AKADEMIA SZTABU GENERALNEGO WP
im. gen. broni Karola Świerczewskiego

5

Ppłk dypl. mgr Tadeusz CZARNOCKI

WYBRANE ELEMENTY TEORII GRAFÓW

Wykład

WARSZAWA GRUDZIEŃ 1975

AKADEMIA SZTABU GENERALNEGO WP
im. gen. broni Karola Świerczewskiego

5

Ppłk dypl. mgr Tadeusz CZARNOCKI

WYBRANE ELEMENTY TEORII GRAFÓW

Wykład

WARSZAWA GRUDZIEŃ 1975

AKADEMIA SZTABU GENERALNEGO WP

im. gen. broni K. Świerczewskiego

5

Ppłk dypl. mgr Tadeusz CZARNOCKI

WYBRANE ELEMENTY TEORII GRAFÓW

/Wykład/

WARSZAWA GRUDZIEŃ 1975 r.

Temat: WYBRANE ELEMENTY TEORII GRAFÓW

C e l: Zapoznać z wybranymi pojęciami teorii grafów i pewnymi zastosowaniami ich w praktyce

Zagadnienia:

1. Wstęp
2. Pojęcie grafu
3. Ciągi i linie w grafie
4. Niektóre klasy grafów
5. Podzbiory grafów
6. Niektóre liczby teorii grafów
7. Macierze grafów i ich własności
8. Drzewa i pradrzewa
9. Sieci
10. Niektóre zastosowania grafów

Czas: 10 godzin wykładów

1. W s t ę p

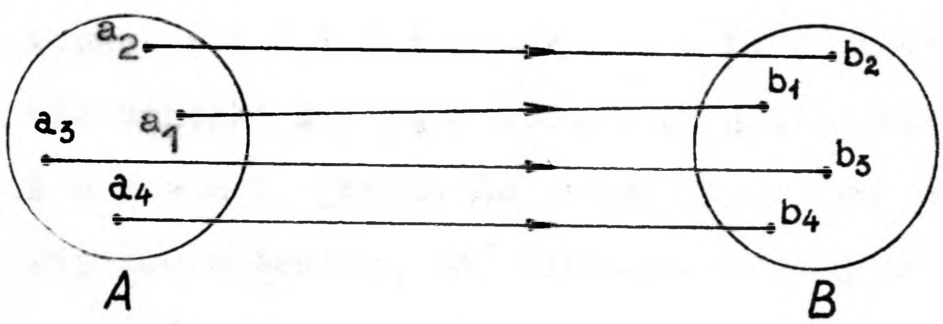
Od dawna ludzie posługują się graficznym sposobem prezentacji warunków rozwiązań różnorodnych zagadnień: starożytny astronom zaznaczał na pergaminie punkty przedstawiające planety i linie przedstawiające ich trajektorie; fizyk dla określenia prądów przepływających w obwodzie elektrycznym zaznacza na schemacie punkty o różnych potencjałach i wskazuje strzałkami kierunek przepływu prądu od jednego do drugiego punktu; inżynier konstruując hydrauliczny system napędu maszyny nie może obejść się bez schematu, na którym za pomocą linii przedstawia przepływ płynu od jednego urządzenia do drugiego itp.

Abstrahując od konkretnego znaczenia jakie posiadają w przytoczonych przykładach punkty i linie otrzymujemy prostą graficzną prezentację złożoną z wielu punktów i łączących je linii, ze wskazaniem kierunków przejścia od punktu do punktu. Czy taki obraz graficzny podlega jakimś ogólnym prawidłowościom i czy posiada jakieś ogólne własności?
D. König w swojej monografii w 1936 r, po raz pierwszy nazwał wszystkie schematyczne rysunki, składające się ze zbiorów punktów i linii ogólnym terminem g r a f i rozpatrywał graf jako samodzielny niezależny od jego treści obiekt matematyczny. W istocie König dał początek teorii grafów.

W teorii grafów wyodrębniono kilka oryginalnych zagadnień: teoria sieci transportowych, obwodów przyłączających, badanie klasycznego zagadnienia czterech barw. Z powodzeniem teoria grafów może być wykorzystana do rozwiązania w grupie zagadnień ekstremalnych jak: zadania planowania sieciowego; problemy związane z oszczędnym zapisem i przetwarzaniem informacji. Warto podkreślić, że język teorii grafów jest bardzo wygodny i obrazowy przy wykładaniu takich dyscyplin, jak: teoria gier, zastosowanie metod matematycznych w ekonomii, teorii algorytmów, teorii sieci elektrycznych, teorii automatów.

2. P o j ę c i e g r a f u

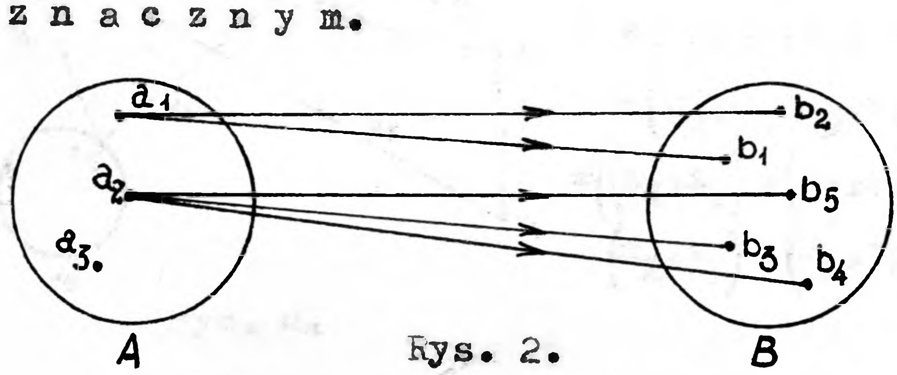
Jeżeli dane są dwa zbiory A i B i określona jest zasada przyporządkowująca każdemu elementowi $a \in A$ element $b \in B$, to mówimy, że zostało określone przyporządkowanie między elementami zbiorów zwane o d w z o r o w a n i e m, oznaczamy je Γ /gamma/ z zaznaczeniem elementów: wyjściowego i odwzorowywanego /rys. 1, 2, 3/.



$$\Gamma_{a_1} = \{b_1\}$$
$$\Gamma_{a_2} = \{b_2\}$$
$$\Gamma_{a_3} = \{b_3\}$$
$$\Gamma_{a_4} = \{b_4\}$$

Rys. 1.

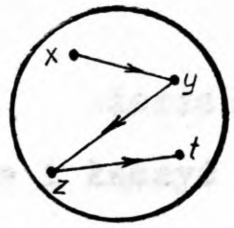
Odwzorowanie, w którym każdemu elementowi zbioru wyjściowego przyporządkowuje się odpowiednio jeden element drugiego zbioru nazywamy o d w z o r o w a n i e m j e d n o z n a c z n y m.



$$\Gamma_{a_1} = \{b_1, b_2\}$$
$$\Gamma_{a_2} = \{b_3, b_4, b_5\}$$
$$\Gamma_{a_3} = \Phi \text{ /zbiór pusty/}$$

Rys. 2.

Odwzorowanie, w którym każdemu elementowi zbioru wyjściowego przyporządkowuje się podzbiór elementów drugiego zbioru nazywamy o d w z o r o w a n i e m w i e l o z n a c z n y m.



Rys. 3.

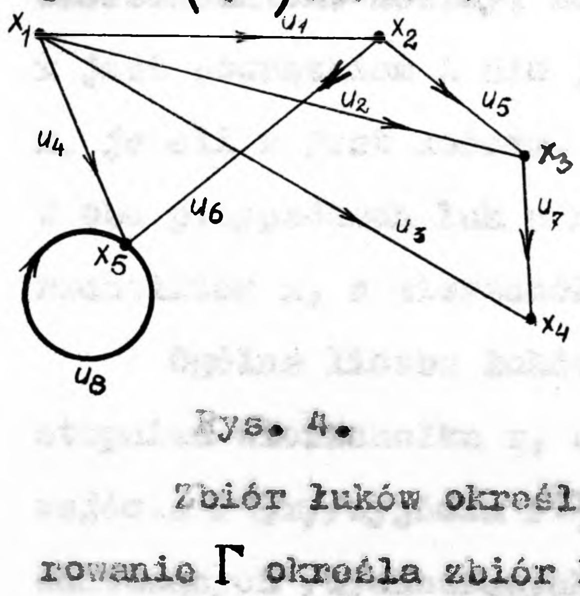
Odwzorowanie wewnątrz zbioru X = x,y,z,t /rys. 3/ może być określone następująco:
$\Gamma_x = \{y\}, \Gamma_y = \{z\}, \Gamma_z = \{t\}, \Gamma_t = \Phi$.

Można również rozpatrywać, w odróżnieniu od wspomnianych odwzorowań pierwszego stopnia, odwzorowania wyższych stopni, np. dla zbioru X /rys. 3/ odwzorowania $\Gamma_x = \{y\}, \Gamma_x^2 = \Gamma\{\Gamma_x\} = \{z\}$, $\Gamma_x^3 = \Gamma\{\Gamma_x^2\} = \{t\}$ są odwzorowaniami odpowiednio 1-go, 2-go, 3-go stopnia.

Mówimy, że graf jest określony, jeżeli dane są:
niepusty zbiór X i odwzorowanie Γ zbioru X w X.

G r a f można więc przedstawić jako zbiór elementów z ich odwzorowaniami w tym zbiorze i oznaczamy $G(X,\Gamma)$. W interpretacji geometrycznej grafu elementy X przedstawiane są jako punkty zwane w i e r z c h o ł k a m i, a odcinki łączące dowolne dwa wierzchołki x i y, z których y jest odwzorowaniem x nazywamy ł u k a m i grafu. Na łukach przy pomocy strzałek zaznacza się ich orientację od elementu x do jego odwzorowania y.

Jeżeli dany jest zbiór elementów $X = \{x_1, x_2, x_3, x_4, x_5\}$ i odwzorowanie wszystkich elementów w tym zbiorze: $\Gamma_{x1} = \{x_2, x_3, x_4, x_5\}$ $\Gamma_{x2} = \{x_3, x_5\}$, $\Gamma x_3 = \{x_4\}$, $\Gamma_{x4} = \Gamma_{x5} = \Phi$, to zawsze można określić graf $G(X,\Gamma)$ /rys. 4/.

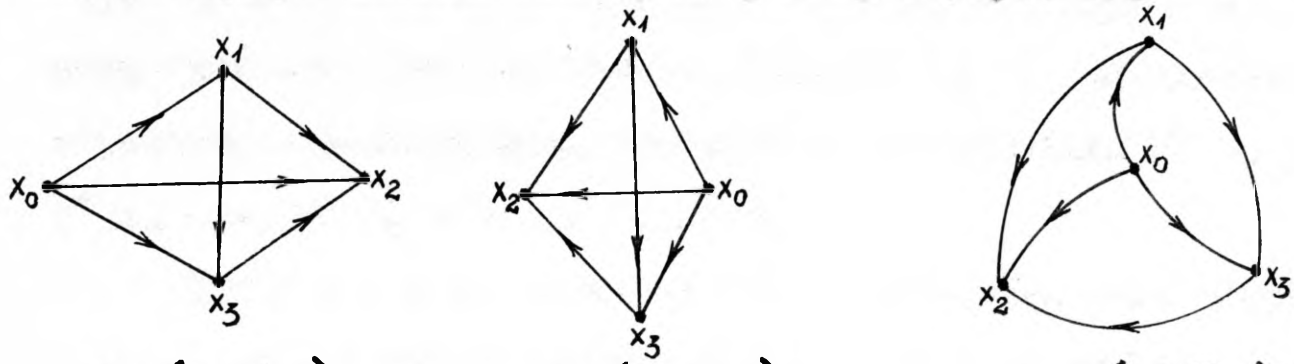


Rys. 4.

