

A 1 2 3 4 5 6 M 8 9 10 11 12 13 14 15 B 17 18 19

AKADEMIA SZTABU GENERALNEGO
im. gen. broni K. Świerczewskiego

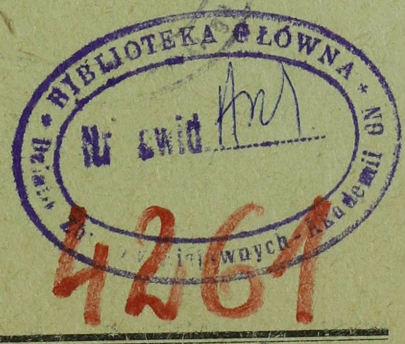
ZESPÓŁ CYBERNETYKI WOJSKOWEJ

*Mr. epz
94*

plk dr Jerzy SKIBIŃSKI

**MODEL ZAGADNIENIA
TRANSPORTOWEGO
W WARUNKACH WIELORAKOŚCI
CEŁÓW**

5/882 94



WARSZAWA

1968



AKADEMIA SZTABU GENERALNEGO

im. gen. broni K. Świerczewskiego

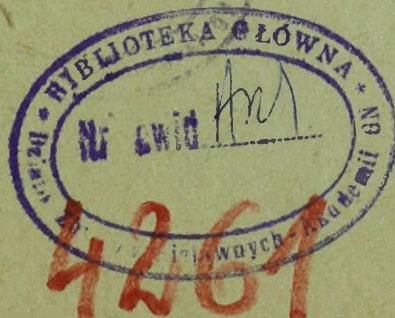
ZESPÓŁ CYBERNETYKI WOJSKOWEJ

*Mr. epz
94*

płk dr Jerzy SKIBIŃSKI

**MODEL ZAGADNIENIA
TRANSPORTOWEGO
W WARUNKACH WIELORAKOŚCI
CEŁÓW**

5/812 *94*



WARSZAWA

1968

AKADEMIA SZTABU GENERALNEGO
im.gen.broni K.Świerczewskiego

ZESPÓŁ CYBERNETYKI WOJSKOWEJ

Płk dr Jerzy SKIBIŃSKI

MODEL ZAGADNIENIA TRANSPORTOWEGO W WARUNKACH
WIELORAKOŚCI CELÓW



WARSZAWA

1968 r.

SPIS TRESCI

OZNACZENIA

0. W S T E P

1. SFORMUŁOWANIE ZAGADNIENIA TRANSPORTOWEGO NIEJEDNORODNEGO.
2. POJECIA UZUPEŁNIAJACE MODEL
3. ALGORYTM
4. PRZYKŁAD 1. Zagadnienie transportowe z dwoma funkcjami celu /dotyczącymi kosztów niejednorodnych/.
5. PRZYKŁAD 2. Zagadnienie transportowe z dwoma funkcjami celu dla kosztów niejednorodnych i funkcją czasu realizacji planu.
6. SCHEMAT BLOKOWY ALGORYTMU.

O Z N A C Z E N I A

- a_i - stan i - tego punktu nadania;
 $i = 1, 2, \dots, m$;
- b_j - stan j - tego punktu odbioru;
 $j = 1, 2, \dots, n$;
- c_{ij} - koszt dowozu jednostki masy;
- s_{ij} - koszt stały dowozu z i do j .
- x_{ij} - stan dowozu z punktu i do punktu j ;
- $K(x)$ - funkcja celu przy $s_{ij} = 0$; $c_{ij} > 0$;
- $K(X)$ - funkcja celu przy $s_{ij} > 0$; $c_{ij} > 0$;
- $\hat{X} = \|\hat{x}_{ij}\|$ - zbiór stanów masy przewożonej według planu optymalnego;
- R - zbiór węzłów $/i, j/$;
- $\chi = \|\chi_{ij}\|$ - zbiór stanów masy przewożonej według planu dopuszczalnego tj. $x_{ij} > 0$;
- Q_x - koszt stały realizacji planu dopuszczalnego;
- R_1 - zbiór węzłów w planie dopuszczalnym dla których $x_{ij} > 0$;
- R_2 - zbiór węzłów w planie dopuszczalnym dla których $c_{ij} < 0$;
- $\tilde{X} = \|\tilde{x}_{ij}\|$ - plan dopuszczalny /wśród wszystkich planów dopuszczalnych z $x_{ij} > 0/ z acyklicznym łańcuchem elementów różnych od zera;$
- $W(+)$ - zbiór węzłów tworzących cykl do których wprowadza się wielkość $z = \min x_{ij}$;
 $(i, j) \in W(-)$
- $W(-)$ - zbiór węzłów tworzących cykl z których zdejmuje się obciążenie;

$z = \min_{(i,j) \in W} x_{ij}$ - najmniejsza spośród wielkości x_{ij} w cyklu
odciążającym węzeł $/i_0j_0/$;

D - łańcuch zawierający $m + n - 1$ węzłów z
których każdy $(i,j) \in R \setminus D$ tworzy cykl;

$\xi_{ij} = z (c_{ij} - p_i - q_j)$ wartość wężła (i,j) w cyklu;

$\tilde{c}_{ij} = (c_{ij} - p_i - q_j)$ współczynnik określający węzeł
 i,j w stosunku do potencjałów;

p_i - potencjał wiersza;

q_j - potencjał kolumny.

0. WSTEP

Model typowego zagadnienia transportowego, dotyczącego przesunięć mas jednorodnych, formuluje się w postaci układu równań obejmujących:

- a/ bilans możliwości n ($j = 1, 2, \dots, n$ / punktów nadania):

$$\sum_{j=1}^n x_{ij} = a_i ; \quad (i = 1, 2, \dots, m) \quad 1$$

- b/ bilans zapotrzebowań zgłoszonych przez m ($i = 1, 2, \dots, m$ / punktów odbioru):

$$\sum_{i=1}^m x_{ij} = b_j ; \quad (j = 1, 2, \dots, n) \quad 2$$

- c/ funkcję celu minimalizującą ogólny koszt realizacji planu:

$$k(x) = \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n c_{ij} x_{ij} \dots \dots \dots 3$$

- d/ warunki uzupełniające:

$$x_{ij} \geq 0, \quad c_{ij} \geq 0, \quad a_i > 0, \quad b_j > 0 \quad 4$$

1. SFORMUŁOWANIE ZAGADNIENIA TRANSPORTOWEGO NIEJEDNORODNEGO

1.1. Wprowadźmy do układu (1) - (4) warunek dodatkowy mówiący o tym, że wszelkie przesunięcie masy x_{ij} jest związane z pewnym kosztem stałym, tj. określonym dla trasy (i, j) . Niech ten koszt wynosi s_{ij} ($s_{ij} > 0$). Wtedy, funkcja celu (3) przyjmie postać:

$$K(X) = \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n y_{ij}(x_{ij});$$

5

przy czym

$$y_{ij}(x_{ij}) = \begin{cases} 0, & \text{jeśli } x_{ij} = 0 \\ C_{ij} x_{ij} + S_{ij}, & \text{jeśli } x_{ij} > 0 \end{cases} \quad (5')$$

§ 1.2. W tym ujęciu zagadnienie można sprowadzić do opracowania planu przesunięcia masy z m punktów nadania do n punktów odbioru, zgodnie z warunkami (1), (2), (4), (5) i (5') /tj. zastępując funkcję celu (3) funkcją (5) z warunkiem (5') .

