



AKADEMIA SZTABU GENERALNEGO
im. gen. broni K. Świerczewskiego

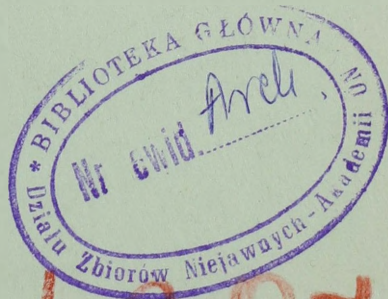
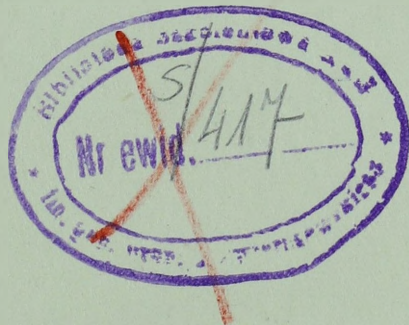
KATEDRA Nr 7

Egz. Nr 45

kpt. dypl. Kazimierz JARON

**Temat: TEORIA STRZELANIA ARTYLERII
PRZECIWLOTNICZEJ**

(Wzory i definicje)



4287

1962



AKADEMIA SZTABU GENERALNEGO
im. gen. broni K. Świerczewskiego

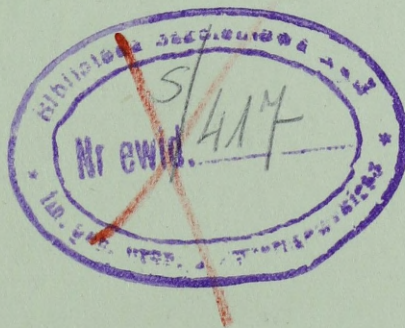
KATEDRA Nr 7

Egz. Nr 45

kpt. dypl. Kazimierz JARON

**Temat: TEORIA STRZELANIA ARTYLERII
PRZECIWLOTNICZEJ**

(Wzory i definicje)



1 9 6 2

AKADEMIA SZTABU GENERALNEGO
im. gen. broni K. Świerczewskiego

KATEDRA NR 7

ZATWIERDZAM
SZEF KATEDRY NR 7

kpt. dypl. Kazimierz JARON

TEORIA STRZELANIA ARTYLERII PRZECIWILOTNICZEJ
WZORY I DEFINICJE



REMBERTÓW

wrzesień

1962r.

Podstawy balistyki zewnętrznej.

3

1. Elementy toru pocisku.
2. Określanie elementów toru pocisku w próżni.
3. Tory sprzężone.
4. Zależność kąta celownika od kąta położenia celu.
5. Siła oporu powietrza.
6. Tabelaryczne warunki strzelania.
7. Strefy dział przeciwlotniczych.

ROZDZIAŁ IITeoretyczne podstawy realizacji sposobów strzelania artylerii przeciwlotniczej.

9

1. Terminologia stosowana w strzelaniach artylerii przeciwlotniczej.
2. Współrzędne celu powietrznego.
3. Czynniki ruchu celu.
4. Istota rozwiązania zadania spotkania pocisku z celem.
5. Rozwiązanie zadania spotkania metodą kolejnych przybliżeń.
6. Proste graficzne rozwiązanie zadania spotkania pocisku z celem.
7. Rozwiązanie odwrotne zadania spotkania pocisku z celem.
8. Prędkość punktu wyprzedzonego.
9. Możliwości dział przeciwlotniczych.

ROZDZIAŁ IIITeoria prawdopodobieństwa.

24

1. Przedmiot teorii prawdopodobieństwa.
2. Częstość zdarzenia.
3. Prawdopodobieństwo zdarzenia.
4. Podstawowe twierdzenia teorii prawdopodobieństwa.
5. Prawdopodobieństwo kombinacji przy powtarzaniu doświadczeń.
6. Wielkości przypadkowe i ich charakterystyki.
7. Niektóre rozkłady wielkości przypadkowej.
8. Układy wielkości przypadkowych.
9. Funkcje wielkości przypadkowych.
10. Prawo wielkich liczb.
11. Opracowanie wyników pomiarów.

12. Wektory przypadkowe na płaszczyźnie.

13. Wektory przypadkowe w przestrzeni.

14. Funkcje przypadkowe.

ROZDZIAŁ IV

str.

Błędy i ich charakterystyki.

70

1. Błędy pomiarów. Prawo błędów. Prawo normalne.
2. Prawo jednakowego prawdopodobieństwa i jego charakterystyki.
3. Suma praw błędów. Sumaryczne prawo błędów.
4. Opracowanie wyników pomiarów.

ROZDZIAŁ V

Rozrzut

76

1. Prawo rozrzutu przy strzelaniu uderzeniowym z jednego działła.
2. Wielkości charakteryzujące rozrzut przy strzelaniu uderzeniowym z jednego działła.
3. Określanie uchyłń środkowych rozrzutu przy strzelaniu uderzeniowym jednym działłem.
4. Metody obliczania prawdopodobieństwa trafienia.
5. Rozrzut przy strzelaniu rozpryskowym.

ROZDZIAŁ VI

Działanie pocisków artylerii przeciwlotniczej

84

1. Energia kinetyczna pocisku /odłamka/.
2. Prędkość odłamka w momencie wybuchu pocisku i jej składowe.
3. Ruch względny.
4. Działanie uderzeniowe pocisków.
5. Działanie pocisków przeciwpancernych.
6. Prawo rażenia i jego charakterystyki.

ROZDZIAŁ VII

Błędy strzelania artylerii przeciwlotniczej

90

1. Błędy strzelania artylerii przeciwlotniczej mk z PUAZO.
2. Błędy strzelania artylerii przeciwlotniczej mk z celownikiem.
3. Błędy strzelania artylerii przeciwlotniczej sk do celów powietrznych.

ROZDZIAŁ VIII

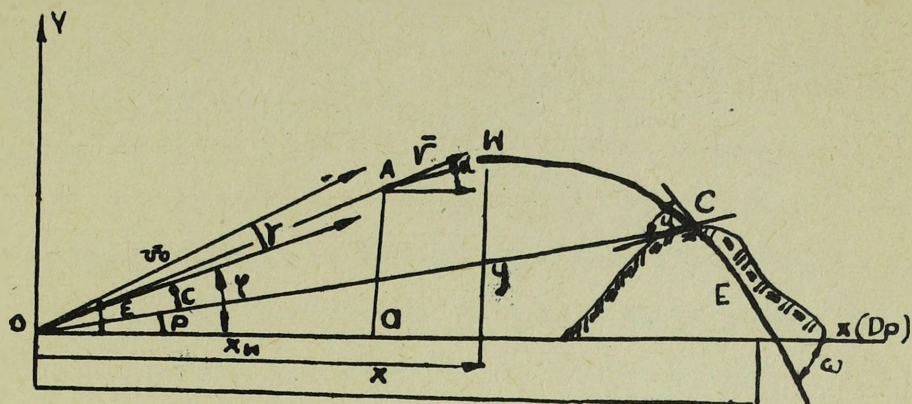
Skuteczność strzelania artylerii przeciwlotniczej.

110

ROZDZIAŁ I

Podstawy balistyki zewnętrznej

1. Elementy toru pocisku.



Rys. 1 Elementy toru pocisku.

Tor pocisku - krzywa /OAWCE/, którą określa środek ciężkości pocisku w czasie lotu.

Punkt wylotu O - położenie środka ciężkości pocisku w momencie kiedy płask denny pocisku opuszcza przewód lufy.

Wierzchołek toru W - najwyższy punkt toru.

Punkt uderzenia C - punkt spotkania pocisku z celem lub przeszkodą.

Punkt upadku E - punkt przecięcia się toru pocisku z poziomem wylotu.

Część wznosząca się toru OW - część toru pocisku od punktu wylotu do wierzchołka.

Część opadająca toru WE - część toru pocisku od wierzchołka do punktu upadku.

Wierzchołkowa toru Y - rzędna wierzchołka toru.

Odcięta wierzchołka toru X_w - odległość od punktu wylotu do rzutu wierzchołka toru na poziom.

Całkowita odległość pozioma X - odległość pozioma od punktu wylotu do punktu upadku.

Linia położenia celu - prosta łącząca punkt wylotu z celem /OC/.

Linia strzału - przedłużenie osi lufy działa po wycelowaniu w chwili gotowości do strzału.

Linia rzutu - przedłużenie osi lufy działa w chwili strzału.

Kąt położenia celu p - kąt zawarty między poziomem a linią położenia celu.

Kąt celownika c - kąt w płaszczyźnie pionowej zawarty między linią położenia celu a linią strzału.

Kąt podniesienia φ - kąt zawarty między poziomem a linią strzału.

$$\varphi = c \pm p$$

Kąt podrzutu γ - kąt w płaszczyźnie pionowej zawarty między linią strzału a linią rzutu.

Kąt rzutu ϵ - kąt zawarty między poziomem a linią rzutu

$$\epsilon = c \pm p \pm \gamma$$

Kąt uderzenia U - kąt zawarty między styczną do toru w punkcie uderzenia a styczną do powierzchni celu /terenu/.

Kąt upadku ω - kąt nachylenia stycznej do toru w punkcie upadku.

Kąt nachylenia stycznej α - kąt zawarty między poziomem działa a styczną do toru w danym punkcie.

Płaszczyzna pozioma - płaszczyzna pozioma przechodząca przez punkt wylotu.

Płaszczyzna strzelania - pionowa płaszczyzna przechodząca przez linię strzału.

Prędkość początkowa V_0 - prędkość pocisku w punkcie wylotu.

Prędkość pocisku V - prędkość pocisku w danym punkcie A.

Prędkość końcowa - prędkość pocisku w punkcie upadku.

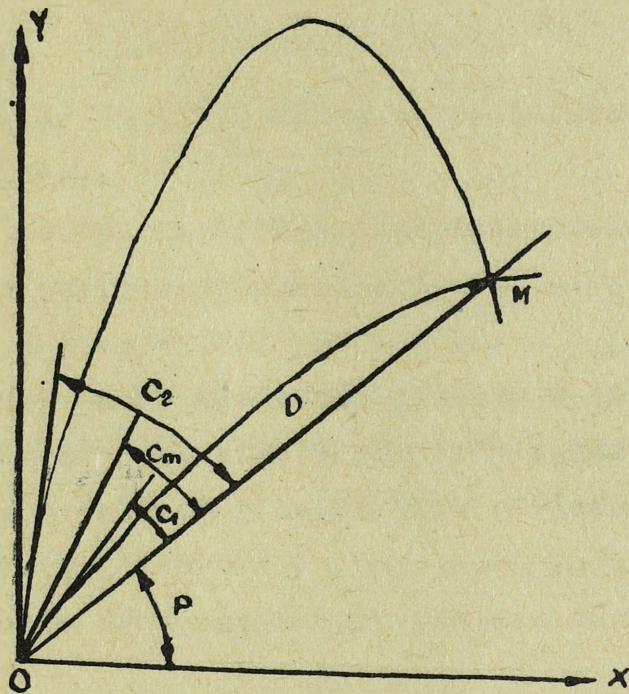
2. Określanie elementów toru pocisku w próżni.

Wzory na obliczanie elementów toru pocisku w próżni podane są w tabeli:

	Punkt toru	Dowolny punkt toru	Wierzchołek	Punkt upadku
Elementy				
Odcięta		$x = v_0 t \cos \epsilon$	$x_v = \frac{x}{2} = \frac{v_0^2 \sin 2\epsilon}{2g}$	$x = \frac{v_0^2 \sin 2\epsilon}{g}$
Rzędna		$y = x \tan \epsilon - \frac{gx^2}{2v_0^2 \cos^2 \epsilon}$	$y = \frac{v_0^2 \sin^2 \epsilon}{2g}$	$y = 0$
Czas lotu		$t = \frac{x}{v_0 \cos \epsilon}$	$t_n = \frac{T}{2} = \frac{v_0 \sin \epsilon}{g}$	$T = \frac{2v_0 \sin \epsilon}{g}$
Kąt nachylenia stycznej		$\tan \alpha = \tan \epsilon - \frac{gx}{v_0^2 \cos^2 \epsilon}$	$\alpha_n = 0$	$\omega = -\epsilon$

Prędkość pocisku	$v = \sqrt{v_0^2 - 2gy}$	$v_x = v_0 \cos \epsilon$	$v_y = v_0$
Równanie odległości	$D = \frac{v_0^2}{g} \cdot \frac{\sin(2c+p) - \sin p}{\cos^2 p}$		

3. Tory sprzężone



rys. 2. ²Tory sprzężone

Dwa tory otrzymane przy różnych nastawach kąta celownika, które dają jednakową odległość strzału, nazywa się torami sprzężonymi. Tor, który otrzymano przy kącie celownika mniejszym od c_m nazywa się torem płaskim.

Tor, który otrzymano przy kącie celownika większym od c_m nazywa się torem stronym.

4. Zależność kąta celownika od kąta położenia celu.

Zależność tę wyrażają wzory

$$\sin \frac{1}{2} c + p = \sin 2c_0 \cdot \cos^2 p + \sin p$$

$$\sin c_1 = \sin C_0 \cos p_1$$

W tych przypadkach, gdy C_0 nie przekracza $9^\circ / 1-50/$, do wzoru możemy zamiast sinusów kątów C_1 i C_0 podstawić wartości kątów wyrażonych w tysięcznych w postaci ułamka dziesiętnego, czyli

$$C = C_0 \cos p$$

5. Siła oporu powietrza

$$R = i \frac{d^2}{q} 10^3 \frac{S_0}{S_{0N}} \cdot H(y) \cdot F(v)$$

R - siła oporu powietrza

d - kaliber pocisku w m

i - współczynnik kształtu pocisku

g - przyspieszenie ziemskie $9,81 \text{ m/sek}^2 /$

10^3 - stały współczynnik

$\frac{C_0}{C_{0N}}$ - stosunek rzeczywistej naziemnej gęstości powietrza do normalnej naziemnej gęstości

H /y/ - funkcja zmiany gęstości powietrza w zależności od wysokości

F /v/ - funkcja wyrażająca wpływ prędkości pocisku na wielkość siły oporu powietrza /określana doświadczalnie/

Przyspieszenie siły oporu powietrza wyraża wzór:

$$j = i \frac{d^2}{q} 10^3 \frac{S_0}{S_{0N}} H(y) F(v)$$

Współczynnik balistyczny C:

$$C = i \frac{d^2}{q} 10^3 \frac{S_0}{S_{0N}}$$

6. Tabelarne warunki strzelania

Warunki strzelania, dla których zestawiono tabele strzelnicze, nazywa się tabelarnymi lub normalnymi warunkami strzelania.

Warunki strzelania dzieli się na balistyczne i meteorologiczne.

a/ Normalne warunki balistyczne:

1. Prędkość początkowa pocisku V_0 - odpowiadająca średnio zużytej lufie.
2. Temperatura ładunku $T_i = + 15^\circ \text{C}$.
3. Ładunek normalny - zapewniający otrzymanie założonej konstrukcyjnie prędkości początkowej przy strzelaniu z nowej lufy.

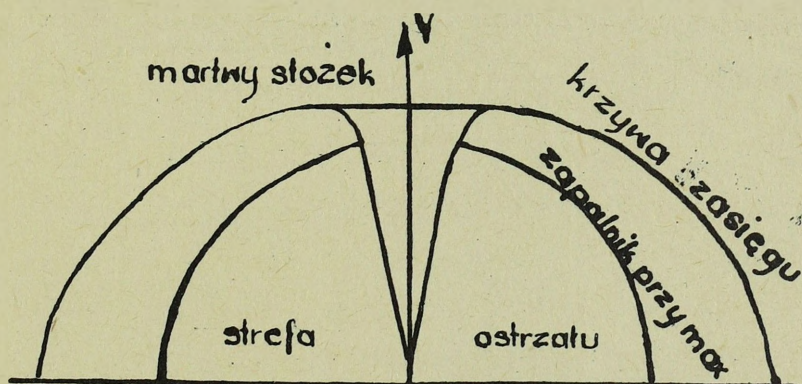
4. Ciężar pocisku q - normalny.
5. Kształt i wymiary pocisku - zgodne z założeniami konstrukcyjnymi.
6. Czas działania zapalnika czasowego - zgodny z czasem działania wzorcowej partii zapalników.
7. Zboczenia nie ma.

b/ Normalne warunki meteorologiczne.

1. Ciśnienie atmosferyczne $h_{atm} = 750$ mm słupka rtęci.
2. Temperatura powietrza $T_p = + 15^\circ C$.
3. Prężność pary wodnej /przy względnej wilgotności powietrza 50%/
 $e = 6,35$ mm.
4. Gęstość powietrza $G_{atm} = 1,206$ kg/m³.
5. Prędkość rozchodzenia się dźwięku $a_{gł} = 340,9$ m/sek.
6. Pogoda bezwietrzna.

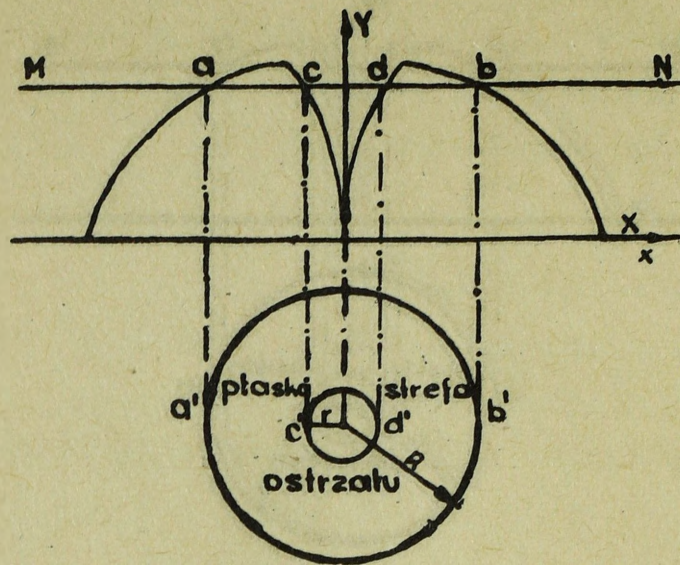
7. Strefy dział przeciwlotniczych.

Strefa zasięgu - przestrzeń, którą działo może osiągnąć przeznaczoną dla niego. ^{amunicją} Jest ona ograniczona krzywą zasięgu, poziomem działa i martwym stożkiem.



Rys. 3 Strefa zasięgu i strefa ostrzału /przekrój pionowy/.

Strefa ostrzału - część strefy zasięgu w granicach której można otrzymać rozprysk. Jest ona ograniczona poziomem działa, martwym stożkiem i powierzchnią, na której następuje rozprysk przy maksymalnej nastawie zapalnika.



Rys. 4. Płaska strefa ostrzału.

Płaska strefa ostrzału - otrzymywana jest w wyniku przecięcia strefy ostrzału płaszczyzną poziomą na pewnej wysokości. W wyniku przecięcia otrzymamy dwa kręgi: wewnętrzny będący przekrojem martwego stożka i zewnętrzny stanowiący przekrój strefy ostrzału. Przekrój taki nazywa się płaską strefą ostrzału na wysokości H.

Martwy stożek - stożek powstały w wyniku obrócenia wznoszącej się części toru pocisku dookoła linii pionowej przy maksymalnym kącie rzutu.

ROZDZIAŁ II

Teoretyczne podstawy realizacji sposobów strzelania artylerii przeciwlotniczej.

1. Terminologia stosowana w strzelaniach artylerii przeciwlotniczej.

a/ Określenia punktów

Cel /C/ - miejsce znajdowania się celu przyjęte jako punkt.

Bieżące położenie celu /A/ - punkt na kursie celu, w którym znajduje się ruchomy cel w danej chwili.

Początkowe położenie celu /A₀/ - punkt w przestrzeni, w którym znajduje się ruchomy cel w chwili ostatniego określenia współrzędnych, wykorzystanych do przygotowania danego strzału/ salwy/.

Punkt strzału /A_s/ - punkt w przestrzeni, w którym znajduje się ruchomy cel w chwili oddania strzału /salwy/.

Punkt wyprzedzony /A_w/ - punkt w przestrzeni, w którym według obliczeń pocisk powinien spotkać się z ruchomym celem.

b/ Określenia linii i odległości.

Linia celowania - linia zajmująca określone /stałe/ położenie w stosunku do osi przewodu lufy, w dowolnym momencie wycelowania, w wyniku nastaw przyrządów celowniczych.

Odległość pozioma /D_p/ - odległość od działa do rzutu celu na poziom działa.

Wysokość celu /H/ - odległość od celu do jego rzutu na poziom działa.

Parametr kursu /P/ - najkrótsza odległość od działa do rzutu kursu celu na poziom działa.

Wyprzedzenie liniowe / ΔS / - odległość między punktem strzału a punktem wyprzedzonym mierzona wzdłuż kursu celu.

$$\Delta S = Vct$$

c/ Określenia kątów

Azymut przeciwlotniczy / β / - kąt w płaszczyźnie poziomej zawarty między kierunkiem zasadniczym na południe magnetyczne a danym kierunkiem, mierzony odwrotnie w stosunku do ruchu wskazówek zegara.

Kąt kursowy / q / - kąt w płaszczyźnie poziomej zawarty między rzutem kursu celu na poziom, a kierunkiem na działo /przelicznik/, mierzony w kierunku ruchu celu.

Kąt kursu / q_k / - kąt w płaszczyźnie poziomej zawarty między przedłużeniem odległości poziomej a rzutem kursu celu na poziom działa, mierzony w kierunku przeciwnym ruchowi wskazówek zegara, od przedłużenia odległości poziomej, do kierunku w którym leci cel.

Kąt drogi celu / Q / - kąt w płaszczyźnie poziomej zawarty między kierunkiem zasadniczym na południe magnetyczne a rzutem kursu celu, mierzony w kierunku przeciwnym ruchowi wskazówek zegara od kierunku zasadniczego do kierunku, w którym leci cel:

$$Q = \beta + q_k;$$

Kąt nachylenia kursu / λ / - kąt nachylenia wektora prędkości celu względem poziomu.

Pionowy kąt celownika / C_p / - suma kąta celownika i wyprzedzenia pionowego: $C_p = c + \Delta p$.

Wyprzedzenie kierunku ($\Delta \beta$) - różnica azymutów punktu wyprzedzonego i punktu strzału.

$$\Delta \beta = \beta_n - \beta_s ;$$

$$\Delta \beta = q_n - q_s ;$$

Wartość bezwzględna wyprzedzenia kierunku oblicza się ze wzoru:

$$\sin \Delta \beta = \frac{V_c \cdot t \cdot \sin q_s}{D_{pu}}$$

t - czas lotu pocisku do punktu Aw.

Wyprzedzenie pionowe / Δp / - różnica kątów położenia punktu wyprzedzonego i punktu strzału

$$\Delta p = p_w - p_s$$

Wartość bezwzględna wyprzedzenia pionowego oblicza się ze wzoru:

$$\sin \Delta p = \frac{V_c \cdot t \cdot \sin p_s}{D_u}$$

d/ Określenia czasów

Moment początkowy - moment ostatniego określenia współrzędnych celu wykorzystanych do przygotowania strzału /salwy/.

Czas obserwacji T_o - odstęp czasu między dwoma wzięciami celu powietrznego.

Czas przelicznika - martwy T_m - odstęp czasu między momentem początkowym a momentem ukończenia przekazywania danych z przelicznika na działą.

Czas opóźniania wystrzału T_{ow} - odstęp czasu między momentem przekazania ostatniej nastawy na działą a momentem gotowości dział do odpalenia.

Czas roboczy T_r - odstęp czasu między momentem początkowym a momentem odpalenia: $T_r = T_m + T_{ow}$

Czas wyprzedzenia T_w - odstęp czasu między momentem początkowym a obliczonym momentem spotkania się pocisku z celem:

$$T_w = T_r + t;$$

t - czas lotu pocisku do punktu wyprzedzonego.

Odstęp strzelania T_s - odstęp czasu między dwoma kolejno przygotowanymi strzałami /salwami/.

2. Współrzędne celu powietrznego

Współrzędnymi celu powietrznego nazywa się wielkości, określające jego położenie względem działą, przelicznika, RSA itp.

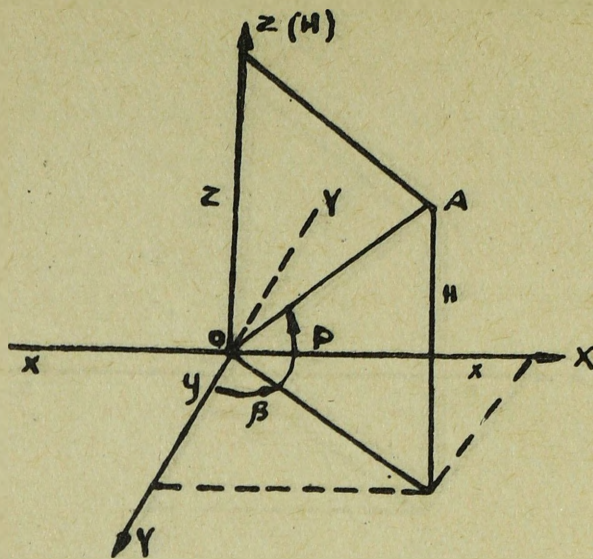
Do współrzędnych celu powietrznego zalicza się:

- D - odległość rzeczywistą
- H - wysokość
- Dp - odległość poziomą
- p - kąt położenia
- β - azymut.

Położenie punktu /celu/ w przestrzeni w stosunku do danego punktu /działą, przelicznika lub RSA/ określają trzy niezależne współrzędne, tworzące układ współrzędnych.

W artylerii przeciwlotniczej najczęściej stosowane są następujące układy współrzędnych:

- D, p, β - sferyczny układ współrzędnych
- H, p, β - stożkowy układ współrzędnych
- X, y, z - prostokątny układ współrzędnych
- Dp, H β - walcowy układ współrzędnych



Rys. 5. Zależność między współrzędnymi.

Zależność między układami współrzędnych przedstawiają wzory:

$$H = D \cdot \sin p$$

$$Dp = D \cdot \cos p$$

$$Dp = H \cdot \operatorname{ctg} p$$

$$H = Dp \cdot \operatorname{tg} p$$

$$D = \frac{H}{\sin p}$$

$$D = \frac{Dp}{\cos p}$$

Zależność między współrzędnymi układu prostokątnego a współrzędnymi innych układów przedstawiają wzory:

$$x = Dp \cdot \sin \beta$$

$$y = Dp \cos \beta$$

ponieważ $Dp = D \cdot \cos p$, to

$$x = D \cos p \sin \beta$$

$$y = D \cos p \cos \beta$$

$$z = H = D \sin p$$

lub $Dp = H \cdot \operatorname{ctg} p$, to

$$x = H \operatorname{ctg} p \sin \beta$$

$$y = H \operatorname{ctg} p \cos \beta$$

$$z = H = D \sin p;$$

3. Czynniki ruchu celu

Wielkości określające prędkość i kurs celu nazywa się czynnikami ruchu celu.