Zbiorem wierzchołków tego grafu jest $X = \{x_1, x_2, x_3, x_4, x_5\}$, a zbiorem łuków $U = \{u_1, u_2, u_3, u_4, u_5, u_6, u_7, u_8\} = \{(x_1,x_2), (x_1,x_3), (x_1,x_4), (x_1,x_5), (x_2,x_3)$ $(x_2,x_5), (x_3,x_4), (x_5,x_5)\}$.

Zbiór łuków określa odwzorowanie grafu i na odwrót, odwzorowanie Γ określa zbiór łuków U, dlatego równoważne są zapisy grafu $G(X,\Gamma) = G(X,U)$.

Wierzchołki grafu można dowolnie rozmieszczać na płaszczyźnie i łączyć liniami nie tylko prostymi /rys. 5/.



$G_1(X_1, \Gamma_1)$ $G_2(X_2, \Gamma_2)$ $G_3(X_3, \Gamma_3)$

Rys. 5.

Takie grafy nazywamy i z o m o r f i c z n y m i gdyż zawierają one tę samą liczbę wierzchołków, a ich odwzorowania są identyczne: $X_1 = X_2 = X_3 = \{x_0, x_1, x_2, x_3\}$, $\Gamma_1 = \Gamma_2 = \Gamma_3$.

3. C i ą g i l i n i i w g r a f i e

Dwa wierzchołki x_1, x_2 nazywamy g r a n i c z n y m i ł u k u U_1, jeżeli x_1 jest początkiem, a x_2 końcem łuku. Dwa łuki nazywamy s ą s i e d n i m i, jeżeli są różne i mają jeden wspólny wierzchołek, a dwa wierzchołki sąsiednie, gdy są różne i istnieje łuk łączący je. I z o l o w a n y m nazywamy taki wierzchołek, który nie jest połączony łukiem z innym wierzchołkiem. Mówimy, że łuk u wychodzi z wierzchołka x, jeżeli x jest początkiem i nie jest końcem łuku u i że łuk wchodzi do x, jeżeli x jest końcem, a równocześnie nie jest początkiem u. W obu przypadkach łuk u nazywamy i n c y d e n t n y m z wierzchołkiem x, a wierzchołek x i n c y d e n t n y m z łukiem u.

Ogólna liczba łuków incydentnych z wierzchołkiem x jest stopniem wierzchołka x, oznaczamy P(x). P ó ł s t o p n i e m wejścia $P^+/x/$ /wyjścia $P^-/x/$/ wierzchołka x nazywamy liczbą łuków wchodzących /wychodzących/ do danego wierzchołka. Wierzchołek x nazywamy p o c z ą t k o w y m /k o ń c o w y m/, jeżeli $P^+(x) =$

$= 0$ i $P^-(x) \neq 0$ / $P^+(x) \neq 0$ i $P^-(x) = 0$. Na przykład dla grafu /rys. 4/ $P(x_1) = P(x_5) = 4$, $P(x_2) = 3$, $P(x_3) = P(x_4) = P(x_5) = 2$, są stopniami odpowiednich wierzchołków, a x_1, x_4 są wierzchołkami odpowiednio początkowym, końcowym z półstopniami $P^+(x_1) = 0$ i $P^-(x_1) = 4$, $P^+(x_4) = 2$ i $P^-(x_4) = 0$.

Ś c i e ż k ą w grafie $G(X,U)$ nazywamy taki ciąg łuków $u_1, u_2, .., u_n$, w którym koniec każdego poprzedzającego łuku jest jednocześnie początkiem łuku następującego po nim. Ścieżkę nazywamy p r o s t ą gdyż żaden z łuków nie występuje w ciągu więcej niż jeden raz i z ł o ż o n ą w przeciwnym wypadku. Ścieżką przechodzącą przez wszystkie wierzchołki tylko jeden raz nazywamy ścieżką Hamiltona.

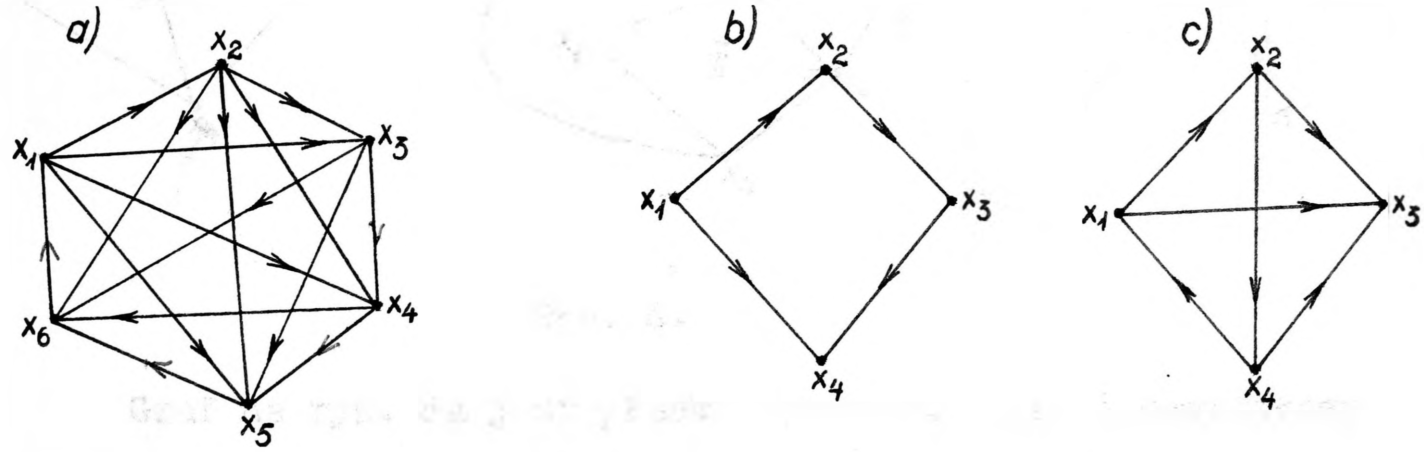
Ścieżkę zawierającą wszystkie występujące tylko raz łuki grafu - ścieżką Eulera /w grafie na rys. 4 nie występuje żadna z tych ścieżek/.

D ł u g o ś ć ścieżki jest to liczba odpowiadająca ilości łuków w ciągu $\mu = \{u_1, u_2, \ldots, u_n\}$.

G a ł ą ź jest to ścieżka, w której wierzchołki początkowe i końcowe są węzłami $\left(\text{dla węzła } P(x) > 2\right)$. O b w ó d nazywamy skończoną ściezką rozpoczynającą się i kończącą w tym samym wierzchołku, a obwód o długości 1 - p ę t l ą /na rys. 6 pętlą jest łuk $/x_5, x_5//$. Obwód może być: p r o s t y - każdy łuk występuje tylko jeden raz; z ł o ż o n y - w przeciwnym wypadku; e l e m e n t a r n y - wszystkie wierzchołki są różne z wyjątkiem początkowego i końcowego, które zbiegają się; Hamiltona - przechodzi tylko jeden raz przez wszystkie wierzchołki /z wyjątkiem początkowego i końcowego/; Eulera - przechodzi tylko jeden raz przez wszystkie łuki.

4. N i e k t ó r e   k l a s y   g r a f ó w

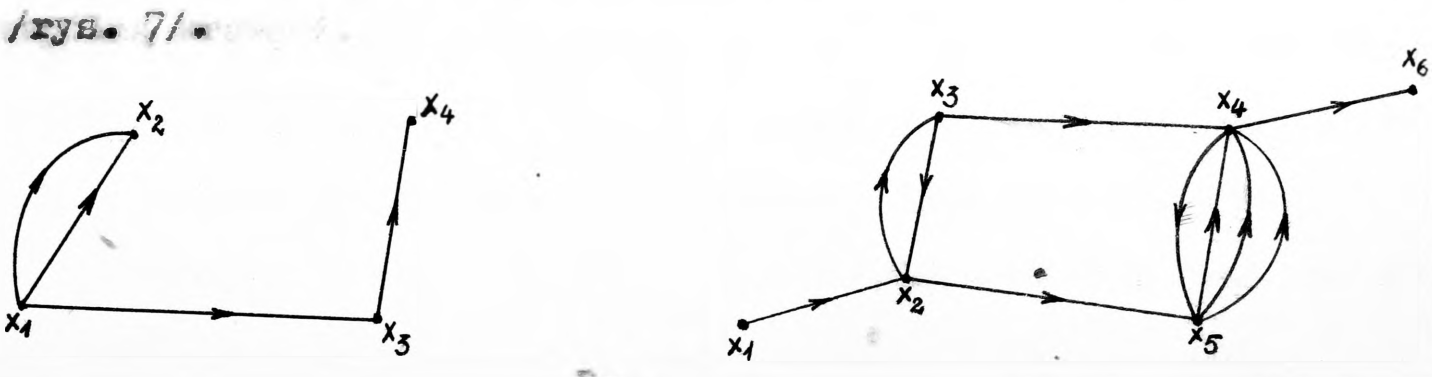
Graf może być: z o r i e n t o w a n y - wszystkie wierzchołki połączone są łukami; n i e z o r i e n t o w a n y - wszystkie wierzchołki połączone są krawędziami, /dla grafu niezorientowanego używa się pojęć: krawędź, łańcuch, cykl, zamiast odpowiednio: łuk, ścieżka, obwód/; m i e s z a n y - składający się z łuków i krawędzi, z e r o w y - złożony z samych izolowanych wierzchołków /dla takiego grafu $P^{+}/x_i/ = P^{-}/x_i/ = 0$ dla każdego $x_i \in X$; j e d n o r o d n y - stopnie wszystkich wierzchołków są równe /rys. 5/; p e ł n y - dowolna para wierzchołków związana jest jednakową liczbą łuków.



Rys. 6.

/Wielobok z n wierzchołkami /rys. 6a/ jest najprostszym przykładem grafu pełnego/. Graf pełny zawsze jest jednorodny. Odwrotne twierdzenie nie jest prawdziwe, bowiem graf jednorodny może być niepełny /rys. 6 b,c/. W grafie pełnym zawsze występuje ścieżka Hamiltona /na rys. 6a jest nią: $\{(x_1,x_2), (x_2,x_3), (x_3,x_4), (x_4,x_5), (x_5,x_6)\}$/.