2. POJĘCIA UZUPEŁNIAJĄCE MODEL

§ 2.1. Wychodząc z pojęcia plan dopuszczalny, tj. wyrażony przez zbiór $X = \{ \| x_{ij} \| \}$ i spełniający warunki (1), (2), (4), wprowadzamy dodatkowo:

2.2. Df: plan optymalny = zbiór $\hat{X} = \{ \| \hat{x}_{ij} \| \}$ minimalizujący funkcję (5) przy warunku (5') .

§ 2.3. Df: w e ź e ł = dowolna para $/i, j/$

§ 2.4. Df: R = zbiór wszystkich węzłów $/i, j/$.

§ 2.5. Df: $R_r = \text{łańcuch}$ = dowolny podzbiór węzłów ze zbioru R .

§ 2.6. Df: C y k l = łańcuch w postaci węzłów

$$(i_0, j_0), (i_0, j_1), \dots, (i_\alpha, j_0).$$

§ 2.7. Plan dopuszczalny (§ 2.1), nie zawierający cyklu (§ 2.6) złożonego z elementów $x_{ij} > 0$, nazywamy a c y k l i c z n y m.

§ 2.8. Każdemu planowi dopuszczalnemu $X = \|x_{ij}\|$

(§ 2.1.) odpowiada pewien podzbiór elementów macierzy $\|s_{ij}\|$, określający dla tego planu dodatkowy koszt realizacji, czyli:

$$Q_X = \sum_{(i,j) \in R_1} s_{ij} \quad 6$$

gdzie R_1 jest zbiorem węzłów (i,j) dla których $x_{ij} > 0$.

2.9. Twierdzenie. Wśród wszystkich planów dopuszczalnych

$X = \|x_{ij}\|$, w których $x_{ij} > 0$ tworzą cykl / 2.6/ istnieje taki plan dopuszczalny $\tilde{X} = \|\tilde{x}_{ij}\|$ z acyklicznym łańcuchem elementów różnych od zera, spełniający nierówność:

$$\sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n c_{ij} \tilde{x}_{ij} + Q_{\tilde{X}} < \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n c_{ij} x_{ij} + Q_X \quad 7$$

w którym jest mniej elementów różnych od zera niż w planie X .

D o w ó d. Oznaczmy przez W zbiór węzłów tworzących cykl, przy czym takich w w których odpowiednie $x_{ij} > 0$. Jeśli dowolny węzeł z tego cyklu oznaczymy znakiem $(+)$, a kolejne, zgodnie z ruchem wskazówki zegara, naprzemian znakami $(-)$ i $(+)$ to $W_{(-)}$ i $W_{(+)}$ będą odpowiednio zbiorami tych węzłów.

Przyjmujemy, że wtedy może wystąpić nierówność:

$$\sum_{(i,j) \in W_{(+)}} c_{ij} \leq \sum_{(i,j) \in W_{(-)}} c_{ij} \quad 8$$

lub

$$\sum_{(i,j) \in W_{(-)}} c_{ij} \leq \sum_{(i,j) \in W_{(+)}} c_{ij}$$

8

Niech $\min_{(i,j) \in W_{(-)}} x_{ij} = z$. Wtedy nowe rozwiązanie dopuszczalne

$$\tilde{x}_{ij} = \begin{cases} x_{ij} + z, & \text{jeśli } (i,j) \in W_{(+)}; \\ x_{ij} - z, & \text{jeśli } (i,j) \in W_{(-)}; \\ x_{ij}, & \text{jeśli } (i,j) \in R \setminus W_{(+)} \cup W_{(-)}; \end{cases} \quad 9$$

przy czym może mieć miejsce przypadek, że $x_{ij} = z$ wystąpi w pewnej liczbie węzłów.

Niech $x_{i_k j_k} = z$ ($k = 1, \dots, k_1$) oraz

$(i_k, j_k) \in W_{(-)}$. Wtedy:

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n c_{ij} \tilde{x}_{ij} &= \sum_{(i,j) \in R \setminus W_{(+)} \cup W_{(-)}} c_{ij} x_{ij} + \sum_{(i,j) \in W_{(+)}} c_{ij} (x_{ij} + z) + \\ &+ \sum_{(i,j) \in W_{(-)}} c_{ij} (x_{ij} - z) + Q_x - \sum_{x=1}^{x_1} s_{i_x j_x} = \\ &= \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n c_{ij} x_{ij} + z \left(\sum_{(i,j) \in W_{(+)}} c_{ij} - \sum_{(i,j) \in W_{(-)}} c_{ij} \right) + Q_x - \sum_{x=1}^{x_1} s_{i_x j_x} \end{aligned}$$

Biorąc pod uwagę niewólność /8/ oraz warunek

$$\sum_{x=1}^{x_1} s_{i_x j_x} > 0;$$

otrzymamy

$$\sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n c_{ij} \tilde{x}_{ij} + Q_{\tilde{x}} < \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n c_{ij} x_{ij} + Q_x \quad 10$$

§ 2.10. Ponadto w planie dopuszczalnym $\tilde{X} = \|\tilde{x}_{ij}\|$

będzie przynajmniej o jeden element $\tilde{x}_{ij} > 0$ mniej niż w planie $X = \|x_{ij}\|$. Gdyby w planie dopuszczalnym $X = \|x_{ij}\|$ występowała pewna ilość cykli zawierających $x_{ij} > 0$, wtedy stosując proponowaną metodę można cykle te kolejno usuwać. Odpowiadająca temu rozwiązaniu wartość funkcji celu będzie więc mniejsza od

$$K = \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n c_{ij} x_{ij} + Q_x \quad 11$$

A zatem, plan optymalny będzie występował wśród planów acyklicznych.

§ 2.11. Plany optymalne posiadają następujące własności.

1. Zbiór węzłów $\langle i, j \rangle$, dla których $x_{ij} > 0$, spełnia nierówność:

$$n < V \leq m + n - 1 \quad (m \leq n)$$

2. W łańcuchu D , zawierającym $m + n - 1$ węzłów, każdy węzeł $\langle i, j \rangle \in R \setminus D$ tworzy jeden i tylko jeden cykl.
3. Włączając do łańcucha D węzeł $\langle i, j \rangle \in R \setminus D$ i wyłączając z D węzeł $\langle i, j \rangle$ występujący w cyklu utworzonym przez węzeł $\langle i, j \rangle$ z łańcuchem D , ponownie otrzyma się łańcuch acykliczny.
4. Ocena c_{ij} węzła $\langle i, j \rangle$ nie występującego w łańcuchu D .