Do czynników ruchu celu zalicza się:

- V_c - prędkość celu
- q - kąt kursowy
- q_k - kąt kursu
- P - parametr kursu.
- Q - kąt drogi.
- β_k - azymut kursu
- V_x - rzut wektora prędkości celu na oś x
- V_y - rzut wektora prędkości celu na oś y
- V_H - rzut wektora prędkości celu na kierunek wysokości H
/oś Z /
- V_D - rzut wektora prędkości celu na kierunek odległości rzeczywistej D
- V_{Dp} - rzut wektora prędkości celu na kierunek odległości poziomej
- U_β - rzut wektora prędkości celu na kierunek prostopadły od odległości poziomej
- V_{poz} - prędkość pozioma celu
- λ - kąt nachylenia kursu celu
- ω_β - prędkość zmiany azymutu
- ω_{kp} - prędkość zmiany kąta położenia

Między czynnikami ruchu celu istnieją następujące zależności:

$$\vec{U}_{poz} = \vec{V} + \vec{W}$$

$$P = D_p \sin q$$

$$V_c = \frac{U_{poz}}{\cos \lambda}$$

$$U_c = \sqrt{U_{poz}^2 + U_H^2}$$

$$\lambda = \arctg \frac{U_H}{U_{poz}}$$

$$U_{Dp} = \frac{dD_p}{dt}$$

$$U_\beta = D_p \frac{d\beta}{dt}$$

$$U_H = \frac{dH}{dt}$$

$$U_{poz} = \sqrt{U_{Dp}^2 + U_\beta^2}$$

$$U_c = \sqrt{U_{Dp}^2 + U_\beta^2 + U_H^2}$$

$$U_D = \frac{dD}{dt}$$

$$U_\beta = D \frac{d\beta}{dt}$$

$$U_p = D \frac{dp}{dt}$$

$$U_c = \sqrt{U_D^2 + U_\beta^2 + U_p^2}$$

$$\omega_\beta = \frac{d\beta}{dt} \quad \omega_p = \frac{dp}{dt}$$

$$U_x = \frac{dx}{dt}$$

$$U_y = \frac{dy}{dt}$$

$$U_H = \frac{dH}{dt}$$

$$U_c = \sqrt{U_x^2 + U_y^2 + U_H^2}$$

$$U_{Dp} = U_{poz} \cdot \cos q$$

$$U_\beta = U_{poz} \cdot \sin q$$

$$U_H = U_{poz} \cdot \operatorname{tg} h$$

$$Q = q_k + \beta$$

$$U_H = U_c \cdot \sin h$$

Trzy niezależne czynniki ruchu określające wielkość i kierunek wektora prędkości celu nazywamy układem czynników ruchu celu.

W praktycznych strzelaniach artylerii przeciwlotniczej oraz w automatycznych celownikach i przelicznikach mają zastosowanie następujące układy czynników ruchu celu:

- | | |
|---|---|
| V_{poz}, q, h lub V_{poz}, q_k, h | - stosowany przy konstrukcji samoczynnych celowników artylerii przeciwlotniczej małego kalibru; |
| V_{poz}, P, h | - stosowany do wskazywania celów, kontroli strzelań poligonowych i ich opracowania |
| U_{poz}, Q, U_H lub U_{poz}, β_k, U_H | - stosowany we współczesnych przelicznikach; |
| $V_{Dp}, V_\beta, V_H, U_H$ | - stosowany w przelicznikach PUAZO-3, PUAZO-4; |

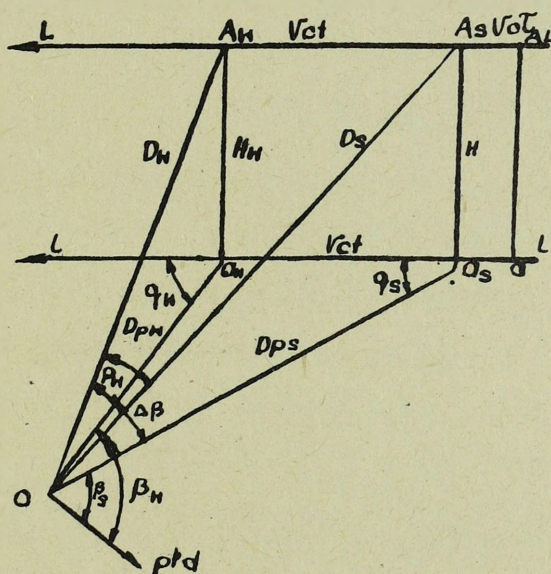
- V_D, V_p, U_p lub V_D, ω_p, ω_p - stosowany w przelicznikach
wspólnie z biegunowym układem
współrzędnych,
- V_x, V_y, U_H - stosowany we współczesnych prze-
licznikach.

4. Istota rozwiązania zadania spotkania pocisku z celem

Rozwiązanie zadania spotkania jest zasadniczym etapem przygotowania wystrzału /salwy/, w czasie którego określa się geometryczne współrzędne punktu wyprzedzonego A_w .

Istota rozwiązania zadania spotkania pocisku z celem polega na uzgodnieniu w czasie dróg celu i pocisku przebywanych z różnymi prędkościami, dających na przecięciu punkt wyprzedzony A_w . Samo rozwiązanie polega na określeniu geometrycznych współrzędnych punktu wyprzedzanego w dowolnym układzie współrzędnych.

Rozwiązanie zadania spotkania może być przeprowadzone sposobem geometrycznym lub analitycznym.



Rys. 6. Istota rozwiązania zadania spotkania.

Geometryczny sposób rozwiązania zadania spotkania polega na odtworzeniu w skali, przez urządzenia przelicznika /celownika/ trójkąta wyprzedzenia $O A_S A_w$ w płaszczyźnie pochylonej lub trójkąta $O A_S A_w$ w płaszczyźnie poziomej /rys. 6/. W pierwszym przypadku:

$$\bar{D}_w = \bar{D}_s + \bar{V}_{ct}$$

gdzie:

$$t = f / D_w, p_w /$$

W drugim przypadku

$$\bar{D}_{pw} = \bar{D}_{ps} + \bar{V}ct$$

gdzie:

$$t = f / \bar{D}_{pw}, Hw/$$

Wyprzedzenia kierunku $\Delta\beta$ określa się bezpośrednio z trójkąta wyprzedzenia.

Analityczny sposób rozwiązania zadania spotkania polega na wykorzystaniu analitycznych zależności między elementami trójkąta wyprzedzenia w pochyłej lub poziomej płaszczyźnie.

Dla przypadku rozwiązania trójkąta w płaszczyźnie poziomej niezbędne są współrzędne punktu strzału $/D_{ps}, \beta_0, Hs/$ oraz czynniki ruchu celu $/V_c, \alpha_s, \lambda /$. Na podstawie tych wartości oblicza się współrzędne punktu wyprzedzonego.

$$D_{pw} = \sqrt{D_{ps}^2 + (Vct)^2 - 2D_{ps} \cdot Vc \cdot t \cdot \cos \alpha_s}$$

Jeżeli $H = \text{const}$, to znaczy $\lambda = 0$, czas lotu pocisku określa się jako funkcję D_{ps}, Hw .

$$t = f / \bar{D}_{ps}, Hw/$$

Przy geometrycznym i analitycznym sposobie rozwiązania mamy układ dwóch równań o dwóch niewiadomych: D_{pw} i t .

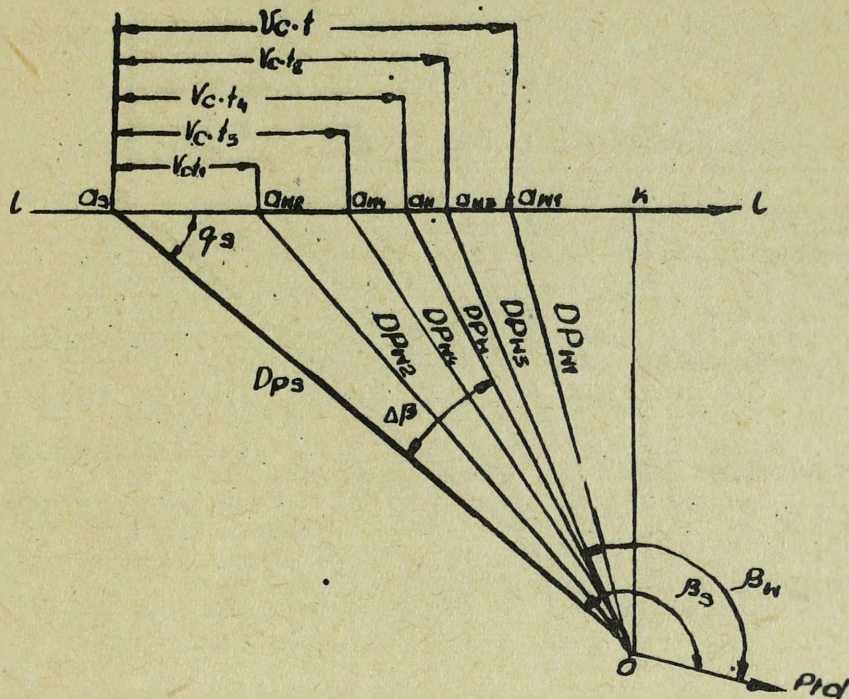
Równań tych zwykłymi metodami rozwiązać nie można, gdyż wielkości t i D_{pw} są wzajemnie od siebie zależne.

Dlatego przy rozwiązaniu zadania spotkania wykorzystuje się metodę kolejnych przybliżeń.

5. Rozwiązanie zadania spotkania metodą kolejnych przybliżeń.

Przed rozwiązaniem zadania należy ustalić:

- hipotezę ruchu celu
- geometryczne współrzędne położenia celu w chwili strzału
- czynniki ruchu celu
- rodzaj działa, pocisk i zapalnik.



Rys. 7. Rozwiązanie zadania spotkania metodą kolejnych przybliżeń przy locie celu na baterię.

Rozwiązanie zadania spotkania przy prostoliniowym i jednostajnym ruchu celu w płaszczyźnie poziomej sprowadza się do rozwiązania szeregu równań:

$$D_{pM} = \sqrt{D_{p0}^2 + (Vc \cdot t)^2 - 2 D_{p0} Vc \cdot t \cos q_s}$$

gdzie $t = f(D_{pM}, H)$

$$\sin q_M = \frac{D_{p0}}{D_{pM}} \sin q, \quad \sin q_s = \frac{P}{D_p};$$

$$\Delta \beta = q_M - q_s$$

$$\sin \Delta \beta = \frac{Vc \cdot t \cdot \sin q_s}{D_{pM}}$$

$$\Delta \beta = \arcsin \frac{Vc \cdot t \cdot \sin q_s}{D_{pM}}$$

$$\beta_M = \beta_s \pm \Delta \beta$$

$\Delta\beta$ bierze się ze znakiem "+" przy locie celu w lewo i ze znakiem "-" przy locie celu w prawo.

$$\varphi = f / D_{pw}, H/; z = f / D_{pw}/ H/$$

$$\Delta p = p_w - p_s; \operatorname{tg} p_w = \frac{H}{D_{pw}}$$

$$C_p = c \pm \Delta p; c = f z / D_{pw}, H/$$

Gdy cel leci od baterii, przybliżenia nie obramowują punktu A_w , lecz zbliżają się do niego z jednej strony.

Przy zastosowaniu innych hipotez ruchu celu istota rozwiązania nie zmienia się, jednak przy nachylnym kursie celu, oprócz odległości poziomych D_{pw} , należy określić wysokości odpowiednich położzeń celu w punktach A_w ze wzoru:

$$H_z = H_s \pm V_c \cdot t_n \cdot \sin \lambda$$

i dla tych wysokości i odległości poziomych określić odpowiadające im czasy lotu pocisków.

6. Proste graficzne rozwiązanie zadania spotkania pocisku z celem

Przy prostoliniowym, jednostajnym i poziomym ruchu celu rozwiązanie to wykonuje się w następującej kolejności:

a/ zakłada się współrzędne punktu strzału, czynniki ruchu delu, rodzaj działa, pocisku i zapalnika;

b/ dobiera się dwie skale. Jedną do wykreślenia kursu celu, parametru kursu i odległości poziomych /np. 1 cm odpowiada 500 lub 100 m/.

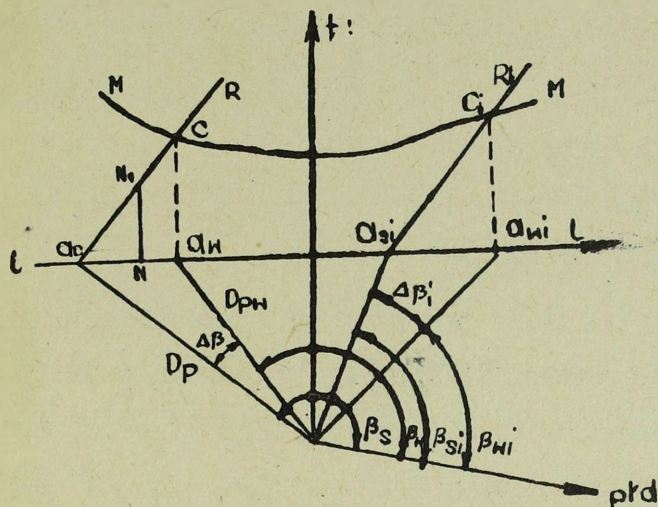
Drugą do wykreślenia krzywej czasów lotu pocisku /np. 2 mm odpowiada 1 sek/.

c/ w przyjętej skali odkłada się parametr P i od parametru w obie strony wykreślamy kurs celu;

d/ z punktu stania działa O na kursie celu odkłada się odległości poziome /z dokładnością tabel strzelniczych/ otrzymując na nim punkty;

e/ dla danej wysokości H i odległości poziomych znajduje się w tabelach czasy lotu pocisku. Z punktów przecięcia się odległości poziomych z rzutem kursu celu wystawia się prostopadłe, na których w przyjętej skali odkłada się czasy lotu pocisku odpowiadające danej wysokości H i odległości poziomej D_p ;

f/ otrzymane punkty łączy się płynną krzywą, która jest krzywą czasów lotu pocisku



Rys. 8. Proste graficzne rozwiązanie zadania spotkania.

W celu wyznaczenia położenia na kursie celu punktu Q_w zakłada się dodatkowo dowolny czas τ /np. 10 sek/ i odkłada się w skali od punktu Q_s drogę celu przebytą w tym czasie z daną prędkością.

$$S = V_c \cdot \tau = Q_s N$$

Z punktu N wykreśla się prostopadłą do kursu, na której odkłada się w skali czasu lotu pocisków NN_1 równy τ . Przez punkty Q_s i N_1 przeprowadza się prostą i przedłuża aż do przecięcia się z krzywą czasów lotu pocisku, np. do punktu R.

Prosta $Q_s R$ stanowi czas lotu celu od punktu Q_s do dowolnego punktu na kursie celu przy danej prędkości V_c .

Kąt nachylenia prostej $Q_s R$ względem kursu celu zależy od prędkości celu. Ze wzrostem prędkości celu kąt ten maleje i odwrotnie.

$$\tan \alpha = \frac{N_1 Q_s}{Q_s N} = \frac{\tau}{V_c \cdot \tau} = \frac{1}{V_c}$$

Punkt przecięcia się C krzywej MM_1 z prostą posiada tę osobliwość, że leży zarówno na krzywej czasów lotu pocisku i na prostej czasów lotu celu.

Opuszczając prostopadłą z punktu C na kurs celu otrzymuje się punkt Q_w . Odcinek C Q_w wyraża czas lotu celu t do tego punktu. Odcinek C Q_w wyraża w przyjętej skali czas lotu pocisku t_p , a punkt Q_w - punkt wyprzedzony, do którego lot pocisku i celu odbywa się w tym samym czasie.

Po wyznaczeniu punktu Q_w określa się jego współrzędne: D_{pw} i β_w . Współrzędne punktu Q_w określa się na wykresie przy

pomocy linijki, cyrkla, cięciwokątomierza w zależności od wymaganej dokładności pomiarów.

7. Rozwiązanie odwrotne zadania spotkania pocisku z celem.

Przed rozwiązaniem zadania spotkania ustala się:

- hipotezę ruchu celu
- współrzędne punktu wyprzedzonego β_n , D_{pn} , H_n
- czynniki ruchu celu - V_c i q_w
- rodzaj działa, pocisku i zapalnika.

Według znanych wartości β_n , D_{pn} i H_n wyznacza się punkt A_w i jego rzut Q_w . Na podstawie kąta kursowego q_w wykreśla się rzut kursu celu i kurs celu. Z tabel strzelniczych na podstawie D_{pn} i H_n odnajduje się czas lotu pocisku "t" do punktu A_w . Mnoży się czas lotu pocisku t przez prędkość celu V_c i otrzymuje się liniowe wyprzedzenie $\Delta s = V_c \cdot t$. Odkłada się Δs od punktu A_w w kierunku przeciwnym do ruchu celu i otrzymuje się punkt A_s .

Określenie współrzędnych punktu A_s sprowadza się do rozwiązania szeregu równań:

$$P = D_{pn} \cdot \sin q_n ; \quad \sin q_n = \frac{P}{D_{pn}}$$

$$D_{ps} = \sqrt{D_{pn}^2 + (V_c t)^2 + 2 D_{pn} \cdot V_c t \cdot \cos q_n}$$

$$t = f(D_{pn}, H)$$

$$\sin q_s = \frac{D_{pn}}{D_{ps}} \sin q_n$$

$$\Delta \beta = q_n - q_s$$

$$\beta_s = \beta_n \pm \Delta \beta$$

przy locie celu w prawo $\Delta \beta$ bierze się ze znakiem "+", a przy locie celu w lewo ze znakiem "-"

$$\operatorname{tg} p_s = \frac{H}{D_{ps}} ;$$

$$\Delta p_s = p_n - p_s ;$$

$$C = f(H_n, D_{pn}) = \psi - p_n$$

$$C_p = C \pm \Delta p = \psi - p_s ;$$

$$H_s = H_n \pm V_c t \sin h ;$$

B. Prędkość punktu wyprzedzonego

Prędkość punktu wyprzedzonego oblicza się za pomocą następujących wzorów:

$$V_w = V_c / 1 \pm \frac{\Delta t}{\Delta \tau} /$$

ułamek $\frac{\Delta t}{\Delta \tau}$ - stanowi prędkość zmiany czasu wyprzedzonego. Jest to wielkość niemiarowana. Oznacza się ją przez V_t , wówczas wzór ogólny na prędkość punktu wyprzedzonego przyjmie postać

$$V_w = V_c / 1 \pm V_t /$$

V_t jest ujemne i maleje, gdy czas lotu pocisku zmniejsza się, co odpowiada kursowi lotu celu do parametru, a dodatnie i wzrasta, gdy czas lotu pocisku rośnie, co odpowiada kursowi lotu celu za parametrem.

Przy locie celu do parametru $V_w < V_c$

Przy locie celu za parametrem $V_w > V_c$

W wypadku niezmiennej wysokości lotu celu stosuje się następujące wzory:

$$V_{Dpw} = - V_w \cos q_w$$

V_{Dpw} - prędkość zmiany poziomej odległości wyprzedzonej.

$$V_H = \frac{V_c}{1 + V_c \frac{\Delta t}{\Delta D_{pw}} \cdot \cos q_w}$$

Przy locie celu do parametru ($q_w < 90^\circ$), wartość

$V_c \frac{\Delta t}{\Delta D_{pw}} \cos q_w$ będzie dodatnią, mianownik będzie większy od jedności, zatem $V_w < V_c$.

Przy locie celu od parametru ($q_w > 90^\circ$), wartość

$V_c \frac{\Delta t}{\Delta D_{pw}} \cos q_w$ będzie ujemna, mianownik będzie mniejszy od jedności, zatem $V_w > V_c$.

Przy locie celu na baterię $P = 0$ ($q_w = 0$), $\cos q_w = 1$, wówczas

$$V_H = \frac{V_c}{1 + V_c \cdot \frac{\Delta t}{\Delta D_{pw}}}$$

a przy ruchu celu od baterii ($q_w = 180^\circ$), $\cos q_w = -1$, to

$$\tilde{U}_W = \frac{U_c}{1 - U_c \frac{\Delta t}{\Delta D_{pu}}}$$

Współczynnik $\frac{\Delta t}{\Delta D_{pu}}$ zależy tylko od właściwości balistycznych działa i określa się go na podstawie tabel strzelniczych.

9. Możliwości działań przeciwlotniczych

Prędkości katowe celu dla jednostajnego, prostoliniowego i poziomego ruchu celu oblicza się ze wzorów:

$$\omega_{\beta c} = \frac{1000 \cdot V_c \cdot \sin \alpha}{D_p}, \quad \omega_{\beta c} = \frac{1000 \cdot V_c \cdot \sin^2 \alpha}{P}$$

$$\omega_{pc} = \frac{1000 \cdot V_c \cdot \cos \alpha \cdot \sin^2 p}{H}$$

Wzory te podają prędkości katowe w tysięcznych.

Ponieważ maksymalne prędkości wycelowania działa są wartościami stałymi, a prędkości katowe celu są zmienne, to wycelowanie działa jest możliwe do chwili kiedy prędkości katowe celu nie przekroczą maksymalnych prędkości wycelowania działa.

ROZDZIAŁ III

Teoria prawdopodobieństwa

1. Przedmiot teorii prawdopodobieństwa.

Teoria prawdopodobieństwa jest to nauka matematyczna zajmująca się badaniem i ustalaniem praw jakim podlegają zdarzenia przypadkowe o charakterze masowym.

a/ Zdarzenia i rodzaje zdarzeń

Zdarzenia przypadkowe - jest to każde zdarzenie, które w wyniku przeprowadzonego doświadczenia lub przy obserwacji zachodzących niezależnych od siebie zjawisk, może w określonych warunkach wystąpić lub nie.

Wielkość przypadkowa - jest to taka zmienna wielkość, której wartość liczbowa zależna jest od warunków mających charakter przypadkowy.

Proces przypadkowy - jest to systematyczne występowanie wielkości przypadkowej w ciągu określonego czasu.

b/ Klasyfikacja zdarzeń przypadkowych

1. Zdarzenie pewne - jest to takie zdarzenie, które w danych warunkach niewątpliwie nastąpi.

2. Zdarzenie niemożliwe - jest to takie zdarzenie, które w danych warunkach nie może nastąpić.

3. Zdarzenie możliwe - jest to takie zdarzenie, które w określonych warunkach może nastąpić lub nie.

4. Zdarzenia wzajemnie wykluczające się - są to takie zdarzenia, kiedy pojawienie się jednego z nich wyklucza możliwość pojawienia się drugiego.

5. Zdarzenia jednocześnie możliwe - są to takie zdarzenia, kiedy pojawienie się jednego z nich nie wyklucza możliwości pojawienia się drugiego.

6. Zdarzenia jedynie możliwe - są to takie zdarzenia, kiedy w wyniku przeprowadzonego doświadczenia należy oczekiwać niewątpliwego pojawienia się chociażby jednego z nich.

7. Zdarzenia przeciwne - są to zdarzenia jedynie możliwe i wzajemnie wykluczające się.

8. Zdarzenia jednakowo możliwe - są to takie zdarzenia, kiedy nie ma podstaw przypuszczać, że pojawienie się jednych

jest bardziej możliwe niż pojawienie się innych.

2. Częstość zdarzenia

Częstością zdarzenia nazywa się stosunek ilości wypadków wystąpienia interesującego zdarzenia, do ogólnej liczby przeprowadzonych doświadczeń.

Częstość zdarzenia oblicza się ze wzoru:

$$r = \frac{m}{s}$$

gdzie: r - częstość zdarzenia

m - ilość wypadków wystąpienia interesującego nas zdarzenia

s - ogólna ilość przeprowadzonych doświadczeń.

Właściwości częstości zdarzenia:

- a/ Częstość zdarzenia występuje w granicach od 0 do 1 i może być wyrażona w postaci ułamka /zwykłego lub dziesiętnego/ albo w procentach.
- b/ Częstość zdarzenia jest liczbą zmienną, zależy od ilości przeprowadzonych doświadczeń.
- c/ Suma częstości jedynie możliwych i wzajemnie wykluczających się zdarzeń równa jest jedności.
- d/ Częstość zdarzenia można określić jedynie po doświadczeniu.
- e/ Częstość zdarzenia jest liczbą nie mianowaną.

3. Prawdopodobieństwo zdarzenia

Prawdopodobieństwo zdarzenia jest to stosunek ilości wypadków sprzyjających wystąpieniu danego zdarzenia, do ilości wszystkich możliwych wypadków.

W odniesieniu do zdarzeń przypadkowych, liczbową wartośći prawdopodobieństwa zdarzenia oblicza się następującymi sposobami:

- sposobem klasycznym
- sposobem geometrycznym
- sposobem statystycznym
- przy pomocy twierdzeń teorii prawdopodobieństwa.

a/ Sposób klasyczny określania prawdopodobieństwa

Sposobem klasycznym posługuje się jedynie w przypadkach prostych, gdy wszystkie możliwe w wyniku doświadczenia wypadki możemy traktować jako zdarzenia jednakowo możliwe.

Wartość liczbowa prawdopodobieństwa określa się ze wzoru:

$$p /A/ = \frac{M}{S}$$

gdzie: $p/A/$ = prawdopodobieństwo wystąpienia zdarzenia A

M = ilość wypadków sprzyjających wystąpieniu zdarzenia A

S = ogólna ilość wszystkich możliwych wypadków w danym doświadczeniu.

b/ Sposób geometryczny określania prawdopodobieństwa

Wartość liczbowa prawdopodobieństwa określa się ze wzoru:

$$p /A/ = \frac{q}{Q}$$

gdzie: q = powierzchnia /długość, objętość/ sprzyjająca

Q = powierzchnia /długość, objętość/ całkowita.

Przy określaniu prawdopodobieństwa sposobem geometrycznym, nieodzownym warunkiem jest jednakowe prawdopodobieństwo upadku punktu M na dowolny punkt płaszczyzny /linii, objętości/.

c/ Sposób statystyczny określania prawdopodobieństwa

Sposób statystyczny określania prawdopodobieństwa polega na wyznaczaniu wartości liczbowej prawdopodobieństwa, na podstawie częstości interesującego nas zdarzenia, określonej w oparciu o wyniki poprzednio wykonanych doświadczeń, przebiegających w tych samych lub bardzo podobnych warunkach. Jako wartość liczbowa prawdopodobieństwa przyjmuje się wtedy liczbę, wokół której wahała się częstość zdarzenia w poprzednich doświadczeniach.

Właściwości prawdopodobieństwa zdarzenia:

- Prawdopodobieństwo zdarzenia jest liczbą niemianowaną, jego wartość liczbowa zawiera się w granicach od 0 do 1 i może być przedstawiona w postaci ułamka zwykłego, dziesiętnego lub w procentach.
- Prawdopodobieństwo może być określone przed doświadczeniem i wykorzystane do oceny przyszłych zdarzeń.
- Dla danych niezmiennych warunków doświadczeń, wartość liczbowa prawdopodobieństwa jest stała, niezależna od liczby doświadczeń.

4. Podstawowe twierdzenia teorii prawdopodobieństwa

a/ Twierdzenie o sumie prawdopodobieństw

Sumą dwóch lub kilku zdarzeń nazywa się zdarzenie polegające na wystąpieniu jednego, obojętnie którego z tych zdarzeń.

"Prawdopodobieństwo wzajemnie wykluczających się zdarzeń równa się sumie prawdopodobieństw tych zdarzeń", lub innymi słowy "prawdopodobieństwo wystąpienia jednego /obojętnie którego/ ze zdarzeń wzajemnie wykluczających się, równa się sumie prawdopodobieństw tych zdarzeń".

Twierdzenie to wyraża się matematycznie:

$$P(A_1 \text{ lub } A_2 \text{ lub } A_3 \text{ lub } \dots \text{ lub } A_n) = \sum_{i=1}^{i=n} P(A_i)$$

$$P(A_1 + A_2 + A_3 + \dots + A_n) = \sum_{i=1}^{i=n} P(A_i)$$

Z twierdzenia tego wynikają wnioski:

1. Suma prawdopodobieństw jedynie możliwych i wzajemnie wykluczających się zdarzeń równa się jedności.
2. Suma prawdopodobieństw zdarzeń przeciwnych równa się jedności.

b/ Twierdzenie o iloczynie prawdopodobieństw

Iloczynem dwóch lub kilku zdarzeń nazywa się zdarzenie polegające na jednoczesnym wystąpieniu tych zdarzeń.

Twierdzenie o iloczynie prawdopodobieństw dla zdarzeń niezależnych.

"Prawdopodobieństwo zdarzenia złożonego składającego się z kilku niezależnych zdarzeń, równa się iloczynowi prawdopodobieństw tych zdarzeń".