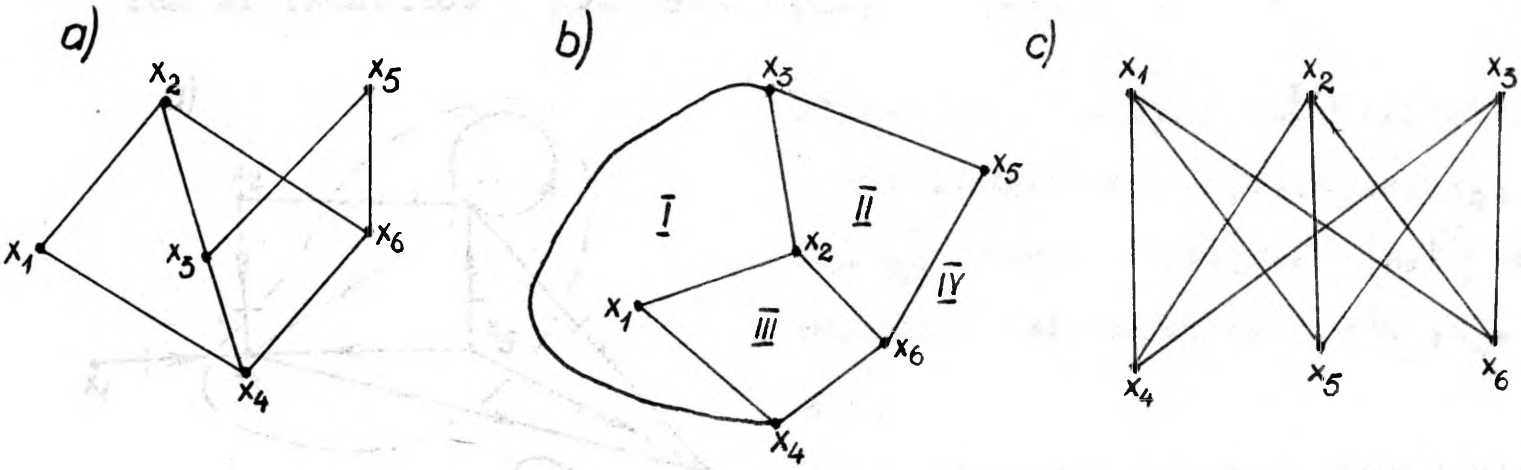
Graf, w którym co najmniej dwa wierzchołki połączone są więcej niż jednym łukiem /krawędzią/ nazywamy m u l t i g r a f e m /rys. 7/.



Ry...

Największą liczbę łuków (krawędzi) łączących sąsiednie wierzchołki w multigrafie nazywamy w i e l o k r o t n o ś c i ą, sam zaś multigraf ogólnie - p-g r a f e m, gdzie p - wielokrotność łuków.

Graf, w którym żadne dwa łuki nie przecinają się nazywamy grafem p ł a s k i m, w przeciwnym wypadku - n i e p ł a s k i /rys. 8/.



Rys. 8.

Graf na rys. 8a jest płaski, ponieważ jest izomorficzny względem grafu z rys. 8b. Rys. 8c przedstawia graf niepłaski.

Ś c i a n ą grafu płaskiego nazywamy obszar płaszczyzny ograniczony krawędziami i niezawierający wewnątrz ani wierzchołków, ani krawędzi /na rys. 8b płaszczyzny I, II, III, IV są ścianami grafu, przy czym wlicza się też ścianę zewnętrzną nieskończoną /IV/.

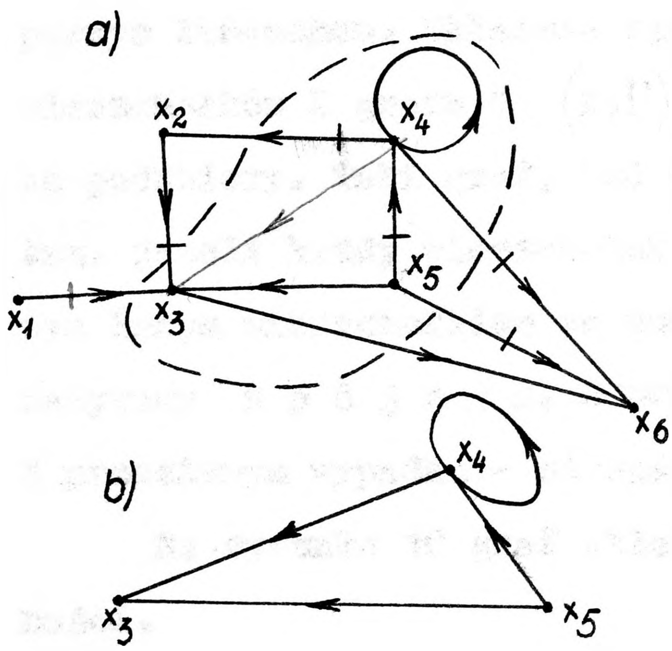
Liczbę ścian można doliczyć z zależności $S = 2 + K - W$, gdzie K - liczba krawędzi, W - liczba wierzchołków. Dwie ściany są sąsiednimi, jeżeli ich brzegi zawierają przynajmniej jedną wspólną krawędź.

5. Podzbiory grafów

Podgrafem grafu $G(X,\Gamma)$ nazywamy graf $G(A,\Gamma_A)$ określamy następująco:

1/ wierzchołki A podgrafu $G(A,\Gamma_A)$ należą do pewnego podzbioru wierzchołków grafu $G(X,\Gamma)$ tj. $A \subset X$;

2/ odwzorowanie każdego wierzchołka podgrafu $G(A,\Gamma_A)$ jest przekrój odwzorowania tego wierzchołka w grafie $G(X,\Gamma)$ z całym podzbiorem wierzchołków A podgrafu $G(A,\Gamma_A)$, tj. $\Gamma_{A(x)} = \Gamma_x \cap A$



Rys. 9.

Przykład. Z grafu $G(X,\Gamma)$ /rys.9a/ o wierzchołkach $X = \{x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6\}$ utworzyć podgraf $G(A,\Gamma)$ zawierający wierzchołki $A = \{x_3, x_4, x_5\}$.

Odwzorowaniami każdego wierzchołka poszukiwanego podgrafu są:

$\Gamma_{A(x_3)} = \{x_6\} \cap \{x_3, x_4, x_5\} = \{\Phi\}$;

$\Gamma_{A(x_4)} = \{x_2, x_3, x_6\} \cap \{x_3, x_4, x_5\} = \{x_3\}$

$\Gamma_{A(x_5)} = \{x_3, x_4, x_6\} \cap \{x_3, x_4, x_5\} = \{x_3, x_4\}$, a podgraf utworzony dla tych odwzorowań pokazany jest na rys. 9b.

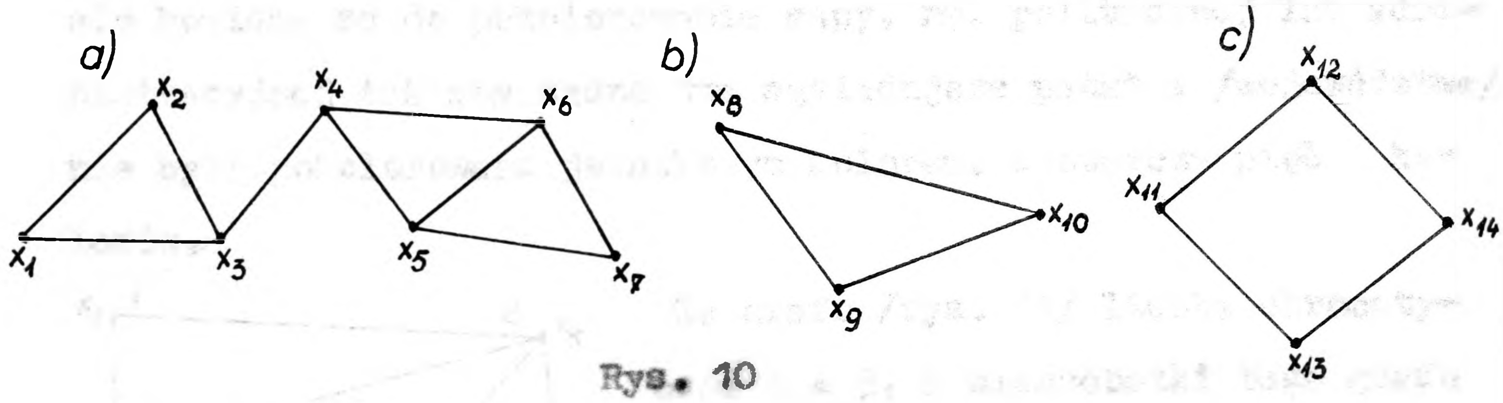
Powyższy podgraf grafu można skonstruować też następująco: dla podzbioru wierzchołków A należy wyłączyć wszystkie wchodzące i wychodzące łuki z wyjątkiem pętli i łuków łączących wierzchołki podzbioru A.

Grafem **częściowym** grafu $G(X,\Gamma)$ nazywamy podgraf $G(X,F)$, w którym zawarte są wszystkie wierzchołki i pewien podzbiór łuków grafu wyjściowego, tj. $F \subset \Gamma$. Na przykład, graf częściowy powstaje z grafu /rys. 9a/ przez pozostawienie jego wszystkich wierzchołków oraz łuków zaznaczonych jedną kreską.

Grafem **bazowym** nazywamy zorientowany graf częściowy uzyskany z grafu wyjściowego przez wyłączenie pętli i łuków spinających. Na przykład wyłączając z grafu częściowego łuki zaznaczone dwoma kreskami otrzymujemy graf bazowy.

W ogólnym przypadku graf może być przedstawiony jako kilka oddzielnych grafów, zwanych składowymi nie posiadających wspólnych łuków. W takim przypadku graf G (X,Γ) nazywamy niespójnym. Składowa spójności grafu, to graf składający się z wierzchołków $x \in X$ i wszystkich tych wierzchołków, które połączone są z x pewnym łańcuchem. Składowa spójności obrazuje rozbicie zbioru wierzchołków X grafu G (X,Γ) na oddzielne nie powiązane ze sobą podzbiory. Taki graf, który zawiera jedną składową spójności, tzn. jeżeli każdy wierzchołek tego grafu można połączyć z dowolnym innym wierzchołkiem za pomocą pewnego łańcucha, to graf taki nazywamy s p ó j n y m. ~~W przeciwnym wypadku - niespójnym.~~
W przeciwnym wypadku - niespójnym.

Na rysunku 10 graf składa się z czterech składowych spójności.



Rys. 10

6. N i e k t ó r e   l i c z b y   g r a f ó w

Liczbę cyklometryczną w multigrafie o w wierzchołkach, k łukach /krawędziach/ i r składowych spójności określa równanie:

$$\nu = k - w + r$$

Liczba cyklometryczna ν w multigrafie równa się największej liczbie niezależnych cykli /obwodów/. Dla grafów na rys. 10 liczbami cyklometrycznymi są liczby: 3, 1 i 1.