4.1. Jeśli węzeł $(i,j) \notin D$ wtedy wraz z węzłami łańcucha D tworzy on cykl oddzielny.

Zgodnie z §2.9. wyznaczmy zbiory $W_{(+)}$ i $W_{(-)}$, przy czym niech $z = \min_{(i,j) \in W_{(-)}} x_{ij}$. W związku z tym niech będzie

$W_{z(-)}$ zbiór $W_{(-)}$ w którym $z = x_{ij}$ oraz

$W_{0(+)}$ zbiór $W_{(+)}$ w którym $x_{ij} = 0$.

4.2. Jeśli przez p_i ($i = 1, 2, \dots, m$) i q_j ($j = 1, 2, \dots, n$) oznaczymy odpowiednie potencjały, to ich wartości można obliczyć z układu $m + n - 1$ równań $p_i + q_j = c_{ij}$

Wtedy ocena węzła $(i,j) \in R \setminus D$ przyjmie postać:

$$\xi_{ij} = z(c_{ij} - p_i - q_j) - \sum_{(i,j) \in W_{0(+)}} \Delta_{ij} - \sum_{(i,j) \in W_{z(-)}} \Delta_{ij} \quad 12$$

4.3. Niech R_2 będzie zbiorem węzłów zawierających

$$\tilde{c}_{ij} = c_{ij} - p_i - q_j < 0 \quad 13$$

4.4. Cyklami bez obciążeń będziemy nazywali te w których węzeł $(i_0, j_0) \in W_{(-)}$. Cykle te wyznaczamy rozpatrując węzły i -tego wiersza i j -tej kolumny, przy czym także dla których $(i,j) \in R \setminus D$.

§3. ALGORYTM

BLOK 1. Zapis warunków zadania w postaci macierzy:

$$\|c_{ij}\|, \|\Delta_{ij}\| \text{ oraz wektorów } |a_i| \text{ i } |b_j|.$$

BLOK 2. Opracowanie wyjściowego /bazowego/ planu dopuszczalnego ze względu na funkcję celu /3/ oraz przy założeniu $s_{ij} = 0$. /Można przyjąć dowolną metodę, np. renty różnicowej, "kąta północno-zachodniego, VAM itp/.

BLOK 3. Obliczenie potencjałów dla planu w bloku 2.

BLOK 4. Wyznaczenie zbioru węzłów R_2 oraz obliczenie dla każdego węzła z tego zbioru wartości

$$\tilde{c}_{ij} = c_{ij} - p_i - q_j$$

BLOK 5. Dla każdego \tilde{c}_{ij} /blok 4/ obliczyć ξ_{ij} . W tym celu, zgodnie z (9):

5.1. wybranemu \tilde{c}_{ij} przyporządkować /wg § 2.9./

$$\min_{(i,j) \in W(-)} x_{ij} = z_{ij};$$

5.2. dla wybranego z_{ij} wyznaczyć cykl;

5.3. dla wybranego cyklu obliczyć ξ_{ij} / wg § 2.11.4.2/

5.4. Działania od 5.1 do 5.3 wykonać dla każdego \tilde{c}_{ij} .

BLOK 6. Spośród ξ_{ij} wybrać posiadającą najmniejszą wartość ujemną.

BLOK 7. Do węzła odpowiadającego ξ_{ij} wybranemu w bloku 6. wprowadzić właściwe $\tilde{x}_{ij} = z$ oraz zgodnie z przyjętą regułą wykonać nowy plan dopuszczalny.

Działanie według bloków 3,4,5 i 6 przeprowadzać dopóki:

7.1. zbiór R_2 nie stanie się pusty lub

7.2. wszystkie węzły tego zbioru otrzymają ξ_{ij} nie - ujemne.

BLOK 8. Odciążenie węzła w którym

$$\Delta_{i_0 j_0} = \max_{(i,j) \in R_1} \Delta_{ij} ;$$

8.0. W tym celu dla wybranego węzła (i_0, j_0) określić cykle odciążające spośród których wybrać ten w którym występuje wartość z doprowadzającą $x_{i_0 j_0}$ do zera /tj. dla $(i_0, j_0) \in W_{(-)} / \cdot$

Może wystąpić jeden z czterech następujących przypadków.

8.1. Dla węzła $(i_0, j_0) \in R_1$ wystąpi przynajmniej jeden cykl odciążający, w którym $x_{i_0 j_0} = z$ $[(i_1, j_1) \in D]$ oraz $\xi_{i_1 j_1} < 0$; w związku z tym węzeł (i_1, j_1) obciążyć wielkością $x_{i_1 j_1} = z$, wprowadzić do łańcucha D oraz wykonać dalsze działania według bloków od 3 do 7.

8.2. Dla wszystkich węzłów (i_k, j_k) tworzących cykle odciążające dla węzła (i_0, j_0) $x_{i_0 j_0} = z$ wystąpią oceny $\xi_{i_k j_k} > 0$; w związku z tym z podzbioru $L_{i_0 j_0}$ węzłów (i_k, j_k) w których $x_{i_k j_k} = z$ wybrać węzeł posiadający najmniejszą wartość $\xi_{i_k j_k} = \min$:

1. Węzeł ten wprowadzić do planu zmieniając go w nową wersję planu dopuszczalnego. Wyznaczyć w nowym planie zbiór $R_2 \setminus \{i_0, j_0\}$.
2. Dla każdego $(- \bar{c}_{ij}) \in R_2$ działać według bloków od 3 do 7.
3. Przy każdej zmianie planu zapisać wartość wprowadzaną do łańcucha tj. tzw. uogólnioną sumę ξ .
4. Jeśli uogólniona suma ξ dla rozpatrywanego węzła jest ujemna - należy przejść do bloku 6 obliczeń podstawowych. Jeśli natomiast suma ta jest nieujemna - przejść do następnego węzła ze zbioru $L_{i_0 j_0}^z$. Wybieramy dla niego cykl, obliczamy

wartość ξ , przy czym działanie to wykonujemy aż do odciążenia węzła (i_0, j_0) ; gdyby jednak dla wszystkich węzłów zbioru L_{i_0, j_0}^z wartości sum uogólnionych (dla ξ) były nieujemne, oznacza to brak możliwości odciążenia (i_0, j_0) . W związku z tym należy przejść do odciążenia następnego węzła posiadającego odpowiednio mniejszą wartość $\delta_{i_1, j_1} = \max_{(i, j) \in R_1} s_{ij}$, tj od bloku 8.2.

8.3. Istnieją tylko takie cykle odciążające węzeł (i_0, j_0) dla których $\chi_{i_0, j_0} > z$. Zbiór węzłów $z \in R \setminus D$ tworzących te cykle oznaczymy L_{i_0, j_0} .