Twierdzenie to wyraża się matematycznie:

$$P(A_1 \text{ i } A_2 \text{ i } \dots \text{ i } A_k) = P(A_1) \cdot P(A_2) \cdot \dots \cdot P(A_k)$$

Twierdzenie o iloczynie prawdopodobieństw dla zdarzeń zależnych.

"Prawdopodobieństwo zdarzenia złożonego składającego się z kilku zdarzeń zależnych, równa się prawdopodobieństwu wystąpienia pierwszego zdarzenia, pomnożonemu przez prawdopodobieństwo wystąpienia drugiego zdarzenia w założeniu, że pierwsze zdarzenie wystąpiło, pomnożonemu przez prawdopodobieństwo wystąpienia trzeciego zdarzenia, w założeniu, że pierwsze i

drugie zdarzenie wystąpiło itd.

Matematycznie twierdzenie to wyraża się następująco:

$$p(A; B) = p(A) \cdot p(B/A)$$

c/ Prawdopodobieństwo całkowite

Często przy obliczaniu prawdopodobieństwa dowolnego zdarzenia robi się założenia lub hipotezy posiadające określone prawdopodobieństwa. Prawdopodobieństwo poszczególnych hipotez oznaczają się przez $p /H_i/$, gdzie "i" oznacza numer hipotezy.

Prawdopodobieństwo całkowite przy określonej ilości hipotez oblicza się ze wzoru:

$$P(A) = P(H_1) \cdot P(A/H_1) + P(H_2) \cdot P(A/H_2) + \dots + P(H_n) \cdot P(A/H_n)$$

$P /A/$ - prawdopodobieństwo całkowite

$P /H_i/$ - prawdopodobieństwo wystąpienia danej hipotezy

$P /A/H_i/$ - prawdopodobieństwo wystąpienia zdarzenia według danej hipotezy.

"Prawdopodobieństwo całkowite zdarzenia równa się sumie iloczynów prawdopodobieństw możliwych warunków wystąpienia tego zdarzenia i prawdopodobieństw samego zdarzenia przy tych warunkach".

Inaczej: "prawdopodobieństwo całkowite zdarzenia równa się sumie iloczynów prawdopodobieństw hipotez i prawdopodobieństw zdarzenia przy każdej z tych hipotez".

d/ Twierdzenie hipotez

Twierdzenie hipotez stosuje się dla określenia prawdopodobieństwa w tych wypadkach, gdy odnośnie interesującego nas zdarzenia można założyć szereg hipotez, których prawdopodobieństwo ustala się doświadczalnie.

Prawdopodobieństwo hipotezy po doświadczeniu oblicza się ze wzoru:

$$Q(H_i) = \frac{P(H_i) \cdot P(A/H_i)}{\sum_{i=1}^n P(H_i) \cdot P(A/H_i)}$$

gdzie $Q /H_i/$ - prawdopodobieństwo hipotezy po doświadczeniu.

$P /H_i/$ - prawdopodobieństwo hipotezy przed doświadczeniem.

$P /A/H_i/$ - prawdopodobieństwo zdarzenia A według hipotezy.

"Prawdopodobieństwo hipotezy po doświadczeniu równa się iloczynowi prawdopodobieństwa tej hipotezy przed doświadczeniem i prawdopodobieństwa wystąpienia zdarzenia według tej hipotezy, podzielonemu przez prawdopodobieństwo całkowite tego zdarzenia".

W szczególnym przypadku gdy wszystkie hipotezy przed doświadczeniem są jednakowo prawdopodobne, wzór na obliczenie prawdopodobieństwa hipotezy po doświadczeniu będzie następujący:

$$Q(H) = \frac{P(H) \cdot P(A/H)}{\sum_{i=1}^n P(H) \cdot P(A/H)} = \frac{P(A/H)}{\sum_{i=1}^n P(A/H)} = C \cdot P(A/H)$$
$$C = \frac{1}{\sum_{i=1}^n P(A/H)} ;$$

e/ Twierdzenie przyszłych zdarzeń

Twierdzenie przyszłych zdarzeń jest rozwinięciem twierdzenia hipotez.

Prawdopodobieństwo zdarzeń przyszłych oblicza się ze wzoru:

$$P(B) = \frac{\sum_{i=1}^n P(H_i) \cdot P(A/H_i) \cdot P(B/H_i)}{\sum_{i=1}^n P(H_i) \cdot P(A/H_i)}$$

"Prawdopodobieństwo przyszłego zdarzenia równe jest sumie iloczynów prawdopodobieństw hipotez po doświadczeniu i prawdopodobieństw przyszłego zdarzenia według tych hipotez".

Dla przypadku szczególnego, kiedy wszystkie hipotezy przed doświadczeniem są jednakowo prawdopodobne, to wzór przybiera postać:

$$P(B) = \frac{\sum_{i=1}^n P(A/H_i) \cdot P(B/H_i)}{\sum_{i=1}^n P(A/H_i)}$$

5. Prawdopodobieństwo kombinacji przy powtarzaniu doświadczeń.

a/ Określenie prawdopodobieństwa kombinacji na podstawie dwumianu Newtona

$$P = \frac{S!}{m! n!} p^m q^n$$

gdzie: S - ilość doświadczeń

P - prawdopodobieństwo kombinacji

m - liczba wystąpień danego zdarzenia

n - liczba wystąpień zdarzenia przeciwnego

p - prawdopodobieństwo zdarzenia

q - prawdopodobieństwo zdarzenia przeciwnego.

Do obliczenia prawdopodobieństwa dowolnej kombinacji, w szczególności przy większej liczbie doświadczeń, stosuje się wzór interpolacyjny. Prawdopodobieństwo kombinacji, w której zdarzenie przeciwne do interesującego nas występuje n razy, oblicza się ze wzoru:

$$P_n = \frac{1}{S} \cdot \frac{h}{\sqrt{\pi}} e^{-h^2 x_n^2}$$

gdzie: S - ilość doświadczeń

$$h = \sqrt{\frac{S}{2p}}$$

$$e = 2,71828$$

$$\pi = 3,14159$$

$$x_n = \frac{n}{S} - q = \frac{m}{S} - p$$

b/ Najprawdopodobniejsza kombinacja

Kombinacja, której odpowiada największe prawdopodobieństwo nazywa się najbardziej prawdopodobną kombinacją.

Najbardziej prawdopodobna kombinacja może być wyznaczona na drodze porównania wartości prawdopodobieństw wszystkich możliwych kombinacji po ich obliczeniu.

Najbardziej prawdopodobną kombinację wyznacza się za pomocą dwóch par nierówności:

$$S q + q > n > S q - p$$

$$S p + p > m > S p - q$$

gdzie: p = prawdopodobieństwo wystąpienia zdarzenia A przy jednym doświadczeniu

q = prawdopodobieństwo wystąpienia zdarzenia B przy jednym doświadczeniu

S = ilość doświadczeń

m = najprawdopodobniejsza liczba wystąpienia zdarzenia A przy S doświadczeniach

n = najprawdopodobniejsza liczba wystąpienia zdarzenia B przy S doświadczeniach.

Przy rozwiązywaniu zadań posługuje się tylko jedną parą nierówności, ponieważ po określeniu na przykład z pierwszej pary nierówności wartości n , liczbę m oblicza się z równania:

$$S = m + n; m = S - n;$$

e/ Prawdopodobieństwo wystąpienia zdarzenia co najmniej jeden raz lub co najmniej k razy

Prawdopodobieństwo wystąpienia zdarzenia co najmniej jeden raz przy S doświadczeniach oblicza się za pomocą wzoru:

$$P_{1,S} = 1 - P_S = 1 - q^S$$

lub

$$P_{2,S} = 1 - (1 - p)^S$$

Prawdopodobieństwo wystąpienia zdarzenia co najmniej k razy przy S doświadczeniach oblicza się za pomocą wzoru:

$$P_{k,S} = 1 - \sum_{i=S-k+1}^S P_i$$

Przekształcając wzór na obliczenie prawdopodobieństwa trafienia co najmniej jeden raz, otrzyma się wzór na obliczenie zużycia amunicji:

$$S = \frac{\lg(1 - P_{1,S})}{\lg(1 - p)}$$

6. Wielkości przypadkowe i ich charakterystyki

a/ Pojęcie wielkości przypadkowej

"Wielkością przypadkową, nazywa się taka wielkość zmienna, która w doświadczeniu może przyjmować te lub inne, nieznane z góry, wartości liczbowe".

Rozróżnia się dwa typy wielkości przypadkowej:

- wielkość przypadkową typu nieciągłego /skokową/;
- wielkość przypadkową typu ciągłego /ciągłą/.

Wielkością przypadkową skokową nazywa się wielkość przypadkową, która w wyniku doświadczenia może przyjmować tylko niektóre, pojedyncze, oddzielone od siebie, wartości liczbowe, dające się zawczasu wymienić.

Wielkościami przypadkowymi ciągłymi nazywa się wielkości przypadkowe, które w wyniku doświadczenia mogą przyjmować dowolne spośród nieskończenie wielkiej liczby możliwych wartości, wypełniając całkowicie pewien przedział.

b/ Prawo rozkładu wielkości przypadkowej

"Rozkładem wielkości przypadkowej typu nieciągłego nazywa się zespół wszystkich ich możliwych wartości oraz prawdopodobieństw ich wystąpienia".

Związek między możliwymi wartościami skokowej wielkości przypadkowej, a odpowiadającymi prawdopodobieństwami ich wystąpienia wyraża funkcja w postaci wzoru:

$$P_m = \frac{S!}{m!n!} p^m q^n$$

Związek ten może wyrażać tabela i wykres.

Wielkość przypadkową ciągłą można określić za pomocą wykresu lub pewnej funkcji, której postać analityczna wyraża prawo rozkładu danej wielkości przypadkowej.

Wielkość przypadkową skokową określają w pełni dwie wielkości: - szereg rozkładu

- wielobok rozkładu.

Szereg rozkładu - jeżeli każdej z możliwych wartości wielkości przypadkowej skokowej podporządkujemy odpowiadające jej prawdopodobieństwo, to otrzymamy szereg rozkładu wielkości przypadkowej.

Wielobok rozkładu - jeżeli wzdłuż osi odciętych odłoży się możliwe wartości wielkości przypadkowej, a wzdłuż osi rzędnych odpowiadające im prawdopodobieństwo i zaznaczone wartości prawdopodobieństwo połączy się linią łamaną, to otrzyma się figurę geometryczną zwaną wielobokiem rozkładu.

Wielkości przypadkowe ciągłe nie mogą być określane za pomocą szeregu rozkładu, ponieważ mogą one przybierać nieskończenie wiele wartości. Przy wielkościach przypadkowych ciągłych rozpatruje się nie poszczególne możliwe jej wartości, lecz przedziały ich występowania i określa się prawdopodobieństwo wystąpienia danej wielkości w określonym przedziale.

$$P(X < x) = F(x)$$

Funkcję $F(x)$ nazywa się funkcją dystrybucji.

Własności funkcji dystrybucji:

1. Wartość funkcji dystrybucji jest wielkością niemianowaną.
2. Dla $x = -\infty$ funkcja dystrybucji równa się zero.
3. Dla $x = +\infty$ funkcja dystrybucji równa się jedności.
4. Funkcja dystrybucji jest funkcją niemalejącą.

c/ Gęstość prawdopodobieństwa wielkości przypadkowej

Funkcję $\varphi(x)$, będącą pierwszą pochodną funkcji dystrybucji $F(x)$, nazywa się gęstością rozkładu prawdopodobieństwa wielkości przypadkowej X lub gęstością prawdopodobieństwa.

$$\varphi(x) = F'(x) = \frac{dF(x)}{dx}$$

Cechy gęstości prawdopodobieństwa:

1. Gęstość prawdopodobieństwa jest funkcją nieujemną tzn.

$$\varphi(x) \geq 0$$

2. Całka w granicach nieskończonych z funkcji gęstości równa jest jedności:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \varphi(x) dx = 1$$

Gęstość prawdopodobieństwa istnieje tylko dla ciągłych wielkości przypadkowych.

d/ Obliczanie prawdopodobieństwa za pomocą gęstości prawdopodobieństwa.

Prawdopodobieństwo oblicza się ze wzoru:

$$P(x_1 < X < x_2) = \int_{x_1}^{x_2} \varphi(x) dx$$

e/ Charakterystyki liczbowe wielkości przypadkowej

Do charakterystyk liczbowych zalicza się:

1. Nadzieję matematyczną wielkości przypadkowej, charakteryzującą jej średnią wartość.
2. Dyspersję lub odchylenie średnie kwadratowe wielkości przypadkowej, charakteryzujące rozszew możliwych wartości wielkości przypadkowej względem jej wartości średniej.

8/ Charakterystyki położenia wielkości przypadkowej

1. Wartość średnia wielkości przypadkowej.

Średnia wartość wielkości przypadkowej równa się sumie iloczynów poszczególnych wartości wielkości przypadkowej otrzymanych w wyniku doświadczeń i odpowiadających im częstości występowania.

$$\bar{X}_{sr} = \sum_{i=1}^n x_i r_i$$

Właściwości wartości średniej:

- Średnią wartość wielkości przypadkowej określa się po doświadczeniach.
- Wokół średniej wartości grupują się wszystkie wartości wielkości przypadkowej uzyskane w wyniku doświadczeń.
- Średnia wartość wielkości przypadkowej zależy od wyników doświadczeń.

2. Nadzieja matematyczna

Nadzieją matematyczną wielkości przypadkowej nazywa się jej oczekiwany wynik średni.

"Nadzieja matematyczna wielkości przypadkowej równa się sumie iloczynów wszystkich możliwych wartości wielkości przypadkowej i odpowiadających im prawdopodobieństw występowania".

$$M[X] = \sum_{i=1}^n x_i p_i$$

gdzie $M[X]$ - nadzieja matematyczna wielkości przypadkowej X

x_i - możliwe wartości przypadkowej

p_i - prawdopodobieństwo odpowiadające tym wartościom

Dla ciągłej wielkości przypadkowej X nadzieja matematyczna wyraża się w postaci całki:

$$M[X] = \int_{-\infty}^{+\infty} x dF(x)$$

Właściwości nadziei matematycznej:

- Nadzieja matematyczna może być obliczona przed doświadczeniem. Może być liczbą całkowitą, ułamkiem, dodatnią lub ujemną. Jest liczbą mianowaną. Miano jej jest równe mianu wielkości przypadkowej.
- Nadzieja matematyczna dla danej wielkości przypadkowej jest wielkością stałą.
- W szczególnym wypadku, gdy rozkład wielkości przypadkowej jest symetryczny względem punktu początkowego, jej nadzieja matematyczna równa jest zero.
- Nadzieja matematyczna wielkości stałej równa jest tej wielkości.

3. Wartość modalna i mediana.

Wartością modalną wielkości przypadkowej nazywa się najbardziej prawdopodobną z jej możliwych wartości.

Medianą wielkości przypadkowej nazywa się taką jej wartość, w stosunku do której wystąpienie dowolnej, zarówno większej jak i mniejszej od niej wartości, jest jednakowo prawdopodobne.

Medianę wielkości przypadkowej oznacza się przez m lub x a jej definicję zapisuje się w postaci:

$$P /X < m/ = P /X > m/ = \frac{1}{2}$$

g/ Charakterystyki rozszewu wielkości przypadkowej

1. Dyspersja

Nazwa "dyspersja" oznacza rozrzucenie.

Dyspersją wielkości przypadkowej X nazywa się nadzieję matematyczną kwadratu odchylenia wielkości przypadkowej od jej nadziei matematycznej.

$$D(x) = M[x - M(x)]^2$$

Dla wielkości przypadkowej skokowej dyspersję określa się ze wzoru:

$$D(x) = \sum_{i=1}^n (x_i - M[X])^2 \cdot p_i$$

gdzie: $D /X/$ - dyspersja wielkości przypadkowej

x_i - możliwe wartości wielkości przypadkowej

$M /X/$ - nadzieja matematyczna wielkości przypadkowej

p_i - prawdopodobieństwo wystąpienia możliwej wartości X_i .

Dla wielkości przypadkowej ciągłej o gęstości prawdopodobieństwa $\varphi(x)$ dyspersję określa się ze wzoru:

$$D(x) = M[x^2] - M^2[x]$$

Właściwości dyspersji:

- Wartość liczbowa dyspersji jest liczbą dodatnią, a miano jej jest równe kwadratowi miana wielkości przypadkowej.
- Dyspersja wielkości stałej równa jest zero.

2. Odchylenie średnie kwadratowe

Odchylenie^m średnim kwadratowym wielkości przypadkowej X nazywa się pierwiastek kwadratowy z nadziei matematycznej kwadratu odchylenia wielkości przypadkowej od jej nadziei matematycznej, lub krótko pierwiastek kwadratowy z dyspersji wielkości przypadkowej.

$$\sigma_x = \sqrt{M[x - M(x)]^2} = \sqrt{D(x)}$$

Dla wielkości przypadkowej skokowej, odchylenie średnie kwadratowe określa się ze wzoru:

$$\sigma_x = \sqrt{\sum_{i=1}^n (x_i - M[x])^2 p_i}$$

Dla wielkości przypadkowej ciągłej:

$$\sigma_x = \sqrt{\int_{-\infty}^{\infty} (x - M[x])^2 \varphi(x) dx}$$

3. Odchylenie środkowe E

Odchyleniem środkowym wielkości przypadkowej nazywa się takie odchylenie wartości wielkości przypadkowej od jej nadziei matematycznej, względem którego prawdopodobieństwa wszystkich możliwych odchyleni większych i mniejszych co do bezwzględnej wartości są jednakowo prawdopodobne.

$$P(|x - M[x]| \leq E) = P(|x - M[x]| > E) = 0,5$$

4. Odchylenie średnie arytmetyczne

Odchyleniem średnim arytmetycznym wielkości przypadkowej nazywa się nadzieję matematyczną bezwzględnej wartości odchylenia wielkości przypadkowej od jej nadziei matematycznej.

Odchylenie średnie arytmetyczne określa się ze wzoru:

- dla wielkości przypadkowej skokowej

$$d = \sum_{i=1}^n (x_i - M[x]) \cdot p_i$$

- dla wielkości przypadkowej ciągłej:

$$7. \quad d = \int_{-\infty}^{+\infty} |x - M[x]| \varphi(x) dx$$

7. Niektóre rozkłady wielkości przypadkowej

a/ Rozkład normalny

Zgodnie z twierdzeniem Łapunowa: "Rozkład normalny wielkości przypadkowej stanowi sumę dużej ilości niezależnych wielkości przypadkowych, małych w porównaniu z ich sumą, z których każda może posiadać dowolny rozkład, zbliżony do rozkładu normalnego".

Wielkość przypadkowa X posiada rozkład normalny, jeżeli jej gęstość prawdopodobieństwa wyraża się wzorem:

$$\varphi(x) = \frac{1}{\sigma \sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(x-a)^2}{2\sigma^2}}$$

gdzie: a i σ - wielkości stałe, przy czym $\sigma > 0$

Funkcja dystrybucji rozkładu normalnego wyraża się wzorem:

$$F(x) = \frac{1}{\sigma \sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^x e^{-\frac{(x-a)^2}{2\sigma^2}} dx$$

Parametry rozkładu normalnego

Dyspersja rozkładu normalnego wyraża się wzorem:

$$D(x) = \frac{1}{\sigma \sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} (x-a)^2 e^{-\frac{(x-a)^2}{2\sigma^2}} dx$$

podstawiając: $\frac{x-a}{\sigma \sqrt{2}} = t$ otrzymuje się:

$$D(x) = \sigma^2$$

$$\sigma = \sqrt{D(x)}$$

σ - w rozkładzie normalnym przedstawia odchylenie średnie kwadratowe wielkości przypadkowej.

Prawdopodobieństwo wystąpienia w danym przedziale wielkości przypadkowej o rozkładzie normalnym.

Prawdopodobieństwo wystąpienia wielkości przypadkowej X o rozkładzie normalnym w przedziale od x_1 do x_2 wyraża się wzorem:

$$P(x_1 < x < x_2) = \int_{x_1}^{x_2} \varphi(x) dx = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \int_{x_1}^{x_2} e^{-\frac{(x-a)^2}{2\sigma^2}} dx$$

Odczylenie środkowe rozkładu normalnego

Z definicji na odczylenie środkowe wiadomo, że:

$$P(|x-a| < E) = P(|x-a| > E) = \frac{1}{2}$$

lub

$$P(a-E < x < a+E) = \frac{1}{2}$$

Prawdopodobieństwo wystąpienia wielkości przypadkowej X w przedziale $2E$ i symetrycznym względem środka rozrzutu wyraża się wzorem:

$$P(a-E < x < a+E) = Q\left(\frac{E}{\sigma\sqrt{2}}\right) = 0,5$$

$$\frac{E}{\sigma\sqrt{2}} = \rho = 0,47694 \approx 0,477 - \text{stała artyleryjska}$$

Stąd wynika zależność między odczyleniem środkowym a odczyleniem średnim kwadratowym

$$E = \rho\sqrt{2} \sigma \approx \frac{2}{3} \sigma$$

Wykorzystując zależność między odczyleniem środkowym a odczyleniem średnim kwadratowym gęstość prawdopodobieństwa dla rozkładu normalnego wyraża się wzorem:

$$\varphi(x) = \frac{\rho}{E\sqrt{\pi}} e^{-\rho\frac{(x-a)^2}{E^2}}$$

Prawdopodobieństwo wystąpienia wielkości przypadkowej X o rozkładzie normalnym w granicach od x_1 do x_2 uwzględniając zależność między odczyleniem środkowym a odczyleniem średnim kwadratowym wyraża się wzorem:

$$P(x_1 < x < x_2) = \frac{\rho}{E\sqrt{\pi}} \int_{x_1}^{x_2} e^{-\rho\frac{(x-a)^2}{E^2}} dx$$

Odczylenie średnie arytmetyczne rozkładu normalnego

Odczylenie średnie arytmetyczne wyraża się wzorem:

$$d = M[|x-a|] = \int_{-\infty}^{\infty} |x-a| \varphi(x) dx$$

Zależność między odchyleniem średnim arytmetycznym a odchyleniem średnim kwadratowym dla wielkości przypadkowej o rozkładzie normalnym wyraża się wzorem:

$$d = \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{\pi}} \sigma = 0,7979 \sigma \approx 0,8 \sigma$$

$$E = \int \sqrt{\pi} d = 0,8453 d \approx \frac{5}{8} d$$

$$E < d < \sigma$$

b/ Rozkład równomierny wielkości przypadkowej

Rozkład wielkości przypadkowej, w którym przyjmować ona może dowolne wartości w pewnym przedziale ze stałą gęstością prawdopodobieństwa, a na zewnątrz przedziału gęstość ta jest równa zero, nazywa się rozkładem równomiernym.

Gęstość prawdopodobieństwa równomiernego rozkładu wielkości przypadkowej X wyraża się wzorem:

$$f(x) = \frac{1}{b-a} = \frac{1}{2l}$$

gdzie: a i b - granice przedziału występowania możliwych wartości wielkości przypadkowej.

Funkcję dystrybucji rozkładu równomiernego można wyrazić w postaci:

$$F(x) = \begin{cases} 0 & \text{dla } x < a \\ \frac{x-a}{b-a} & \text{dla } a < x < b \\ 1 & \text{dla } x > b \end{cases}$$

Charakterystyki liczbowe rozkładu równomiernego

- Nadzieja matematyczna $M[X]$

$$M[X] = \frac{b+a}{2}$$

- Dyspersja - $D[X]$

$$D[X] = \frac{(b-a)^2}{12}$$

- Odchylenie średnie kwadratowe σ

$$\sigma = \sqrt{D(x)} = \frac{b-a}{2\sqrt{3}}$$

- Odchylenie środkowe E

$$E = \frac{1}{2}$$

- Odchylenie średnie arytmetyczne d

$$d = \frac{1}{2}$$

czyli $E = d < \zeta$

Prawdopodobieństwo wystąpienia wielkości przypadkowej o rozkładzie równomiernym w danym przedziale określa się ze wzoru:

$$P(x_1 < x < x_2) = \int_{x_1}^{x_2} \varphi(x) dx = \frac{1}{2l} \int_{x_1}^{x_2} dx = \frac{x_2 - x_1}{2l}$$

c/ Rozkład Poissona

Rozkład Poissona charakteryzuje rozkład skokowej wielkości przypadkowej i wykorzystuje się go do określania prawdopodobieństwa zdarzeń, które w wyniku doświadczenia mogą wystąpić dostatecznie dużą ilość razy, lecz prawdopodobieństwo ich wystąpienia jest niewielkie.

Wzór na rozkład Poissona ma postać

$$P_n = \frac{\lambda^n e^{-\lambda}}{n!}$$

Charakterystyki liczbowe rozkładu Poissona

- Nadzieja matematyczna $M[x]$

$$M[x] = \lambda$$

- Dyspersja $D[x]$

$$D[x] = \lambda$$

W rozkładzie Poissona, dyspersja wielkości przypadkowej liczbowo równa się jej nadziei matematycznej.

- Odchylenie średnie kwadratowe

$$\zeta = \sqrt{D(x)} = \sqrt{\lambda}$$

8. Układy wielkości przypadkowych

Układem wielkości przypadkowych nazywa się zbiór wielkości przypadkowych x_1, x_2, \dots, x_n rozpatrywanych jako jedna całość.

Prawem rozkładu układu wielkości przypadkowych nazywa się obiektywnie istniejący związek między możliwymi zespolami

wartości wielkości przypadkowych tworzących układ są odpowiadającymi im prawdopodobieństwami.

Wszystkie wnioski i twierdzenia dotyczące dwóch wielkości przypadkowych dają się bez większych trudności rozprzestrzenić na układy trzech i więcej wielkości przypadkowych.

a/ Funkcja dystrybucji układu wielkości przypadkowych

Funkcją dystrybucji /prawem całkowym rozkładu/ układu dwóch wielkości przypadkowych $/X, Z/$ nazywa się prawdopodobieństwo jednoczesnego spełnienia dwóch nierówności:

$$X < x \quad i \quad Z < z \quad tj$$
$$F(x, z) = P(X < x \quad i \quad Z < z) = P(X < x) \cdot P(Z < z)$$

b/ Gęstość rozkładu prawdopodobieństw układu dwóch wielkości przypadkowych.

Gęstością prawdopodobieństwa /prawem różniczkowym rozkładu/ układu dwóch wielkości przypadkowych, nazywa się pochodną mieszaną drugiego rzędu funkcji dystrybucji układu dwóch wielkości przypadkowych

$$\Psi(x, z) = \frac{\partial^2 F(x, z)}{\partial x \partial z}$$

W układzie dwóch wielkości przypadkowych istnieje ścisła zależność między funkcją dystrybucji a gęstością prawdopodobieństwa. Zależność ta pozwala na wyrażenie jednej wielkości przez drugą:

$$F(x, z) = \int_{-\infty}^x \int_{-\infty}^z \Psi(x, z) dx dz$$

gdzie: $\Psi /x, z/ dx, dz$ - prawdopodobieństwo elementarne trafienia punktu przypadkowego w prostokąt o bokach dx, dz w obrębie punktu o współrzędnych $/x, z/$.

c/ Zależne i niezależne wielkości przypadkowe.

Wielkości przypadkowe X, Z tworzące układ nazywa się niezależnymi, jeżeli przy wystąpieniu dowolnej wartości jednej z wielkości przypadkowych, funkcja dystrybucji drugiej wielkości przypadkowej nie ulega zmianie.

Niezależne wielkości przypadkowe spełniają następujące

warunki:

1. Funkcja dystrybucji układu niezależnych wielkości przypadkowych równa się iloczynowi funkcji dystrybucji poszczególnych wielkości przypadkowych tworzących układ, tj:

$$F(x, z) = P(x < X; Z < z) = P(X < x) \cdot P(Z < z) = F_1(x) \cdot F_2(z)$$

2. Gęstość prawdopodobieństwa układu niezależnych wielkości przypadkowych równa się iloczynowi gęstości prawdopodobieństwa każdej z wielkości przypadkowych tworzących układ, tj:

$$\Psi(x, z) = \Psi_1(x) \cdot \Psi_2(z)$$

Wielkości przypadkowe X, Z tworzące układ nazywany zależnymi, jeżeli wystąpienie której-kolwiek z wartości jednej wielkości przypadkowej, powoduje zmianę funkcji dystrybucji drugiej wielkości przypadkowej.

