frac{\partial a(r, t)}{\partial r} \Big|_{r=R(t)} = \frac{1}{J_R^A(t)}$$

$$\frac{\partial b(\rho, t)}{\partial \rho} \Big|_{\rho=R(t)} = \frac{1}{J_R^B(t)}$$

Następnie, różniczkując tożsamości (42) względem t otrzymujemy:

$$\left. \frac{\partial a(r, t)}{\partial t} \right|_{r=R(t)} = - \frac{u_R(t)}{J_R^A(t)},$$

$$\left. \frac{\partial b(\rho, t)}{\partial \rho} \right|_{\rho=R(t)} = - \frac{v_R(t)}{J_R^B(t)} \quad (56)$$

Zależności :

$$u_R(t) = u[r_R^0(t), t],$$

$$v_R(t) = v[\rho_R^0(t), t],$$

(57)

wyrażają prędkość jednostek bojowych poszczególnych stron na linii frontu. Stąd też wyrażenia w nawiasach kwadratowych po prawej stronie równań (55) można zapisać w postaci:

$$\frac{\dot{R}(t) - u_R(t)}{J_R^A(t)}, \quad \frac{\dot{R}(t) - v_R(t)}{J_R^B(t)} ;$$

(58)

gdzie

$$\dot{R}(t) = \frac{dR(t)}{dt}$$

Człony proporcjonalne do S_0 i σ_0 , jak również nawiasy klamrowe w wyrażeniu (55) można odrzucić, ponieważ w dużej odległości od

centralnego ognia początkowy rozkład gęstości jednostek bojowych zmienia się bardzo niewiele. Wynik końcowy przyjmuje więc następującą postać:

$$\frac{\partial x(r^0, t)}{\partial t} = - \frac{1}{\delta_0} \mu_0[r_R^0(t)] \frac{\dot{R}(t) - u_R(t)}{J_R^A(t)} \exp \frac{r_R^0(t) - r^0}{S_0}, \quad (59)$$

$$\frac{\partial y(\rho^0, t)}{\partial t} = - \frac{1}{\delta_0} \nu_0[\rho_R^0(t)] \frac{\dot{R}(t) - v_R(t)}{J_R^B(t)} \exp \frac{\rho^0 - \rho_R^0(t)}{\sigma_0}$$

Podstawiając (55) i (59) do (48 i 49), otrzymamy zależności określające prędkości przemieszczania się linii styczności frontu:

$$\mu_0[r_R^0(t)] \frac{\dot{R}(t) - u_R(t)}{J_R^A(t)} - \chi_R^B(t) \beta(t) \int_{\rho_{R-d^B(t)}^0}^{\rho_R(t)} \nu_0(\rho^0) d\rho^0 + \quad (60)$$

$$+ \chi_R^B(t) \beta(t) \nu_0[\rho_R^0(t)] \sigma_0 \left[1 - \exp \frac{-d^B(t)}{\sigma_0 J_R^B(t)} \right] = 0,$$

$$\nu_0[\rho_R^0(t)] \frac{\dot{R}(t) - \nu_R(t)}{J_R^B(t)} - \chi_R^A(t) \alpha(t) \int_{r_R^0(t)}^{r_R^0 + d^A(t)} \mu_0(r^0) dr^0 +$$

$$+ \chi_R^A(t) \alpha(t) \mu_0[r_R^0(t)] S_0 \left[1 - \exp \frac{-d^A(t)}{S_0 J_R^A(t)} \right] = 0 .$$