1. Wprowadzając kolejno wybrane cykle, odciążać węzeł (i_0, j_0) aż do uzyskania $\chi_{i_0, j_0} = 0$. Wartości ξ węzłów wprowadzonych do łańcuchów /po każdym odciążeniu (i_0, j_0) - zapisać zgodnie z zasadami postępowania w/g bloków od 3 do 7.
2. Dodać wartości ξ obliczone dla węzłów wprowadzonych do łańcucha.
3. Jeśli suma ξ będzie ujemna, to wynik działania (realizowanego w punkcie 7.3.1), przenieść do tablicy pomocniczej na której sprawdzić pozostałe możliwości odciążenia (i_0, j_0) .
4. Jeśli suma ξ będzie nieujemna, uznać, że węzła (i_0, j_0) odciążyć nie można i przejść do następnego (i_1, j_1) w którym $\delta_{i_1, j_1} = \max_{(i, j) \in R_1 \setminus D(i_0, j_0)} \delta_{ij}$.
4. Nie istnieją cykle odciążające węzeł (i_0, j_0) .
W związku z tym, przystąpić do odciążenia następnego węzła (i_1, j_1) .

x x x

Postępowanie algorytmiczne uważa się za zakończone,
gdy

$$\xi_{ij} \geq 0, (i,j) \in R \setminus D$$

a węzły $(i,j) \in R_1$ posiadające $\delta_{ij} > \min_{(i,j) \in R \setminus D} \delta_{ij}$, mają uogólnione sumy ξ dodatnie.

Sprawdzenie optymalności otrzymanego rozwiązania polega na wykazaniu, że wartość funkcji celu dla ostatniej wersji planu dopuszczalnego jest mniejsza niż odpowiednia wartość dla planu optymalnego, zbudowanego przy założeniu $\delta_{ij} = 0$, lecz uwzględniającego również koszt stały Q .

4. PRZYKŁAD

BLOK 1. Dane wyjściowe zagadnienia transportowego przedstawiono w tablicy 1. W lewym górnym rogu każdej kratki wpisano jednostkowe koszty transportu (c_{ij}), w prawym górnym rogu - koszty stałe (s_{ij}).

TABLICA 1

i \ j	b_1	b_2	b_3	b_4	
a_1	17 370	8 200	14 50	19 100	80
a_2	6 250	13 450	9 80	15 70	120
a_3	20 100	5 300	17 250	7 180	200
	70	100	140	90	400
					400

BLOK 2. Opracowanie wyjściowego planu dopuszczalnego ze względu na koszty jednostkowe c_{ij} przy założeniu $s_{ij} = 0$. Zastosowano metodę "kąta północno-zachodniego". Wynik - jak tablica 2 dla iteracji 1.

i \ j	b_1	b_2	b_3	b_4	
a_1	17 370 70	8 200 10	14 50	19 100	80
a_2	6 250	13 450 90	9 80 30	15 70	120
a_3	20 100	5 300	17 250 110	7 180 90	200
	70	100	140	90	400 400

Koszt realizacji tej wersji planu dopuszczalnego:

Koszty transportu w/g (3) - 5750

Koszty stałe - 1530

Razem: 7280

BLOK 3. Obliczenie potencjałów p_i i q_j dla planu otrzymanego w bloku 2. Wartości potencjałów wpisano odpowiednio w skrajnej lewej kolumnie i górnym wierszu tablicy 3.

TABLICA 3

$i \backslash j$	$q_1=17$	$q_2=8$	$q_3=4$	$q_4=-6$	
$p_1=0$	17 70	8 10	14 30	19 90	80
$p_2=5$	6 250	13 -6	9 +10	15 +13	120
$p_3=13$	20 -10	5 -16	17 110	7 90	200
	70	100	140	90	400

Uwaga: Potencjały p_i i q_j oblicza się tylko w stosunku do węzłów "obciążonych" /zbiór R_1 /, przyjmując $p_1 \geq 0$, a praktycznie $p_1 = 0$, tak aby $c_{ij} = p_i + q_j$.

FLOK 4. Wyznaczenie zbioru R_2 , tj zbioru węzłów "nieobciążonych". Obliczenie dla każdego węzła z tego zbioru:

$$\tilde{c}_{ij} = c_{ij} - p_i - q_j \quad /w/g \text{ § 2.11. 4.3/}$$

Wyniki zawiera tablica 4.

TABLICA 4

$i \backslash j$	$q_1=17$	$q_2=8$	$q_3=4$	$q_4=-6$	
$p_1=0$			14 +10	19 +13	
$p_2=5$	6 250 -6			15 +14	
$p_3=13$	20 -10	5 -16			

BLOK 5. Dla każdego wężła nieobciążonego obliczyć

ξ_{ij} . W tym celu:

- 5.1. wybranemu c_{ij} przyporządkować $\min_{(i,j) \in W(-)} x_{ij} = z_{ij}$
/w/g § 2.9/;
- 5.2. dla wybranego z_{ij} wyznaczyć cykl;
- 5.3. dla wyznaczonego cyklu obliczyć ξ_{ij} /w/g § 2.11.
4.3/;
- 5.4. działania /1 do 3 / wykonać dla każdego \tilde{c}_{ij} .
- 5.5. spośród ξ_{ij} wybrać posiadającą najmniejszą
wartość ujemną.

Obliczenie.

/2.1/ Ad. 5.1. dla $(i,j) = (2,1)$ $\tilde{c}_{21} = -16$
por. tablica 4 ;

$$z_{21} = 70 \text{ lub } 90, \text{ stąd } z_{21} = 70;$$

Ad. 5.2. cykl: $+(2,1) : s_{21} = +250$; $-(1,1) :$

$$s_{11} = -370;$$

Ad. 5.3. $\xi_{21} = -16 \cdot 70 + 250 - 370 = -1210$.

/3.1/ Ad. 5.1. dla $(i,j) : (3,1)$; $\tilde{c}_{31} = -10$;

$$z_{31} = 70 \text{ lub } 110, \text{ stąd } z_{31} = 70;$$

Ad. 5.2. cykl: $+(3,1) : s_{31} = +100$; $-(1,1) :$

$$s_{11} = -370;$$

Ad. 5.3. $\xi_{31} = -10 \cdot 70 + 100 - 370 = -970$;