Z liczby cyklometrycznej wynika bezpośrednio liczba Eulera dla grafu spójnego

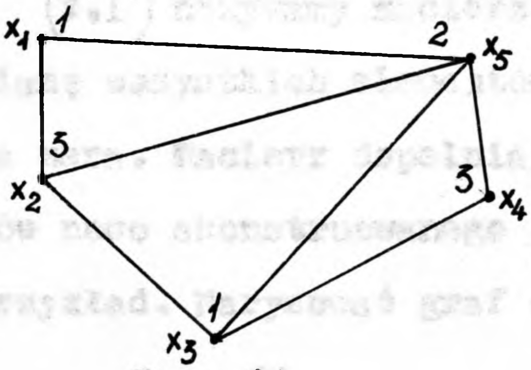
$$w - k + s = 2$$

gdzie: s - liczba ścian.

Z drugiej strony liczba skończonych ścian grafu równa się liczbie zawartych w nim niezależnych cykli. Uwzględniając ścianę zewnętrzną można napisać: $s = \nu + 1$ lub $\nu = s - 1$. Stąd pośrednio wynika, że graf spójny jest jednostkowy, a jego liczba cyklometryczna równa się

$$\nu = k - w + 1.$$

Podstawiając w miejsce ν wyrażenie $s-1$ otrzymujemy liczbę Eulera. Występuje w teorii grafów jeszcze tzw. liczba chromatyczna, którą jest najmniejsza liczba m grafu, dla której żadne dwa połączone wierzchołki nie będą jednakowo oznaczone /ponumerowane /Rys. 11/. Pojęcie liczby chromatycznej wiąże się również z zagadnieniem najmniejszej liczby barw. Okazuje się bowiem, że do pokolorowania mapy, np. politycznej lub administracyjnej tak aby żadne dwa sąsiadujące państwa /województwa/ nie były pokolorowane jednakowym kolorem, wystarczy pięć kolorów.



Rys. 11

Dla grafu /rys. 11/ liczba chromatyczna $m = 3$, a wierzchołki tego grafu mogą być ponumerowane przykładowo następująco: wierzchołek $x_1 - 1$, $x_2 - 3$, $x_3 - 1$, $x_4 - 3$ i $x_5 - 2$.

7. Macierze grafów

Macierzą łuków w grafie $G(X,\Gamma)$ o n wierzchołkach nazywamy macierz kwadratową $A = [a_{ij}]$ stopnia n, której element a_{ij} określa liczbę łuków łączących i-ty wierzchołek z j-tym.

Dla grafu /rys. 9a/ macierz łuków ma postać:

$$A = \begin{bmatrix} 001000 \\ 001000 \\ 000001 \\ 110001 \\ 001101 \\ 000000 \end{bmatrix};$$

Macierz transponowana łuków A^T jest odbiciem odwzorowania macierzy A względem głównej przekątnej. Macierz taką uzyskuje się z grafu wyjściowego przez zamianę orientacji wszystkich łuków.

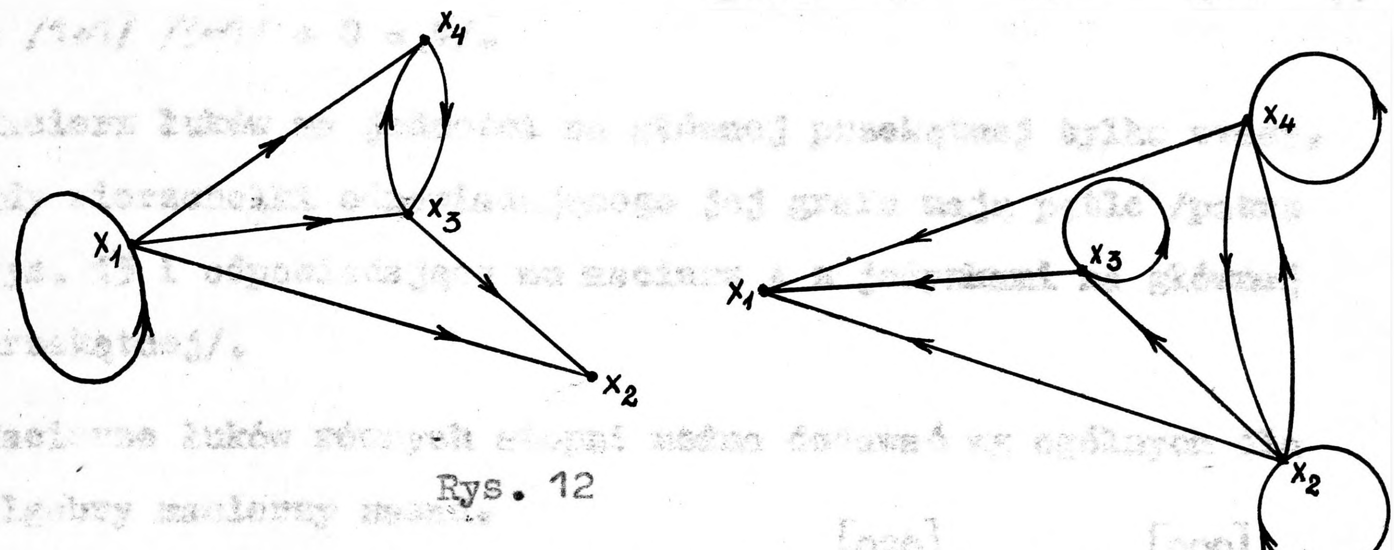
Na podstawie macierzy łuków łatwo określić stopnie i półstopnie wejścia i wyjścia wierzchołków grafu: półstopniem wejścia /wyjścia/ i-tego wierzchołka x_i równa się sumie elementów j-tej kolumny dla $i=j$ /i-tego wiersza/ macierzy; stopień wierzchołka x_i równa się sumie elementów wiersza i kolumny o numerze "i" macierzy.

Macierzą dopełniającą A^* grafu $G(X,\Gamma)$ nazywamy macierz utworzoną z macierzy łuków przez zamianę wszystkich elementów zerowych na jedynki, a niezerowych na zera. Macierz dopełniająca grafu $G(X,\Gamma)$ jest macierzą łuków nowo skonstruowanego grafu.

Przykład. Narysować graf dla macierzy łuków $A = \begin{bmatrix} 1111 \\ 0000 \\ 0101 \\ 0010 \end{bmatrix}$ oraz określić macierz dopełniającą do danej macierzy i narysować odpowiadający jej graf.

Macierzą dopełniającą do danej macierzy jest macierz $A^{*} = \begin{bmatrix} 0000 \\ 1111 \\ 1010 \\ 1101 \end{bmatrix}$,

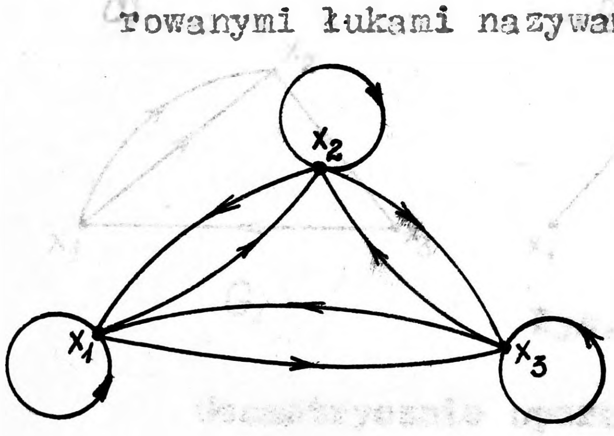
a odpowiadające macierzom A i A^{*} grafy pokazane są na rys. 12.



Rys. 12

W ł a s n o ś c i m a c i e r z y ł u k ó w

1. Macierz łuków nazywamy s y m e t r y c z n ą względem głównej przekątnej tylko wtedy, gdy odpowiadający jej graf G (X,Γ) jest symetryczny. /Graf G (X,Γ), w którym dwa dowolne sąsiednie wierzchołki połączone są dwoma przeciwnie skierowanymi łukami nazywamy grafem s y m e t r y c z n y m/.



Rys. 13

Dla grafu symetrycznego /rys. 13/ macierz łuków i jej transpozycja są sobie równe, tj.

$$A = \begin{bmatrix} 111 \\ 111 \\ 111 \end{bmatrix} = A^{T}$$

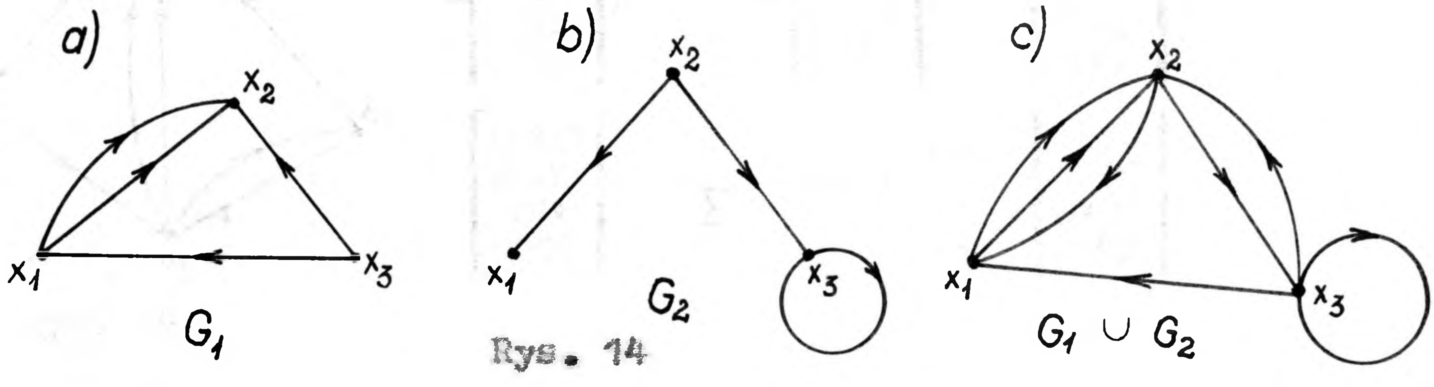
2. Macierz łuków nazywamy pełną, jeżeli suma dowolnej pary elementów macierzy symetrycznych względem głównej przekątnej jest dodatnia i stała $/a_{ij} + a_{ji} = \mathrm{const} > 0/$.
Pełna macierz łuków odpowiada pełnemu grafowi. Graf rys. 13 jest pełny /niezależnie, że jest symetryczny/, a odpowiadająca jemu macierz łuków spełnia podaną własność.

Stopień wierzchołków grafu $P/x/$ na podstawie macierzy łuków określa się z zależności $P/x/ = /a_{ij} + a_{ji}/ \; /w - 1/ + a$, gdzie: a – element głównej przekątnej, dla którego $i = j$ /dla grafu rys. 13 stopień $P/x_1/ = P/x_2/ = P/x_3/ = /a_{12} + a_{21}/ \; /N - 1/ + a_{11} = /1+1/ \; /3-1/ + 0 = 4/$.

3. Macierz łuków ma jedności na głównej przekątnej tylko wtedy, gdy wierzchołki odpowiadającego jej grafu mają pętle /patrz rys. 13 i odpowiadającą mu macierz A z jedynkami na głównej przekątnej/.