Gdyby jednostki bojowe nie realizowały wzajemnego oddziaływania ogniowego, wówczas ich gęstości byłyby określone w następujący sposób :

$$\mu_1(r^0, t) = \frac{\mu_0(r^0)}{J^A(r^0, t)} ,$$

(61)

$$\nu_1(\rho^0, t) = \frac{\nu_0(\rho^0)}{J^B(\rho^0, t)} .$$

Przy $r^0 = r_R^0(t)$ i $\rho^0 = \rho_R^0(t)$ wyrażenia powyższe przyjmują postać:

$$\mu_1[r_R^0(t), t] = \frac{\mu_0[r_R^0(t)]}{J_R^A(t)} ,$$

(62)

$$\nu_1[\rho_R^0(t), t] = \frac{\nu_0[\rho_R^0(t)]}{J_R^B(t)}$$

Wielkości $\mu_1[r_R^0(t), t]$ i $\nu_1[\rho_R^0(t), t]$ przedstawiają sobą wartości gęstości nasycenia jednostek bojowych stron, nie narażonych na niszczącą działalność ogniową, tj. takie wartości gęstości, które posiadają one bezpośrednio w momencie wejścia w strefę oddziaływania ogniowego na linii frontu. Wielkości powyższe nazwiemy gęstością jednostek bojowych wchodzących w bój.

Uwzględniając (47) i (61) otrzymujemy:

$$\begin{aligned} & \dot{R}(t) - u_R(t) \mu_1[R(t), t] - \chi_R^B(t) \beta(t) \int_{R(t)-d^B(t)}^{R(t)} \nu_1(\rho, t) d\rho + \\ & + \chi_R^B(t) \beta(t) \nu_1[R(t), t] \alpha(t) \left[1 - \exp \frac{-d^B(t)}{\alpha(t)} \right] = 0 \end{aligned} \quad (63)$$

$$\begin{aligned} & \dot{R}(t) - \nu_R(t) \nu_1[R(t), t] - \chi_R^B(t) \alpha(t) \int_{R(t)}^{R(t)+d^A(t)} \mu_1(r, t) dr + \\ & + \chi_R^A(t) \alpha(t) \mu_1[R(t), t] S(t) \left[1 - \exp \frac{-d^A(t)}{S(t)} \right] = 0 \end{aligned}$$

Biorąc pod uwagę fakt, że w dużych odległościach od centralnego punktu ześrodkowania ognia gęstości: $d^A(t)$ i $d^B(t)$ zmieniają się niewiele jako, że nie są one narażone na oddziaływania ogniowe, zależności () można zapisać w prostszej postaci :

$$[R(t) - u_R(t)] \mu_R(t) - \chi_R^B(t) \beta(t) [d^B(t) - \alpha(t) h^{BA}(t)] \nu_R(t) = 0, \quad (64)$$

$$[R(t) - \nu_R(t)] \nu_R(t) - \chi_R^A(t) \alpha(t) [d^A(t) - S(t) h^{AB}(t)] \mu_R(t) = 0,$$

gdzie dokonano następujących oznaczeń :

$$\mu_1[R(t), t] = \mu_R(t),$$

$$\nu_1[R(t), t] = \nu_R(t),$$

$$1 - \exp \left[- \frac{d^B(t)}{\alpha(t)} \right] = h^{BA}(t),$$

$$1 - \exp \left[- \frac{d^A(t)}{S(t)} \right] = h^{AB}(t).$$

Założmy, że:

$$C^{BA}(t) = \chi_R^B(t) \beta(t) [d^B(t) - \alpha(t) h^{BA}(t)], \quad (65)$$

$$C^{AB}(t) = \chi_R^A(t) \alpha(t) [d^A(t) - S(t) h^{AB}(t)].$$

Z (64) wyznaczamy:

$$\dot{R} - \mu_R = C^{BA} \frac{v_R}{\mu_R} , \quad (66)$$

$$v_R - \dot{R} = C^{AB} \frac{\mu_R}{v_R} .$$

Wielkości C^{BA} i C^{AB} określone wyrażeniami (65) będziemy umownie nazywać efektywnością działań bojowych stron.

Przyjmujemy, że podczas nacierania prędkości stron są dodatnie.

Ponadto zakładamy, że:

$$u_R(t) = -U(t) , \quad (67)$$

$$v_R(t) = -V(t) ,$$

zaś stosunek : $U(t)/V(t)$ oznaczymy przez $\gamma(t)$.