/3,2/ Ad 5.1 dla $(i,j) : (3,2) ; \tilde{c}_{32} = -16;$

$$z_{32} = 90 \text{ lub } 110, \text{ stąd } z_{32} = 90;$$

Ad 5.2 cykl: $+ (3,2) : s_{32} = +300; - (2,2) :$

$$s_{22} = -450;$$

$$\text{Ad 5.3 } \xi_{32} = -16 \cdot 90 + 300 - 450 = -1590$$

/1,3/ Ad 5.1 dla $(i,j) : (1,3) ; \tilde{c}_{13} = +10;$

$$z_{13} = 10 \text{ lub } 30, \text{ stąd } z_{13} = 10;$$

Ad 5.2. cykl: $+ (1,3) : s_{13} = +50; - (1,2) :$

$$s_{12} = -200;$$

$$\text{Ad 5.3 } \xi_{13} = +10 \cdot 10 + 50 - 200 = -50.$$

/1,4/ Ad 5.1. dla $(i,j) = (1,4) ; \tilde{c}_{14} = +13;$

$$z_{14} = 10 \text{ lub } 90, \text{ stąd } z_{14} = 10;$$

Ad 5.2. cykl: $+ (1,4) : s_{14} = +100;$

$$- (1,2) : s_{12} = -200;$$

$$\text{Ad 5.3. } \xi_{14} = +13 \cdot 10 + 100 - 200 = +30.$$

/2,4/ Ad 5.1 dla $(i,j) = (2,4) ; \tilde{c}_{24} = +14;$

$$z_{24} = 30 \text{ lub } 90, \text{ stąd } z_{24} = 30;$$

Ad 5.2 cykl: $+ (2,4) : s_{24} = +70; - (2,3) :$

$$s_{23} = -80;$$

$$\text{Ad 5.3 } \xi_{24} = +14 \cdot 30 + 70 - 80 = +410.$$

ad. 5.5. Spośród ξ_{ij} , obliczonych w bloku 5.4. wybrać ξ_{ij} o wartości najmniejszej, czyli:

$$\xi_{32} = -1590$$

BLOK 6. Wprowadzając do węzła (3,2) $x_{32} = 90$, zmienić plan dopuszczalny /tablica 2/. Zgodnie z regułą "kąta północno-zachodniego" nowy plan dopuszczalny przyjmie postać /tablica 5/ iteracji 2:

ITERACJA 2.

TABLICA 5.

i \ j	b ₁	b ₂	b ₃	b ₄	
a ₁	17 370 70	8 200 10	14 50	19 100	80
a ₂	6 250	13 450	9 80 120	15 70	120
a ₃	20 100	5 300 90	17 250 20	7 180 90	200
	70	100	140	90	400 400

Koszt realizacji tej wersji planu dopuszczalnego:

Koszty transportu przy $s_{ij} = 0$ 3770

Koszty stałe ($s_{ij} > 0$) 1380

Razem: 5150

Przejęcie do iteracji 3. Obliczenie potencjałów p_i i q_j dla planu dopuszczalnego w/g tablicy 2. /jak działanie w/g bloku 3/. Wyniki zawiera tablica 6.

TABLICA 6

i \ j	$q_1=17$	$q_2=8$	$q_3=20$	$q_4=10$	
$p_1=0$	$\begin{matrix} 17 \\ 370 \\ 70 \end{matrix}$	$\begin{matrix} 8 \\ 200 \\ 10 \end{matrix}$	$\begin{matrix} 14 \\ 50 \\ -6 \end{matrix}$	$\begin{matrix} 19 \\ 100 \\ +9 \end{matrix}$	80
$p_2=-11$	$\begin{matrix} 6 \\ 250 \\ 0 \end{matrix}$	$\begin{matrix} 13 \\ 450 \\ +16 \end{matrix}$	$\begin{matrix} 9 \\ 80 \\ 120 \end{matrix}$	$\begin{matrix} 15 \\ 70 \\ +16 \end{matrix}$	120
$p_3=-3$	$\begin{matrix} 20 \\ 100 \\ +6 \end{matrix}$	$\begin{matrix} 5 \\ 300 \\ 90 \end{matrix}$	$\begin{matrix} 17 \\ 250 \\ 20 \end{matrix}$	$\begin{matrix} 7 \\ 180 \\ 90 \end{matrix}$	200
	70	100	140	90	$\begin{matrix} 400 \\ 400 \end{matrix}$

Obliczenie \tilde{c}_{ij} w zbiorze R_2 /jak blok 4/. Wyniki zawiera tablica 6.

Jak blok 5.

Obliczenie:

Dla $(i,j) : (2,4) ; \tilde{c}_{24} = 0$ /por. tablica 6/;

$$z_{24} = 70 \text{ lub } 120; \quad z_{24} = 70;$$

$$\text{cykl: } + (2,1) : s_{21} = + 250; \quad - (1,1) = - 3 \cdot 70;$$

$$\xi_{24} = 0 \cdot 70 + 250 - 370 = \underline{\underline{-120}}$$

Dla $(i,j) = (3,1) ; \tilde{c}_{31} = + 6;$

$$z_{31} = 70 \text{ lub } 90; \quad z_{31} = 70;$$

$$\text{Cykl: } + (3,1) : s_{31} = + 100; \quad - (1,1) : s_{11} = - 370;$$

$$\xi_{31} = + 6 \cdot 70 + 100 - 370 = \underline{\underline{+150}};$$

Dla $(i,j) = (2,2) ; \tilde{c}_{22} = + 16;$

$$z_{22} = 90 \text{ lub } 120; \quad z_{22} = 90;$$

$$\text{Cykl: } + (2,2) : s_{22} = + 450; \quad -(3,2) : s_{32} = -300;$$

$$\xi_{22} = + 16 \cdot 90 + 450 - \underline{300} = + 1590;$$

$$\text{Dla } (i,j) = (1,3); \quad \tilde{e}_{13} = - 6;$$

$$z_{13} = 10 \text{ lub } 120; \quad z_{13} = 10;$$

$$\text{cykl: } + (1,3) : s_{13} = + 50; \quad - (1,2) : s_{12} = - 200;$$

$$\xi_{13} = 6 \cdot 10 + 50 - \underline{200} = - 210;$$

$$\text{Dla } (i,j) = (1,4) : \quad \tilde{e}_{14} = + 9;$$

$$z_{14} = 10 \text{ lub } 90; \quad z_{14} = 10;$$

$$\text{cykl: } + (1,4) : s_{14} = + 100; \quad - (1,2) : s_{12} = - 200;$$

$$\xi_{14} = + 9 \cdot 10 + 100 - 200 = - 10;$$

$$\text{Dla } (i,j) = (2,4) : \quad \tilde{e}_{24} = + 16;$$

$$z_{24} = 90 \text{ lub } 120; \quad z_{24} = 90;$$

$$\text{cykl: } + (2,4) : s_{24} = + 70; \quad -(3,4) : s_{34} = - 180;$$

$$\xi_{24} = + 16 \cdot 90 + 70 - 180 = + \underline{1330}$$

Spośród ξ_{ij} obliczonych w bloku 8 wybrać ξ_{ij} o wartości najmniejszej, czyli:

$$\xi_{13} = - 210$$

Jak blok 6. Wprowadzając do węzła $(1,3)$ $x_{13} = 10$, zmienić plan dopuszczalny w/g iteracji 2 /tablica 5/. Zgodnie z regułą "kąta północno-zachodniego" nowy plan dopuszczalny przyjmie postać iteracji 3. /tablica 7/:

i \ j	$q_1=17$	$q_2=2$	$q_3=14$	$q_4=4$	
$p_1=0$	17 370 70	8 200 +6	14 50 10	19 100 +15	80
$p_2=-5$	6 250 -6	13 450 +16	9 80 120	15 70 +16	120
$p_3=3$	20 100 0	5 300 100	17 250 10	7 180 90	200
	70	100	140	90	400 400

$$\xi_{21} = -6 \cdot 70 + 250 - 370 = -540;$$

$$\xi_{31} = 0 \cdot 70 + 100 - 370 + 200 = -70,$$

$$\xi_{12} = +6 \cdot 10 + 200 - 50 = +210,$$

$$\xi_{22} = +16 \cdot 100 + 450 - 300 = +1750,$$

$$\xi_{14} = +15 \cdot 10 + 100 - 50 = +200,$$

$$\xi_{24} = +16 \cdot 90 + 70 - 180 = +1330.$$

Ponieważ najmniejszą spośród wartości ujemnych posiada $\xi_{21} = -540$, zatem iteracja 5 będzie polegała na wprowadzeniu do węzła (2,1) $x_{21} = 70$ i odpowiedniej zmianie planu dopuszczalnego w/g tablicy 8.