4. Macierze łuków równych stopni można dodawać wg ogólnych dla algebry macierzy zasad.
Przykład. Dane są macierze łuków: $A = \begin{bmatrix} 020 \\ 000 \\ 110 \end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix} 000 \\ 101 \\ 001 \end{bmatrix}$

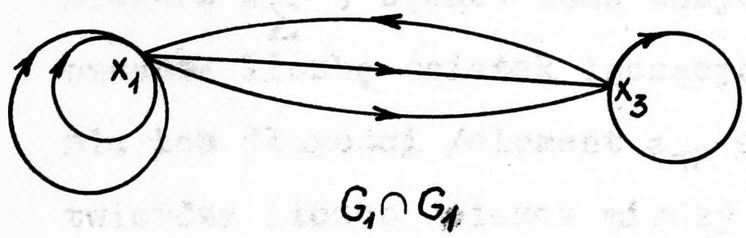
Macierz $A + B = \begin{bmatrix} 020 \\ 101 \\ 111 \end{bmatrix}$. Odpowiadające macierzom A, B i A+B grafy ilustrują odpowiednio rysunki 14a, 14b i 14c.



Rys. 14

Geometrycznie operacja sumy macierzy łuków odpowiada działaniu sumowania mnogościowego grafów przedstawionych za pomocą tych macierzy.

5. Macierze łuków równych stopni można mnożyć przez siebie wg ogólnych zasad dla algebry macierzy.
Przykład. Dane są macierze łuków jak w przykładzie poprzednim.
Iloczyn tych macierzy $A \cdot B = \begin{bmatrix} 202 \\ 000 \\ 101 \end{bmatrix}$, a odpowiadający jej graf ilustruje rys. 15.

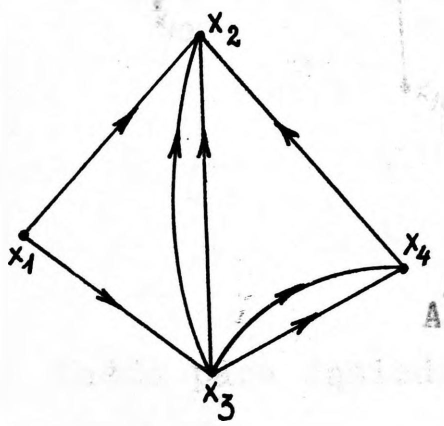


Rys. 15

W interpretacji geometrycznej odwzorowania w grafie $G_1 \cap G_2$ dla każdego wierzchołka oznaczają, że istnieje ścieżka złożona z dwóch łuków, z których jeden należy do grafu G_1, a drugi do grafu G_2.

6. Macierz łuków A można podnieść do potęgi λ /mnożąc ją przez siebie λ razy/. Jeżeli graf nie ma pętli i dowodów, to kolejne podnoszenie do potęgi prowadzi do wyzerowania macierzy A /$A^\lambda = 0$/. Podnoszenie macierzy łuków do potęgi ma tę własność, że w macierzy A^λ każdy element a_{ij} wskazuje liczbę możliwych ścieżek o długości λ, prowadzących z wierzchołka x_i do wierzchołka x_j w grafie wyjściowym.

Przykład. Dla grafu /rys. 16/ mamy:



$$A = \begin{bmatrix} 0110 \\ 0000 \\ 0202 \\ 0100 \end{bmatrix}; \quad A^2 = \begin{bmatrix} 0202 \\ 0000 \\ 0200 \\ 0000 \end{bmatrix}; \quad A^3 = \begin{bmatrix} 0200 \\ 0000 \\ 0000 \\ 0000 \end{bmatrix}$$

$$A^4 = \begin{bmatrix} 0000 \\ 0000 \\ 0000 \\ 0000 \end{bmatrix}; \quad A_\Sigma = A + A^2 + A^3 \quad \begin{bmatrix} 0512 \\ 0000 \\ 0402 \\ 0100 \end{bmatrix}$$

Rys. 16

Element, np. a_{12} macierzy A^λ przyjmuje wartości:

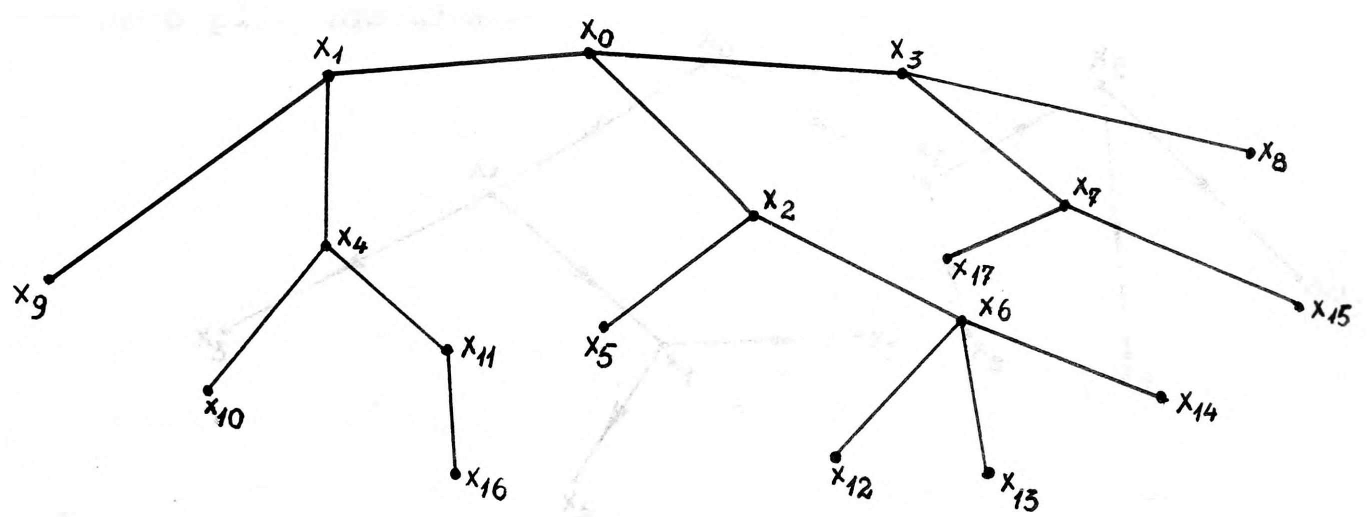
Potęga macierzy	$\lambda = 1$	$\lambda = 2$	$\lambda = 3$	$\lambda = 4$
Wartość elementu	$a_{12} = 1$	$a_{12} = 2$	$a_{12} = 2$	$a_{12} = 0$

oznacza to, że w grafie wyjściowym między wierzchołkami x_1 i x_2 istnieje jedna ścieżka o długości 1 i po dwie ścieżki o długości 2 i 3.

Macierz A_{Σ} , będąca sumą wszystkich kolejnych macierzy potęg A^{λ} oznacza liczbę ścieżek łączących wierzchołki x_i z x_j bez wskazania ich długości /element $a_{12} = 5$ w A_{Σ} , co rzeczywiście potwierdza liczbę ścieżek między wierzchołkami x_1 i x_2 - patrz tabelka/.

8. D r z e w a i p r a d r z e w a

D r z e w e m nazywamy graf /rys. 17/ o własnościach, że jest: spójny i niezorientowany; bez pętli i cykli;



Rys. 17

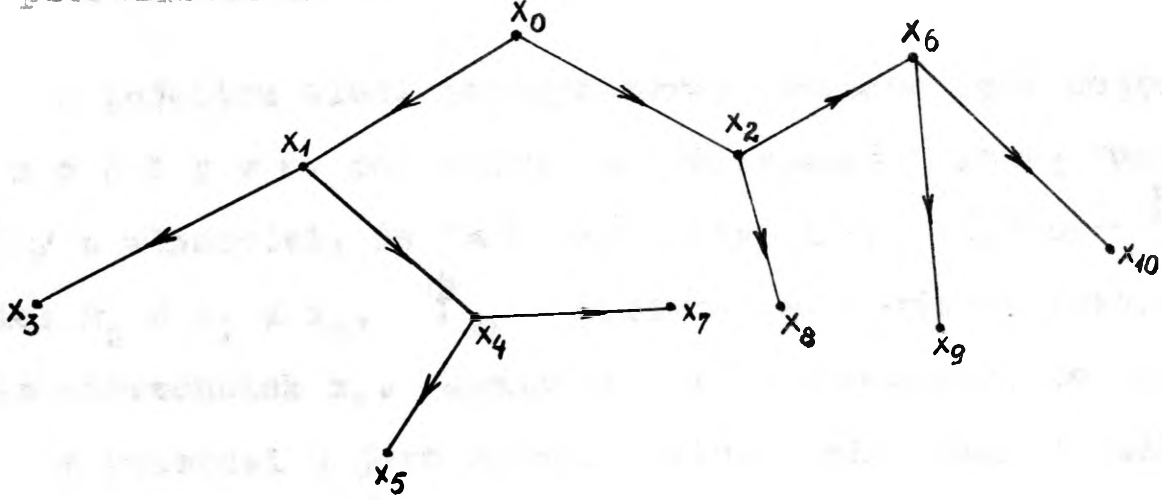
Każda para sąsiednich wierzchołków połączona jest tylko jedną krawędzią; dowolna para niesąsiednich wierzchołków połączona jest tylko jednym łańcuchem; ma nie mniej niż dwa wiszące wierzchołki; dołączenie krawędzi łączącej dwa niesąsiednie wierzchołki prowadzi do powstania cyklu elementarnego.

L a s e m nazywamy niespójny graf bez pętli i cykli. Składowe lasu są także drzewami albo wiszącymi wierzchołkami. Las powstaje przez usunięcie jednej z krawędzi grafu. Na przykład usuwając z drzewa /rys. 17/ krawędzie /x_0, x_1/ i /x_0, x_3/ otrzymujemy las składający się z trzech drzew.

Ponieważ liczba cyklometryczna dla lasu $\nu = 0$ lub $k - w + 1 = 0$ /las nie ma cykli i ~~ni~~ ma tylko jedną ścianę nieskończoną/, to aby graf spójny przekształcić w ~~drzewo~~ las trzeba usunąć z niego nie mniej niż n krawędzi, gdzie liczbę n obliczamy z zależności $n = k - W + 1$.

Pradrzewem nazywamy drzewo zorientowane /rys. 18/.

Pierwiastkiem pradrzewa nazywamy wierzchołek, dla którego stopień wejścia $P^+ /x/ = 0$ /z pierwiastka pradrzewa łuki jedynie wychodzą/. Na przykład, wierzchołek x_0 pradrzewa /rys. 18/ jest jego pierwiastkiem.