Na podstawie zależności (66) wyznaczamy :

$$\dot{R} = \frac{1}{1+\gamma} \left[C^{BA} \frac{v_R}{\mu_R} - \gamma C^{AB} \frac{\mu_R}{v_R} \right] \quad (68)$$

oraz

$$V = \frac{1}{1+\gamma} \left[C^{BA} \frac{v_R}{\mu_R} + C^{AB} \frac{\mu_R}{v_R} \right] .$$

Stosunek prędkości przemieszczania się frontu \dot{R} do prędkości przemieszczania się jednostek bojowych stron, będziemy nazywać względnym tempem przesuwania się stron.

W ten sposób wyznaczamy:

$$T^B = \frac{\dot{R}}{V} \quad - \text{ tempo przesuwania się strony B ,}$$

$$T^A = \frac{\dot{R}}{U} \quad - \text{ tempo przesuwania się strony A .}$$

Z zależności (68) znajdujemy tempo przesuwania się strony B :

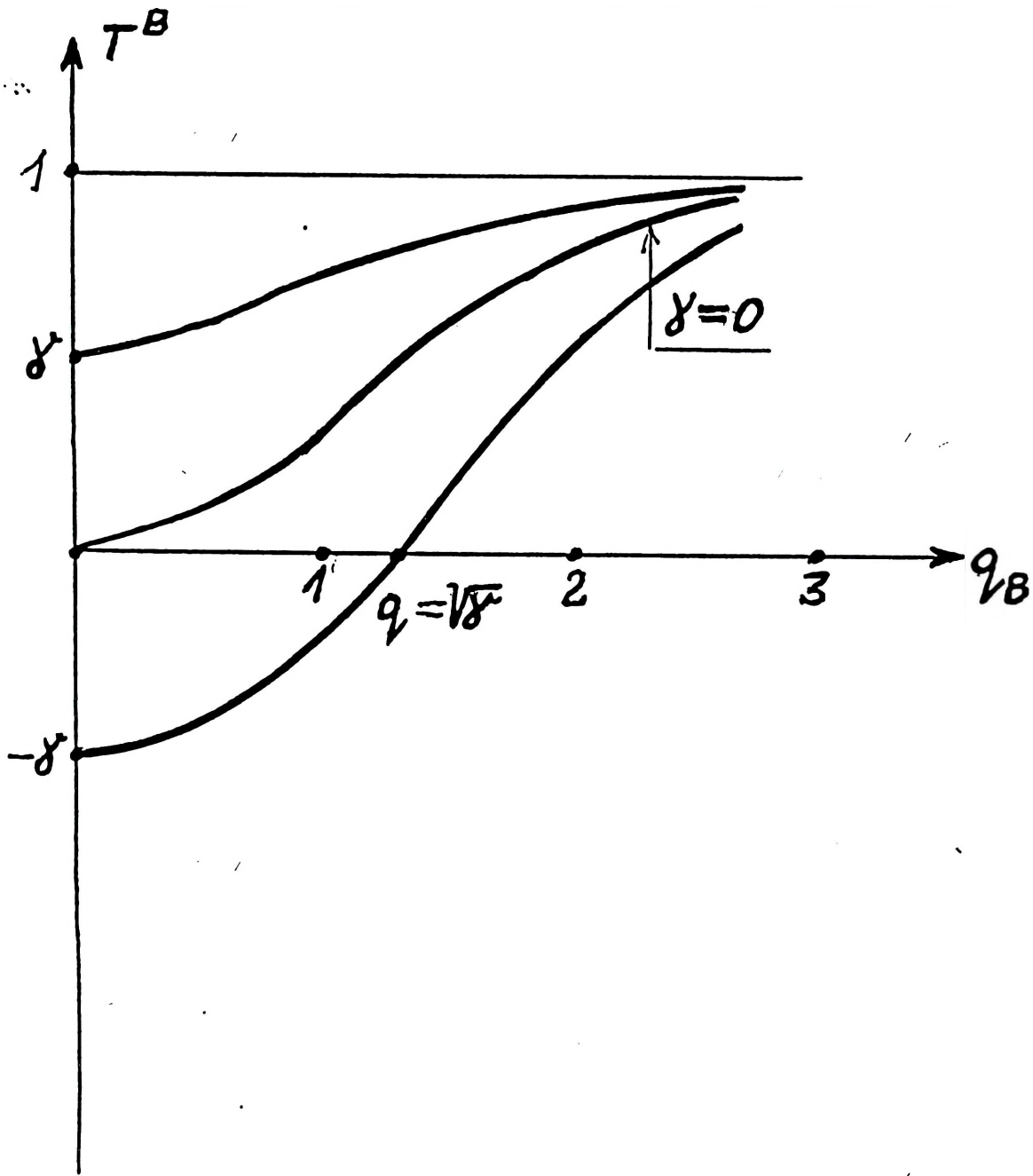
$$T^B = \frac{q_B^2 - \gamma}{q_B^2 + \gamma} \quad , \quad (69)$$

