AKADEMIA SZTABU GENERALNEGO
im. Generała Broni Karola Świerczewskiego

KATEDRA CYBERNETYKI

mgr Wacław WOJTKOWSKI

PROCESY STOCHASTYCZNE

WARSZAWA MAJ 1971

AKADEMIA SZTABU GENERALNEGO
im. Generała Broni Karola Świerczewskiego

KATEDRA CYBERNETYKI

mgr Wacław **WOJTKOWSKI**

PROCESY STOCHASTYCZNE

WARSZAWA MAJ 1971

A K A D E M I A   S Z T A B U   G E N E R A L N E G O
im.gen.broni K.Swierczewskiego

KATEDRA CYBERNETYKI

mgr Wacław WOJTKOWSKI

P R O C E S Y   S T O C H A S T Y C Z N E

45

~~5/725~~

WARSZAWA Maj 1971 r.

Niniejsze opracowanie stanowi zbiór wybranych fragmentów teorii procesów stochastycznych, dających obraz możliwości zastosowań, a więc i określonej przydatności dla celów wojskowych.

Treść oraz stopień trudności przy studiowaniu ułożone są pod kątem wykładów prowadzonych na kursach w ASG. W przypadku samodzielnego studiowania konieczna jest znajomość rachunku różniczkowego w ujęciu politechnicznym.

SZEF KATEDRY CYBERNETYKI

SPIS TREŚCI

str.

1. Rachunek prawdopodobieństwa 5

1.1. Zdarzenia losowe i działania na nich 5
1,2. Prawdopodobieństwo i jego własności 8
1.3. Prawdopodobieństwo warunkowe 12
1.4. Zmienne losowe. Parametry rozkładu zmiennych losowych 17
1.5. Funkcje charakterystyczne i ich własności 27
1.6. Funkcje tworzące prawdopodobieństwa 29

2. Łańcuchy Markowa 30

2.1. Własność Markowa 30
2.2. Łańcuchy Markowa 31
2.3. Przykłady łańcuchów Markowa 33
2.4. Klasyfikacja stanów jednorodnych łańcuchów Markowa 39
2.5. Twierdzenie ergodyczne dla łańcuchów Markowa... 45
2.6. Zadania 50

3. Procesy Markowa 53

3.1. Definicja procesów Markowa i ich typy 53
3.2. Procesy stochastyczne o przyrostach niezależnych 54
3.3. Proces ruchu Browna 56

4. Procesy stacjonarne 58
5. Procesy gałązkowe 63

5.1. Procesy gałązkowe Galtona-Bastona 63
5.2. Procesy gałązkowe Markowa /z ciągłym parametrem/ 69

6. Zastosowania 75

6.1. Model centrali telefonicznej 75
6.2. Strzelanie z kołyszącego się statku 90
6.3. Zastosowanie procesu urodzin i śmierci do rezerwowania z odnową 101

I. Rachunek prawdopodobieństwa

1.1. Zdarzenia losowe i działania na nich

Rachunek prawdopodobieństwa zajmuje się badaniem zależności zachodzących między pewnymi obiektami zwanymi zdarzeniami losowymi. Postaramy się teraz podać matematyczną definicję zdarzenia losowego oraz podać wyjaśniające przykłady. Zaczniemy od pojęcia pierwotnego dla rachunku prawdopodobieństwa tzn.: od zdarzenia elementarnego. Pojęcia tego matematycznie nie definiuje się, tylko dla każdego modelu oddzielnie określa się, jakie obiekty w tym modelu będziemy nazywać zdarzeniami elementarnymi. Zbiór zdarzeń elementarnych oznaczać będziemy przez Ω.

Przykład 1. Dokonujemy rzutu sześcienną kostką. Na kostce tej jak wiemy znajdują się liczby 1,2,3,4,5,6. Pojawienie się każdej poszczególnej liczby i, gdzie i = 1,2,3,4,5,6, będzie tu zdarzeniem elementarnym, które oznaczymy odpowiednio przez ω_i. Zbiór zdarzeń elementarnych Ω zawiera tu więc 6 elementów.