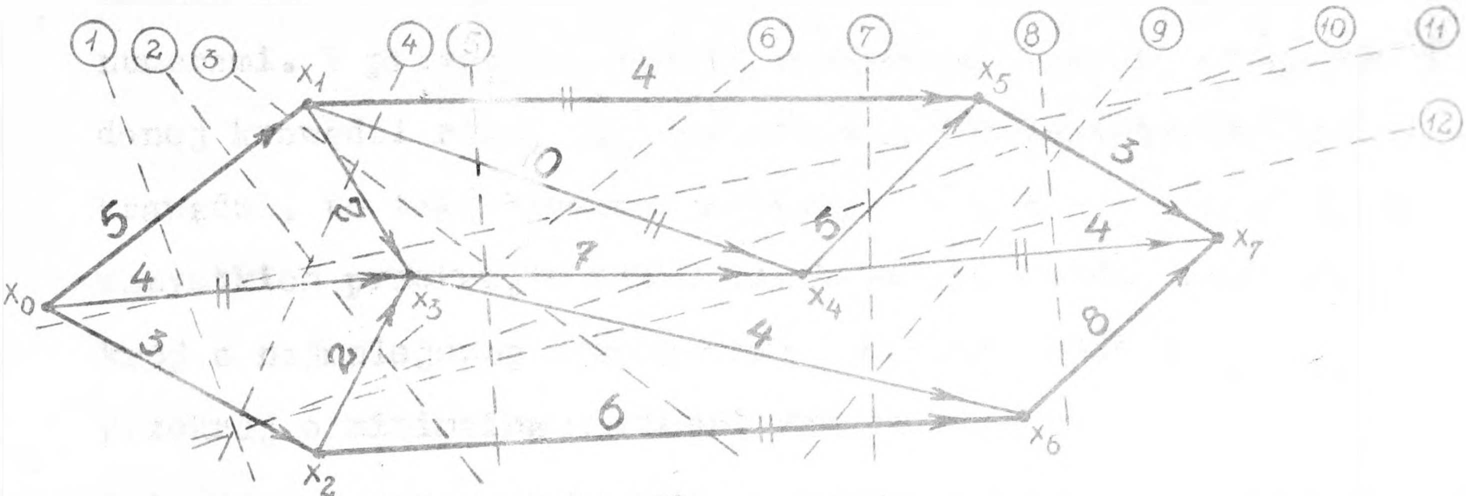


Rys. 18

9. S i e c i

S i e c i ą nazywamy graf skończony $G /X, U/$ bez pętli i cykli, zorientowany w jednym kierunku od wierzchołka x_0 zwanego ź r ó d ł e m do wierzchołka x_n zwanego u j ś c i e m. Przy czym półstopień wejścia dla źródła i półstopień wyjścia dla ujścia są równe zeru $/P^+ /x_0/ = P^- /x_n/ = 0/$.

S i e c i ą t r a n s p o r t o w ą nazywamy sieć o własnościach, że ma tylko jedno źródło i tylko jedno ujście oraz, że każdej krawędzi przyporządkowywana jest pewna całkowita i nieujemna liczba /ccu/ > 0/ zwana d o p u s z c z a l n ą p r z e p u s t o w o ś c i ą danej krawędzi. Rysunek 19 przedstawia sieć transportową.



Rys. 19

Z pojęciem sieci transportowej związane jest pojęcie przepływu, pod którym należy rozumieć pewną funkcję / $\varphi(u)$/ o własności, że $0 \leq \varphi(u) \leq C(u)$ oraz $\sum_{u \in U^-_{x_i}} \varphi(u) = \sum_{u \in U^+_{x_i}} \varphi(u) = \Phi_{x_i}$ (*)

gdzie: $x_0 \neq x_i \neq x_n$, Φ_{xi} - wielkość całkowitego przepływu przez wierzchołek x_i. Własności / * / oznaczają, że przepływ w krawędzi u jest wyrażony liczbą nieujemną i całkowitą, wartość przepływu $\varphi(u)$ nie przewyższa dopuszczalnej przepustowości c /u/ danej krawędzi oraz, że suma przepływów wchodzących do pewnego wierzchołka x_i /nie będącego ani źródłem, ani ujściem/ równa się sumie przepływów wychodzących z tego wierzchołka.

Zbiór wierzchołków X sieci transportowej można podzielić na dwa rozłączne podzbiory A i B tak, że x_0 /źródło/ należy do A i niektóre wierzchołki tranzytowe oraz x_n /ujście/ należy do B i pozostałe wierzchołki. Zbiór krawędzi U_B, wchodzących do wierzchołków B nazywamy przekrojem sieci, a suma dopuszczalnych przepustowości tych krawędzi określa dopuszczalną przepustowość przekroju U_B, albo po prostu wielkość przekroju $C/U_B/ = \sum_{u \in U_B} C(u)$. W każdej sieci transportowej można wyróżnić pewną liczbę przekrojów o różnej dopuszczalnej przepustowości. Na przykład, dla sieci transportowej /rys. 19/ możliwe przekroje zaznaczone zostały liniami przerywanymi i oznaczonymi kolejnymi numerami. W przypadku, jeżeli maksymalna wartość przepływu $\psi(u)$ danej krawędzi równa się dopuszczalnej przepustowości c/u/ tej krawędzi, to taką krawędź nazywamy n a s y c o n ą. Spośród wszystkich przekrojów sieci transportowej można wyróżnić przekrój o najmniejszej sumarycznej przepustowości $C/U_B/_{min}$, czyli przekrój o minimalnej wartości /patrz tabelka/.

Lp.	Przekrój U_B	Przepustowość C/u/	
1	$/x_0,x_1/$, $/x_0,x_2/$, $/x_0,x_3/$	5+3+4	= 12
2	$/x_0,x_1/$, $/x_0,x_3/$, $/x_2,x_3/$	5+4+2	= 11
3	$/x_0,x_1/,/x_3,x_4/,/x_3,x_6/,/x_2,x_6/$	5+7+4+6	= 22
4	$/x_0,x_2/,/x_0,x_3/,/x_1,x_3/,/x_1,x_4/$ $/x_1,x_5/$	3+4+2+10+4	= 23
5	$/x_1,x_5/,/x_1,x_4/,/x_3,x_4/,/x_3,x_6/,$ $/x_2,x_6/$	4+10+7+4+6	= 31
6	$/x_0,x_2/,/x_3,x_6/,/x_3,x_4/,/x_1,x_4/,$ $/x_1x_5/$	3+4+7+10+4	= 28
7	$/x_2,x_6/,/x_3,x_6/,/x_4,x_7/,/x_4,x_5/,$ $/x_1,x_5/$	6+4+4+5+4	= 23
8	$/x_6,x_7/,/x_4,x_7/,/x_5,x_7/$	8+4+3	= 15
9	$/x_2,x_6/,/x_3,x_6/,/x_4,x_7/,/x_5,x_7/$	6+4+4+3	= 17
10	$/x_0,x_2/,/x_3,x_6/,/x_3,x_4/,/x_1,x_4/,$ $/x_5,x_7/$	3+4+7+10+3	= 27
11	$/x_0,x_2/,/x_0,x_3/,/x_1,x_3/,/x_1,x_4/,$ $/x_5,x_7/$	3+4+2+10+3	= 22
12	$/x_0,x_2/,/x_3,x_6/,/x_4,x_7/,/x_5,x_7/$	3+4+4+3	= 14

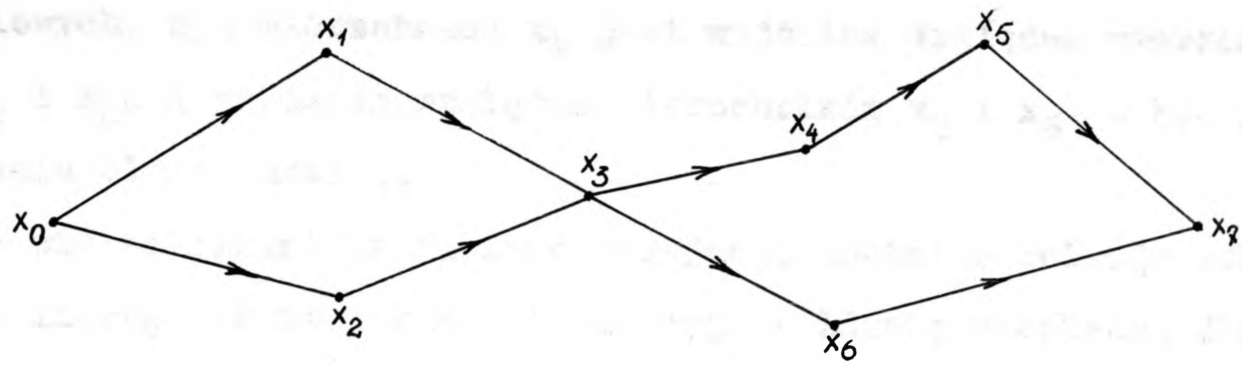
W tabelce podkreślona jest przepustowość minimalnego przekroju sieci z rys. 19.

Jeżeli w sieci transportowej wszystkie krawędzie przekroju minimalnego są nasycone, to największa wartość przepływu na większy przepływ nie pozwala, określana jest wielkością minimalnego przepływu sieci, dopuszczalna przepustowość minimalnego przekroju, jest więc $\varphi\ /U_1/_{max} = C\ /U_B/_{min}$.

Przy rozpatrywaniu sieci transportowej używa się pojęcia r z ą d w i e r z c h o ł k a, który wskazuje na kolejność przepływu przez każdy wierzchołek. Innymi słowy rząd wierzchołka wskazuje na to, że w konstrukcji przepływu przez pewien wierzchołek uczestniczą strumienie przechodzące przez wszystkie wierzchołki należące do rzędów o niższych numerach. Rząd wierzchołków zaznaczamy wzrastającym ciągiem liczb od źródła do ujścia, tzn., że każdy następny wierzchołek ma rząd wyższy co do wartości od rzędu wszystkich wierzchołków poprzedzających.

Rozważmy sieć /rys. 19/, w której wierzchołek x_o jako źródło ma rząd 0, a wierzchołki x_1 i x_2 mają rząd 1, ponieważ przepływ przez te wierzchołki nie może być utworzony bez uwzględnienia przepływu z wierzchołka x_o. Wierzchołek x_3 ma rząd 2, gdyż konstrukcja przepływu przechodzącego przezeń musi uwzględniać przepływ rzędu 0 i 1. Analogicznie wierzchołki: x_4 i x_6 - rząd 3, x_5 - rząd 4 i wreszcie x_7 - rząd 5.

Rząd wierzchołka można określić wg grafu bazowego, utworzonego z danej sieci transportowej przez usunięcie z niej łuków zamykających, które w sieci /rys. 19/ zaznaczone są podwójnymi kreskami. Z grafu bazowego /rys. 20/ wyraźnie widać rzędy wierzchołków.