gdzie

$$q_B^2 = \frac{C^{BA} V_R^2}{C^{AB} \mu_R^2}$$

Wielkość q_B będziemy nazywać stosunkiem efektywnych sił strony B do efektywnych sił strony A.

Zależność tempa przesuwania się strony B od stosunku efektywnych sił obu stron przedstawia rys.3. Środkowa linia na rys.3 odpowiada sytuacji, kiedy strona A broni się ($\gamma=0$).



Rys. 3.

Z zależności (69) widać, że przy trzokrotnej przewadze efektywnych sił strony atakującej, względne tempo przesuwania się tej strony wynosi 0.9 tj. prędkość przemieszczania się linii frontu wynosi 90% prędkości natarcia. Przy pięciokrotnej przewadze, wielkość ta wynosi 0.96 tj. linia frontu przemieszcza się praktycznie z prędkością nacierających wojsk. Przy zmniejszeniu przewagi względne tempo natarcia wyraźnie maleje. Przy równych siłach względne tempo przesuwania się strony atakującej wynosi 0.5.

W przypadku wojsk broniących się, efektywność boju spotkaniowego jest wyższa niż dla wojsk nacierających z uwagi na to, że wojska nacierające ponoszą znacznie większe straty w sile żywej niż broniące się.

Z zależności (68) wynika, że straty ponoszone przez obie strony przypadające na jednostkę długości linii frontu w jednostce czasu wynoszą odpowiednio:

$$Z^A(t) = [\dot{R}(t) + U(t)]\mu_R(t) = C^{BA}(t)\nu_R(t) \quad (70)$$

$$Z^B(t) = [V(t) - \dot{R}(t)]\nu_R(t) = C^{AB}(t)\mu_R(t)$$

Stosunek tych strat można określić zależnością :

$$\frac{Z^B}{Z^A} = \frac{C^{AB}(t)\mu_R(t)}{C^{BA}(t)\nu_R(t)} \sqrt{\frac{C^{AB}}{C^{BA}}} \frac{1}{q_B} \quad (71)$$

W przypadku równości efektywnych sił ($q_B=1$) otrzymujemy:

$$\frac{Z^B}{Z^A} = \sqrt{\frac{C^{AB}}{C^{BA}}} \quad (72)$$

Widać, że stosunek strat jest równy pierwiastkowi kwadratowemu z ilorazu efektywności boju spotkaniowego.

Broniące się wojska dążą do zmniejszenia skutków oddziaływania środków ogniowych przeciwnika ($\chi_R^B(t)$) przez różnego rodzaju rozbudowę inżynierską terenu. Z równania (65) wynika, że:

$$C^{AB} > C^{BA}, \text{ wobec czego } Z^B > Z^A.$$

Dlatego też, nacieranie przy równości sił efektywnych jest niecelowe.

Podczas drugiej wojny światowej, szybkie natarcie w pasie przełamania można było zrealizować przy trzykrotnej i większej przewadze w sile efektywnej.

Uwzględniając (67), zależność (66) można wyrazić w postaci :

$$\begin{aligned} (\dot{R} + U) \mu_R &= C^{BA} \nu_R, \\ (V - \dot{R}) \nu_R &= C^{AB} \mu_R. \end{aligned} \quad (73)$$

Powyższe zależności (przy ustalonych gęstościach i efektywnościach walki) wiążą ze sobą trzy wielkości R, U i V.