Przykład 2. Rzucamy monetę symetryczną. W rezultacie rzutu może się pojawić orzeł lub reszka. Przez ω_1 oznaczmy pojawienie się orła, przez ω_2 pojawienie się reszki. Zbiór zdarzeń elementarnych dla tego modelu składa się ze zdarzeń $\Omega = \{\omega_1, \omega_2\}$.

Przykład 3. Obserwujemy ilość urodzeń chłopców i dziewcząt w Polsce w poszczególnych latach okresu 1927-1932. Nie umiemy przewidzieć płci noworodka w żadnym z poszczególnych przypadków. Oznaczamy przez ω_1 - urodzenie się chłopca, a przez ω_2 urodzenie się dziewczynki.
Przestrzeń zdarzeń elementarnych składa się tutaj też z dwóch zdarzeń $\Omega = \{\omega_1, \omega_2\}$.

W przykładach rozpatrywanych powyżej zbiór zdarzeń elementarnych był skończony, w rachunku prawdopodobieństwa rozważa się także takie modele, w których zbiór zdarzeń elementarnych jest nieskończony /przeliczalny lub nieprzeliczalny, tzn.

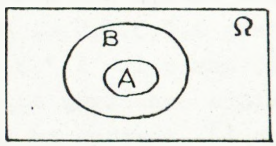
zdarzeń elementarnych w pierwszym przypadku jest tyle co liczb naturalnych, a w drugim tyle co punktów na prostej/.

Definicja 1. Zbiór zawierający wszystkie zdarzenia elementarne nazywamy zdarzeniem pewnym.

Definicja 2. Zbiór nie zawierający żadnego zdarzenia elementarnego /zbiór pusty/ nazywamy zdarzeniem niemożliwym.

Definicja 3. Dowolny podzbiór zbioru zdarzeń elementarnych nazywać będziemy zdarzeniem losowym/w przypadku skończonych i przeliczalnych przestrzeni zdarzeń elementarnych/.

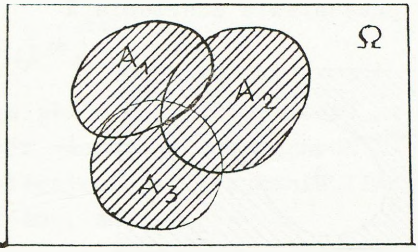
Definicja 4. Mówimy, że zdarzenie A zawiera się w zdarzeniu B $\equiv$ jeżeli każde zdarzenie elementarne należące do A należy do B. Piszemy to $A \subset B$.
Na rysunku relacja ta wygląda następująco:



Definicja 5. Zdarzenie $A = B \equiv A \subset B$ i $B \subset A$.

Definicja 6. Mówimy, że zdarzenia A i B wyłączają się jeżeli nie mają wspólnych zdarzeń elementarnych.
Zdefiniujemy teraz działania na zdarzeniach losowych. Niech $A_1, A_2, A_3, \ldots$ będzie ciągiem zdarzeń losowych /przeliczalnym lub skończonym/.

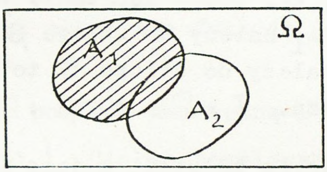
Definicja 7. Zdarzenie A zawierające te i tylko te zdarzenia elementarne, które należą do jakiegoś A_i /$i = 1,2, \ldots$/ nazywamy alternatywę /lub sumą/ zdarzeń A_i /$i = 1,2, \ldots$/. Oznaczać ją będziemy przez: $A = A_1 \cup A_2 \cup A_3 \cup \ldots$, lub $A = \bigcup_{i=1}^{\infty} A_i$ i czytamy A_1 lub A_2 lub ...
Rysunkowo w przypadku skończonym wygląda to tak:



Obszar zakreskowany jest sumą zdarzeń $A_1 \cup A_2 \cup A_3$.

Definicja 8. Zdarzenie A zawierające te i tylko te zdarzenia elementarne, które należą do zdarzenia A_1, a nie należą do zdarzenia A_2 nazywamy różnicą zdarzeń A_1 i A_2. Oznaczamy to przez: $A = A_1 - A_2$.