i \ j	$q_1 = 11$	$q_2 = 8$	$q_3 = 14$	$q_4 = 10$	
$p_1 = 0$	$\boxed{17}$ 370 +6	$\boxed{8}$ 200 0	$\boxed{14}$ 50 80	$\boxed{19}$ 100 +9	80
$p_2 = -5$	$\boxed{6}$ 250 70	$\boxed{13}$ 450 +10	$\boxed{9}$ 80 50	$\boxed{15}$ 70 +10	120
$p_3 = -3$	$\boxed{20}$ 100 +12	$\boxed{5}$ 300 100	$\boxed{17}$ 250 10	$\boxed{7}$ 180 90	200
	70	100	140	90	$\begin{matrix} 400 \\ 400 \end{matrix}$

Koszty realizacji tej wersji planu wynoszą:

Koszty transportu przy $s_{ij} = 0$ 3290

Koszty stałe $/s_{ij} > 0/$ 1110

Razem 4400

W wyniku obliczenia potencjałów p_i i q_j oraz wartości \tilde{c}_{ij} , otrzymano następujące oceny cykli węzłów nieobciążonych /tablica 9/:

$$\varepsilon_{11} = + 6 \cdot 70 + 370 - 250 = + 540,$$

$$\varepsilon_{31} = + 12 \cdot 70 + 100 - 250 + 450 = + 1140,$$

$$\varepsilon_{12} = 0 \cdot 80 + 200 - 50 = + 150,$$

$$\varepsilon_{22} = + 10 \cdot 50 + 450 - 80 = + 870,$$

$$\varepsilon_{14} = + 9 \cdot 80 + 100 - 50 = + 770,$$

$$\varepsilon_{24} = + 10 \cdot 50 + 70 - 80 = + 480$$

Ponieważ wszystkie ξ_{ij} są nieujemne, to zgodnie z postępowaniem algorytmicznym dla tego zadania - wystąpił bowiem przypadek bloku 7.2 - należy przystąpić do odciążenia węzła posiadającego

$$\Delta_{i_0 j_0} = \max_{(ij) \in R_1} s_{ij} \quad \text{/blok 7/}$$

Wybrany węzeł (3,2) odpowiada temu warunkowi $/s_{32} = 300/$, a zgodnie z blokiem 8.0 wystąpił przypadek 8.4. Węzła (3,2) nie można odciążyć, ponieważ wartości ξ dla ewentualnych odciążających go węzłów będą dodatnie.

Kolejny węzeł, który można odciążyć /tj. 3,3 / posiada: $s_{33} = 250$ i $x_{33} = z = 10$. Dla odciążającego go węzła (3,1) wartość ξ_{31} wynosi: $+12 \cdot 10 + 100 - 250 = -30$, co oznacza, że taka możliwość istnieje i powinna być korzystna dla danego planu dopuszczalnego.

W związku z tym nowy plan dopuszczalny przyjmie postać /tablica 10/:

ITERACJA 6

TABLICA 10

i \ j	$q_1 = 11$	$q_2 = -4$	$q_3 = 14$	$q_4 = -2$	
$p_1 = 0$	$\boxed{12}$ 370 +6	$\boxed{8}$ 200 +12	$\boxed{14}$ 50 80	$\boxed{19}$ 100 +21	80
$p_2 = -5$	$\boxed{6}$ 250 60	$\boxed{13}$ 450 +22	$\boxed{9}$ 80 60	$\boxed{15}$ 70 +22	120
$p_3 = 9$	$\boxed{20}$ 100 10	$\boxed{5}$ 300 100	$\boxed{17}$ 250 -6	$\boxed{7}$ 180 90	200
	70	100	140	90	$\begin{matrix} 400 \\ 400 \end{matrix}$

Koszt realizacji planu:

Koszty transportu przy $s_{ij} = 0$ 3350

Koszty stałe ($s_{ij} > 0$) 960

Razem: 4310

Plan optymalny na podstawie funkcji celu (3) miałby postać /tablica 11/

TABLICA 11

i \ j	b_1	b_2	b_3	b_4	
a_1	17	8	14	19	80
			50		
		80			
a_2	6	13	9	15	120
	250		80		
	70		50		
a_3	20	5	17	7	200
		300	250	180	
		100	10	90	
	70	100	140	90	400
					400

Koszt realizacji tego planu wynosi:

Koszt transportu /przy $s_{ij} = 0$ / 3290

Koszt stały ($s_{ij} > 0$) 1110

Razem 4400

A zatem, plan otrzymany jako wynik iteracji 6 /tablica 10/ należy uznać jako optymalny, ponieważ funkcja celu przyjmuje mniejszą wartość /4310/ niż dla planu optymalnego przy kryterium /3/.

PRZYKŁAD 2. Optymalizacja planu dowozu w warunkach ograniczonego czasu.

Warunki zadania - jak w przykładzie 1 - zawiera tablica 2.1. Ponadto, wprowadza się ograniczenia w postaci najdłuższego czasu w jakim plan powinien być zrealizowany. Zakładając, że stan środków transportowych zapewnia przesunięcie zaplanowanej masy z punktu i do punktu j w jednym rejsie /np. kolumny samochodowej/ w tablicy 2.2 podano średnie czasy przejazdu.

Należy opracować plan dowozu zapewniający pełne zapotrzebowania zgłoszone przez punkty j w czasie ograniczonym do 16 godzin, z uwzględnieniem lokalnego ekstremum funkcji kosztów jednostkowych przewozu masy i funkcji kosztów stałych.

TABLICA 2.1.

$i \backslash j$	b_1	b_2	b_3	b_4	b_5	
a_1	17 550	14 1000	4 1200	7 950	19 780	100
a_2	8 400	10 1250	21 900	15 850	6 1210	150
a_3	19 1700	6 2200	12 1000	22 970	9 870	180
a_4	3 2800	25 800	18 920	10 320	13 600	120
	70	130	160	80	110	550

Uwaga: w lewym górnym rogu kratki $/i,j/$ wpisano jednostkowe koszty transportu $/c_{ij}/$, w prawym górnym rogu -
 - koszty stałe $/s_{ij}/$

TABLICA 2.2.