Stąd wynika, że prędkości przemieszczania się obu stron na linii styczności nie mogą być dobierane dowolnie. Przy ustalonych gęstościach μ_R i ν_R oraz efektywnościach C^{AB} i C^{BA} , zadanie prędkości jednej ze stron pociąga za sobą automatyczne określenie wielkości i kierunku prędkości strony przeciwnej. Prędkości te są własnościami jednostek bojowych przeciwstawnych stron.

Jak wobec tego, w sytuacji bojowej określić współzależność tych prędkości ?

Rozpatrzmy trzy możliwe przypadki.

Przypadek 1

Strona A broni się, strona B naciera.

W tej sytuacji:

$$U = 0, \dot{R} = C^{BA} \frac{\nu_R}{\mu_R}, \text{ zaś właściwa prędkość strony nacierającej:}$$

$$v = C^{BA} \frac{\nu_R}{\mu_R} + C^{AB} \frac{\mu_R}{\nu_R}$$

W ten sposób, prawo wyboru prędkości należy do strony pozostającej w obronie, natomiast prędkość strony nacierającej jest określona.

Przypadek 2

Strona A cofa się, strona B jest w pościgu.

W tym przypadku prawo wyboru prędkości należy również do strony A, zaś prędkość strony B jest określana pod warunkiem, że realizacja pościgu nie powoduje zaniku linii frontu.

W tym przypadku mamy:

$$\dot{R} = c^{BA} \frac{v_R}{\mu_R} - U, \quad (U < 0);$$

$$V = c^{BA} \frac{v_R}{\mu_R} + c^{AB} \frac{\mu_R}{v_R} - U.$$

Przypadek 3

Bój spotkaniowy - obie strony wykonują natarcie.

Jest to najbardziej złożony przypadek. W zależności od aktywności stron tzn. zależnie od tego która ze stron posiada w danej chwili inicjatywę, są możliwe różne zależności $\gamma = U/V$.

W rzeczywistości, tego typu starcie przechodzi zwykle z czasem w przypadek 1 lub 2.

Na zakończenie analizy procesu walki, podane zostaną w sposób syntetyczny zależności analogiczne do (73) dla ogólnego przypadku, kiedy to każda ze stron posiada więcej niż jeden rodzaj wojsk. Mamy zatem następujące równania:

$$[R(t) + U(t)] \mu_i^R(t) = \sum_{j=1}^N c_{ij}^{BA}(t) \nu_j^R(t) \eta_{ij}(t),$$

$$\sum_{i=1}^M \eta_{ij}(t) = 1 \quad ;$$

(74)

$$[V(t) + R(t)] \nu_j^R(t) = \sum_{i=1}^M c_{ji}^{AB}(t) \mu_i^R(t) \xi_{ij}(t),$$

$$\sum_{i=1}^M \xi_{ij}(t) = 1$$

gdzie $c_{ji}^{AB}(t)$ i $c_{ij}^{BA}(t)$ jest efektywnością bezpośredniej walki, zależną od wartości indeksów i, j jako, że różne rodzaje wojsk posiadają różną efektywność w stosunku do siebie.

Powyzsze efektywnosci określa się z następujących zależności:

$$C_{ij}^{BA}(t) = \chi_{ij}^B(t) \beta_j(t) [d_j^B(t) - \sigma_j(t) h_j^{BA}(t)] \quad (75)$$

$$C_{ji}^{AB}(t) = \chi_{ji}^A(t) \alpha_i(t) [d_i^A(t) - S_i(t) h_i^{AB}(t)]$$

Po zsumowaniu układu równań (74) po wszystkich "i", (pierwsze równanie) oraz po wszystkich "j" (drugie równanie) otrzymujemy:

$$(\dot{R} + UD) \sum_{i=1}^M \mu_i^R = \sum_{j=1}^N C_j^{BA} \nu_j^R \quad (76)$$