Warunkową funkcję dystrybucji wielkości przypadkowej X nazywa się funkcję dystrybucji, określoną przy założeniu, że druga wielkość przypadkowa Z przyjęła pewną wartość w danym przedziale.

Funkcja dystrybucji układu dwóch zależnych wielkości przypadkowych przyjmie postać:

$$F(x, z) = F_2(x) \cdot F(z/x) = F_2(z) \cdot F(x/z)$$

Gęstość prawdopodobieństwa układu dwóch zależnych wielkości przypadkowych wypada się wzorem:

$$\Psi(x, z) = \Psi_1(z/x) = \Psi_2(z) \cdot \Psi(x/z)$$

gdzie $\Psi(x/z)$ i $\Psi(z/x)$ - warunkowe gęstości prawdopodobieństwa wielkości przypadkowych X i Z .

Gęstością warunkową prawdopodobieństwa wielkości, przypadkowej Z , nazywa się gęstość prawdopodobieństwa określoną przy założeniu, że druga wielkość przypadkowa X przybrała pewną wartość w danym przedziale.

Aby stwierdzić, czy dane wielkości przypadkowe X i Z są wzajemnie zależne czy też nie należy:

1. Dla jednej z wielkości przypadkowych, należącej do układu, określić warunkową i bezwarunkową funkcję dystrybucji lub warunkową i bezwarunkową gęstość prawdopodobieństwa.
2. Określone funkcje dystrybucji /gęstości prawdopodobieństw/ porównać ze sobą:

Jeżeli funkcja warunkowa dystrybucji /warunkowa gęstość prawdopodobieństwa/ okaże się równa bezwarunkowej, to wielkości przypadkowe są wzajemnie niemożliwe. W przeciwnym razie są one wzajemnie zależne.

d/ Charakterystyki liczbowe układu dwóch wielkości przypadkowych

1. Nadzieje matematyczne $M[X]$ i $M[Z]$ oblicza się ze wzorów:

$$M[X] = \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} x \varphi(x, z) dx, dz$$

$$M[Z] = \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} z \varphi(x, z) dx dz$$

Wzory te stosuje się do wielkości przypadkowych niezależnych.

Dla wielkości przypadkowych zależnych stosuje się wzory:

$$M[Z/X] = \int_{-\infty}^{+\infty} z \varphi(z/x) dz$$

$$M[X/Z] = \int_{-\infty}^{+\infty} x \varphi(x/z) dx$$

2. Dyspersje $D[X]$ i $D[Z]$ dla niezależnych wielkości przypadkowych oblicza się ze wzorów:

$$D(X) = M[(X - M[X])^2] = \int_{-\infty}^{+\infty} (x - M[X])^2 \varphi_1(x) dx$$

$$D(Z) = M[(Z - M[Z])^2] = \int_{-\infty}^{+\infty} (z - M[Z])^2 \varphi_2(z) dz$$

Dla wielkości przypadkowych zależnych stosuje się wzory:

$$D(Z/X) = M[(Z - M[Z/X])^2] = \int_{-\infty}^{+\infty} (z - M[Z/X])^2 \varphi(z/x) dx$$

$$D(X/Z) = M[(X - M[X/Z])^2] = \int_{-\infty}^{+\infty} (x - M[X/Z])^2 \varphi(x/z) dz$$

9. Funkcje wielkości przypadkowych

a/ Rozkład sumy dwóch wielkości przypadkowych

Funkcję dystrybucji wielkości przypadkowej Z , która jest sumą dwóch wielkości przypadkowych ciągłych X i Y określa się z następujących wzorów:

$$F(z) = \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{z-x} \varphi(x, y) dx dy$$

albo

$$F(z) = \int_{-\infty}^{z-y} \int_{-\infty}^{+\infty} \varphi(x, y) dx dy$$

W celu określenia gęstości prawdopodobieństwa sumy dwóch wielkości przypadkowych X i Y należy zróżniczkować wzory określające funkcję dystrybucji dwóch wielkości przypadkowych.

Gęstość prawdopodobieństwa oblicza się ze wzorów:

$$\varphi(z) = \int_{-\infty}^{+\infty} \varphi(x, z-x) dx$$

albo

$$\varphi(z) = \int_{-\infty}^{+\infty} \varphi(z-y) dy$$

b/ Nadzieja matematyczna sumy wielkości przypadkowych

$$M[z] = \int_{-\infty}^{+\infty} x \varphi_1(x) dx + \int_{-\infty}^{+\infty} y \varphi_2(y) dy$$

$$M[z] = M[x] + M[y]$$

Nadzieja matematyczna sumy dwóch wielkości przypadkowych równa się sumie nadziei matematycznych tych wielkości przypadkowych

$$M[x] = \sum_{i=1}^n M[x_i]$$

c/ Nadzieja matematyczna iloczynu wielkości przypadkowych

$$M[z] = M[xy] = M[x] M[y] + K_{xy}$$

Nadzieja matematyczna iloczynu dwóch wielkości przypadkowych równa się iloczynowi ich nadziei matematycznych powiększonemu o moment korelacyjny tych wielkości przypadkowych.

K_{xy} moment korelacyjny / K_{xy} / dwóch wielkości przypadkowych X, Y równa się różnicy między nadzieją matematyczną iloczynu tych wielkości przypadkowych, a iloczynem ich nadziei matematycznych.

$$K_{xy} = M[xy] - M[x] \cdot M[y]$$

Jeżeli wielkości przypadkowe X, Y są nieskorelowane, to ich moment korelacyjny równy jest zero.

Nadzieja matematyczna dwóch nieskorelowanych wielkości przypadkowych równa się iloczynowi ich nadziei matematycznych.

$$M[x, y] = M[x] \cdot M[y]$$

Ogólnie twierdzenie to można zapisać w postaci wzoru:

$$M\left[\prod_{i=1}^n x_i\right] = \prod_{i=1}^n M x_i$$

d/ Nadzieja matematyczna funkcji liniowej argumentów przypadkowych

Nadzieja matematyczna funkcji liniowej równa się tejże funkcji liniowej nadziei matematycznych argumentów przypadkowych.

$$M[z] = M[AX + BY + C] = AM[x] + BM[y] + C$$

Twierdzenie to jest słuszne dla dowolnej liczby argumentów przypadkowych, zarówno zależnych jak i niezależnych.

Dla funkcji liniowej o n argumentach przypadkowych, wzór na nadzieję matematyczną przedstawia się następująco:

$$M[z] = \sum_{i=1}^n a_i M[x_i] + C$$

gdzie: z - funkcja liniowa argumentów przypadkowych

a_i - współczynniki stałe przy odpowiednich argumentach

c - wyraz wolny.

e/ Twierdzenia o dyspersji funkcji wielkości przypadkowych

1. Dyspersja sumy wielkości przypadkowych.

Dyspersja sumy dwóch wielkości przypadkowych równa się sumie ich dyspersji powiększonej o podwójny ich moment korelacyjny.

$$D /Z/ = D /X + Y/ = D /X/ + D /Y/ + 2 K_{xy}$$

Twierdzenie to rozprzestrzenia się na sumę dowolnej liczby wielkości przypadkowych:

$$- 46 -$$

$$D\left(\sum_{i=1}^n x_i\right) = \sum_{i=1}^n D(x_i) + 2 \sum_{i \neq j} K_{ij}$$

gdzie: K_{ij} - moment korelacyjny wielkości przypadkowych X_i i X_j

Dla wielkości przypadkowych niezależnych wzór przedstawia się następująco:

$$D\left(\sum_{i=1}^n x_i\right) = \sum_{i=1}^n D(x_i)$$

Wzór dla niezależnych wielkości przypadkowych można wyrazić przez odchylenie średnie kwadratowe

$$\sigma_z^2 = \sum_{i=1}^n \sigma_{x_i}^2$$

$$\sigma_z = \sqrt{\sum_{i=1}^n \sigma_{x_i}^2}$$

Odchylenie średnie kwadratowe sumy niezależnych wielkości przypadkowych równa się pierwiastkowi kwadratowemu z sumy kwadratów odchyleń średnich kwadratowych składowych wielkości przypadkowych.

2. Dyspersja iloczynu niezależnych wielkości przypadkowych

Dyspersja iloczynu dwóch niezależnych wielkości przypadkowych równa się iloczynowi dyspersji tych wielkości przypadkowych powiększone o pary iloczynów dyspersji jednego czynnika i kwadratu nadziei matematycznej drugiego składnika.

$$D(Z) = D(XY) = D(X)D(Y) + D(X)M^2[Y] + D(Y)M^2[X]$$

3. Dyspersja funkcji liniowej argumentów przypadkowych

Dyspersja funkcji liniowej argumentów przypadkowych określa się ze wzoru:

$$D(Z) = A^2 D(X) + B^2 D(Y) + 2ABK_{xy}$$

Wzór ten może być uogólniony dla liniowej funkcji dowolnej liczby argumentów

$$D(Z) = \sum_{i=1}^n A_i^2 D(x_i) + 2 \sum_{i \neq j} A_i A_j K_{ij}$$

gdzie: K_{ij} - moment korelacyjny wielkości przypadkowych X_i i X_j .

A_i, A_j - stałe współczynniki przy odpowiednich argumentach przypadkowych.

Jeżeli argumenty przypadkowe są niezależne, to wzór przedstawia się następująco:

$$D(Z) = \sum_{i=1}^n A_i^2 D(x_i)$$

4. Dyspersja nieliniowej funkcji argumentów przypadkowych

Dyspersję nieliniowej funkcji argumentów przypadkowych określa się ze wzoru:

$$D(Z) = \sum_{i=1}^n \left(\frac{\partial f}{\partial x_i} \right)^2 D(x_i) + 2 \sum_{i \neq j} \frac{\partial f}{\partial x_i} \cdot \frac{\partial f}{\partial x_j} k_{ij}$$

Jeśli argumenty przypadkowe są niezależne wzór przybiera następującą postać:

$$D(Z) = \sum_{i=1}^n \left(\frac{\partial f}{\partial x_i} \right)^2 D(x_i)$$

Wymienione powyżej wzory można wyrazić za pomocą odchyleń średnich kwadratowych następująco:

$$\sigma_z = \sqrt{\sum_{i=1}^n \left(\frac{\partial f}{\partial x_i} \right)^2 \sigma_{x_i}^2 + 2 \sum_{i \neq j} \frac{\partial f}{\partial x_i} \cdot \frac{\partial f}{\partial x_j} k_{ij}}$$
 dla argumentów
zależnych

$$\sigma_z = \sqrt{\sum_{i=1}^n \left(\frac{\partial f}{\partial x_i} \right)^2 \sigma_{x_i}^2}$$
 dla argumentów
niezależnych.

5. Nadzieja matematyczna ilości trafień przy kilku strzałach

Nadzieję matematyczną ilości trafień przy kilku strzałach określa się ze wzoru:

$$M[x] = \sum_{i=1}^n M[x_i] = \sum_{i=1}^n p_i$$

Nadzieja matematyczna ilości trafień przy kilku strzałach liczbowo równa się sumie prawdopodobieństw trafienia przy poszczególnych strzałach.

Jeżeli prawdopodobieństwo trafienia od strzału do strzału nie zmienia się, wówczas wzór przyjmuje postać:

$$M[x] = np$$

gdzie: n - ilość strzałów

p - prawdopodobieństwo trafienia przy jednym strzale
/niezmienne od strzału do strzału/.

6. Nadzieja matematyczna ilości rażonych celów przy strzelaniu do grupy celów.

Nadzieja matematyczna ilości rażonych celów przy strzelaniu do grupy celów liczbowo równa się sumie prawdopodobieństw rażenia poszczególnych celów w grupie.

$$M[x] = \sum_{i=1}^n M[x_i] = \sum_{i=1}^n R_i$$

gdzie: R_i - prawdopodobieństwo rażenia i - tego celu w grupie.

7. Dyspersja ilości trafień przy niezależnych strzałach.

Dyspersja ilości trafień przy niezależnych strzałach równa się sumie iloczynów prawdopodobieństwa trafienia i prawdopodobieństwa chybienia przy każdym strzale.

$$D(x) = \sum_{i=1}^n D(x_i) = \sum_{i=1}^n p_i q_i$$

Przy strzelaniu w warunkach niezmiennych wzór przyjmuje postać:

$$D(x) = npq$$

8. Dyspersja ilości trafień przy zależnych strzałach:

Dyspersję ilości trafień przy zależnych strzałach określa się ze wzoru:

$$D(x) = \sum_{i=1}^n p_i q_i + 2 \sum_{i \neq j} (p_{ij} - p_i q_j)$$

f/ Kompozycja rozkładów normalnych

Jeżeli wielkości przypadkowe X i Y są wzajemnie niezależne i posiadają rozkłady normalne o odpowiednich gęstościach prawdopodobieństwa:

$$\varphi_1(x) = \frac{1}{\sigma_x \sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(x-m_x)^2}{2\sigma_x^2}}$$

$$\varphi_2(y) = \frac{1}{\sigma_y \sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(y-m_y)^2}{2\sigma_y^2}}$$

to kompozycja tych dwóch rozkładów normalnych wyrazi się wzorem:

$$\varphi(z) = \frac{1}{\sigma_z \sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(z-m_z)^2}{2\sigma_z^2}}$$

Wzór ten przedstawia rozkład normalny.

$$m_z = m_x + m_y$$
$$\sigma_z = \sqrt{\sigma_x^2 + \sigma_y^2}$$

Twierdzenie Cramera

Jeżeli suma dwóch niezależnych wielkości przypadkowych posiada rozkład normalny, to każda ze składowych tego układu ma również rozkład normalny.

g/ Kompozycja rozkładu normalnego i równomiernego

Jeżeli wielkość przypadkowa X posiada rozkład normalny

$$\varphi_1(x) = \frac{1}{\sigma_x \sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(x-m_x)^2}{2\sigma_x^2}}$$

a wielkość przypadkowa Y - rozkład równomierny w przedziale

$$[\alpha, \beta] \quad \varphi_2(y) = \frac{1}{\beta - \alpha} = \frac{1}{2l}$$

to kompozycja tych dwóch rozkładów wyrazi się wzorem:

$$\varphi(z) = \frac{1}{\sigma_z \sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(z-m_z)^2}{2\sigma_z^2}}$$

gdzie: $m_z = m_x + \frac{\beta + \alpha}{2}$ - nadzieja matematyczna wielkości przypadkowej Z

$$\sigma_z = \sqrt{\sigma_x^2 + \sigma_y^2} = \sqrt{\sigma_x^2 + \frac{l^2}{3}}$$

- uchylenie średnie kwadratowe wielkości przypadkowej Z.

Prawo rozkładu wielkości przypadkowej Z można w przybliżeniu uważać za normalne jeżeli:

$$\frac{\beta + \alpha}{2} = l \leq \sigma_x$$

Podane wzory na określenie wartości m_z i σ_z pozostają w mocy również dla $l < \sigma_x$, jednakże sumaryczne prawo w tym przypadku, za prawo normalne uznane być nie może.

h/ Główne twierdzenie graniczne Lapunowa

"Prawo rozkładu sumy $X = X_1 + X_2 + \dots + X_n$ o dostatecznie dużej ilości składników $/n \rightarrow \infty /$ jest dowolnie bliskie rozkładowi normalnemu, niezależnie od ^{rodzaju} rozkładów tych składników, pod warunkiem, że ich dyspersje co do wielkości będą w przybliżeniu równe".

Jeżeli dyspersja któregoś ze składników większa jest do pozostałych $/np.$ trzy - pięciokrotnie/, to suma zachowa w przybliżeniu rozkład tego dominującego składnika nawet przy bardzo dużych ilościach składników.

10. Prawo wielkich liczb

Istota prawa wielkich liczb polega na tym, że przy bardzo dużej ilości doświadczeń ich wynik średni zatracą charakter przypadkowy i może być wyznaczony z dużą dokładnością.

Pod pojęciem prawa wielkich liczb w teorii prawdopodobieństwa rozumie się szereg twierdzeń, wiążących w określony sposób teoretyczne i empiryczne charakterystyki liczbowe wielkości przypadkowych.

a/ Zasadnicze twierdzenia praw wielkich liczb

1. Twierdzenie Czebyszewa

Twierdzenie Czebyszewa ustala związek między średnim wynikiem a nadzieją matematyczną:

"Przy dostatecznie dużej liczbie niezależnych doświadczeń, z prawdopodobieństwem dowolnie bliskim jedności możemy twierdzić, że średnia arytmetyczna otrzymanych w wyniku doświadczeń wartości wielkości przypadkowej, będzie dowolnie miało różnić się od jej nadziei matematycznej".

Analitycznie twierdzenie to wyraża się w postaci:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} P\left(\left|\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_i - M[X]\right| < \varepsilon\right) = 1$$

gdzie: ε - dowolnie mała liczba dodatnia.

2. Twierdzenie Bernoulliego

Twierdzenie Bernoulliego ustala zależność między częstością zdarzenia, a jego prawdopodobieństwem przy dostatecznie dużej liczbie niezależnych doświadczeń, w których prawdopodobieństwo zdarzenia jest niezmienne.

"Przy dostatecznie dużej liczbie niezależnych doświadczeń możemy twierdzić z prawdopodobieństwem dowolnie bliskim jedności, że częstość zdarzenia dowolnie mało różni się będzie od jego prawdopodobieństwa".

$$\lim_{S \rightarrow \infty} P\left(\left|\frac{m}{S} - p\right| < \varepsilon\right) = 1$$

gdzie: $\frac{m}{S}$ - częstość wystąpienia zdarzenia pary S niezależnych doświadczeniach

p - prawdopodobieństwo danego zdarzenia

ε - dowolnie mała liczba dodatnia.

Twierdzenie to jest odwracalne i można je sformułować: "Przy dostatecznie dużej liczbie niezależnych doświadczeń z prawdopodobieństwem dowolnie bliskim jedności możemy twierdzić, że nieznanne prawdopodobieństwo zdarzenia dowolnie mało różni się będzie od jego częstości".

$$\lim_{S \rightarrow \infty} P\left(\left|p - \frac{m}{S}\right| < \varepsilon\right) = 1$$

3. Twierdzenie Poissona

"Przy dostatecznie dużej liczbie niezależnych doświadczeń, z prawdopodobieństwem dowolnie bliskim jedności możemy twierdzić, że częstość zdarzenia dowolnie mało różni się będzie od jego średniego prawdopodobieństwa".

$$\lim_{S \rightarrow \infty} P\left(\left|\frac{m}{S} - \frac{1}{S} \sum_{i=1}^S p_i\right| < \varepsilon\right) = 1$$

gdzie: p_i - prawdopodobieństwo zdarzenia przy i - tym doświadczeniu.

Twierdzenie Poissona jest jak gdyby rozszerzeniem twierdzenia Bernoulliego dla przypadków, gdy prawdopodobieństwo zdarzenia zmienia się od doświadczenia do doświadczenia i pod uwagę jest brane jego prawdopodobieństwo średnie $p_{sr} = \frac{1}{S} \sum_{i=1}^S p_i$

11. Opracowanie wyników pomiarów.

a/ Określanie przybliżonej wartości mierzonej wielkości i ocena jej dokładności przy pomiarach jednakowo dokładnych.

Za przybliżoną wartość mierzonej wielkości, przy pomiarach jednakowo dokładnych, przyjmuje się zbliżoną do nadziei matematycznej, wartość średnią arytmetyczną z uzyskanymi wynikami pomiarów

$$M[X] = a \approx \bar{X} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_i$$

gdzie: $M[X] = a$ - nadzieja matematyczna /równa się rzeczywistej wartości a /

x - przybliżona wartość

n - ilość pomiarów

x_i - wartość wyniku uzyskanego przy i - tym pomiarze.

Nadzieja matematyczna przybliżonej wartości wyraża się wzorem:

$$M[\bar{x}] = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n M[x_i] = \frac{1}{n} \cdot n \cdot a = a$$

Nadzieja matematyczna przybliżonej wartości \bar{x} równa się rzeczywistej wartości mierzonej wielkości

Dyspersja przybliżonej wartości wyraża się wzorem:

$$D(\bar{x}) = D\left(\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_i\right) = \frac{1}{n^2} \sum_{i=1}^n D(x_i) = \frac{1}{n^2} \cdot n \cdot D(x) = \frac{D(x)}{n}$$

Odchylenie średnie kwadratowe

$$\sigma_{\bar{x}} = \frac{\sigma}{\sqrt{n}}$$

Gęstość prawdopodobieństwa przybliżonej wartości \bar{x} wyraża się wzorem:

$$f(\bar{x}) = \frac{1}{\sigma \sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(\bar{x}-a)^2}{2\sigma^2}} = \frac{\sqrt{n}}{\sigma \sqrt{2\pi}} e^{-\frac{n(\bar{x}-a)^2}{2\sigma^2}}$$

Prawdopodobieństwo, że odchylenie przybliżonej wartości od wartości rzeczywistej mierzonej wielkości nie przewyższy danej wartości ε wyraża się wzorem:

$$\alpha = P(|\bar{x} - a| < \varepsilon) = \int_{-\varepsilon}^{\varepsilon} f(x) dx$$

Do obliczenia całki wykorzystuje się table wartości funkcji $\Theta(z)$

$$\alpha = P(|\bar{x} - a| < \varepsilon) = \Theta(z)$$

gdzie: $z = \frac{\varepsilon}{\sigma \sqrt{2}} = \frac{\varepsilon \sqrt{n}}{\sigma \sqrt{2}}$; α - poziom ufności

Wartość α wyrażona jest w jednostkach miary α .

W przypadku, gdy znany jest nie błąd średni kwadratowy, charakteryzujący dokładność pomiarów lecz błąd środkowy, to do obliczenia całki wykorzystuje się tabele funkcji $\Phi(\beta)$

$$\text{Wtedy } \mathcal{A} = P(|\bar{x} - a| < \epsilon) = \Phi(\beta)$$

$$\text{gdzie: } \beta = \frac{\epsilon}{E\bar{x}} = \frac{\epsilon\sqrt{n}}{E}$$

b/ Określenie i ocena dokładności przybliżonej wartości parametru z przy pomiarach jednakowo dokładnych.

1. Gdy rzeczywista wartość mierzonej wielkości jest znana

Za rzeczywistą wartość mierzonej wielkości może być przyjęta wartość uzyskana w rezultacie pomiarów, wykonanych sposobem bardziej dokładnym od sposobu /przyrządu/, którego charakterystykę pragniemy określić.

Wyniki pomiarów mierzonej wielkości i ich odchylenia podlegają prawu normalnemu

$$\varphi(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(x-a)^2}{2\sigma^2}}$$

w którym nieznanym parametrem jest wartość σ

$$\sigma^2 = D(x) = M[(x-a)^2]$$

$$M[(x-a)^2] = \sigma^2 \approx s^2 = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (x_i - a)^2$$

gdzie: s^2 - doświadczalna lub przybliżona wartość dyspersji prawa rozkładu wyników pomiarów.

Przy znanej wartości rzeczywistej mierzonej wielkości za przybliżoną wartość odchylenia średniego kwadratowego, charakteryzującego rozszew wyników pomiarów należy przyjmować:

$$S = \sqrt{\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (x_i - a)^2}$$

Przybliżona wartość odchylenia średniego kwadratowego posiada określone prawo rozkładu.

Gęstość prawdopodobieństwa tego rozkładu ma postać:

$$\varphi(S) = \frac{\sqrt{2\pi}}{\sigma\Gamma(\frac{n}{2})} \cdot \left(\frac{S\sqrt{n}}{\sigma\sqrt{2}}\right)^{n-1} e^{-\frac{nS^2}{2\sigma^2}}$$

gdzie: $\Gamma /n/$ - funkcja gama, której wartość podaje tabela.

Przy dostatecznie dużej ilości pomiarów $n \geq 30$ $\Psi /s/$ mało różni się od rozkładu normalnego:

$$\Psi(s) = \frac{\sqrt{2n}}{\delta \sqrt{2\pi}} e^{-n \left(\frac{s}{\delta} - 1\right)^2}$$

dla której parametr

$$\delta_s = \frac{\delta}{\sqrt{2n}}$$

Poziom ufności α określa się z tabeli na podstawie wzoru:

$$\alpha = P(s - \epsilon < \delta < s + \epsilon) = P(t_2, n) - P(t_1, n)$$

$$t_1 = \frac{s\sqrt{n}}{\delta'}; \quad t_2 = \frac{s\sqrt{n}}{\delta''}; \quad \delta' = s - \epsilon; \quad \delta'' = s + \epsilon$$

2. Gdy rzeczywista wartość mierzonej wielkości nie jest znana.

Należy określić wartość przybliżoną mierzonej wielkości \bar{x}

$$\bar{x} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_i$$

a następnie poszczególne odchylenia w stosunku do niej.

Odchylenia te posiadają następujące właściwości:

1. Suma wszystkich odchyłeń danej serii pomiarów równa się zero.
2. Nadzieja matematyczna wielkości przypadkowej odchylenia wyniku pomiaru od wartości przybliżonej mierzonej wielkości równa się zero.
3. Dyspersja wielkości przypadkowej odchylenia wyniku pomiaru od wartości przybliżonej mierzonej wielkości różni się od dyspersji wielkości przypadkowej odchylenia wyniku pomiaru od jej wartości rzeczywistej.

$$D(x_i - \bar{x}) \neq D(x_i - a) = D(x_i) = \delta^2$$

$$D(x_i - \bar{x}) = \delta^2 + \frac{\delta^2}{n} - \frac{2\delta^2}{n} = \frac{n-1}{n} \delta^2$$

W wypadku nieznannej rzeczywistej wartości mierzonej wielkości a , wartość odchylenia średniego kwadratowego, charakteryzującego sposób pomiarów oblicza się ze wzoru:

$$S_1 = \sqrt{\frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2}$$

Przy małej ilości pomiarów korzysta się z tabeli funkcji $P /t, n/$ i wtedy:

$$\alpha = P(S_1 - \varepsilon < \bar{b} < S_1 + \varepsilon) = P(t_2, n-1) - P(t_1, n-1)$$

$$t_1 = \frac{S_1 \sqrt{n-1}}{\delta'} ; \quad t_2 = \frac{S_1 \sqrt{n-1}}{\delta''}$$

Przy liczbie pomiarów $n = 30$ korzysta się z tabeli funkcji $\Phi \beta$

$$\alpha = P(\delta < \bar{b} < \delta'') = \frac{1}{2} [\Phi(\beta_1) - \Phi(\beta_2)]$$

$$\beta_1 = \frac{\sqrt{n-1}}{\rho} \left(\frac{S_1}{\delta'} - 1 \right)$$

$$\beta_2 = \frac{\sqrt{n-1}}{\rho} \left(\frac{S_1}{\delta''} - 1 \right)$$

c/ Określenie i ocena przybliżonej wartości mierzonej wielkości przy pomiarach wykonywanych z różną dokładnością.

1. Średnie arytmetyczne każdej serii pomiarów oraz liczby pomiarów poszczególnych serii są znane, a pomiary elementarne są jednakowo dokładne.