$i \backslash j$	b_1	b_2	b_3	b_4	b_5	
a_1	22	15	13	18	12	100
a_2	16	14	15	10	17	150
a_3	14	19	10	16	14	180
a_4	10	12	20	13	21	120
	70	130	160	80	110	550
						550

Uwaga: w kratkach $/i,j/$ wpisano czas przejazdu z punktu i do j z ładunkiem określonym w planie optymalnym i wszelkich planach dopuszczalnych.

Uwzględniając 16 godzin jako górną granicę transportu, z punktu i do j , dane zagadnienie przyjmie postać tablicy 2.3.

TABLICA 2.3

i \ j	b ₁	b ₂	b ₃	b ₄	b ₅	
a ₁	14 1000	4 1200	19 780			100
a ₂	8 400	10 1250	21 900	15 850	9 870	150
a ₃	19 1700	12 1000	22 970	9 870		180
a ₄	3 2800	25 800	10 320	10 320	10 320	120
	70	130	160	80	110	550
						550

ROZWIĄZANIE

BŁOK 1. Wprowadzone do pamięci założenia wyjściowe przedstawia tablica 2.3.

Węzły $/i, j/$ w których czasy przesunięcia mas przekraczają 16 godzin nie zostały wypełnione. Stąd, macierz kosztów transportu stała się tzw. macierzą "dziurawą".

BŁOK 2. Opracowanie pierwszego planu dopuszczalnego /iteracja 1/ przy założeniu $s_{ij} = 0$.

Należy zauważyć, że w przypadku macierzy "dziurawej" zastosowanie metody "kąta północno-zachodniego" może nie doprowadzić do zbilansowania rozdzielanych mas. W niniejszym przykładzie występuje taki

właśnie przypadek. Korzystniejsze jest natomiast zastosowanie metody VAM-Z, która doprowadza do uzyskania planu optymalnego /przy $s_{1j} = 0$ / lub bardzo zbliżonego.

Stosując metodę VAM-Z otrzymano plan dopuszczalny /tablica 2.4/.

ITERACJA 1.

TABLICA 2.4.

i \ j	b_1	b_2	b_3	b_4	b_5	
a_1	 	14 1000	4 1200	 	19 780	100
			100			
a_2	8 100	10 1250	21 900	15 850	 	150
		130		20		
a_3	19 1700	 	12 1000	22 970	9 870	180
			60	10	110	
a_4	3 2800	25 800	 	10 320	 	120
	70			50		
	70	130	160	80	110	550
						550

Koszt realizacji powyższego planu wynosi:

- koszt transportu przy $s_{1j} = 0$ - 4640

- koszty stałe ($s_{1j} > 0$) - 9260

Razem: 13900

BLOK 3. Obliczenie potencjałów dla planu dopuszczalnego (wg iteracji 1) zawiera tablica 2.5.

BLOK 4. Obliczenie współczynników $\bar{c}_{ij} \in R_2$ zawiera tablica 2.5.

TABLICA 2.5.

q_i	$q_1 = 7$	$q_2 = 9$	$q_3 = 4$	$q_4 = 14$	$q_5 = 1$	
P_i						
$P_1=0$		14 +5	4 100		19 +18	100
$P_2=1$	8 0	10 130	21 +16	15 20		150
$P_3=8$	19 +4		12 60	22 10	9 110	180
$P_4=4$	3 70	25 +20		10 50		120
	70	130	160	80	110	550
						550

BLOK 5. Ponieważ w planie dopuszczalnym (tablica 2.5) nie występują $\bar{c}_{ij} \in R_2$ (tym samym, wszystkie ξ_{ij} są dodatnie), przechodzimy do bloku 8.

BLOK 8. Odciążenie węzła, w którym występuje $\delta_{i_0 j_0} = \max_{(i,j) \in R_1} \delta_{ij}$. Jest to węzeł /4,1/, w którym $\delta_{i_0 j_0} = 2800$. Wybieramy dla niego cykle i obliczamy wartości ξ_{ij} .

a/ cykl: (4,1), (4,2), (2,2), (2,1)

$$z = 70 \text{ /odpowiadające min } x_{i_0 j_0} = 70 /$$

Odciąża się węzeł 4,1 o 70 jednostek, które przechodzą do węzłów (2,1) i (4,2) .

$$\xi_{4,1} = -2800 + 400 + 20 \cdot 70 = -200$$

b/ cykl: (4,1) , (2,1) , (2,4) (4,4) :

$$z = 20 \text{ (odpowiadające } x_{24} = 20 \text{) .}$$

Węzeł (4,1) odciąża się o 20 jednostek, węzeł (2,4) sprowadza się do zera, a obciążenie o 20 jednostek wystąpi w węzłach (2,1) i (4,4) .

$$\xi_{4,1} = 0 \cdot 20 + 400 - 850 = \underline{-450}$$

c/ cykl: (4,1) , (3,1) , (3,4) , (4,4) ; $z = 10$ odpowiadające $x_{34} = 10$, Odciążenie (4,1) i (3,4) o 10 jednostek.

$$\xi_{4,1} = 4 \cdot 10 + 1700 - 970 = \underline{+770} .$$

d/ cykl: (4,1) , (3,1) , (3,3) , (2,3) , (2,2) , (4,2) .

$z = 60$ jednostek odpowiadających węzłowi (3,3), który sprowadzi się do zera; węzeł (4,1) odciąży o 60 jednostek , tj. do 10 jednostek, a obciążone zostaną węzły (3,1) i (2,3) .

$$\xi_{4,1} = (4 \cdot 60 + 1700) - 100 + (16 \cdot 60 + 900) + (20 \cdot 60 + 800) = \underline{+4800}$$

Spośród powyższych wariantów najkorzystniejszy jest wariant b/, w którym $\xi_{4,1} = -450$. Po wprowadzeniu do planu [tablica 2.5] otrzymamy kolejny, poprawiony plan dopuszczalny, zawarty w tablicy 2.6.

TABLICA 2.6

$i \backslash j$	$q_1=7$	$q_2=9$	$q_3=4$	$q_5=14$	$q_6=1$	
$P_1 = 0$		14 1000 +5	4 1200 100		19 780 +18	100
$P_2 = 1$	8 400 20	10 1250 130	21 900 +16	15 850 0		150
$P_3 = 8$	19 1700 +4		12 1000 60	22 970 10	9 870 110	180
$P_4 = -4$	3 280 50	25 800 +20		10 320 70		120
	70	130	160	80	110	550 550

Koszt realizacji powyższego planu wynosi:

- koszt transportu przy $\Delta_{ij} = 0$	4640
- koszty stałe ($\Delta_{ij} > 0$)	8810
Razem	<u>13450</u>

Ponieważ wszystkie \tilde{c}_{ij} są nieujemne, kontynuujemy proces odciażania węzłów wykazujących max Δ_{ij} .

a/ węzeł (4,1) : cykl (4,1), (2,1), (2,2), (4,2)

$z = 50$ (odpowiadające $x_{41} \in R_2$)

$$\xi_{41} = -2800 + 20 \cdot 50 + 800 = -1000$$

b/ węzeł (4,1): cykl (4,1), (3,1), (3,4), (4,4)

$z = 10$ (odpowiadające węzłowi 3,4, w którym

$x_{34} = 10$ jako $x_{34} \in R_2$)

$$\xi_{41} = 4 \cdot 10 + 1700 - 970 = +770$$

Spośród powyższych wariantów najkorzystniejszy jest wariant a/, w którym $\xi_{41} = -1000$. Po wprowadzeniu do planu dopuszczalnego (tablica 2.6), otrzymamy kolejny plan dopuszczalny, którego koszt realizacji powinien być o 1000 jednostek niższy.