$$(\dot{V} - R) \sum_{j=1}^N \nu_j^R = \sum_{i=1}^M C_i^{AB} \mu_i^R$$

$$C_j^{BA} = \sum_{i=1}^M C_{ij}^{BA} \eta_{ij}$$

$$C_i^{AB} = \sum_{j=1}^N C_{ij}^{AB} \zeta_{ji}$$

W celu sprowadzenia zależności (76) do postaci (73), należy wprowadzić tzw. sumaryczne gęstości jednostek bojowych poszczególnych stron :

$$\mu_R = \sum_{i=1}^M \mu_i^R$$

(77)

$$\nu_R = \sum_{j=1}^N \nu_j^R$$

jak również tzw. względy efektywności:

$$c^{AB} = \frac{\sum_{i=1}^M c_i^{AB} \mu_i^R}{\sum_{i=1}^M \mu_i^R}$$

(78)

$$c^{BA} = \frac{\sum_{j=1}^N c_j^{BA} \nu_j^R}{\sum_{j=1}^N \nu_j^R}$$

Zależność (76) przybiera teraz postać:

$$\begin{aligned} (\dot{R} + U) \mu_R &= C^{BA} \nu_R \\ (V - \dot{R}) \nu_R &= C^{AB} \mu_R \end{aligned} \quad (79)$$

Uzyskany wynik ma następujący sens fizyczny : działanie zbioru rodzajów jednostek bojowych w bezpośredniej walce jest równoważne działaniu abstrakcyjnego rodzaju jednostek bojowych, charakteryzujących się sumaryczną gęstością i względną efektywnością (78).

Względne tempo przesuwania określa się oczywiście taką samą zależnością , jak podaje (69), jedynie stosunek sił efektywnych stron q_B określa się przez względne charakterystyki wspomnianego wyżej, abstrakcyjnego rodzaju jednostek bojowych.

W przypadku gdy obie strony oprócz licznych rodzajów jednostek bojowych, wyposażonych w małoefektywną broń, posiadać będą broń o dużej efektywności, z możliwością uderzeń na dowolnej głębokości obszaru walki, wówczas gęstości ν_j^R i μ_i^R jednostek wprowadzonych do walki będą podlegać oddziaływaniu tej broni. W celu określenia tych gęstości należy użyć własnego (dla tej sytuacji) modelu.

5. RÓWNANIE LINII STYCZNOŚCI FRONTU

Wyprowadzone zależności określające prędkość przemieszczania linii styczności mogą być wykorzystane przy określonych założeniach do opisanie konfiguracji i ukształtowania linii frontu.