Za wartość przybliżoną mierzonej wielkości przyjmuje się wartość średnią:

$$\bar{X} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \bar{X}_i n_i$$

gdzie: n_i - ilość pomiarów w tej serii

$$\bar{X}_i = \frac{1}{n_i} \sum_{j=1}^{m_i} \bar{X}_{ij}$$

\bar{X}_{ij} - elementarne pomiary i - tej serii

Jeżeli liczba pomiarów poszczególnych serii nie jest znana, lecz znane są odchylenia średnie kwadratowe, charakteryzujące dokładność średniej arytmetycznej każdej serii

$(\bar{\sigma}_i)$ to wartość przybliżoną mierzonej wielkości określa się ze wzoru:

$$\bar{X} = \frac{\sum_{i=1}^m \frac{\bar{X}_i}{\bar{\sigma}_i^2}}{\sum_{i=1}^m \frac{1}{\bar{\sigma}_i^2}}$$

2. Pomiary elementarne poszczególnych serii posiadają różną dokładność.

Przybliżoną wartość mierzonej wielkości określa się ze wzoru:

$$\bar{X} = \frac{\sum_{i=1}^m \frac{\bar{x}_i \cdot n_i}{\sigma_i^2}}{\sum_{i=1}^m \frac{n_i}{\sigma_i^2}}$$

d/ Anormalne wyniki pomiarów

1. Dokładność sposobu pomiaru jest znana

Przybliżoną wartość mierzonej wielkości w wypadku wykluczenia podejrzanego wyniku wyraża się wzorem:

$$\bar{X}_{n-1} = \frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^{n-1} x_i$$

Odchylenie podejrzanego wyniku pomiaru od wyznaczonej wartości przybliżonej wyrażone w odchyleniach środkowych określa się ze wzoru:

$$t_n = \frac{x_n - \bar{X}_{n-1}}{E}$$

t_n - unormowane odchylenie podejrzanego wyniku od wartości średniej.

$$\alpha = P(t_n > t_\alpha)$$

Zdaje się pewne małe prawdopodobieństwo np $\alpha = 0,01$ i z tabeli wyznacza się wartość t_α dla danej liczby pomiarów n . Jeżeli $t_n > t_\alpha$ wynik x_n uważa się za anormalny, ze względu na zbyt małe prawdopodobieństwo jego wystąpienia. Jeśli $t_n < t_\alpha$ wynik x_n uznaje się za normalny i uwzględnia się go przy opracowaniu wyników pomiarów.

2. Dokładność sposobu pomiaru nie jest znana

Przybliżoną wartość odchylenia środkowego z wyłączeniem podejrzanego wyniku określa się ze wzoru:

$$E_{n-1} = \sqrt{\frac{1}{n-1} \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^{n-1} (x_i - \bar{X}_{n-1})^2}{n-2}}}$$
$$\bar{X}_{n-1} = \frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^{n-1} x_i$$

Odchylenie unormowane podejrzanego wyniku od wartości przypadkowej oblicza się ze wzoru:

$$t_n = \frac{X_n - \bar{X}_{n-1}}{E_0} \quad \alpha = P(t_n > t_\alpha)$$

Przy obliczaniu t_α korzysta się z tabeli zestawionej w oparciu o kryterium Smirnowa. Inne czynności zostają te same.

e/ Określanie i ocena przybliżonej wartości funkcji liniowej argumentów przypadkowych.

Za wartość przybliżoną funkcji liniowej argumentów przypadkowych można przyjąć wartość tej funkcji obliczoną dla przybliżonych wartości argumentów.

$$\bar{z} = \sum_{i=1}^n A_i \bar{x}_i + C$$

gdzie: \bar{x}_i - przybliżone wartości argumentów

A_i - stałe współczynniki przy tych argumentach.

Odchylenie średnie kwadratowe oblicza się ze wzorów: - dla argumentów nieskorelowanych:

$$\sigma_{\bar{z}} = \sqrt{\sum_{i=1}^n A_i^2 \sigma_{\bar{x}_i}^2}$$

- dla argumentów skorelowanych:

$$\sigma_{\bar{z}} = \sqrt{\sum_{i=1}^n A_i^2 \sigma_{\bar{x}_i}^2 + 2 \sum_{i \neq j} A_i A_j K_{ij}}$$

Dokładność przybliżonych wartości poszczególnych argumentów określa się ze wzoru:

$$\sigma_{\bar{x}_i} = \frac{\sigma_i}{\sqrt{n}}$$

f/ Określenie i ocena przybliżonej wartości funkcji nieliniowej argumentów przypadkowych.

Przybliżona wartość nieliniowej funkcji bezpośrednio mierzonych argumentów równa się tejże funkcji wartości przybliżonych poszczególnych argumentów, określonych na podstawie wyników pomiarów.

Przybliżona wartość odchylenia średniego kwadratowego wyraża się wzorem:

- w przypadku argumentów skorelowanych

$$\sigma_z = \sqrt{\sum_{i=1}^n \left(\frac{\partial f}{\partial x_i}\right)^2 \sigma_{x_i}^2 + 2 \sum_{i \neq j} \frac{\partial f}{\partial x_i} \cdot \frac{\partial f}{\partial x_j} K_{ij}}$$

- w przypadku argumentów skorelowanych.

$$\sigma_z = \sqrt{\sum_{i=1}^n \left(\frac{\partial f}{\partial x_i}\right)^2 \sigma_{x_i}^2}$$

12. Wektory przypadkowe na płaszczyźnie

a/ Rozkład normalny wektora przypadkowego na płaszczyźnie i jego charakterystyki

Gęstość prawdopodobieństwa wektora przypadkowego \bar{U} /układu dwóch niezależnych wielkości przypadkowych X i Z / wyraża się wzorem :

$$\begin{aligned} \varphi(\bar{U}) &= \varphi(x, z) = \varphi(x) \cdot \varphi(z) \\ \varphi(\bar{U}) &= \varphi(x, z) = \frac{1}{\sigma_x \sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(x-m_x)^2}{2\sigma_x^2}} \cdot \frac{1}{\sigma_z \sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(z-m_z)^2}{2\sigma_z^2}} = \\ &= \frac{1}{2\pi \sigma_x \sigma_z} e^{-\frac{(x-m_x)^2}{2\sigma_x^2} - \frac{(z-m_z)^2}{2\sigma_z^2}} \end{aligned}$$

Elipsę o głównych półosiach równych σ_x i σ_z nazywa się elipsą odchyień średnich kwadratowych. Elipsa ta charakteryzuje rozrzut na płaszczyźnie.

Najczęściej jako charakterystykę rozrzutu przyjmuje się elipsę jednostkową o półosiach równych odpowiednim odchyleniom środkowym:

$$E_x = \int \sqrt{2} \sigma_x \quad i \quad E_z = \int \sqrt{2} \sigma_z$$

Pełną elipsą rozrzutu nazywa się elipsę o półosiach równych $4E_x$ i $4E_z$. Prawdopodobieństwo trafienia końca wektora przypadkowego w powierzchnię przez nią ograniczoną równa się 0,97, co jest zdarzeniem niemalże pewnym.

Gęstość prawdopodobieństwa rozkładu normalnego na płaszczyźnie wyrażona przez główne odchylenie środkowe wygląda następująco:

$$\varphi(\vec{r}) = \frac{\beta^2}{\pi E_x E_z} e^{-\beta^2 \left(\frac{x_1^2}{E_x^2} + \frac{z_1^2}{E_z^2} \right)}$$

Jeżeli $E_x = E_z$ rozkład eliptyczny staje się rozkładem kołowym.

Jeżeli główne osie rozrzutu nie pokrywają się co do kierunku z osiami układu współrzędnych, to należy początek układu współrzędnych przesunąć do środka rozrzutu i wykonać obrót układu o kąt α , który określa się ze wzoru:

$$\operatorname{tg} 2\alpha = \frac{2\beta_x \beta_z}{\beta_z^2 - \beta_x^2}$$

Wtedy gęstość prawdopodobieństwa rozkładu normalnego na płaszczyźnie wyrazi się wzorem o postaci:

$$\varphi(x_1, z_1) = \frac{1}{2\pi \beta_x \beta_z} e^{-\frac{x_1^2}{2\beta_x^2} - \frac{z_1^2}{2\beta_z^2}}$$

gdzie: β_x i β_z - główne odchylenia średnie kwadratowe wielkości przypadkowych X_1 i Z_1 .

Główne odchylenie średnie kwadratowe /środkowe/ wyrażone przez odnośne odchylenia dla poprzedniego układu współrzędnych określa się ze wzoru:

$$\beta_x^2 = \beta_x^2 \cos^2 \alpha - \beta_x \beta_z \sin 2\alpha + \beta_z^2 \sin^2 \alpha$$

$$\beta_z^2 = \beta_x^2 \sin^2 \alpha + \beta_x \beta_z \sin 2\alpha + \beta_z^2 \cos^2 \alpha$$

$$E_x^2 = E_x^2 \cos^2 \alpha - \beta_x \beta_z \sin 2\alpha + E_z^2 \sin^2 \alpha$$

$$E_z^2 = E_x^2 \sin^2 \alpha + \beta_x \beta_z \sin 2\alpha + E_z^2 \cos^2 \alpha$$

b/ Odechylenie w danym kierunku wywołane wektorem przypadkowym.

Odechylenie wywołane wektorem przypadkowym \vec{U} wzdłuż danego kierunku równe jest rzutowi wektora \vec{U} na ten kierunek.

Rzut wektora przypadkowego na dowolny kierunek na płaszczyźnie określa się ze wzoru:

$$L = X \sin \alpha + Z \cos \alpha$$

Położenie środka rozrzutu wielkości przypadkowej L określa nadzieja matematyczna:

$$M[L] = \sin \alpha M[X] + \cos \alpha M[Z]$$

$$m_l = m_x \sin \alpha + m_z \cos \alpha$$

Gdy osie współrzędnych będą równoległe do głównych osi rozrzutu, to odchylenie średnie kwadratowe wyraża się wzorem:

$$\delta_l = \sqrt{\delta_x^2 \sin^2 \alpha + \delta_z^2 \cos^2 \alpha}$$

a odchylenie środkowe określa się ze wzoru:

$$E_l = \sqrt{E_x^2 \sin^2 \alpha + E_z^2 \cos^2 \alpha}$$

Jeżeli główne półosie elipsy jednostkowej /elipsy odchylen średnich kwadratowych/ oznaczymy odpowiednio przez b i c to wzór przyjmie postać:

$$B = \sqrt{b^2 \sin^2 \alpha + c^2 \cos^2 \alpha}$$

c/ Prawdopodobieństwo trafienia punktu przypadkowego w elipsę podobną do elipsy jednostkowej

Prawdopodobieństwo trafienia punktu przypadkowego P w elipsę podobną do elipsy jednostkowej, odpowiada prawdopodobieństwu, że koniec wektora przypadkowego \vec{U} nie wykroczy poza powierzchnię tej elipsy.

Prawdopodobieństwo trafienia punktu przypadkowego w elipsę podobną do elipsy jednostkowej określa się ze wzoru:

$$P_{\epsilon k} = 1 - e^{-\epsilon^2 k^2}$$

Dla uproszczenia obliczeń sporządzone są specjalne tabele wartości $P_{\epsilon k}$ w zależności od k .

d/ Twierdzenie o sumie momentów korelacyjnych

Moment korelacyjny składowych wektora przypadkowego będącego sumą wektorów przypadkowych \bar{U}_1 i \bar{U}_2 równa się sumie momentów korelacyjnych składowych wektorów \bar{U}_1 i \bar{U}_2

$$k_{xz} = k_{x_1 z_1} + k_{x_2 z_2}$$

e/ Kompozycja rozkładów na płaszczyźnie.

Jeżeli wektory przypadkowe posiadają rozkład normalny o parametrach odpowiednio równych:

$$m_{x_1}, m_{z_1}, \sigma_{x_1}, \sigma_{z_1}, \rho_{x_1 z_1}$$
$$m_{x_2}, m_{z_2}, \sigma_{x_2}, \sigma_{z_2}, \rho_{x_2 z_2}$$

to parametry rozkładu sumarycznego wektora przypadkowego określa się z następujących wzorów:

$$m_x = m_{x_1} + m_{x_2}$$

$$m_z = m_{z_1} + m_{z_2}$$

$$\sigma_x^2 = \sigma_{x_1}^2 + \sigma_{x_2}^2$$

$$\sigma_z^2 = \sigma_{z_1}^2 + \sigma_{z_2}^2$$

$$k_{xz} = k_{x_1 z_1} + k_{x_2 z_2}$$

$$\rho_{xz} \sigma_x \sigma_z = \rho_{x_1 z_1} \sigma_{x_1} \sigma_{z_1} + \rho_{x_2 z_2} \sigma_{x_2} \sigma_{z_2}$$

$$\operatorname{tg} 2\alpha = \frac{2\rho_{xz} \sigma_x \sigma_z}{\sigma_z^2 - \sigma_x^2}$$

$$\sigma_{xgt} = \sqrt{\sigma_x^2 \cos^2 \alpha - \rho_{xz} \sin 2\alpha + \sigma_z^2 \sin^2 \alpha}$$

$$\sigma_{zgt} = \sqrt{\sigma_x^2 \sin^2 \alpha + \rho_{xz} \sin 2\alpha + \sigma_z^2 \cos^2 \alpha}$$

1/ Opracowanie strzelań uderzeniowych

Opracowanie strzelań uderzeniowych odbywa się w następującej kolejności:

1. Dobiera się układ współrzędnych. Zazwyczaj przyjmuje się początek układu w punkcie celowania, jedną z osi współrzędnych skierowuje się zgodnie z płaszczyzną strzelania, a drugą prostopadle do niej.
2. Określa się współrzędne punktów upadków.
3. Określa się przybliżone wartości współrzędnych środka rozrzutu.

$$m_x \approx \bar{x} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_i$$

$$m_z \approx \bar{z} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n z_i$$

4. Oblicza się współczynniki A, B i C ze wzorów:

$$A = \sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2$$

$$B = \sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})(z_i - \bar{z})$$

$$C = \sum_{i=1}^n (z_i - \bar{z})^2$$

5. Określa się kąt skierowania osi rozrzutu

$$\operatorname{tg} 2\alpha = \frac{2B}{C-A}$$

6. Oblicza się przybliżone wartości głównych odchyleń średnich kwadratowych, które charakteryzują rozrzut punktów upadku pocisków

$$\sigma_{xq} = \sqrt{\frac{1}{n-1} (A \cos^2 \alpha - B \sin 2\alpha + C \sin^2 \alpha)}$$

$$\sigma_{zq} = \sqrt{\frac{1}{n-1} (A \sin^2 \alpha + B \sin 2\alpha + C \cos^2 \alpha)}$$

Jeżeli kierunki głównych osi rozrzutu są znane z góry, należy osie współrzędnych obrócić do nich równoległe. W takim układzie współrzędnych, współrzędne punktów upadku pocisków przedstawiają niezależne wielkości przypadkowe, a prawo ich rozkładu określają parametry:

- współrzędne środka rozrzutu m_x i m_z
- główne odchylenie średnie kwadratowe o kierunkach zgodnych z osiami współrzędnych σ_x i σ_z

$$m_x = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_i$$

$$m_z = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n z_i$$

$$\sigma_x = \sqrt{\frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2}$$

$$\sigma_z = \sqrt{\frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^n (z_i - \bar{z})^2}$$

13. Wektory przypadkowe w przestrzeni

a/ Rozkład normalny wektora przypadkowego w przestrzeni

Gęstość prawdopodobieństwa wektora przypadkowego \vec{U} /układu trzech niezależnych wielkości przypadkowych x, y, z / wyraża się wzorem:

$$f(x, y, z) = \frac{1}{(2\pi)^{3/2} \sigma_x \sigma_y \sigma_z} e^{-\frac{1}{2} \left[\frac{(x-m_x)^2}{\sigma_x^2} + \frac{(y-m_y)^2}{\sigma_y^2} + \frac{(z-m_z)^2}{\sigma_z^2} \right]}$$

Jeżeli początek układu przeniesie się do punktu o współrzędnych m_x, m_y, m_z i za osie układu przyjmie się główne osie rozrzutu, to w wyniku tego przesunięcia równoległego układu współrzędnych, gęstość prawdopodobieństwa wyrazi się wzorem:

$$f(x, y, z) = \frac{\rho^3}{(2\pi)^{3/2} \cdot \sigma_{xq} \cdot \sigma_{yq} \cdot \sigma_{zq}} e^{-\frac{\rho^2}{2} \left(\frac{x^2}{\sigma_{xq}^2} + \frac{y^2}{\sigma_{yq}^2} + \frac{z^2}{\sigma_{zq}^2} \right)}$$

lub wyrażając ją przez odchylenie środkowe

$$f(x, y, z) = \frac{\rho^3}{\pi^{3/2} \cdot E_{xq} \cdot E_{yq} \cdot E_{zq}} e^{-\frac{\rho^2}{2} \left(\frac{x^2}{E_{xq}^2} + \frac{y^2}{E_{yq}^2} + \frac{z^2}{E_{zq}^2} \right)}$$

Elipsoidą odchyłeń średnich kwadratowych nazywa się elipsoidę o półosiach równych głównym odchyleniom kwadratowym.

Elipsoidą jednostkową nazywa się elipsoidę o półosiach równych głównym odchyleniom środkowym.

Wektor przypadkowy w przestrzeni określają następujące parametry:

- trzy nadzieje matematyczne m_x, m_y, m_z , które wyznaczają położenie środka zgrupowania układu wielkości przypadkowych X, Y, Z ;
- trzy odchylenia średnie kwadratowe $\sigma_x, \sigma_y, \sigma_z$, które charakteryzują rozrzut tych wielkości przypadkowych wzdłuż osi współrzędnych;
- sześć, parami równych, momentów korelacyjnych:

$$K_{xy} = K_{yx}; K_{xz} = K_{zx}; K_{yz} = K_{zy}$$

b/ Odchylenie wzdłuż danego kierunku, wywołane wektorem przypadkowym w przestrzeni

Odchylenie wywołane wektorem przypadkowym wzdłuż danego kierunku równe jest rzutowi wektora przypadkowego na ten kierunek.

$$L = X \cos \alpha + Y \cos \beta + Z \cos \gamma$$

Nadzieja matematyczna wielkości przypadkowej wyraża się wzorem:

$$M[L] = M[X] \cos \alpha + M[Y] \cos \beta + M[Z] \cos \gamma$$

lub

$$\bar{m}_L = \bar{m}_x \cos \alpha + \bar{m}_y \cos \beta + \bar{m}_z \cos \gamma$$

Dyspersję wielkości przypadkowej L określa wzór:

$$D[L] = D(X) \cos^2 \alpha + D(Y) \cos^2 \beta + D(Z) \cos^2 \gamma$$

lub

$$\sigma_L^2 = \sigma_x^2 \cos^2 \alpha + \sigma_y^2 \cos^2 \beta + \sigma_z^2 \cos^2 \gamma$$

Jeżeli główne półosie elipsoidy odchyżeń średnich kwadratowych /elipsoidy jednostkowej/ przez a, b, c to ostateczny wzór od obliczenia odchylenia przyjmie postać:

$$B_L = \sqrt{a^2 \cos^2 \alpha + b^2 \cos^2 \beta + c^2 \cos^2 \gamma}$$

c/ Prawdopodobieństwo trafienia punktu przypadkowego w elipsoidę podobną do jednostkowej

Prawdopodobieństwo trafienia w elipsoidę podobną do jednostkowej oblicza się ze wzoru:

$$P_{\exists k} = \Phi(k) - 2k\psi(k)$$

Dla tego wzoru została sporządzona specjalna tabela, w oparciu o którą można obliczyć prawdopodobieństwo dla dowolnej wartości k .

d/ Kompozycja układów przestrzennych

Podobnie jak dla przypadku kompozycji dwóch wielkości przypadkowych o rozkładach normalnych również i w przypadku kompozycji trzech wielkości przypadkowych sumaryczny rozkład będzie normalny.

Parametry rozkładu sumarycznego określa się z następujących wzorów:

$$m_x = m_{x_1} + m_{x_2}$$

$$m_y = m_{y_1} + m_{y_2}$$

$$m_z = m_{z_1} + m_{z_2}$$

$$\sigma_x^2 = \sigma_{x_1}^2 + \sigma_{x_2}^2$$

$$\sigma_y^2 = \sigma_{y_1}^2 + \sigma_{y_2}^2$$

$$\sigma_z^2 = \sigma_{z_1}^2 + \sigma_{z_2}^2$$

$$k_{xy} = k_{yx} = k_{x_1 y_1} + k_{x_2 y_2}$$

$$k_{xz} = k_{zx} = k_{x_1 z_1} + k_{x_2 z_2}$$

$$k_{yz} = k_{zy} = k_{y_1 z_1} + k_{y_2 z_2}$$

Wielkości $\sigma_x, \sigma_y, \sigma_z$ nie stanowią odchylen średnich kwadratowych. Mając ich wartości oraz wartości momentów korelacyjnych składowych sumarycznego wektora przypadkowego można obliczyć główne odchylenia średnie kwadratowe ze wzorów:

$$\sigma_{x_{gl}} = \sqrt{\lambda_1}$$

$$\sigma_{y_{gl}} = \sqrt{\lambda_2}$$

$$\sigma_{z_{gl}} = \sqrt{\lambda_3}$$

e/ Opracowanie strzelań rozpryskowych artylerii przeciwlotniczej

Opracowanie strzelań rozpryskowych artylerii przeciwlotniczej polega na określeniu położenia i rozmiarów elipsoidy odchyień średnich kwadratowych na podstawie współrzędnych rozprysków. Przy opracowaniu strzelań rozpryskowych artylerii przeciwlotniczej wyznacza się:

- współrzędne środka rozrzutu - m_x, m_y, m_z
- główne odchylenia średnie kwadratowe - $\sigma_{x\text{qt}}, \sigma_{y\text{qt}}, \sigma_{z\text{qt}}$
- współczynniki kierunkowe głównych płaszczyzn - $\alpha_1, \beta_1, \gamma_1$

Gdy kierunki głównych osi rozrzutu co najmniej w przybliżeniu znane są zawczasu oblicza się następujące wielkości:

$$m_x \approx \bar{x} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_i$$

$$m_y \approx \bar{y} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n y_i$$

$$m_z \approx \bar{z} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n z_i$$

$$\sigma_{x\text{qt}} \approx \sqrt{\frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2}$$

$$\sigma_{y\text{qt}} \approx \sqrt{\frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^n (y_i - \bar{y})^2}$$

$$\sigma_{z\text{qt}} = \sqrt{\frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^n (z_i - \bar{z})^2}$$

W wypadku, gdy kierunek głównych osi rozrzutu zawczasu nie jest znany opracowanie strzelań rozpryskowych odbywa się w następującej kolejności:

1. Oblicza się przybliżone wartości współrzędnych środka zgrupowania /według wzorów podanych poprzednio/.
2. Oblicza się przybliżone wartości głównych odchyłeń średnich kwadratowych.

$$\delta_{x_{gt}} = \sqrt{\lambda_1}$$

$$\delta_{y_{gt}} = \sqrt{\lambda_2}$$

$$\delta_{z_{gt}} = \sqrt{\lambda_3}$$

gdzie: $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ - trzy pierwiastki równania

$$\begin{vmatrix} \delta_x^2 - \lambda & k_{xy} & k_{xz} \\ k_{xy} & \delta_y^2 - \lambda & k_{yz} \\ k_{xz} & k_{yz} & \delta_z^2 - \lambda \end{vmatrix} = 0$$

Wartość do tego równania oblicza się ze wzorów:

$$\delta_x^2 \approx \frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2$$

$$\delta_y^2 \approx \frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^n (y_i - \bar{y})^2$$

$$\delta_z^2 \approx \frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^n (z_i - \bar{z})^2$$

$$k_{xy} \approx \frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})(y_i - \bar{y})$$

$$k_{xz} \approx \frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})(z_i - \bar{z})$$

$$k_{yz} \approx \frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^n (y_i - \bar{y})(z_i - \bar{z})$$

3. Przybliżone wartości cosinusów kierunkowych głównych osi rozrzutu oblicza się rozwiązując równania:

$$(\sigma_x^2 - \lambda_j) \alpha_j + k_{xy} \beta_j + k_{xz} \gamma_j = 0$$

$$k_{xy} \alpha_j + (\sigma_y^2 - \lambda_j) \beta_j + k_{yz} \gamma_j = 0$$

$$k_{xz} \alpha_j + k_{yz} \beta_j + (\sigma_z^2 - \lambda_j) \gamma_j = 0$$

14. Funkcje przypadkowe

Funkcją przypadkową nazywa się funkcję, której wartość dla dowolnej wartości argumentu t przedstawia wielkość przypadkową.

a/ Charakterystyki funkcji przypadkowej

Nadzieją matematyczną funkcji przypadkowej $X /t/$ nazywa się funkcją nieprzypadkową /zwykłą/ $m_x /t/$, której wartość dla każdej wartości argumentu t_i równa się nadziei matematycznej wielkości przypadkowej $X /t_i/$, w której przekształca się funkcja przypadkowa $X /t/$ dla tejże wartości argumentu t_i .

$$m_x(t) = M[X(t_i)]$$

Dyspersją funkcji przypadkowej $X /t/$ nazywa się funkcję nieprzypadkową $D_x /t/$, której wartość dla każdej wartości argumentu t_i równa się dyspersji wielkości przypadkowej $X /t_i/$, w którą przekształca się funkcja przypadkowa $X /t/$ dla tejże wartości argumentu t_i .

$$D_x(t) = D[X(t_i)]$$

Funkcją korelacyjną funkcji przypadkowej $X /t/$ nazywa się funkcję przypadkową dwóch argumentów t i t' , wyrażającą momenty korelacyjne wielkości przypadkowych $X /t_1/$ i $X /t_2/$

t_1 i t_2 - konkretne wartości argumentów t i t'

b/ Obliczanie przybliżonej wartości charakterystyk funkcji przypadkowej na podstawie danych doświadczalnych

Przybliżone wartości charakterystyk funkcji przypadkowej na podstawie danych doświadczalnych oblicza się za pomocą następujących wzorów:

a/ przybliżona wartość nadziei matematycznej

$$m_x(t) = \frac{1}{m} \sum_{i=1}^m x_i(t)$$

b/ przybliżona wartość dyspersji

$$D_x(t) = \frac{1}{m-1} \sum_{i=1}^m [x_i(t) - m_x(t)]^2$$

c/ przybliżona wartość funkcji korelacyjnej

$$K_x(t, t') = \frac{1}{m-1} \sum_{i=1}^m \left\{ x_i(t) - m_x(t) \right\} \left\{ x_i(t') - m_x(t') \right\}$$

c/ Stacjonarny proces przypadkowy

Procesem stacjonarnym nazywa się proces przebiegający jednorodnie w czasie. Wszystkie charakterystyki prawdopodobieństwa takiego procesu są niezmiennie w czasie.

Funkcję przypadkową uważa się za stacjonarny proces przypadkowy jeżeli spełnia następujące warunki:

1. nadzieja matematyczna funkcji przypadkowej jest wielkością stałą

$$m_x t = \text{const}$$

2. dyspersja funkcji przypadkowej jest wielkością stałą

$$D_x /t/ = \text{const}$$

3. funkcja korelacyjna wielkości przypadkowej zależy tylko od różnicy wartości argumentu $t_2 - t_1 = \tau$, czyli

$$K_x(t, t') = K_x(\tau)$$

ROZDZIAŁ IV

=====

Błędy i ich charakterystyki

1. Błędy pomiarów. Prawo błędów, Prawo normalne.

Błędem pomiaru Δ nazywa się różnicę między wynikiem pomiaru x , a rzeczywistą wartością mierzonej wielkości x_0 .

$$\Delta = x - x_0$$

Błędami przypadkowymi nazywa się błędy, które wynikają z jednoczesnego oddziaływania licznych i różnorodnych źródeł błędów. Błąd przypadkowy przedstawia jedną z możliwych wartości wielkości przypadkowej typu ciągłego. Dlatego wszystkie rozpatrzone poprzednio określenia, twierdzenia i wzory dotyczące wielkości przypadkowej i jej charakterystyk, dotyczą również błędów przypadkowych.