Nowy plan dopuszczalny zawiera tablica 2.7.

TABLICA 2.7

i \ j	$q_1 = 27$	$q_2 = 29$	$q_3 = 4$	$q_4 = 14$	$q_5 = 1$	
$P_1 = 0$	X	14 1000 - 15	4 1200 100	X	19 780 +18	100
$P_2 = -19$	8 400 70	10 1250 80	21 900 +36	15 850 +20	X	150
$P_3 = 8$	19 1700 0	X	12 1000 60	22 970 10	9 870 110	180
$P_4 = -4$	3 2800 -20	25 800 50	X	10 320 70	X	120
	70	130	160	80	110	550
						550

Koszt realizacji powyższego planu wynosi:

- koszt transportu przy $\delta_{ij} = 0$	5640
- koszty stałe ($\delta_{ij} > 0$)	6810
Razem	<u>12450</u>

Ponieważ w rozpatrywanej, kolejnej wersji planu występują dla \tilde{c}_{ij} wartości ujemne, sprawdzamy możliwości poprawienia planu, poczynając od określenia cykli dla ujemnych \tilde{c}_{ij} .

a/ Węzeł $(4,1)$: $\tilde{c}_{41} = -20$; cykl $(4,1), (2,1), (2,4), (4,4)$

pozwała na wprowadzenie do (4,1) $x_{41} = 70$ oraz do (2,4) $x_{44} = 70$, kosztem odciążenia węzłów (2,1) i (4,4) o 70 jednostek każdy. Stąd

$$\begin{aligned} \xi_{41} &= 20 \cdot 70 + 2800 - 400 + (20 \cdot 70 + 850) - 320 = \\ &= \underline{2930} \end{aligned}$$

co świadczy, że w ten sposób koszt realizacji planu wzrośnie o 2930 w stosunku do poprzedniej jego wersji.

b/ Węzeł (1,2): $\bar{c}_{12} = -15$; cykl: (1,2), (4,2), (4,4), (3,4), (3,3), (1,3); $\min x_{1j} = x_{34} = 10$.

$$\xi_{12} = -15 \cdot 10 + 100 - 970 = \underline{-120}$$

c/ Węzeł (1,2): cykl: (1,2), (1,3), (2,3), (2,2)

$x_{22} = 80$ wprowadzone do (1,2) daje

$$\begin{aligned} \xi_{12} &= -15 \cdot 80 + 1000 + 36 \cdot 80 + 900 - 1250 = \\ &= \underline{+2330} \end{aligned}$$

Spośród powyższych wariantów zmian do planu dopuszczalnego (tablica 2.7) najkorzystniejszy jest wariant b/, według którego $\xi_{12} = -120$. Uwzględniając go, otrzymamy nowy plan dopuszczalny (tablica 2.8)

TABLICA 2.8

i \ j	$q_1 = 12$	$q_2 = 14$	$q_3 = 4$	$q_4 = 1$	$q_5 = 1$	
$P_1 = -0$		14 1000 10	4 1200 90		19 780 +18	100
$P_2 = -4$	8 400 70	10 1250 80	21 900 +21	15 850 +20		150
$P_3 = 8$	19 1700 -1		12 1000 70	22 970 +15	9 870 110	180
$P_4 = 11$	3 2800 -20	25 800 40		10 320 80		120
	70	130	160	80	110	550 550

Koszt realizacji powyższego planu:

- koszty transportu /przy $\Delta_{ij} = 0$ / 5490

- koszty stałe ($\Delta_{ij} > 0$) 6840

Razem 12330

Ponieważ cykle dla węzłów (3,1) i (4,1), posiadających ujemne \tilde{C}_{ij} , dają wartości ϵ_{31} i ϵ_{41} dodatnie, należy przystąpić do odciążenia węzłów, poczynając od wykazujących największe Δ_{ij} .

a/ Węzeł (2,2); $s_{22} = 1250$ posiada następujące cykle:

- (2,2), (2,3), (1,3), (1,2); $z = 10$ w węzle (1,2)

$$\epsilon_{22} = + 21 \cdot 10 + 900 = + 1110;$$

- (2,2), (2,4), (4,4), (4,2); $z = 80$ w węzle (2,2)

$$\epsilon_{22} = - 1250 - 320 + 20 \cdot 80 + 850 = + 880,$$

co oznacza, że węzła (2,2) nie można odciążyć.

b/ Węzeł (1,3); $s_{13} = 1200$.

- cykl: (1,3), (3,3), (3,5), (1,5); $z = 100$;

$$\xi_{13} = -1200 + 18 \cdot 90 + 780 = +1200;$$

- cykl: (1,3), (2,3), (2,2), (1,2); $z = 80$;

$$\xi_{13} = +21 \cdot 80 + 900 - 1250 = +1330;$$

węzła (1,3) nie można odciążyć.

o/ Węzeł (1,2); $s_{12} = 1000$; $z = 20$ w węzle (1,2)

- cykl: (1,2), (1,3), (3,3), (3,4), (4,4), (4,2).

$$\xi_{12} = -1000 + 15 \cdot 10 + 970 = +120;$$

- cykl: (1,2), (1,3), (3,3), (3,1), (2,1), (2,2); $z=10$;

$$\xi_{12} = -1000 - 1 \cdot 10 + 1700 = +690;$$

a zatem, węzła (1,2) nie można odciążyć.

d/ Węzeł (3,3); $s_{33} = 1000$;

- cykl: (3,3), (3,1), (2,1), (2,3); $z = 60$;

$$\xi_{33} = -1000 - \cdot 60 + 1700 + 21 \cdot 60 + 900 = +2800$$

Podobnie łatwo stwierdzić, że i pozostałe węzły, tj. (3,5): $s_{35} = 870$; (4,2): $s_{42} = 800$; (2,1): $s_{21} = 400$; (4,4): $s_{44} = 320$ nie posiadają cykli, w których wystąpią ujemne wartości ξ_j . W związku z tym plan wyrażony w tablicy 2.8 należy uważać jako optymalny. Koszt realizacji tego planu jest bowiem mniejszy niż koszt planu przedstawionego w tablicy 2.4 ($13900 - 12330 = 1570$).

Wykonano w 100 egz.

Egz.nr 1-100 bibl.jawna

Wyk. płk Skibiński

Druk. BG, OH, dn. 16.4.68r.

Nr ks. 541/95 2/WW

Druk ASG-0-XV-3684