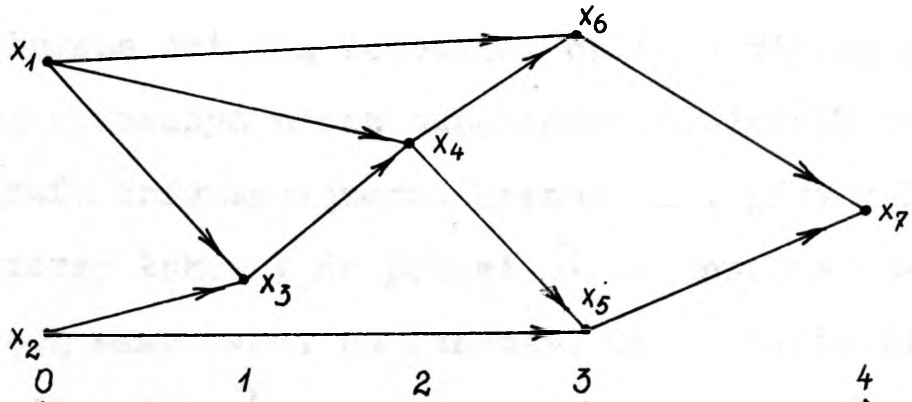


Rys. 20

10. Niektóre zastosowania grafów

A. Wykorzystanie grafów do identyfikacji informacji.

Graf informacyjny /rys. 21/ ilustruje układ ruchu informacji w dowolnym systemie od chwili jej wejścia do systemu /dane wejściowe/ do momentu jej wyjścia /wyniki końcowe/. Wierzchołkami grafu informacyjnego są dane wejściowe, pośrednie wyniki opracowań oraz wyniki końcowe. Łuki zaś wskazują na wzajemne powiązania tych elementów. Graf taki ma ścieżki o skończonej długości jako, że proces ruchu informacji nie jest nieskończony i jest zorientowany w określonym kierunku jej przepływu.



Rys. 21

Liczba taktów = Rząd wierzchołka

W grafie informacyjnym /rys. 21/ wierzchołki x_1 i x_2 posiadają tylko wyjścia - są danymi wejściowymi, wierzchołek x_7 ma tylko wejście - jest rezultatem końcowym, wierzchołki x_3, x_4, x_5, x_6 są rezultatami pośrednimi i pełnią funkcje wierzchołków wejściowowyjściowych, np. wierzchołek x_4 jest wyjściem względem wierzchołków x_1 i x_2, a wejściem względem wierzchołków x_5 i x_6, w których tworzeniu bierze udział.

Między wierzchołkami grafu informacyjnego zachodzą relacje wskazujące liczbę taktów w ruchu informacji - liczbę niezbędną dla tworzenia takiego czy innego wierzchołka, którą określa rząd tego wierzchołka. Na przykład, wierzchołki x_5 i x_6 tworzy się w wyniku trzech taktów /patrz rys. 21/.

R z ą d   g r a f u   określamy jako maksymalną liczbę taktów przepływu informacji w celu otrzymania rezultatu końcowego /graf rys. 21 jest rzędu 4/.

Ogólna liczba taktów konieczna do utworzenia wierzchołka x_i, a więc i jego rzędu, jest równa liczbie łuków łączących najdłuższą ścieżką wierzchołek x_i z dowolnym spośród wierzchołków wejściowych. Na przykład, wierzchołek x_7 /rys. 21/ ma rząd 4 i wyznaczony jest długością jednakowych liczbowo ścieżek:

/1/ $x_1 \to x_3 \to x_4 \to x_5 \to x_7$; /2/ $x_1 \to x_3 \to x_4 \to x_6 \to x_7$;
/3/ $x_2 \to x_3 \to x_4 \to x_5 \to x_7$; /4/ $x_2 \to x_3 \to x_4 \to x_6 \to x_7$.

Ponieważ rząd dowolnego wierzchołka x_j wyznaczany jest najdłuższą ścieżką wchodzącą do tego wierzchołka, to można tę liczbę wyznaczyć przez odpowiedni wykładnik potęgi macierzy łuków grafu informacyjnego. Mianowicie, przy kolejnym podnoszeniu macierzy łuków A do potęgi λ w dowolnej j-tej kolumnie elementami będą same zera, co oznacza, że w grafie nie ma ani jednej ścieżki o długości λ, wchodzącej do wierzchołka x_j. Najdłuższą więc ścieżką wchodzącą do tego wierzchołka jest ścieżka o długości $\lambda - 1$.

Wierzchołki x_j, dla których $\left(\sum a_j\right)_{A^1} = 0$ są wierzchołkami rzędu 0, tzn. wejściowymi danymi grafu informacyjnego. Wierzchołki x_i, dla których $\left(\sum a_i\right)_{A^1} = 0$ są rezultatami końcowymi.

Z macierzy A_{Σ} /patrz własność 6 macierzy łuków/ grafu informacyjnego wynika, że elementy jej w j-tej kolumnie wskazują z jakiego wierzchołka x_i powstaje wierzchołek x_j i ile razy każdy wierzchołek x_i uczestniczy poprzez różne ścieżki w tworzeniu x_j. Elementy macierzy A_{Σ} w i-tym wierszu wskazują jakie wierzchołki x_j powstają z wierzchołków x_i i ile jest możliwych ścieżek, z których może powstać x_j. Nie trudno jest przekonać się o powyższych własnościach macierzy A^{λ} i A_{Σ}, konfrontując graf informacyjny /rys. 21/ z odpowiednimi macierzami tego grafu.

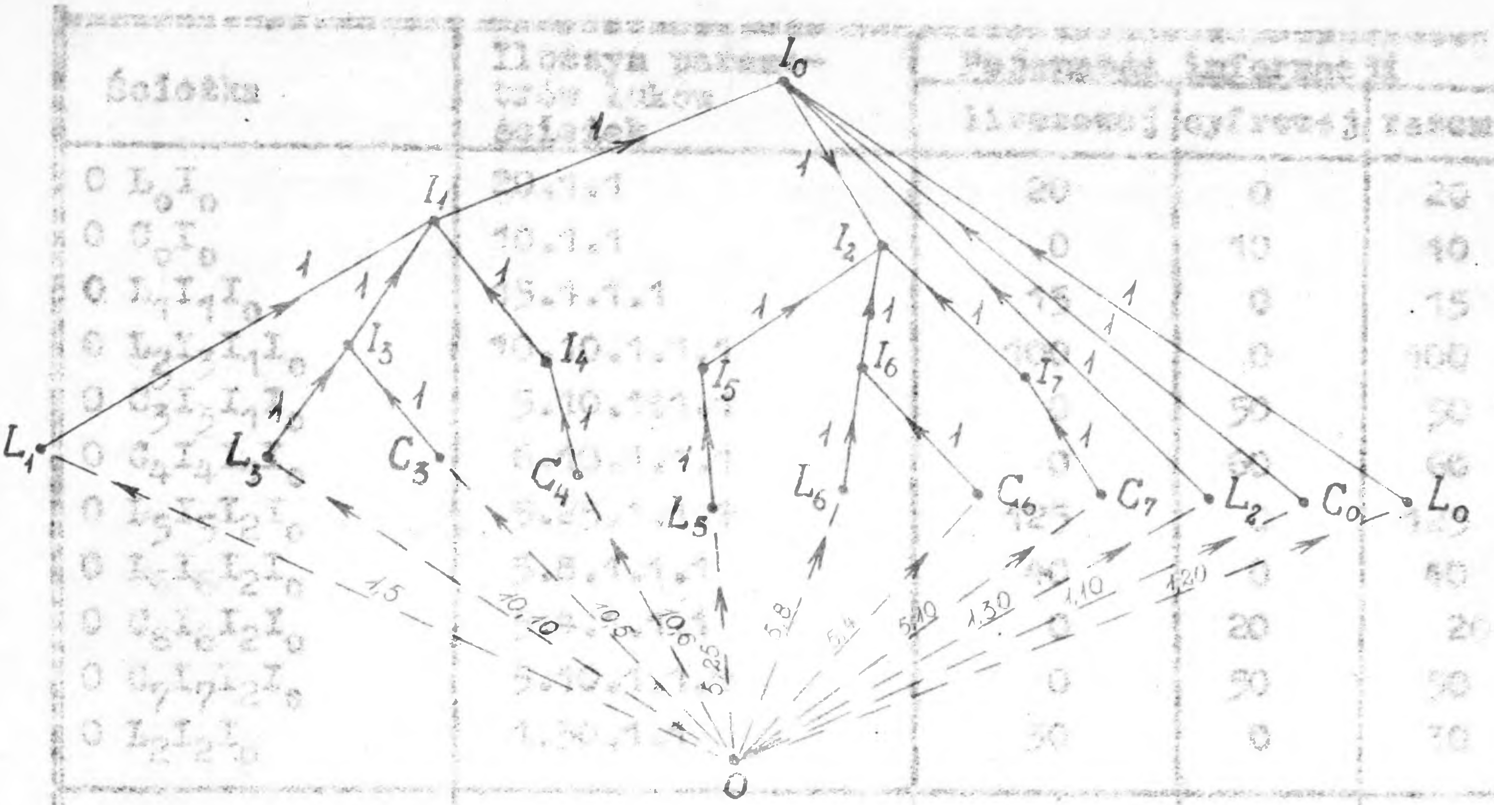
B. Wykorzystanie grafów do określenia pojemności informacji

Grafy można wykorzystać również do określenia pojemności informacji danego dokumentu. Zadanie polega na określeniu liczby znaków literowych i cyfrowych dokumentów z uwzględnieniem tekstu określającego formę dokumentu danych źródłowych, niezbędnych dla obliczeń pojemności informacji.

Dla przykładu przedstawmy konstrukcję drzewa informacji /rys. 22/, w której informacja I_0 składa się ze zbiorów I_1 i I_2 oraz zawiera część opisową, składającą się z materiału literowego L_0 i cyfrowego C_0.

Z kolei, zbiór informacji I_1 dzieli się na zbiory I_3 i I_4 oraz zawiera część opisową L_1. Analogicznie skonstruowane są zbiory informacji I_2 oraz zbiory I_5, I_6, I_7 /rys. 22/.

W celu określenia pojemności informacji należy przekształcić drzewo w sieć transportową przez wprowadzenie dodatkowego wierzchołka O, połączonego łukami z końcowymi wierzchołkami drzewa L_0, C_0 itd. /rys. 22/. Następnie przypisanie tym łukom /incydentnym z wierzchołkiem O/ dwóch parametrów d_i i w_i, gdzie d_i-długość przedstawienia zbioru informacji /liczba znaków/; w_i - liczba określająca wartość drugiego zbioru informacyjnego, tj. liczba mówiąca ile razy zbiór informacyjny poziomu niższego mieści się w



Rys. 22

odpowiadającym mu zbiorze informacyjnym poziomu wyższego. Ponadto przypisanie pozostałym łukom parametru w_i o powyższym znaczeniu /przykładowo w sieci rys. 22 wspomniane parametry zostały zapisane w następującej kolejności: na pierwszym miejscu wartość parametru w_i, a na drugim – d_i/.

Całkowita pojemność informacji, przepływającej przez sieć składa się z sumy pojemności informacyjnej każdej ze ścieżek od O do I_0, czyli

$V = \sum_{i=1}^{k} \vartheta_i$, gdzie ϑ_i – pojemność informacji i-tej ścieżki;
k – liczba ścieżek od O do I_0.

Z kolei pojemność informacji dowolnej ścieżki jest iloczynem łuków tej ścieżki /patrz tabela poniżej/.

W systemie informacyjnym gdzie liczba przetwarzanych dokumentów liczy kilka tysięcy egzemplarzy, podobne obliczenia możliwe są do wykonania z zastosowaniem ETO.