Do zasadniczych charakterystyk prawa błędów zalicza się następujące odpowiedniki charakterystyk wielkości przypadkowych:

- σ - błąd średni kwadratowy
- \bar{x} - błąd środkowy
- \bar{d} - błąd średni arytmetyczny

Błędami systematycznymi nazywa się takie błędy, których wartość dla danej serii pomiarów jest wielkością stałą, lub zmienia się zgodnie z określonym prawem.

Błędem niepowtarzającym się nazywa się błąd, który w danej serii pomiarów wystąpił tylko sporadycznie, nie powtarzając się więcej.

Błędem powtarzającym się nazywa się błąd, który w danej serii pomiarów wystąpił kilkakrotnie, niezależnie od tego, czy pochodzenie tego błędu ma charakter systematyczny czy też przypadkowy.

Ze względu na możliwość przedstawienia błędów, dzielimy je na błędy jednowymiarowe, dwuwymiarowe, trójwymiarowe.

Prawo błędów ustala konkretny związek między wielkością błędu Δ a prawdopodobieństwem jego wystąpienia, wyrażonym w postaci gęstości błędu $\varphi(\Delta)$

Prawo normalne wyraża się wzorem:

$$\Psi(\Delta) = \frac{h}{E\sqrt{\pi}} e^{-\frac{g^2 \Delta^2}{E^2}}$$

gdzie: Δ - błąd przypadkowy

$\Psi(\Delta)$ - gęstość prawdopodobieństwa błędu przypadkowego

π - liczba stała równa 3,1416

e - liczba stała równa 2,71828

g - liczba stała równa 0,4769

E - błąd środkowy.

Rozkład normalny charakteryzują następujące właściwości:

- symetryczność
- nierównomierność
- ograniczoność

Charakterystyki rozkładu normalnego błędów przypadkowych:

- błąd średni kwadratowy - σ
- błąd środkowy - E
- błąd średni arytmetyczny d .

Błędem średnim kwadratowym σ nazywa się pierwiastek kwadratowy z nadziei matematycznej kwadratu błędu.

$$\sigma = \sqrt{M[\Delta^2]}$$

Błędem środkowym E nazywa się taki błąd, którego wartość bezwzględna jest większa od każdego z błędów jednej połowy i mniejsza od każdego z błędów drugiej połowy, wszystkich błędów uszeregowanych według wzrastających lub malejących wartości bezwzględnych.

Błędem średnim arytmetycznym d nazywa się nadzieję matematyczną bezwzględnej wartości błędu.

$$d = M[|\Delta|]$$

Do określenia zależności między błędem średnim arytmetycznym, błędem kwadratowym i środkowym stosuje się następujące wzory:

$$E = 3\sqrt{\pi} ; \quad d = 3\sqrt{2\pi} ; \quad E = 0,8453d = 0,6745\sigma$$

$$\sigma = \sqrt{\frac{\pi}{2}}; \quad d = \frac{1}{\sqrt{2}} E; \quad \sigma = 1.2533d = 1.4826E$$

$$d = \frac{1}{\sqrt{\pi}}; \quad \sigma = \frac{1}{\sqrt{\pi}} E; \quad d = 0.79796 = 1.1829E$$

$$d = \frac{1}{h\sqrt{\pi}}; \quad \sigma = \frac{1}{h\sqrt{2}}; \quad E = \frac{\sigma}{h}$$

Prawdopodobieństwo wystąpienia błędu Δ w granicach Δ_1 do Δ_2 oblicza się za pomocą następującego wzoru roboczego:

$$P(\Delta_1 < \Delta < \Delta_2) = \frac{1}{2} [\Phi(\beta_2) - \Phi(\beta_1)]$$

gdzie: $\beta_1 = \frac{\Delta_1}{\sigma}; \quad \beta_2 = \frac{\Delta_2}{\sigma}$

Funkcja rozkładu normalnego wyrażona przez błąd średni kwadratowy σ ma postać:

$$f(\Delta) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{\Delta^2}{2\sigma^2}}$$

Prawdopodobieństwo wystąpienia błędu w granicach od Δ_1 do Δ_2 określa się wykorzystując tabele funkcji $\Phi(x)$.

Praktyczny wzór do obliczania prawdopodobieństwa przy wykorzystaniu funkcji $\Phi(x)$ ma postać:

$$P(\Delta_1 < \Delta < \Delta_2) = \Phi(x_2) - \Phi(x_1)$$

gdzie: $x_1 = \frac{\Delta_1}{\sigma}; \quad x_2 = \frac{\Delta_2}{\sigma};$

2. Prawo jednakowego prawdopodobieństwa i jego charakterystyki.

Prawo jednakowego prawdopodobieństwa wyraża się wzorem:

$$f(\Delta) = \frac{1}{2l}$$

Prawdopodobieństwo wystąpienia błędu w granicach Δ_1 do Δ_2 określa się na podstawie wzoru:

$$P(\Delta_1 < \Delta < \Delta_2) = \frac{\Delta_2 - \Delta_1}{2l}$$

Jako charakterystyki liczbowe prawa jednakowego prawdopodobieństwa wykorzystuje się parametr (l) , oraz błąd średni kwadratowy:

$$\sigma = \frac{l}{\sqrt{3}}$$

Rzadziej korzysta się z błędu środkowego i średniego

kwadratowego

$$E = d = \frac{d}{2};$$

3. Suma praw błędów, Sumaryczne prawo błędów.

W wyniku sumowania kilku praw normalnych, sumaryczne prawo jest prawem normalnym, a jego parametry określa się ze wzorów:

$$\sigma_{\text{sum}} = \sqrt{\sigma_1^2 + \sigma_2^2 + \dots + \sigma_k^2}$$

$$E_{\text{sum}} = \sqrt{E_1^2 + E_2^2 + \dots + E_k^2}$$

W przypadku sumowania prawa normalnego i prawa jednakowego prawdopodobieństwa sumaryczne prawo nie będzie podobne do żadnego z nich.

Jeżeli parametr (λ) prawa jednakowego prawdopodobieństwa jest mniejszy od błędu środkowego $/E/$ prawa normalnego, to sumaryczne prawo można traktować jako normalne.

Błąd środkowy oblicza się ze wzoru:

$$E_{\text{sum}} = \sqrt{E^2 + (0,391\lambda)^2}$$

gdzie: 0,391 - porównawczy błąd środkowy prawa jednakowego prawdopodobieństwa.

Jeżeli E posługuje się błędem średnim kwadratowym prawa sumarycznego, który określa się wzorem:

$$\sigma_{\text{sum}} = \sqrt{\sigma_{\text{norm}}^2 + \left(\frac{l}{\sqrt{3}}\right)^2}$$

gdzie: σ_{norm} - błąd średni kwadratowy prawa normalnego

$\frac{l}{\sqrt{3}}$ - błąd średni kwadratowy prawa jednakowego prawdopodobieństwa.

4. Opracowanie wyników pomiarów.

a/ Określenie przybliżonej wartości mierzonej wielkości i jej błędu środkowego oraz błędu środkowego sposobu pomiaru.

Przybliżoną wartość mierzonej wielkości /średnia arytmetyczna z otrzymanych wyników pomiarów/ określa się ze wzoru:

$$X_0 = X_{\text{sr}} = \frac{x_1 + x_2 + \dots + x_n}{n} = \frac{\sum_{i=1}^n x_i}{n}$$

gdzie: X_0 - przybliżona wartość mierzonej wielkości

X_i - wyniki poszczególnych pomiarów

n - ilość wykonanych pomiarów.

Błąd środkowy przybliżonej wartości mierzonej wielkości określa się ze wzoru:

$$E_{x_{sr}} = \frac{E\sqrt{n}}{n} = \frac{E}{\sqrt{n}}$$

Błąd średni kwadratowy sposobu pomiaru określa się ze wzoru:

$$\delta = \sqrt{\frac{\Delta_1^2 + \Delta_2^2 + \dots + \Delta_n^2}{n}} = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^n \Delta_i^2}{n}}$$

Błąd środkowy sposobu pomiaru:

$$E = 0,6745\delta = 0,6745 \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^n \Delta_i^2}{n}}$$

Wzory na δ i E stosuje się przy znanej rzeczywistej wartości mierzonej wielkości.

Jeżeli rzeczywista wartość mierzonej wielkości nie jest znana, to stosuje się następujące wzory:

$$\delta = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^n \lambda_i^2}{n-1}}$$

$$E = 0,6745 \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^n \lambda_i^2}{n}}$$

gdzie: λ_i - różnica między wynikiem pomiaru a wartością średnią.

Przybliżoną wartość mierzonej wielkości na podstawie n pomiarów o różnej dokładności określa się ze wzoru:

$$X'_{sr} = \frac{x_1 q_1 + x_2 q_2 + \dots + x_n q_n}{q_1 + q_2 + \dots + q_n} = \frac{\sum_{i=1}^n x_i q_i}{\sum_{i=1}^n q_i}$$

gdzie: g - waga pomiaru

$$q_1 = \frac{E_k^2}{E_1^2}; \quad q_2 = \frac{E_k^2}{E_2^2}; \quad \dots$$

Przybliżona wartość mierzonej wielkości określona na podstawie tego wzoru nosi nazwę średniej ważonej.

$$E'_{sr} = \frac{E_k}{\sqrt{q_1 + q_2 + \dots + q_n}} = \frac{E_k}{\sqrt{\sum_{i=1}^n q_i}}$$

Inne definicje i wzory dotyczące błędów i ich charakterystyk zostały szczegółowo omówione w rozdziale III "Teoria prawdopodobieństwa".

ROZDZIAŁ V

=====

R o z r z u t

1. Prawo rozrzutu przy strzelaniu uderzeniowym z jednego działka.

Prawo rozrzutu przy strzelaniu uderzeniowym z jednego działka jest prawem eliptycznym, w układzie współrzędnych, którego początek pokrywa się ze środkiem rozrzutu, wyraża się je następująco:

$$p(x, z) \cdot \Delta x \cdot \Delta z = \frac{s^2}{\pi ab} \cdot e^{-s^2 \left(\frac{x^2}{a^2} + \frac{z^2}{b^2} \right)} \Delta x \Delta z$$

gdzie: x i z - przypadkowe uchylenia danego punktu upadku od środka rozrzutu c

a i b - sprzężone półosie elipsy jednostkowej skierowane wzdłuż osi cx lub cz , lub też główne półosie elipsy jednostkowej, jeśli osie cx i cz są do siebie prostopadłe, w tym ostatnim wypadku wielkości a i b są uchyleniami środkowymi na kierunku tych osi.

Właściwości prawa eliptycznego:

- nierównomierność
- symetryczność
- ograniczoność.

Prawdopodobieństwo, że koniec błędu wektora nie wyjdzie poza granice elipsy $K(\xi_k)$ oblicza się ze wzoru:

$$p(E_k) = 1 - e^{-s^2 k^2}$$

2. Wielkości charakteryzujące rozrzut przy strzelaniu uderzeniowym z jednego działka.

Rozrzut przy strzelaniu uderzeniowym z jednego działka charakteryzują następujące wielkości:

a/ w płaszczyźnie poziomej:

- uchylenie środkowe w głąb - U_g
- uchylenie środkowe w szerz - U_s

b/ w płaszczyźnie pionowej:

- uchylenie środkowe wzdłuż - U_w
- uchylenie środkowe wszerz - U_s

c/ w płaszczyźnie normalnej:

- uchylenie środkowe wzdłuż normalnej - U_n
- uchylenie środkowe wszerz - U_s .

Między uchyleniami środkowymi istnieją zależności, które wyraża się następującymi wzorami:

$$U_w = U_g \operatorname{tg} \omega$$

$$U_n = U_g \sin \omega$$

$$U_n = U_w \cos \omega$$

gdzie: ω - kąt upadku.

Nachylenie terenu wywiera wpływ na wielkość uchylenń środkowych w głąb i wszerz. Wpływ ten określa się za pomocą wzorów:

$$U_{g_1} = U_g \frac{\sin \omega}{\sin(\omega - s)} \quad \text{- przy strzelaniu na stok}$$

$$U_{g_2} = U_g \frac{\sin \omega}{\sin(\omega + s)} \quad \text{- przy strzelaniu na przeciwstok}$$

gdzie: ω - kąt upadku

s - kąt spadku terenu

$$U_{s_1} = \frac{U_s}{\cos \beta}$$

gdzie: β - kąt spadku terenu.

3. Określanie uchylenń środkowych rozrzutu przy strzelaniu uderzeniowym jednym działem.

Elementy toru określają trzy zasadnicze czynniki:

U_0 - prędkość początkowa pocisku

ϵ - kąt rzutu

c - współczynnik balistyczny

Odległość upadku pocisku można uważać za funkcję trzech argumentów: U_0, ϵ i c

$$x = f(U_0, \epsilon, c)$$

U_0, ϵ i c - są wielkościami przypadkowymi, podlegają prawu normalnemu, to uchylenie środkowe w głąb można rozpatrywać

jaké uchylenie srodkowe funkcji tych wielkości przypadkowych

$$u_g = \sqrt{\left(\frac{\partial x}{\partial v_0} r_{v_0}\right)^2 + \left(\frac{\partial x}{\partial \varepsilon} r_\varepsilon\right)^2 + \left(\frac{\partial x}{\partial c} r_c\right)^2}$$

gdzie: $r_{v_0}, r_\varepsilon, r_c$ - uchylenia srodkowe charakteryzujące rozrzut prędkości początkowej, kąta rzutu i współczynnika balistycznego
/ r_{v_0} i r_c - w %, r_ε - w tysięcznych/

$\frac{\partial x}{\partial v_0}, \frac{\partial x}{\partial \varepsilon}, \frac{\partial x}{\partial c}$ - zmiany odległości punktu upadku pocisku spowodowane zmianami odpowiednich argumentów o jedności / (v_0 i c o 1%, ε o 0-01)

$$\frac{\partial x}{\partial c} = \frac{3}{4} \Delta X_H$$

$$u_s = \sqrt{(0,001 X r_w)^2 + (X \operatorname{tg} \varepsilon r_{zb})^2}$$

gdzie: X - odległość strzelania, dla której określa się uchylenie srodkowe;

r_w - uchylenie srodkowe charakteryzujące rozrzut kątów celowania poziomego w tysięcznych

r_{zb} - uchylenie srodkowe rozrzutu zboczenia w radiach.

4. Metody obliczania prawdopodobieństwa trafienia.

a/ Prawdopodobieństwo trafienia w pas o nieograniczonej długości. przy znanym położeniu srodka rozrzutu.

Prawdopodobieństwo trafienia w pas o nieograniczonej długości oblicza się ze wzoru:

$$P = \frac{1}{2} [\Phi(\beta_2) - \Phi(\beta_1)]$$

gdzie: P - prawdopodobieństwo trafienia w pas

β_1 - odległość od srodka rozrzutu do bliższego boku pasa wyrażona w uchyleniach srodkowych.

$$\beta_1 = \frac{X_1}{u_g}$$

X_1 - odległość od srodka rozrzutu do bliższego boku pasa w metrach;

β_2 - odległość od środka rozrzutu do dalszego boku pasa wyrażona w uchyleniach środkowych.

$$\beta_2 = \frac{x_2}{u_g}$$

x_2 - odległość od środka rozrzutu do dalszego boku pasa w metrach.

Jeżeli płaszczyzna strzelania nie jest prostopadła do pasa, to jest - tworzy z pasem pewien kąt, to uchylenie środkowe wzdłuż kierunku prostopadłego do pasa oblicza się za pomocą wzoru:

$$\beta = \sqrt{u_g^2 \cos^2 \alpha + u_s^2 \sin^2 \alpha}$$

b/ Prawdopodobieństwo trafienia w prostokąt o bokach równoległych do głównych półosi elipsy rozrzutu.

Prawdopodobieństwo trafienia w prostokąt oblicza się za pomocą wzoru:

$$P = \frac{1}{4} \left[\Phi \left(\frac{x_2}{u_g} \right) - \Phi \left(\frac{x_1}{u_g} \right) \right] \cdot \left[\Phi \left(\frac{z_2}{u_s} \right) - \Phi \left(\frac{z_1}{u_s} \right) \right]$$

Jeżeli środek elipsy rozrzutu leży wewnątrz prostokąta, to

$$P = \frac{1}{4} \left[\Phi \left(\frac{x_2}{u_g} \right) + \Phi \left(\frac{x_1}{u_g} \right) \right] \cdot \left[\Phi \left(\frac{z_2}{u_s} \right) + \Phi \left(\frac{z_1}{u_s} \right) \right]$$

W szczególnym wypadku, gdy tor średni przechodzi przez środek prostokąta, to prawdopodobieństwo trafienia będzie równe:

$$P = \Phi \left(\frac{x}{u_g} \right) \cdot \Phi \left(\frac{z}{u_s} \right)$$

gdzie: x - połowa boku prostokąta równoległego do U_g

z - połowa boku prostokąta równoległego do U_s .

Prawdopodobieństwo trafienia przy jednym strzale w równoległobok oblicza się ze wzoru:

$$P = \frac{1}{4} \left[\Phi \left(\frac{x_2}{a} \right) - \Phi \left(\frac{x_1}{a} \right) \right] \cdot \left[\Phi \left(\frac{z_2}{b} \right) - \Phi \left(\frac{z_1}{b} \right) \right]$$

gdzie: a i b - sprzężane półosie

$$a^2 = \frac{u_g^2 \cdot u_s^2}{u_s^2 + (u_g^2 - u_s^2) \cdot \sin^2 \alpha}$$

$$b^2 = u_g^2 + u_s^2 - a^2$$

c/ Prawdopodobieństwo trafienia w cel o małych wymiarach.

1. przybliżony sposób porównywania płaszczyzn

$$P = p \cdot \frac{s}{S}$$

gdzie: P - prawdopodobieństwo trafienia przy jednym strzale w interesujący nas cel

p - prawdopodobieństwo trafienia przy jednym strzale w prostokąt opisany na celu

s - powierzchnia celu

S - powierzchnia prostokąta.

Jeżeli środek rozrzutu leży w pobliżu celu o małych wymiarach i cel nie wychodzi poza granice elipsy połowicznej /półosie równe 0,5 u_g i 0,5 u_s /, to prawdopodobieństwo trafienia przy jednym strzale oblicza się ze wzoru:

$$P = 0,055 \frac{u_s}{\pi \cdot u_g \cdot u_s}$$

Jeżeli wymiary celu nie wychodzą poza granicę elipsy jednostkowej rozrzutu, to prawdopodobieństwo trafienia przy jednym strzale oblicza się ze wzoru:

$$P = 0,203 \frac{s}{\pi \cdot u_g \cdot u_s}$$

Prawdopodobieństwo trafienia przy jednym strzale w celu, których powierzchnie nie wychodzą poza granicę prostokąta jednostkowego /prostokąt jednostkowy jest to prostokąt opisany na elipsie jednostkowej/ oblicza się ze wzoru:

$$P = 0,0625 \frac{s}{u_g \cdot u_s}$$

gdzie: s - powierzchnia celu.

d/ Prawdopodobieństwo trafienia w koło o promieniu r, w wypadku gdy środek koła pokrywa się ze środkiem elipsy rozrzutu.

Prawdopodobieństwo trafienia w koło o promieniu r, w wypadku gdy środek koła pokrywa się ze środkiem elipsy rozrzutu oblicza się za pomocą tabel. Wielkościami wejściowymi do tabel są równania:

$$e_1 = \frac{\sqrt{a^2 - b^2}}{a}; \quad \tau_1 = \frac{r}{a};$$

5. Rozrzut przy strzelaniu rozpryskowym

a/ Uchylenia środkowe rozrzutu przy strzelaniu rozpryskowym jednym działem.

Prawo rozrzutu pocisków określa się równaniem:

$$P(x, y, z) = \frac{g^3}{\pi \sqrt{\pi abc}} e^{-g^2 \left(\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} \right)}$$

gdzie: x, y, z - przypadkowe uchylenia poszczególnego rozprysku od środka rozrzutu

a, b, c - uchylenia środkowe rozrzutu rozprysków

$$g = r_z / Us/$$

Rozrzut rozprysków artylerii przeciwlotniczej charakteryzują następujące uchylenia środkowe:

τ_z - uchylenie środkowe rozrzutu rozprysków w szerz

τ_{Dp} - uchylenie środkowe rozrzutu rozprysków wzdłuż kierunku

τ_H - uchylenie środkowe rozrzutu rozprysków wzdłuż kierunku H

τ_D - uchylenie środkowe rozrzutu rozprysków wzdłuż kierunku D

τ_N - uchylenie środkowe rozrzutu rozprysków wzdłuż kierunku normalnej do odległości rzeczywistej

τ_t - uchylenie środkowe czasu działania zapalnika

Przy strzelaniu rozpryskowym do celów naziemnych rozrzut rozprysków charakteryzują następujące uchylenia środkowe:

U_{gr} - uchylenie środkowe rozrzutu rozprysków w głąb

U_{wr} - uchylenie środkowe rozrzutu rozprysków wwyż

U_s - uchylenie środkowe rozrzutu rozprysków wżerz.

b/ Określanie uchyień środkowych rozrzutu przy strzelaniu rozpryskowym.

Uchylenia środkowe rozrzutu przy strzelaniu rozpryskowym oblicza się za pomocą wzorów:

$$r_{Dp}^2 = a_0^2 \cdot \cos^2 d_0 + b_0^2 \sin^2 d_0$$

$$r_H^2 = a_0^2 \cdot \sin^2 d_0 + b_0^2 \cos^2 d_0$$

$$r_D^2 = a_0^2 \cos^2 (p - d_0) + b_0^2 \sin^2 d (p - d_0)$$

$$r_N^2 = a_0^2 \sin^2 (p - d_0) + b_0^2 \cos^2 d (p - d_0)$$

$$a_0 = \sqrt{A + B \cdot \operatorname{tg} d_0}$$

$$b_0 = \sqrt{C - B \cdot \operatorname{tg} d_0}$$

$$\operatorname{tg} 2 d_0 = \frac{2B}{A - C}$$

$$A = (\partial v_0)_x^2 + (\partial \varepsilon)_x^2 + (\partial c)_x^2 + (\partial z)_x^2$$

$$C = (\partial v_0)_y^2 + (\partial \varepsilon)_y^2 + (\partial c)_y^2 + (\partial z)_y^2$$

$$B = (\partial v_0)_x \cdot (\partial v_0)_y + (\partial \varepsilon)_x \cdot (\partial \varepsilon)_y + (\partial c)_x \cdot (\partial c)_y + (\partial z)_x \cdot (\partial z)_y$$

$$(\partial v_0)_x = \Delta D p v_0 \cdot r_{v_0}$$

$$(\partial v_0)_y = \Delta H v_0 \cdot r_{v_0}$$

$$(\partial \varepsilon)_x = 0,001 D \sin \varepsilon \cdot r_\varepsilon$$

$$(\partial \varepsilon)_y = 0,001 D \cos \varepsilon \cdot r_\varepsilon$$

$$(\partial c)_x = \Delta D p g \cdot r_c$$

$$(\partial c)_y = \Delta H g \cdot r_c$$

$$(\partial z)_x = \check{U} r \cos d \cdot r_t$$

$$(\partial z)_y = \check{U} r \sin d \cdot r_t$$

Równanie jednostkowej elipsy rozrzutu rozprysków przy strzelaniu do celów powietrznych ma postać:

$$\frac{x^2}{r_{Dp}^2} + 2K \frac{xy}{r_{Dp} \cdot r_H} + \frac{y^2}{r_H^2} = 1 - K^2$$

gdzie: K - współczynnik korelacji, charakteryzujący związek między przypadkowymi wielkościami X i Y.

Dla przypadku strzelania do celów powietrznych K = 0 i określa się go z równania:

$$K = \frac{r_{Dp}^2 + r_H^2 \cdot \operatorname{tg}^2 p - r_D^2 \operatorname{sec}^2 p}{2 r_{Dp} \cdot r_H \operatorname{tg} p}$$

Dla przypadku strzelania do celów naziemnych równanie jednostkowej elipsy rozprysków ma następującą postać:

$$\frac{x^2}{u_{gr}^2} + 2K \frac{xy}{u_{gr} \cdot u_{nr}} + \frac{y^2}{u_{nr}^2} = 1 - K^2$$

a współczynnik korelacji określa równanie:

$$K = \frac{u_{gr}^2 \operatorname{tg}^2 W + u_{nr}^2 - u_w^2}{2 u_{gr} \cdot u_{nr} \cdot \operatorname{tg} W}$$

c/ Określanie sprzężonych półosi elipsy rozprysków

Sprzężone półosie elipsy rozprysków określa się ze wzorów:

$$a_1 = r_{Dp} \sqrt{1 - K^2}$$

$$b_1 = \sqrt{K^2 r_{Dp}^2 + r_H^2}$$

$$\operatorname{tg} \lambda_1 = \frac{y_1}{x_1} = \frac{r_H}{-K r_{Dp}}$$

gdzie: λ_1 - kąt zawarty między półosiami sprzężonymi.

ROZDZIAŁ VI

=====

Działanie pocisków artylerii przeciwlotniczej.

1. Energia kinetyczna pocisku /odłamka/.

Energię kinetyczną pocisku /odłamka/ określa się ze wzoru:

$$E_{kin} = \frac{q \cdot U^2}{2g}$$

gdzie: q - ciężar pocisku /odłamka/

U - prędkość pocisku

g - przyspieszenie ziemskie.

Energię rażenia pocisku /odłamka/ oblicza się ze wzoru:

$$E_r = \frac{E_{kin}}{S} = \frac{qU^2}{2qS} \text{ KG/cm}^2$$

gdzie: E_r - energia rażenia

S - powierzchnia styku pocisku /odłamka/ w cm^2 .

2. Prędkość odłamka w momencie wybuchu pocisku i jej składowe.

W momencie rozprysku odłamki posiadają prędkość początkową U_{odl} , która jest wypadkową trzech składowych:

- prędkości postępowej /pozostałej/ - V_p

- prędkości dodatkowej - V_d

- prędkości obrotowej - V_{ob}

Prędkość odłamka w momencie wybuchu pocisku określa się ze wzoru:

$$U_{odl} = \bar{U}_p + \bar{U}_d + \bar{U}_{ob}$$

$$U_{odl} = \sqrt{U_p^2 + U_d^2 + U_{ob}^2 - 2U_p U_d \cos \Psi_d}$$

gdzie: Ψ_d - kąt zawarty między osią pocisku a kierunkiem prędkości dodatkowej odłamka - V_d .

Jeżeli Ψ równa się zero, to prędkość odłamka oblicza się ze wzoru:

$$U_{odl} = \sqrt{U_p^2 + U_d^2 + U_{ob}^2}$$

Ogólnym obrazem rozkładu odłamków jest stożek rozlotu w którym rozkład odłamków jest nierównomierny.

Charakterystyką stożka rozlotu odłamków jest kąt rozlotu - 2Ψ .

Kątem rozlotu odłamków 2Ψ nazywa się kąt zawarty między stycznymi do torów dwóch skrajnych i przeciwległych odłamków pocisku w momencie rozprysku.

Wartość średnią tego kąta dla danego punktu toru określa się ze wzoru:

$$\operatorname{tg} \Psi_{sr} = \sqrt{\frac{V_d^2 + V_{d_h}^2}{V_p^2}}$$

3. Ruch względny

Ruch jednego z ciał względem drugiego umownie przyjętego za nieruchome, nazywa się ruchem względnym.

Prędkość jednego ciała ruchomego względem drugiego nazywa się prędkością względną $V_{wzg}/^\circ$.

Ruch jednego z ciał względem nieruchomego początku układu współrzędnych nazywa się ruchem bezwzględnym.

Prędkość przy takim ruchu nosi nazwę prędkości bezwzględnej.

Ruch drugiego ciała nosi nazwę ruchu przenoszenia. Prędkość przy takim ruchu celu nosi nazwę prędkości przenoszenia $V_c/^\circ$.