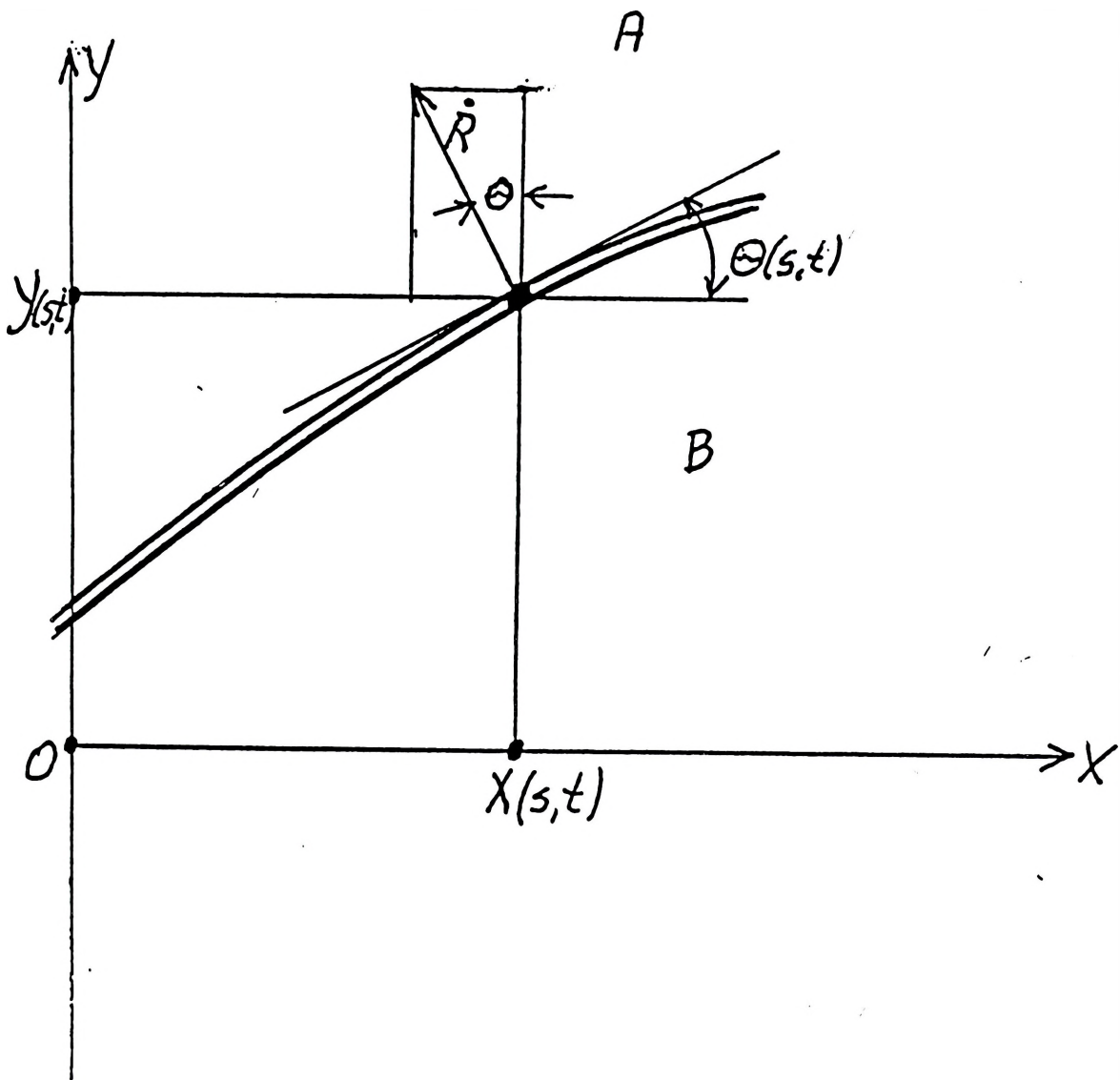
Założenia:

- 1^o Charakterystyczny promień krzywizny linii frontu powinien znacznie przewyższać głębokość ześrodkowania ognia z broni bezpośredniej walki.
- 2^o W procesie działań bojowych jednostki bojowe biorące udział bezpośrednio w walce, prowadzą ogień głównie na kierunku normalnym do linii frontu w danym punkcie.
- 3^o Zmiany charakterystycznych wymiarów liniowych wszystkich parametrów wzdłuż linii frontu, porównujemy z promieniem krzywizny linii frontu.

Linie frontu opiszemy przy pomocy równań parametrycznych :

$$\begin{aligned} x &= X(s,t) \quad , \\ y &= Y(s,t) \quad , \end{aligned} \tag{80}$$

gdzie s - wybrany parametr, zmieniający się wzdłuż linii frontu (np. długość łuku) - rys. 4.



Rys. 4.

Oznaczmy przez \dot{R} prędkość przemieszczania się linii frontu w punkcie S i w czasie t wzdłuż prostej normalnej do linii frontu. Wtedy oczywiście :

$$\frac{\partial x(s,t)}{\partial t} = - \dot{R} \sin \theta(s,t) \quad , \quad (81)$$

$$\frac{\partial y(s,t)}{\partial t} = - \dot{R} \cos \theta(s,t) \quad .$$

Wyrażając $\sin \theta$ i $\cos \theta$ przez $\frac{\partial x(s,t)}{\partial s}$, $\frac{\partial y(s,t)}{\partial s}$ otrzymamy równania liniowe frontu w postaci :

$$\partial x = - \dot{R} \frac{\frac{\partial y}{\partial s}}{\sqrt{\left(\frac{\partial x}{\partial s}\right)^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial s}\right)^2}} \quad , \quad (82)$$

$$\partial y = - \dot{R} \frac{\frac{\partial x}{\partial s}}{\sqrt{\left(\frac{\partial x}{\partial s}\right)^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial s}\right)^2}}$$