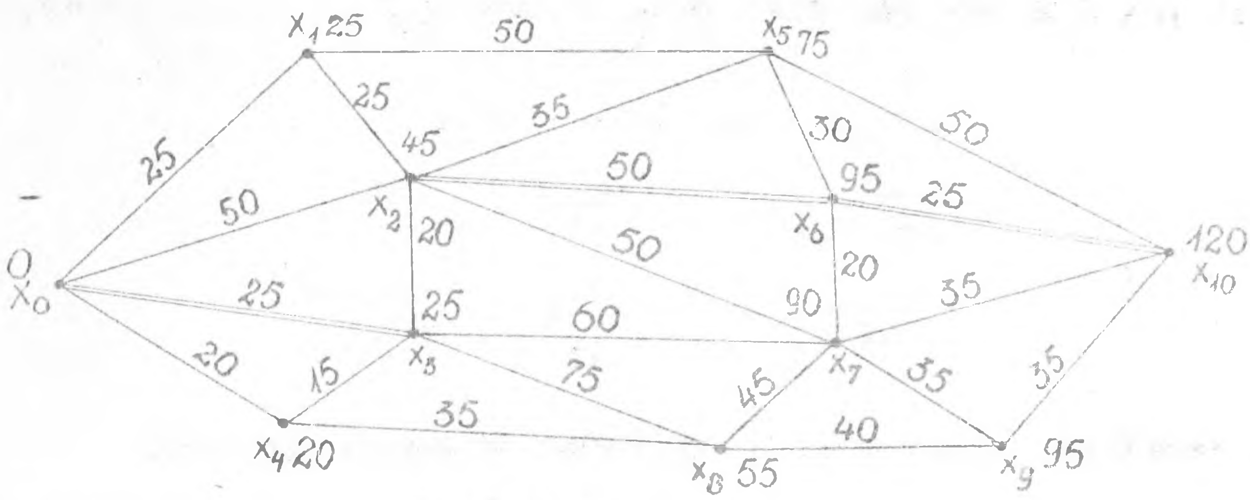
Ścieżka	Iloczyn parametrów łuków ścieżek	Pojemność informacji		
		literowej	cyfrowej	razem
$0\ L_oI_o$	20.1.1	20	0	20
$0\ C_oI_o$	10.1.1	0	10	10
$0\ L_1I_1I_o$	15.1.1.1	15	0	15
$0\ L_3I_3I_1I_o$	10.10.1.1.1	100	0	100
$0\ C_3I_3I_1I_o$	5.10.1.1.1	0	50	50
$0\ C_4I_4I_1I_o$	6.10.1.1.1	0	60	60
$0\ L_5I_5I_2I_o$	5.25.1.1.1	125	0	125
$0\ L_6I_6I_2I_o$	5.8.1.1.1	40	0	40
$0\ C_6I_6I_2I_o$	5.4.1.1.1	0	20	20
$0\ C_7I_7I_2I_o$	5.10.1.1.1	0	50	50
$0\ L_2I_2I_o$	1.30.1.1	30	0	30
Razem:	-	330	190	520

Informacja wejściowa wprowadzana do pamięci maszyny może być ilustrowana przy pomocy macierzy łuków wymiaru m x 4, gdzie m - liczba łuków w grafie /liczba wierszy w macierzy/. W pierwszej kolumnie występują wierzchołki początkowe łuków, w drugiej - wierzchołki końcowe, w trzeciej - parametry w_i i wreszcie w czwartej - parametry d_i /patrz macierz danych z grafu rys. 22/.

$$\begin{bmatrix} 0 & L_o & 1 & 20 \\ L_o & I_o & 1 & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & L_2 & 1 & 30 \\ L_2 & I_2 & 1 & 0 \\ I_2 & I_o & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

C. Wykorzystanie grafów do obliczania najkrótszej ścieżki

Jednym z podstawowych zadań teorii grafów jest wyszukiwanie /obliczanie/ najkrótszej ścieżki, łączącej dwa wierzchołki grafu. Algorytm tego zagadnienia rozpatrzymy na przykładzie sieci transportowej /rys. 23/. Każdej krawędzi u sieci przyporządkowujemy liczbą l /u/ $\geqslant$ 0, zwaną długością krawędzi. Należy określić /obliczyć/ taką ścieżkę μ , prowadzącą od wierzchołka początkowego x_0 /źródła/ do wierzchołka końcowego /ujścia/ x_n sieci, aby "długość" ścieżki $l(\mu) = \sum_{u \in \mu} l(u)$ była najkrótsza ze względu na wszystkie ścieżki w grafie.



Rys. 23

Algorytm wyznaczenia /obliczenia/ najkrótszej ścieżki:

1. Oznaczyć kolejne wierzchołki x_0, x_1, x_2,...., x_n wskaźnikami $\lambda_0, \lambda_1, \lambda_2 \dots\dots \lambda_n$, początkowo przyjmując $\lambda_0 = 0$, $\lambda = N$ dla $i \neq 0$ i N jako liczby spełniającej nierówność $N > \sum_{u \in U} l(u)$

2. Wyszukiwać takich krawędzi /x_i, x_j/ dla i = 0,1,2,n; j = 0,1,2, ,n, dla których $\lambda_j - \lambda_i$ 1 /x_i, x_j/, a następnie zamieniamy wskaźnik λ_j na wskaźnik $\lambda_j = \lambda_i + l\ /x\ \ x_j/ < \lambda_j$, gdzie $\lambda_j > 0$ dla i=j. Proces powtarzać tak długo dopóki istnieje jeszcze co najmniej jedna krawędź, dla której można zmniejszyć wskaźnik λ_j .

3. Po ustaleniu wskaźników λ_j odszukać taki wierzchołek x_{p1}, że $\lambda_n - \lambda_{p1} = l\ /x_{p1}, x_n/$, ponieważ wskaźnik λ_n w naszym procesie monotonicznie maleje, a x_{p1} jest ostatnim wierzchołkiem służącym do tego zmniejszenia. Podobnie wyszukać wierzchołek x_{p2}, dla którego $\lambda_{p1} - \lambda_{p2} = l\ /x_{p2}, x_{p1}/$ itd. Ciąg λ_n, λ_{p_1}, λ_{p_2}, jest ściśle malejący i wobec tego dla pewnego punktu będzie $x_{pk+1} = x_0$. λ_n jest "długością" najkrótszej

ścieżki od x_0 do x_n, a $\mu_0 = \{x_0, x_{pk}, x_{p_{k-1}}, x_{p_1}, x_n\}$ jest najkrótszą ścieżką.

Prawdziwość końcowego stwierdzenia wykonuje się następująco. Niech $\mu = \{x_0, x_{k_1}, x_{k_2}, \ , x_{k_{s+1}} = x_n\}$ będzie dowolną ścieżką od x_0 do x_n; jej długość oznaczmy przez $l\ /\mu\ /$; wówczas:

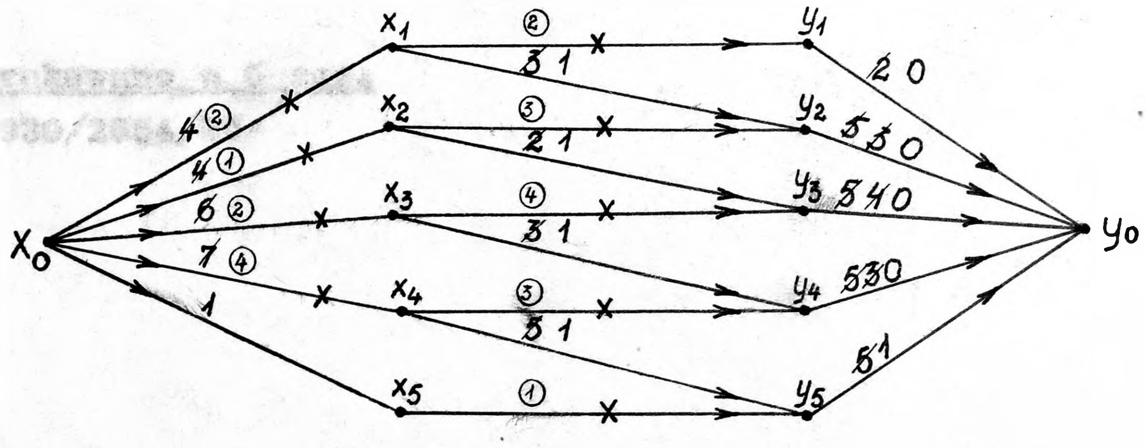
$$\lambda_{k_1} - 0 \leqslant l\ (x_0, x_{k_1})$$
$$\lambda_{k_2} - \lambda_{k_1} \leqslant l\ (x_{k_1}, x_{k_2})$$
$$\lambda_n - \lambda_{k_s} \leqslant l\ (x_{k_s}, x_n)$$

Dodając stronami powyższe nierówności, otrzymamy dla dowolnej ścieżki μ $\lambda_n - 0 \leqslant l(\mu)$

Ponieważ dla ścieżki μ_0 mamy $\lambda_n = l(\mu_0)$, wobec tego ścieżka μ_0 jest najkrótsza.

D. Wykorzystanie grafów do określania maksymalnego przepływu

Rozpatrzymy następujący przykład. Pewne porty x_i $i = 1,2,\ldots,5/$ rozporządzają określonymi zasobami w ilości z_i /4, 4, 6, 7, 1/, na które porty y_j /j = 1,2,...,5/ zgłaszają zapotrzebowanie p_j /2,5,5,5,5/. Możliwości przewozowe statków /przepustowość łuków/ c_{ij} (u) - patrz graf. Graf tego zadania pokazany jest na rys. 24.



Rys. 24

Algorytm określania maksymalnego przepływu:

1. Przesuwając się od x_0 /źródło/ zawsze najbardziej lewą ścieżką μ_i /jeżeli nie jest ona ślepa - ma łuk o zerowej przepustowości/ do y_0 /ujście/ wybieramy i skreślamy na niej łuk o najmniejszej przepustowości , której wartość odejmujemy od wartości przepustowości pozostałych łuków rozpatrywanej ścieżki. Postępujemy tak, aż wszystkie ścieżki μ_i grafu od x_0 do y_0 zostaną poprzerywane.

2. Na każdej ze ścieżek μ_i grafu wyjściowego określić przepływ $\varphi_{ij}(u)$ równy przepustowości $c_{ij}(u)$ skreślonego łuku. Przepływ całej sieci równa się sumie przepływów φ_{ij} dla każdej ścieżki. Tak określany przepływ jest maksymalny.

$\Phi_{max} = \Sigma\varphi_{ij}(u) = 2+2+1+3+2+4+4+3+1 = 22$ jednostki medium.

<u>Literatura</u>:

1. F. Charari, Teoria grafów.
2. K. Berge, Teoria grafów i jej zastosowania.
3. Z. Ałfierowa, Zastosowanie teorii grafów w rachunku ekonomicznym.
4. O. Ore, Wstęp do teorii grafów.

<u>Wydrukowano w 5 egz.</u>
Nr 930/2654/WW