Prędkość bezwzględna równa się sumie geometrycznej prędkości względnej i prędkości przenoszenia:

$$\vec{U}_{bwzg} = \vec{U}_{wzg} + \vec{U}_c$$

gdzie: V_{bwzg} - prędkość bezwzględna

V_{wzg} - prędkość względna

V_c - prędkość przenoszenia

Prędkość względna

Prędkość względną oblicza się ze wzoru:

$$\vec{U}_{wzg} = \vec{U}_{bwzg} - \vec{U}_c$$

Prócz tego wielkość i kierunek prędkości względnej określa się analitycznie ze wzorów:

$$V_{Hzg} = \sqrt{V_{bHzg}^2 + V_c^2 + 2V_{bHzg} \cdot V_c (\cos \alpha \cdot \cos \lambda \cos q_H - \sin \alpha \sin \lambda)}$$

$$\cos(V_{Hzg}, x) = \frac{V_{bHzg} \cdot \cos \alpha + V_c \cdot \cos \lambda \cdot \cos q_H}{V_{Hzg}}$$

$$\cos(V_{Hzg}, y) = \frac{V_{bHzg} \cdot \sin \alpha - V_c \cdot \sin \lambda}{V_{Hzg}}$$

$$\cos(V_{Hzg}, z) = - \frac{V_c \cos \lambda \cdot \sin q_H}{V_{Hzg}}$$

Jeżeli cel porusza się poziomo, kąt $\lambda = 0$, $\sin \lambda = 0$, $\cos \lambda = 1$ wówczas wzory te przyjmują postać:

$$V_{Hzg} = \sqrt{V_{bHzg}^2 + V_c^2 + 2V_{bHzg} \cdot \cos \alpha \cos q_H}$$

$$\cos(V_{Hzg}, x) = \frac{V_{bHzg} \cos \alpha + V_c \cos q_H}{V_{Hzg}}$$

$$\cos(V_{Hzg}, y) = \frac{V_{bHzg} \sin \alpha}{V_{Hzg}}$$

$$\cos(V_{Hzg}, z) = - \frac{V_c \sin q_H}{V_{Hzg}}$$

Kąt q_H , przy którym $V_{wzg} = V_{bWzg}$ oblicza się ze wzoru:

$$\cos q_H = - \frac{V_c - 2V_{bHzg} \sin \alpha \sin \lambda}{2V_{bHzg} \cos \alpha \cos \lambda}$$

4. Działanie uderzeniowe pocisków

Głębokość wniknięcia pocisku w przeszkodę oblicza się przy pomocy wzoru empirycznego:

$$L = K_n \cdot \frac{q}{d^2} \cdot V_p \cdot \cos \alpha$$

gdzie: K_n - współczynnik charakteryzujący właściwości przeszkody

q - ciężar pocisku w kg

d - kaliber pocisku w metrach

V_p - prędkość pocisku w momencie uderzenia w przeszkodę w m/sek.

α - kąt zawarty między wektorem V_p a prostopadłą do przeszkody.

Wielkość drogi pocisku w przeszkodzie - S oblicza się ze wzoru:

$$S = \frac{l}{\cos \alpha}$$

5. Działanie pocisków przeciwpancernych

Prędkość pocisku w momencie uderzenia, która jest niezbędna do przebicia danego pancerza, oblicza się ze wzoru empirycznego Jakuba de Marra

$$V_p = K \frac{d^{0.75} \cdot b^{0.7}}{q^{0.5} \cdot \cos \alpha}$$

gdzie: V_p - prędkość pocisku w m/sek w momencie uderzenia o pancerz -

d - kaliber pocisku w decymetrach

b - grubość pancerza w decymetrach

q - ciężar pocisku w kg

- kąt odchylenia od normalnej

K - współczynnik zależny od właściwości pancerza i pocisku. Określa się go doświadczalnie

Grubość przebijanego pancerza przez pocisk określa się ze wzoru:

6. Prawo rażenia i jego charakterystyki

Prawdopodobieństwo rażenia celu pociskiem przy strzelaniu uderzeniowym do celu posiadającego wrażliwą powierzchnię S , wyraża się następująco:

$$g_i / S /$$

gdzie: g - prawdopodobieństwo rażenia

S - wymiary wrażliwej powierzchni celu

i - ilość trafień, dla których określa się prawdopodobieństwo rażenia.

Prawdopodobieństwo rażenia celu w danym strzelaniu oblicza się wykorzystując następującą przybliżoną zależność

$$q_n = 1 - (1 - q_1)^n$$

gdzie: n - niezbędna ilość pocisków do strącenia celu.

Podaną wyżej zależność można przedstawić w ~~innej~~ postaci:

$$q_n = 1 - \left(1 - \frac{1}{\omega}\right)^n$$

gdzie: ω - ilość pocisków niezbędna do strącenia celu.

Prawdopodobieństwo rażenia celów różnego typu i różnymi pociskami określa się doświadczalnie przez przeprowadzenie strzelań do różnych części samolotów lub do całego samolotu umieszczonego na ziemi. Przy tym określa się ilość trafień niezbędnych do zniszczenia celu, to znaczy określa się n przy których $q_n(S) \approx 1$

Znając $g / S /$ i prawdopodobieństwo trafienia w powierzchnię S można określić niezbędną ilość wystrzałów do zapewnienia rażenia celu.

Prawdopodobieństwo ^{wym} rażenia celu przy strzelaniu z zapalnikiem zbliżenie dla jednego rozprysku oznacza się:

$$G(y, z)$$

gdzie: G - prawdopodobieństwo rażenia celu

y, z - współrzędne punktu przejścia toru pocisku przez płaszczyznę ekranową.

Wartości $G / y, z /$ określa się doświadczalnie. Na podstawie tych wartości zestawia się tabele prawdopodobieństwa rażenia.

Powierzchnia rażenia lub powierzchnia niebezpiecznych rozprysków w ogólnej postaci równa się:

$$S = \sum_{i=-\infty}^{i=+\infty} \sum_{j=-\infty}^{j=+\infty} G(x_i, y_j) \Delta x \Delta y$$

Przy strzelaniu rozpryskowym z zapalnikiem czasowym prawdopodobieństwo rażenia celu przy jednym rozprysku oznacza się:

$$G /R/ \text{ lub } G /x, y, z/$$

gdzie: R - odległość rozprysku od celu

x, y, z - rzuty R na osie współrzędnych, za początek których przyjęto cel.

Prawdopodobieństwo G /R/ określa się doświadczalnie na podstawie wyników strzelań doświadczalnych.

Działanie rażące pocisku na cel przy strzelaniu rozpryskowym z zapalnikiem czasowym charakteryzuje się również przestrzenią niebezpiecznych rozprysków. Wielkość tej przestrzeni określa równanie

$$W = \sum_{i=-\infty}^{i=+\infty} \sum_{j=-\infty}^{j=+\infty} \sum_{k=-\infty}^{k=+\infty} G(x_i, y_j, z_k) \Delta x \Delta y \Delta z$$

Prawo rażenia przy celu grupowym nie zmienia się z punktu widzenia skuteczności strzelania /ilości strąceń/ strzelanie do grupy samolotów jest bardziej dogodnie niż do pojedynczego samolotu.

ROZDZIAŁ VII

=====

Błędy strzelania artylerii przeciwlotniczej

1a Błędy strzelania artylerii przeciwlotniczej mk z przelicznikiem.

a/ Błędy w wypracowaniu przez baterię nastaw do strzelania

Przy strzelaniu na działach nastawia się azymut wyprzedzony i kąt podniesienia. Podczas wypracowania azymutu wyprzedzonego i kąta podniesienia popełnia się błędy, które wpływają na wyniki strzelania.

Wielkość liniowego odchylenia toru od celu wskutek błędu kąтового $\Delta\varphi$ oblicza się ze wzoru:

$$\Delta\varphi = \Delta\varphi \cdot L\varphi$$

gdzie: $L\varphi$ - wielkość liniowego odchylenia wzdłuż odpowiedniej izochrony przy zmianie kąta podniesienia o 0-01

$\Delta\varphi$ - wielkość błędu kąta podniesienia wyrażona w tysięcznych.

Z wystarczającą dla praktyki dokładnością można korzystać z następującego wzoru:

$$\Delta\varphi = \Delta\varphi \cdot D_W$$

gdzie: $\Delta\varphi$ - wielkość błędu kąta podniesienia wyrażona w radianach.

Systematyczny błąd strzelania r_φ dla ustalonego momentu czasu oblicza się ze wzoru:

$$r_\varphi = m_\varphi \cdot D_W$$

gdzie: m_φ - błąd systematyczny kąta podniesienia wyrażony w radianach.

Odchylenie średnie kwadratowe wyraża się wzorem:

$$\xi_\varphi = \delta\varphi \cdot D_W$$

Wielkość odchylenia pocisku od celu wywołanego błędem azymutu określa się ze wzoru:

$$\Delta\beta_W = \Delta\beta_H \cdot D_W = \Delta\beta_P \cdot D_{PW}$$

gdzie: $\Delta\beta_H$ ($\Delta\beta_P$) - wielkość błędu azymutu w płaszczyźnie pochyłej /poziomej/, wyrażona w radianach.

Błąd systematyczny strzelania r_{β_H} odpowiadający systematycznemu błędowi azymutu wyprzedzonego m_{β_H} wyraża się wzorem:

$$r_{\beta_H} = m_{\beta_H} \cdot D_{PH}$$

a uchylenie średnie kwadratowe

$$\delta_{\beta_H} = \xi_{\beta_H} \cdot D_{PH}$$

b/ Błędy w określeniu i uwzględnieniu odchyłek warunków strzelania od tabelarnych

1. Błędy w określaniu i uwzględnianiu ΔV_0 sum.

Błąd przypadkowy w określaniu i uwzględnianiu sumarycznej odchyłki prędkości początkowej pocisku powoduje dwa błędy przypadkowe: błąd w określaniu kąta celownika $\Delta C(v_0)$ i błąd w określaniu czasu lotu pocisku $\Delta t /V_0/$.

$$\Delta C(v_0) = \Delta C(v_0) \cdot D_H$$

gdzie: $\Delta C(v_0)$ - błąd kąta celownika w radianach

$$\Delta t(v_0) = V_c \Delta t(v_0)$$

gdzie: V_c - prędkość samolotu w m/sek.

Wielkości błędów $\Delta C(v_0)$, $\Delta t(v_0)$ określa się z tabel strzelniczych na podstawie błędu ΔV_0

$$C = f_1(H, D_{PH})$$

$$t = f_2(H, D_{PH})$$

Następnie oblicza się:

$$\Delta D_P(v_0) = \Delta V_0 \Delta D_P(v_0), T$$

$$\Delta H(v_0) = \Delta V_0 \Delta H(v_0), T$$

gdzie: $\Delta D_p(v_0), T$ i $\Delta H(v_0), T$ - tabelarne poprawki odległości poziomej i wysokości odpowiadające zmianie prędkości początkowej o 1% V_0 .

Następnie w tabelach strzelniczych odnajduje się:

$$C' = f_1 (D_{pw} + \Delta D_p(v_0), H + \Delta H(v_0) T)$$

$$t' = f_2 (D_{pw} + \Delta D_p(v_0), H + \Delta H(v_0) T)$$

Wielkości błędów kąta celownika i czasu lotu pocisku są równe

$$\Delta C(v_0) = C' - C$$

$$\Delta t(v_0) = t' - t$$

Uchylenia średnie kwadratowe błędów

$$\delta_{\epsilon}(v_0) = \delta_C(v_0) \cdot D_H$$

$$\delta_t(v_0) = \delta_t(v_0) \cdot V_0$$

gdzie: $\delta_C(v_0)$ i $\delta_t(v_0)$ - średnie kwadratowe błędy charakteryzujące rozrzut błędów kąta celownika i czasu lotu pocisku. Określa się je z tabel strzelniczych.

2. Błędy w określaniu i uwzględnianiu wiatru balistycznego

Błąd przypadkowy ΔW rozkłada się na składowe ΔW_x i ΔW_z które oblicza się ze wzorów:

$$\Delta W_x = -\Delta W \cdot \cos \Psi$$

$$\Delta W_z = \Delta W \cdot \sin \Psi$$

gdzie: Ψ - kąt wiatru.

Kąt wiatru oblicza się ze wzoru:

$$\Psi = \beta - \beta_w$$

gdzie: β - azymut płaszczyzny strzału

β_w - azymut wiatru

W wyniku błędu przypadkowego ΔW_x powstają dwa błędy przypadkowe: błąd przypadkowy w określeniu kąta celownika

$\Delta \epsilon(W_x)$ i błąd przypadkowy w określeniu czasu lotu pocisku $\Delta t(W_x)$

$$\Delta C(W_x) = \Delta C(W_x) D_H$$

$$\Delta t(W_x) = \Delta t(W_x) \cdot V_0$$

Uchylenia średnie kwadratowe

$$\delta_c(w_x) = \delta_c(w_x) \cdot D_w$$

$$\delta_t(w_x) = \delta_t(w_x) \cdot V_c$$

Błąd w określeniu i uwzględnieniu bocznej składowej wiatru balistycznego ΔW_z powoduje błąd strzelania w kierunku bocznym

$$\Delta \beta(w_z) = \Delta W_z \cdot \Delta \beta(w_z), T$$

gdzie: $\Delta \beta(w_z), T$ - tabelarna poprawka w metrach odpowiadająca bocznej składowej wiatru równej 1 m/sek, podana w tabelach strzelniczych.

Uchylenie średnie kwadratowe

$$\delta_\beta(w_z) = \delta_w \cdot \Delta \beta(w_z), T$$

3. Błędy spowodowane nie-uwzględnieniem przesunięcia dział względem środka stanowiska ogniowego.

Prawo rozkładu błędów strzelania w odległości, gdy błędy spowodowane są nieuwzględnieniem przesunięcia dział względem środka stanowiska ogniowego wyraża się wzorem:

$$\varphi(x) = \frac{1}{\pi \sqrt{R^2 - x^2}}$$

Uchylenie średnie kwadratowe

$$\delta_{DP(0)} = \frac{R}{\sqrt{2}}$$

Dla błędów strzelania wzdłuż kierunku bocznego wzory przedstawiają się następująco:

$$\varphi(z) = \frac{1}{\pi \sqrt{R^2 - z^2}}$$

$$\delta_{\beta(0)} = \frac{R}{\sqrt{2}}$$

4. Błędy spowodowane technicznym rozrzutem torów pocisków.

Techniczny rozrzut pocisków rozpatruje się w płaszczyźnie normalnej do odległości rzeczywistej. W tej płaszczyźnie błędy strzelania charakteryzują uchylenia środkowe: r_N - wzdłuż prostopadłej do odległości rzeczywistej i r_z - wzdłuż kierunku bocznego.

Średnie kwadratowe błędy strzelania na skutek rozrzutu torów są równe:

$$\sigma_N = \frac{r_N}{p\sqrt{2}}; \quad \sigma_z = \frac{r_z}{p\sqrt{2}};$$

2. Błędy strzelania artylerii przeciwlotniczej mk z celownikiem.

a/ Błędy w określaniu i nastawieniu na celowniku współrzędnych i czynników ruchu celu.

1. Błędy określania i nastawienia odległości rzeczywistej.

Błąd w odległości powoduje błąd czasu lotu pocisku Δt i kąta celownika Δc .

Błąd czasu lotu pocisku Δt powoduje uchylenie toru pocisku od punktu Aw o wielkości Δs . Wartość uchylenia Δs określa się ze wzoru:

$$\Delta s = v_c \left(\Delta t - \frac{\Delta D}{D} \cdot t \right)$$

Wartość Δt oblicza się z tabel strzelniczych wykorzystując zależność

$$\Delta t = t' - t$$

$$t' = t \left(1 + \frac{\Delta D}{D} \right)$$

$$t = t_0 \left(1 + \frac{\Delta D}{D} \right)$$

Z powodu błędnego nastawienia odległości, celownik wypracowuje kąt celownika obarczony błędem Δc .

$$\Delta c = c' - c$$

$$c' = f_z (D_H + \Delta D_H)$$

$$c = f_z (D_H)$$

Błąd Δc uchyli pocisk o wielkość

$$\Delta c = \Delta C \cdot D_H$$

Uchylenie średnie kwadratowe wzdłuż kursu celu

$$\sigma_s = v_c \left(\sigma_t - \frac{\sigma_D}{D} \cdot t \right)$$

Uchylenie średnie kwadratowe wzdłuż kierunku prostopadłego do D_H w płaszczyźnie pionowej

$$\sigma_c = \sigma_C \cdot D_H$$

gdzie: σ_t i σ_c - błędy średnie kwadratowe, charakteryzujące dokładność wypracowania przez celownik czasu lotu pocisku i kąta celownika

$$\sigma_t = t' - t$$

$$c' = f_2 (D_H + \sigma_{D_H})$$

$$t' = f_1 (D_H + \sigma_{D_H})$$

$$c = f_2 (D_H)$$

$$t = f_1 (D_H)$$

$$\sigma_{D_H} = \frac{\sigma_D}{D} \cdot D_H$$

$$\sigma_c = c' - c$$

2. Błędy katowych współrzędnych celu

Błędowi katowemu Δp w radianach odpowiada błąd - wektor Δp

$$\Delta p = \Delta p \cdot D_s$$

a błędowi katowemu $\Delta \beta$ w radianach odpowiada błąd - wektor $\Delta \beta$

$$\Delta \beta = \Delta \beta_H \cdot D_s = \Delta \beta \cdot D_{p_0} = \Delta \beta \cdot D_s \cdot \cos p$$

gdzie: $\Delta \beta_H$ - błąd azymutu w płaszczyźnie pochyłej w radianach;

$\Delta \beta$ - błąd azymutu w płaszczyźnie poziomej w radianach.

Uchylenia średnie kwadratowe tych błędów wyrażają się wzorami:

$$\sigma_p = \sigma_p \cdot D_s$$

$$\sigma_\beta = \sigma_\beta \cdot D_s$$

gdzie: σ_p, σ_β - błędy średnie kwadratowe celowania w kącie położenia i w azymucie.

3. Błędy w określeniu i uwzględnieniu czynników ruchu celu

Uchylenie toru pocisku od celu Δv wywołane błędem prędkości celu Δv_c

$$\Delta v = \Delta v_c \cdot t$$

Uchylenie średnie kwadratowe błędów strzelania spowodowane błędem Δv_c równa się

$$\sigma_v = \sigma_{v_c} \cdot t$$

gdzie: σ_v - błąd średni kwadratowy określenia i nastawienia na celowniku prędkości celu.

Uchylenie toru pocisku od celu Δq wywołane błędem w kursie celu Δq

$$\Delta q = \Delta q \cdot v_c \cdot t \quad - \text{ płaszczyzna pozioma}$$

gdzie: Δq - katowa wartość błędu określenia kąta kursowego w radianach

$$\Delta q = \Delta q \cdot v_c \cdot t \cos \lambda \quad - \text{ w płaszczyźnie pochyłej}$$

Uchylenie średnie kwadratowe

$$\sigma_q = \sigma_q \cdot v_c \cdot t \cos \lambda$$

gdzie: $\Delta \lambda$ - błąd średni kwadratowy określenia kąta kursowego w radianach.

Uchylenie toru pocisku od celu $\Delta \lambda$ wywołane błędem w określeniu kąta λ

$$\Delta \lambda = \Delta \lambda \cdot v_c \cdot t$$

gdzie: $\Delta \lambda$ - przypadkowy błąd określenia kąta λ w radianach.

Uchylenie średnie kwadratowe

$$\sigma_\lambda = \sigma_\lambda \cdot v_c \cdot t$$

gdzie: σ_λ - błąd średni kwadratowy równy 0,15 radiana.

b/ Błędy nieuwzględnienia odchyłek warunków strzelania od tabelarycznych

Charakter wpływu tych błędów na wyniki strzelania jest analogiczny jak błędów w określaniu i uwzględnianiu odchyłek warunków strzelania przy strzelaniu z PUAZO.

$$\sigma_{\Delta v_0} = 3\% v_c$$

$$\sigma_t(w_d) = 0,1 \text{ sek}$$

$$\sigma_c(w_x) = 0-0,15$$

$$\sigma_\beta(w_z) = 0-0,15$$

c/ Błędy hipotezy ruchu celu

Błędy hipotezy powstają w wyniku niezgodności ruchu celu z hipotezą, którą założono przy konstrukcji celownika.

Błędy hipotezy podlegają prawu normalnemu i charakteryzują je błędy średnie kwadratowe

$$\sigma'_v = 0,5 \text{ m/sek}$$

$$\sigma'_q = 0-15$$

$$\sigma'_\lambda = 0-15$$

Uchylenia średnie kwadratowe błędów hipotezy

$$\sigma'_v = \sigma'_v \cdot t$$

$$\sigma'_q = \sigma'_q \cdot v_c t \cos \lambda$$

$$\sigma'_\lambda = \sigma'_\lambda \cdot v_c \cdot t$$

gdzie: t - czas lotu pocisku do punktu wyprzedzonego.

d/ Błędy wywołane technicznym rozrzutem torów

Błędy wywołane technicznym rozrzutem torów są takie same jak przy strzelaniu z PUAZO

e/ Sumaryczne błędy strzelania

Uchylenia w płaszczyźnie ekranowej wywołane błędami prędkości celu określa się ze wzorów:

$$\Delta \beta_v = \arctg \frac{\Delta v_c \cdot t \cdot \sin q}{D_w}$$

$$\Delta p_q = \arctg \frac{\Delta q \cdot v_c t \sin q}{D_w}$$

Uchylenia w płaszczyźnie ekranowej wywołane błędami nastawienia kursu celu określa się ze wzorów:

$$\Delta \beta_q = \arctg \frac{\Delta q \cdot v_c t \cos q}{D_w}$$

$$\Delta p_\beta = \arctg \frac{\Delta q \cdot v_c t \cos q \sin p}{D_w}$$

$$\Delta \beta_D \approx 1000 \cdot \frac{V_c}{D_w} \left(\Delta t - \frac{\Delta D}{D} \cdot t \right) \sin q$$

$$\Delta p_D \approx 1000 \cdot \frac{V_c}{D_w} \left(\Delta t - \frac{\Delta D}{D} \cdot t \right) \cos q \sin p + \Delta c$$

Aby określić szumaryczne systematyczne błędy strzelania trzeba:

1. znając systematyczne błędy strzelania obliczyć ich rzuty na osie y i z

$$r_{y,i} = r_i \cos(r_{i,y})$$

$$r_{z,i} = r_i \cos(r_{i,z})$$

2. obliczyć wielkości sumarycznych systematycznych błędów strzelania

$$r_{y,\Sigma} = \sum_{i=1}^r r_{y,i}$$

$$r_{z,\Sigma} = \sum_{i=1}^r r_{z,i}$$

gdzie: r - ilość źródeł błędów.

Wzory na obliczenie kierunkowych kosinusów $\cos(r_{i,y})$ i $\cos(r_{i,z})$ podane są w tabeli 1 i 2.

Obliczone wartości r_y i r_z są charakterystykami położenia środka ugrupowania sumarycznych błędów strzelania.

Ponadto trzeba znać: korelacyjne funkcje sumarycznych błędów strzelania $K_y(t_1, t_2)$ i $K_z(t_1, t_2)$, korelacyjne funkcje więzów sumarycznych błędów strzelania $K_z(t_1, t_2)$ i $K_{zy}(t_1, t_2)$

Kolejność określania wymienionych charakterystyk jest następująca: V_c, H, P, λ

1. Zakłada się warunki: $V_c, H, P,$
2. Na podstawie danych doświadczalnych oblicza się błędy średnie kwadratowe spowodowane różnymi przyczynami i unormowane korelacyjne funkcje.
3. Na kursie celu wybiera się punkt wyprzedzony dla odstępu czasu $\Delta t = t_1 - t_2$, na przykład co 1-2 sek.
4. Dla wybranych punktów wyprzedzonych i odpowiadających im punktom strzału określa się współrzędne geometryczne.
5. Za pomocą wzorów podanych w tabelach 1 i 2 oblicza się odchylenia średnie kwadratowe błędów strzelania.
6. Oblicza się rzuty odchyień średnich kwadratowych na osie współrzędnych y i z .

$$\sigma_{y,i} = \sigma_i \cos(\sigma_{i,y})$$

$$\sigma_{z,i} = \sigma_i \cos(\sigma_{i,z})$$

Wzory robocze na obliczenie rzutów odchyień średnich kwadratowych podane są w tabeli 1 i 2.

Wartość μ oblicza się z wyrażenia

$$\mu = \frac{1}{\sqrt{s_1^2 + s_2^2}}$$

7. Oblicza się momenty korelacyjne sumarycznych błędów strzelania

$$K_y(t_1, t_2) = \sum_{i=1}^r \rho_i(t_1, t_2) \sigma_{y,i}(t_1) \sigma_{y,i}(t_2)$$

$$K_z(t_1, t_2) = \sum_{i=1}^r \rho_i(t_1, t_2) \sigma_{z,i}(t_1) \sigma_{z,i}(t_2)$$

$$K_{yz}(t_1, t_2) = \sum_{i=1}^r \rho_i(t_1, t_2) \sigma_{y,i}(t_1) \sigma_{z,i}(t_2)$$

$$K_{zy}(t_1, t_2) = \sum_{i=1}^r \rho_i(t_1, t_2) \sigma_{z,i}(t_1) \sigma_{y,i}(t_2)$$

gdzie: r - ilość niezależnych źródeł błędów.