W równaniach tych \dot{R} określa się z zależności (76) w których

gęstości μ_i^R, ν_j^R zależą od S i t i są określane z modeli oddziaływania na nie broni dalekiego zasięgu. Stąd wynika, że jednym z głównych celów jednostek, wyposażonych w broń dalekiego zasięgu jest zabezpieczenie takiej wartości funkcji $R(s, t)$, aby zmiana linii frontu w czasie i przestrzeni odpowiadała celom i zadaniom operacji bojowej po opanowaniu terytorium zajętego przez przeciwnika lub utrzymaniu własnego terytorium. Broń dalekiego zasięgu stanowi, w pewnym sensie, środek zabezpieczający walkę jednostek wyposażonych w broń do walki bezpośredniej.

W sytuacji ogólnej, równania (82) dopuszczają różnorodne warianty ukształtowania linii frontu. Linia ta może składać się z dowolnej liczby odcinków, które mogą się łączyć lub rozdzielać na części. Część z nich może zanikać lub może być odtworzona. W układzie zmiennych x, y linia frontu $y = f(x)$ odpowiada równaniu w postaci :

$$\left[\frac{\partial f}{\partial t} \right]^2 = R \left[1 + \left(\frac{\partial f}{\partial x} \right)^2 \right] \quad (83)$$

Na zakończenie pokażemy, jak określa się gęstość μ_i^R i ν_j^R gdy nie oddziałuje na nią broń dalekiego zasięgu.

W tym przypadku ma miejsce równanie zachowania siły żywej, które w układzie zmiennych Lagrange'a wygląda następująco :

$$\mu_1(r_1^0, t) = \frac{\mu_1(r_1^0, 0)}{J_1^A(r_1^0, t)} \quad i = 1, 2, \dots, M ;$$

(84)

$$v_j(\rho_j^0, t) = \frac{v_j(\rho_j^0, 0)}{J_j^B(\rho_j^0, t)} \quad j = 1, 2, \dots, N ;$$

gdzie :

$$\mu_1(r_j^0, 0) \quad i \quad v_j(\rho_j^0, 0) \quad - \quad \text{początkowe, zadane}$$

rozkłady gęstości ,

Jakobiany mogą być określone jeśli zadano zakres prędkości bojowych.

Z równań kinematycznych :

$$\frac{\partial r_1}{\partial t} = u_1(r_1^0, t) \quad ,$$

(85)

$$\frac{\partial \rho_j}{\partial t} = v_j(\rho_j^0, t) \quad ,$$

całkując po czasie określamy trajektorie jednostek bojowych :

$$r_1 = r_1(r_1^0, t) \quad ,$$

(86)

$$\rho_j = \rho_j(\rho_j^0, t) \quad .$$

Następnie, według znanych wzorów, obliczamy szukane Jakobiany J_1^A oraz J_j^B . Po podstawieniu ich do () znajdujemy $\mu_1(r^0, t)$ i $\nu_j(\rho^0, t)$, przedstawiając je w formie: $\mu_1(r, t)$ oraz $\nu_j(\rho, t)$, przyjmując $r = \rho = R$, gdzie $R = (X(s, t), Y(s, t))$.

Widać, że równania linii frontu () są nieliniowe w odniesieniu do szukanych funkcji $X(s, t)$ i $Y(s, t)$.

może stanowić podstawę do prowadzenia badań, tak analitycznych jak i symulacyjnych.

Pomimo tego, przedstawiony model obciążony jest wieloma uproszczeniami, dotyczącymi zarówno istoty modelowego procesu jak i zastosowanego narzędzia matematycznego, przeniesionego z opisu ciągłych procesów fizycznych.

W opisanym modelu stosowano następujące kryteria oceny efektywności:

- skuteczność prowadzenia ognia do różnego rodzaju celów,
- skuteczność prowadzenia działań bojowych,
- tempo przesuwania się linii frontu.

Uznano, że wymienione wskaźniki są wystarczające do opisu procesów walki.