$\sigma_{y,i}, \sigma_{z,i}$ - rzuty i - tego odchylenia średniego kwadratowego na osie y i z dla punktów wyprzedzonych odpowiadającym czasom t_1 i t_2

$\rho_i(t_1, t_2)$ - współczynnik korelacji między błędami
i-tego źródła na dwóch kierunkach dla punktów
wyrzeczonych odpowiadających czasom
 t_1 i t_2

Dyspersje sumarycznych błędów strzelania będą równe

$$D_y = K_y(t, t) = \sum_{i=1}^r \sigma_{y,i}^2 \quad D_z = K_z(t, t) = \sum_{i=1}^r \sigma_{z,i}^2$$

odchylenia średnie kwadratowe sumarycznego błędu strzelania

$$\sigma_y = \sqrt{D_y}$$
$$\sigma_z = \sqrt{D_z}$$

8. Aby określić dyspersje sumarycznego błędu strzelania na kierunkach głównych osi rozrzutu trzeba odwrócić osie o kąt α

$$\tan 2\alpha = \frac{2K_{zy}}{D_z - D_y} = \frac{2\rho_{zy} \sigma_y \sigma_z}{\sigma_z^2 - \sigma_y^2}$$

Kierunek większej osi elipsy rozrzutu przyjmuje się za oś ξ
a małej osi elipsy - za oś η . Wówczas kąt α jest kątem
zawartym między osią z a osią ξ

Dyspersje sumarycznego błędu strzelania na kierunkach ξ i η

$$D_\xi = \frac{1}{2} \left[D_y - D_z + \sqrt{(D_z - D_y)^2 + 4K_{yz}} \right]$$

$$D_\eta = \frac{1}{2} \left[D_y - D_z - \sqrt{(D_z - D_y)^2 + 4K_{yz}} \right]$$

Główne odchylenia średnie kwadratowe sumarycznego błędu
strzelania będą równe

$$\sigma_\xi = \sqrt{D_\xi}$$

$$\sigma_\eta = \sqrt{D_\eta}$$

Sumaryczne systematyczne błędy strzelania na kierunkach
głównych osi rozrzutu będą równe

$$\tau_\xi = \tau_z \cos \alpha + \tau_y \sin \alpha$$

$$\tau_\eta = \tau_z \sin \alpha + \tau_y \cos \alpha$$

Tabela 1

Rzuty odchylen średnich kwadratowych na osie y, z przy strze-
laniu z PUAZO

σ_i	$\sigma_{y,i}$	$\sigma_{z,i}$
σ_φ	$\sigma_\varphi \left(\frac{\cos p_H}{\mu} + u S_1 S_2 \sin p_H \right)$	$\sigma_\varphi u S_3 \sin p_H$
σ_{β_H}	$-\sigma_{\beta_H} u S_2 S_3$	$\sigma_{\beta_H} u S_1$
$\sigma(v_0)$	$\sigma_c(v_0) \left(\frac{\cos p_H}{\mu} + u S_1 S_2 \sin p_H \right) + \delta t(v_0) \left[u S_2 \cos \lambda \cdot \left(S_1 \cos q_H - S_3 \sin q_H \right) + \frac{\sin \lambda}{\mu} \right]$	$\sigma_c(v_0) u S_3 \sin p_H + \delta t(v_0) u \cos \lambda \cdot \left(S_3 \cos q_H + S_1 \sin q_H \right)$
σ_{w_x}	$\sigma_c(w_x) \left(\frac{\cos p_H}{\mu} + u S_1 S_2 \sin p_H \right) + \delta t(w_x) \left[u S_2 \cos \lambda \left(S_1 \cos q_H - S_3 \sin q_H \right) + \frac{\sin \lambda}{\mu} \right]$	$\sigma_c(w_x) u S_3 \sin p_H + \delta t(w_x) u \cos \lambda \cdot \left(S_3 \cos q_H + S_1 \sin q_H \right)$
$\sigma_{\beta_{H_2}}$	$-\sigma_{\beta(H_2)} u S_2 S_3$	$\sigma_{\beta(H_2)} u S_1$
σ_{r_N}	$\sigma_{r_N} \left(\frac{\cos p_H}{\mu} + u S_1 S_2 \sin p_H \right)$	$\sigma_{r_N} u S_3 \sin p_H$
σ_{r_2}	$-\sigma_{r_2} u S_2 S_3$	$\sigma_{r_2} u S_1$
$\sigma_{\beta(0)} + \sigma_{D_p(0)}$	$-\sigma_{\beta(0)} u S_2 S_3 + \sigma_{D_p(0)} \left(u S_1 S_2 \cos \lambda + \frac{\sin \lambda}{\mu} \right)$	$\sigma_{\beta(0)} u S_1 + \sigma_{D_p(0)} u S_3 \cos \lambda$

$$S_1 = \cos(\psi_{Hzg}, x') = \frac{V_{b0z} \cos d + V_c \cos \lambda \cos q}{V_{Hzg}}$$

$$S_2 = \cos(\psi_{Hzg}, y') = \frac{V_{b0z} \sin d + V_c \sin \lambda}{V_{Hzg}}$$

$$S_3 = \cos(\psi_{Hzg}, z') = -\frac{V_c \cos \lambda \sin q}{V_{Hzg}}$$

Tabela 2

Rzuty odchyleni średnich kwadratowych na osie y, z przy strzelaniu z celownikiem

δ_{Dp}		
δ_{Dp}	$\delta_c \left(\frac{\cos p_n}{\mu} + u S_1 S_2 \sin p_n \right) + \delta_s \left[u S_2 \cos \lambda (S_1 \cos q_n - S_3 \sin q_n) + \frac{\sin \lambda}{\mu} \right]$	$\delta_c u S_3 \sin p_n + \delta_s u \cos \lambda (S_3 \cos q_n + S_1 \sin p_n)$
δ_v	$\delta_v \left[u S_2 \cos \lambda (S_1 \cos q_n - S_3 \sin q_n) + \frac{\sin \lambda}{\mu} \right]$	$\delta_v u \cos \lambda (S_3 \cos q_n + S_1 \sin p_n)$
$\delta(w_n)$	$\delta_c(w_n) \left(\frac{\cos p_n}{\mu} + u S_1 S_2 \sin p_n \right) + \delta_t(w_n) \left[u S_2 \cos \lambda (S_1 \cos q_n - S_3 \sin q_n) + \frac{\sin \lambda}{\mu} \right]$	$\delta_c(w_n) u S_3 \sin p_n + \delta_t(w_n) u \cos \lambda (S_3 \cos q_n + S_1 \sin p_n)$
$\delta(v_0)$	$\delta_c(v_0) \left(\frac{\cos p_n}{\mu} + u S_1 S_2 \sin p_n \right) + \delta_t(v_0) \left[u S_2 \cos \lambda (S_1 \cos q_n - S_3 \sin q_n) + \frac{\sin \lambda}{\mu} \right]$	$\delta_c(v_0) u S_3 \sin p_n + \delta_t(v_0) u \cos \lambda (S_3 \cos q_n + S_1 \sin p_n)$
$\delta_{\beta}(w_z)$	$-\delta_{\beta}(w_z) u S_2 S_3$	$\delta_{\beta}(w_z) u S_1$
δ_{β}	$-\delta_{\beta} u S_2 [S_1 \sin(q_n - q_s) + S_3 \cos(q_n - q_s)]$	$\delta_{\beta} u [S_1 \cos(q_n - q_s) - S_3 \sin(q_n - q_s)]$
δ_p	$\delta_p \left\{ u S_2 \sin p_s [S_1 \cos(q_n - q_s) - S_3 \sin(q_n - q_s)] + \frac{\cos p_s}{\mu} \right\}$	$\delta_p u \sin p_s [S_3 \cos(q_n - q_s) + S_1 \sin(q_n - q_s)]$
δ_q	$\delta_q u S_2 (S_1 \sin q_n + S_3 \cos q_n)$	$\delta_q u (S_3 \sin q_n - S_1 \cos q_n)$
δ_{λ}	$\delta_{\lambda} \left[u S_2 \sin \lambda (S_3 \sin q_n - S_1 \cos q_n) + \frac{\cos p_n}{\mu} \right]$	$\delta_{\lambda} u \sin \lambda (S_3 \cos q_n + S_1 \sin q_n)$
δ_{r_n}	$\delta_{r_n} \left(\frac{\cos p_n}{\mu} + u S_1 S_2 \sin p_n \right)$	$\delta_{r_n} u S_3 \sin p_n$
δ_{r_2}	$-\delta_{r_2} u S_2 S_3$	$\delta_{r_2} u S_1$

3. Błędy strzelania artylerii przeciwlotniczej sk do celów powietrznych.

a/ Błędy w wypracowaniu przez baterię nastaw do strzelania.

Wielkość liniowego odchylenia rozprysku od celu odpowiadającą błędowi kątowemu $\Delta\beta_{w,p}$ określa się ze wzoru:

$$\Delta\beta_w = D_{pw} \cdot \operatorname{tg} \Delta\beta_{w,p}$$

lub

$$\Delta\beta_w = D_{pw} \cdot \Delta\beta_{w,p} \quad (\Delta\beta_{w,p} - \text{w radianach})$$

Nadzieja matematyczna błędu strzelania $\Delta\beta_w$.

$$\tau_{\beta_w} = D_{pw} \cdot m_{\beta_w}$$

Odchylenie średnie kwadratowe

$$\sigma_{\beta_w} = D_{pw} \cdot \sigma_{\beta_w}$$

Wielkość liniowego odchylenia rozprysku od celu odpowiadającą błędowi kątowemu $\Delta\varphi$ określa się ze wzoru:

$$\Delta\varphi = \Delta\varphi \cdot l_\varphi$$

gdzie: l_φ - przesunięcie liniowe wzdłuż izozapalnikowej, krzywej przy zmianie kąta podniesienia o 0-01.

Nadzieja matematyczna błędu strzelania $\Delta\varphi$

$$\tau_\varphi = m_\varphi \cdot D_w$$

Odchylenie średnie kwadratowe

$$\sigma_\varphi = \sigma_\varphi \cdot D_w$$

Wielkość liniowego odchylenia rozprysku od celu odpowiadającą błędowi nastawy zapalnika ΔZ określa się ze wzoru:

$$\Delta Z = V_{wzq} \cdot l_z \cdot \Delta Z$$

gdzie: l_z - wartość jednej podziałki zapalnika w sekundach
Nadzieja matematyczna błędu zapalnika

$$\tau_z = V_{wzq} \cdot m_z \cdot l_z$$

Odchylenie średnie kwadratowe

$$\sigma_z = V_{wzq} \cdot \sigma_z \cdot l_z$$

Błędy strzelania $\Delta\beta_w, \Delta\varphi, \Delta z$ są składowymi sumarycznego błędu strzelania.

Składowe sumarycznego systematycznego błędu określa się na podstawie twierdzenia o sumie nadziei matematycznych

$$\tau_x = \sum_1^3 \tau_{x,i};$$

$$\tau_y = \sum_1^3 \tau_{y,i};$$

$$\tau_z = \sum_1^3 \tau_{z,i}$$

Dyspersje na dowolnym kierunku, np. na kierunku osi x będą równe

$$D_x = D_{\beta_{w,x}} + D_{\varphi,x} + D_{z,x}$$

Odchylenia średnie kwadratowe

$$\sigma_x = \sqrt{D_x} = \sqrt{\sigma_{\beta,x}^2 + \sigma_{z,x}^2}$$

$$\sigma_y = \sqrt{D_y} = \sqrt{\sigma_{\varphi,y}^2 + \sigma_{z,y}^2}$$

$$\sigma_z = \sqrt{D_z} = \sqrt{\sigma_{\beta,z}^2 + \sigma_{z,z}^2}$$

b/ Błędy w określaniu i uwzględnianiu odchyłek warunków strzelania od tabelarnych.

- 1. Błędy w określaniu i uwzględnianiu Δv_0 sum

$$\Delta v_0 = \Delta v_0 \sqrt{\Delta D_p^2(v_0, tab) + \Delta H^2(v_0, tab)}$$

$$\operatorname{tg} \epsilon_{v_0} = \frac{\Delta H(v_0, tab)}{\Delta D_p(v_0, tab)}$$

gdzie: $\Delta D_p(v_0, tab)$ i $\Delta H(v_0, tab)$ - odchylenia rozprysku od celu w odległości poziomej i wysokości, odpowiadające zmianie prędkości początkowej pocisku o 1%.

Nadzieja matematyczna błędu strzelania $\Delta v_0 = 0$

Odchylenie średnie kwadratowe

$$\sigma_{v_0} = \sigma_{\Delta v_0 sum} \cdot \sqrt{\Delta D_p^2(v_0, tab) + \Delta H^2(v_0, tab)}$$

gdzie: - błąd średni kwadratowy, charakteryzujący
dokładność określenia i uwzględnienia sum.

2. Błędy w określaniu i uwzględnianiu ΔG sum

Błąd przypadkowy określenia i uwzględnienia ΔG sum spowoduje odchylenie środka grupowania rozprysków salwy od celu o wielkość

$$\Delta_G = \Delta G \cdot \sqrt{\Delta D_{p(G), tab}^2 + \Delta H_{(G), tab}^2}$$

Błąd strzelania Δ_G tworzy z poziomem kąt ϵ_G

$$\operatorname{tg} \epsilon_G = \frac{\Delta H_{(G), tab}}{\Delta D_{p(G), tab}}$$

Nadzieja matematyczna błędu strzelania $\Delta_G = 0$

Odchylenie średnie kwadratowe

$$\sigma_G = \sigma_{\Delta G sum} \sqrt{\Delta D_{p(G), tab}^2 + \Delta H_{(G), tab}^2}$$

gdzie: $\sigma_{\Delta G sum}$ - błąd średni kwadratowy, charakteryzujący
dokładność określenia i uwzględnienia
 ΔG sum

3. Błędy w określaniu i uwzględnianiu Δt sum

Błąd przypadkowy określania i uwzględniania Δt sum spowoduje odchylenie środka grupowania rozprysków salwy od celu o wielkość

$$\Delta_t = V_{wzg} \cdot \Delta t$$

Nadzieja matematyczna błędu strzelania $\Delta t = 0$.

Odchylenie średnie kwadratowe

$$\sigma_t = V_{wzg} \cdot \sigma_{\Delta t sum}$$

gdzie: $\sigma_{\Delta t sum}$ - błąd średni kwadratowy, charakteryzujący
dokładność określenia i uwzględnienia

4. Błędy w określaniu i uwzględnianiu wiatru balistycznego

Błędy strzelania na skutek popełnienia błędu w określeniu i uwzględnieniu wiatru balistycznego określa się ze wzorów:

$$\Delta W_x = \Delta W_x \sqrt{\Delta D_p^2(w_x), \text{tab} + \Delta H^2(w_x), \text{tab}}$$

$$\Delta W_z = \Delta W_z \cdot \Delta Z(w_z), \text{tab}$$

gdzie:

$\Delta D_p(w_x), \text{tab}$, $\Delta H(w_x), \text{tab}$ i $\Delta Z(w_z), \text{tab}$ - wielkości odchylen rozprysków od celu wzdłuż D_p , H i kierunku bocznego wywołane zmianą wiatru o prędkości 1 m/sek.

Błąd ΔW_x tworzy z poziomem kąt ϵ_{W_x} , który oblicza się ze wzoru

$$\text{tg } \epsilon_{W_x} = \frac{\Delta H(w_x), \text{tab}}{\Delta D_p(w_x), \text{tab}}$$

Nadzieja matematyczna błędów strzelania ΔW_x i $\Delta W_z = 0$.
Odchylenie średnie kwadratowe

$$\sigma_{W_x} = \sigma_{\Delta W_x} \sqrt{\Delta D_p^2(w_x), \text{tab} + \Delta H^2(w_x), \text{tab}}$$

$$\sigma_{W_z} = \sigma_{\Delta W_z} \cdot \Delta Z(w_z), \text{tab}$$

c/ Niepowtarzające się błędy i ich wpływ na strzelanie

Niepowtarzającymi się błędami nazywa się takie błędy, które nie są zależne od siebie.

1/ Błędy nieuwzględnienia odsunięcia dział od środka SO

Błędy strzelania w wyniku błędów nieuwzględnienia przesunięcia dział względem środka SO polegają prawu aresinusa.

Funkcja gęstości prawdopodobieństwa w prostokątnym układzie współrzędnych wyraża się wzorami:

$$f(x) = \frac{1}{\pi \sqrt{r^2 - x^2}}$$

$$f(z) = \frac{1}{\pi \sqrt{r^2 - z^2}}$$

Nadzieja matematyczna tych błędów strzelania = 0.

Odchylenie średnie kwadratowe

$$\sigma_{D_p(0)} = \sigma_{\beta(0)} = \frac{r}{\sqrt{2}}$$

2. Błędy technicznego rozrzutu dział

Odchylenia średnie kwadratowe błędów strzelania określa się

$$\sigma_{Dp} = \frac{1}{\sqrt{2}} \tau_{Dp}$$

$$\sigma_H = \frac{1}{\sqrt{2}} \tau_H$$

$$\sigma_z = \frac{1}{\sqrt{2}} \tau_z$$

Współczynnik korelacji błędów strzelania

$$\rho_{x,y} = \frac{\tau_H^2 \sec^2 p - \tau_{Dp}^2 \operatorname{tg}^2 p - \tau_z^2}{2 \tau_{Dp} \cdot \tau_H \cdot \operatorname{tg} p}$$

3. Błędy w określaniu i uwzględnianiu średniego dla baterii czasu ładowania dział.

Błąd strzelania $\Delta \tau_T$ spowodowany błędem czasu ładowania określa się ze wzoru:

$$\Delta \tau_T = \Delta Z (\Delta \tau_T) \cdot l_z \cdot V_{uzg}$$

Nadzieja matematyczna błędu strzelania $\Delta \tau_T = 0$.

Odchylenie średnie kwadratowe

$$\sigma_{\tau_T} = \sigma_z (\sigma_{\tau_T}) \cdot l_z \cdot V_{uzg}$$

gdzie: $\sigma_z (\sigma_{\tau_T})$ - błąd średni kwadratowy, charakteryzujący dokładność nastawy zapalnika w wyniku błędów czasu ładowania dział.

d/ Sumaryczne błędy strzelania

Sumaryczne odchylenie rozprysków od celu na wybranych kierunkach, wywołane jednoczesnym wpływem wszystkich źródeł błędów, nazywa się sumarycznym błędem strzelania.

Składową sumarycznego systematycznego błędu strzelania na kierunku i-tej osi współrzędnych oblicza się ze wzoru:

gdzie: k - ilość pojedynczych błędów strzelania

$\gamma_{j,i}$ - rzut systematycznego błędu strzelania j -tego źródła na i -tą oś współrzędnych.

Momenty korelacyjne jednowymiarowych wektorów przypadkowych są równe iloczynowi rzutu odchylenia średniego kwadratowego danego wektora na odpowiednie osie współrzędnych

$$K_{ij}^{(j)} = \sigma_{j,i} \sigma_{j,r}$$

gdzie: $\sigma_{j,i}, \sigma_{j,r}$ - rzuty odchylenia średniego kwadratowego błędu strzelania na i -tą i r -ną oś.

Momenty korelacyjne sumarycznego błędu strzelania są równe

$$K_{x,x} = \sum_{j=1}^k K_{x,x}^{(j)}; \quad K_{y,y} = \sum_{j=1}^k K_{y,y}^{(j)}; \quad K_{z,z} = \sum_{j=1}^k K_{z,z}^{(j)}$$

$$K_{xy} = \sum_{j=1}^k K_{xy}^{(j)}; \quad K_{xz} = \sum_{j=1}^k K_{xz}^{(j)}; \quad K_{yz} = \sum_{j=1}^k K_{yz}^{(j)}$$

$$K_{xx}^{(j)} = D_x = \sigma_{j,x}^2; \quad K_{yy}^{(j)} = D_y = \sigma_{j,y}^2; \quad K_{zz}^{(j)} = D_z = \sigma_{j,z}^2;$$

$$K_{xy}^{(j)} = \sigma_{j,x} \cdot \sigma_{j,y}; \quad K_{xz}^{(j)} = \sigma_{j,x} \sigma_{j,z}; \quad K_{yz}^{(j)} = \sigma_{j,y} \sigma_{j,z};$$

Odchylenie średnie kwadratowe błędu sumarycznego

$$\sigma_x = \sqrt{K_{xx}}; \quad \sigma_y = \sqrt{K_{yy}}; \quad \sigma_z = \sqrt{K_{zz}}$$

Współczynniki korelacji określa się ze wzorów:

$$\rho_{xy} = \frac{K_{xy}}{\sigma_x \sigma_y};$$

$$\rho_{xz} = \frac{K_{xz}}{\sigma_x \sigma_z};$$

$$\rho_{yz} = \frac{K_{yz}}{\sigma_y \sigma_z}$$

Gęstość prawdopodobieństwa prawa rozkładu sumarycznego błędu strzelania wyraża się wzorem:

$$f(x-r_x; y-r_y; z-r_z) = \frac{1}{2\pi^{3/2} \sqrt{|\Delta|}} e^{-\frac{1}{2} Q(x-r_x; y-r_y; z-r_z)}$$

$$|\Delta| = \sigma_x^2 \sigma_y^2 \sigma_z^2 (1 + 2\rho_{xy} \rho_{xz} \rho_{yz} - \rho_{xy}^2 - \rho_{xz}^2 - \rho_{yz}^2)$$

Odchylenia średnie kwadratowe na kierunkach głównych osi rozrzutu są równe

$$\sigma_{\xi} = \sqrt{\lambda_1}; \quad \sigma_{\eta} = \sqrt{\lambda_2}; \quad \sigma_{\zeta} = \sqrt{\lambda_3}$$

ROZDZIAŁ VIII

=====

Skuteczność strzelania artylerii przeciwlotniczej

a/ Określanie średniego procentu strat

$$P \% = \frac{A}{M} \cdot 100$$

gdzie: P% - średni procent strat

A - nadzieja matematyczna ilości rażonych samolotów
w celu grupowym

M - ilość samolotów w grupie.

b/ Obliczanie wskaźników skuteczności strzelania uderzeniowego do celów powietrznych.

Wskaźnikiem skuteczności strzelania artylerii przeciwlotniczej jest prawdopodobieństwo rażenia celu przy strzelaniu do celów pojedynczych oraz nadzieja matematyczna ilości rażonych celów przy strzelaniu do celów grupowych.

1. Prawo rażenia samolotu przy strzelaniu pociskami o działaniu uderzeniowym.

Prawdopodobieństwo rażenia samolotu określa się ze wzoru:

$$R = \sum_{m=1}^n P_m G(m)$$

gdzie: P_m - prawdopodobieństwo trafienia w samolot m pocisków przy strzałach

G /m/ - warunkowe prawdopodobieństwo rażenia samolotu przy m trafieniach

Funkcję G /m/ nazywa się prawem rażenia. Prawem rażenia samolotu przy strzelaniu uderzeniowym nazywa się zależność prawdopodobieństwa rażenia samolotu od ilości pocisków, które w niego trafiły przy określonych warunkach strzelania.

Właściwości prawa rażenia:

1. Ze wzrostem ilości trafień /m/ prawdopodobieństwo rażenia G /m/ rośnie lub pozostaje wielkością stałą.
2. Przy dużej ilości trafień prawdopodobieństwo rażenia celu będzie bardzo ~~zależne~~ zbliżone do jedności.

Podstawową charakterystyką prawa rażenia jest średnia ilość pocisków niezbędnych do rażenia celu

$$\omega = \sum_{m=1}^n m D_m$$

gdzie: m - możliwe wartości wielkości przypadkowej ilości trafnych pocisków / $m = 1, \dots, n$ /

$D_m = G / m - G / m-1/$ - prawdopodobieństwo rażenia samolotu przy m -tym trafieniu.

Wykładnicze prawo rażenia

$$G_{(m)} = 1 - (1-p)^m$$

$$\omega = \frac{1}{p}$$

2. Prawdopodobieństwo rażenia samolotu przy jednym strzale

Prawdopodobieństwo rażenia samolotu przy jednym strzale:

$$R_1 = P_1 G / 1/$$

gdzie: P_1 - prawdopodobieństwo trafienia w cel przy jednym strzale

$G / 1/$ - prawdopodobieństwo rażenia samolotu przy jednym strzale.

Dla prawa wykładniczego:

$$R_1 = \frac{P_1}{\omega}$$

a przy istnieniu systematycznego błędu

$$\bar{R}_1 (r_y, r_z) = \frac{P(r_y, r_z)}{\omega}$$

gdzie: $p(r_y, r_z)$ - prawdopodobieństwo trafienia przy jednym strzale z uwzględnieniem istnienia systematycznego błędu

ω - średnia niezbędna ilość trafień.

Obliczanie prawdopodobieństwa rażenia samolotu sprowadza się do obliczenia prawdopodobieństwa trafienia $p(r_y, r_z)$ ze wzoru:

$$P(r_y, r_z) = \iint_{(S)} \varphi(y - r_y, z - r_z) dy dz$$

- gdzie: $\gamma(y-r_y, z-r_z)$ - gęstość rozkładu prawdopodobieństw punktów trafienia pocisków
 r_y, r_z - współrzędne środka zgrupowania punktów trafienia pocisków
S - powierzchnia rzutu samolotu na płaszczyznę prostopadłą do wektora względnej prędkości.

3. Prawdopodobieństwo rażenia samolotu serią automatycznego ognia

Całkowite prawdopodobieństwo rażenia samolotu oblicza się ze wzoru:

$$R(r_y, r_z) = \iint_{-\infty}^{\infty} \gamma_{ii}(y_{ii}-r_y, z_{ii}-r_z) \left\{ 1 - [1 - R_1(y_{ii}, z_{ii})]^n \right\} dy_{ii} dz_{ii}$$

gdzie: y_{ii} i z_{ii} - wartość błędu powtarzającego się

Obecnie opracowano szereg sposobów obliczenia przybliżonego tej całki. W praktycznych badaniach skuteczności strzelania stosuje się:

- sposób Aleksiejewa
- sposób Kołmogorowa
- sposób "sumarycznego prawa".

4. Prawdopodobieństwo rażenia samolotu i nadzieja matematyczna ilości rażonych samolotów przy strzelaniu jednej i kilku baterii.

Prawdopodobieństwo rażenia pojedynczego celu przy strzelaniu jednej baterii, gdy strzelanie składa się z γ niezależnych serii /salw/ oblicza się ze wzoru:

$$R = 1 - \prod_{k=1}^{\gamma} (1 - R_k)$$

gdzie: R_k - prawdopodobieństwo rażenia celu k -tą serią /salwą/

Prawdopodobieństwo rażenia pojedynczego celu przy strzelaniu grupy baterii oblicza się ze wzoru:

$$R_{gr} = 1 - \prod_{i=1}^{\beta} (1 - R_i)$$

R_{gr} - prawdopodobieństwo rażenia celu przy strzelaniu grupy baterii

β - ilość strzelających baterii

R_j - prawdopodobieństwo rażenia celu przy strzelaniu 1-szej baterii.

Prawdopodobieństwo rażenia i-tego samolotu przy strzelaniu grupy baterii określa się ze wzoru:

$$R_{jgr} = 1 - \prod_{l=1}^{\beta} (1 - R_{jl})$$

gdzie: $R_{j\pm}$ - prawdopodobieństwo rażenia j-tego samolotu grupy przy strzelaniu l-tej baterii.

Nadzieję matematyczną ilości rażonych samolotów określa się

$$A_{gr} = \sum_{j=1}^M R_{jgr}$$

5. Nadzieja matematyczna zużycia amunicji niezbędnej do rażenia celu.

$$N_{sr} = \frac{N}{A_{gr}} \text{ pocisków}$$

gdzie: N - zużycie amunicji wystrzelonej w czasie przebywania celu w strefie ognia

A_{gr} - nadzieja matematyczna ilości samolotów rażonych tą ilością amunicji.

Wzór ten jest stosowany przy niskiej skuteczności strzelania.

Do obliczania średniego przewidywanego zużycia amunicji należy posługiwać się wzorem:

$$N_{sr} = \frac{n \sum_{r=1}^v (1 - R_r)}{R_v}$$

c/ Prawdopodobieństwo rażenia samolotu przy strzelaniu rozpryskowym jednej i kilku baterii

Jeżeli salwy są niezależne od siebie, to prawdopodobieństwo rażenia samolotu oblicza się ze wzoru:

$$R_{\bar{m}} = 1 - \prod_{j=1}^v (1 - R_{ij})$$

gdzie: R_i - prawdopodobieństwo rażenia samolotu i-tą salwą.

Prawdopodobieństwo rażenia celu przy strzelaniu grupy baterii

$$R_g = 1 - \prod_{j=1}^{\beta} (1 - R_{\bar{m}.j})$$

1/ Nadzieja matematyczna ilości rażonych samolotów przy strzelaniu jednej i kilku baterii.

Jeżeli strzelanie składa się z jednego strzału, nadzieję matematyczną ilości rażonych samolotów A_I oblicza się ze wzoru:

$$A_I = \sum_{j=1}^M R_{j,I}$$

gdzie: j - numer samolotu w składzie grupowego celu

M - ilość samolotów w grupie

$R_{j,I}$ - prawdopodobieństwo rażenia i -tego samolotu przy jednym strzale.

Z tego samego wzoru korzysta się, jeżeli strzelanie składa się z jednej salwy.

Nadzieję matematyczną ilości rażonych celów przy strzelaniu jednej baterii oblicza się ze wzoru:

$$A_b = \sum_{j=1}^M R_{j,III}$$

gdzie: $R_{j,III}$ - prawdopodobieństwo rażenia i -tego samolotu przy strzelaniu baterii.

Nadzieję matematyczną ilości rażonych samolotów przy strzelaniu kilku baterii określa się ze wzoru:

$$A_g = \sum_{j=1}^M R_{j,g}$$

gdzie: $R_{j,g}$ - prawdopodobieństwo rażenia i -tego samolotu przy strzelaniu kilku baterii.

Nadzieję matematyczną zużycia amunicji niezbędnej do rażenia celu oblicza się:

$$M_{(N)} = \sum_{n=1}^{\infty} n R_n$$

gdzie: n - możliwa wartość zużycia amunicji, niezbędnej do rażenia celu;

R_n - prawdopodobieństwo zużycia tej ilości amunicji.

Wykonano w 50 egz.

Egz.nr 1-50 bibl.jawna . wyk. kpt. Jaroń
Druk. OH, dn.26.9.62r. nr ks. 105/B/WW
CW-0 -XV-1632