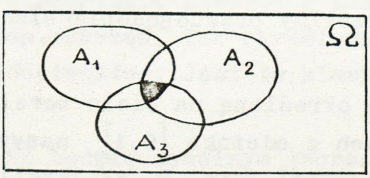
Na rysunku obszar zakreślony przedstawia różnicę:



Definicja 9. Zdarzenie A, które zawiera te i tylko te zdarzenia elementarne, które należą do wszystkich zdarzeń A_1, A_2..., nazywamy koniunkcją /lub iloczynem/ tych zdarzeń. Oznaczamy to następująco:

$A = A_1 \cap A_2 \cap A_3$ ....lub $A = \bigcap_{n=1}^{\infty} A_i$ i czytamy A_1 i A_2 i A_3 i ......

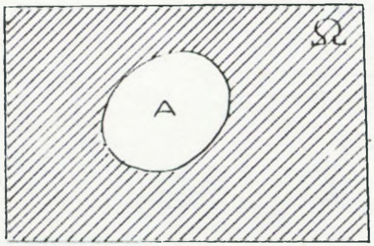
W przypadku skończonym obszar zakreślony przedstawia iloczyn zdarzeń $A_1 \cap A_2 \cap A_3$



Definicja 10. Różnicę zdarzenia Ω - A nazywamy zdarzeniem przeciwnym do zdarzenia A i oznaczmy

$$\bar{A} = \Omega - A$$

Obszar zakreskowany przedstawia zdarzenie $\bar{A}$



Definicja 11. Zbiór β podzbiorów pewnego zbioru zdarzeń elementarnych Ω, dla którego są prawdziwe następujące warunki:
a/ Ω należy do β tzn. zdarzenie pewne jest elementem β;
b/ zdarzenie niemożliwe 0 należy do β : $0 \in \beta$
c/ jeżeli zdarzenie $A_1, A_2, \ldots\ldots$ należą do β to i zdarzenie $A = \bigcup_{i=1}^{\infty} A_i$ i $B = \bigcap_{i=1}^{\infty} A_i$ należy do zbioru β;
d/ jeżeli zdarzenie A należy do zbioru β to i zdarzenie przeciwne należy do β tzn. $\bar{A} = \Omega - A \in \beta$;

nazywamy ciałem borelowskim zdarzeń, a jego elementy nazywamy zdarzeniami losowymi.

U w a g a : W przypadku skończonej lub przeliczalnej przestrzeni zdarzeń elementarnych cztery te warunki są spełnione dla zbioru podzbiorów przestrzeni, a więc definicja 3 pokrywa się w tym przypadku z definicją 11.

1.2. Prawdopodobieństwo i jego własności:

W paragrafie tym określimy prawdopodobieństwo i podamy kilka jego własności:

Definicja 1'. Funkcję określoną na ciele borelowskim β zdarzeń losowych, o wartościach z odcinka $[0,1]$ nazywać będziemy prawdopodobieństwem i oznaczać przez P /A/ jeżeli spełnione są następujące aksjomaty:
/i/ $0 \leqslant P/A/ \leqslant 1$; gdy $A \in \beta$;
/ii/ $P/\Omega/ = 1$;
/iii/ jeżeli $A_i \cap A_j = 0$ dla $i \neq j$, a więc zdarzenia są parami wyłączające się,

to:

$$P\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i\right) = \sum_{i=1}^{\infty} P(A_i).$$

Przykład 1. Niech zbiór wszystkich liczb całkowitych nieujemnych stanowi zbiór zdarzeń elementarnych Ω. Niech ω_n oznacza zdarzenie polegające na otrzymaniu liczby n, gdzie n = = 0,1,2, ... Załóżmy, że:

$$P(\omega_n) = \frac{e^{-1}}{n!}.$$

Aksjomaty /i/ i /iii/ są spełnione.

Należy sprawdzić czy P / Ω / = 1.

$$P\left(\bigcup_{n=0}^{\infty} \omega_n\right)=1, \text{ bo } P\left(\bigcup_{n=0}^{\infty} \omega_n\right) = \sum_{n=0}^{\infty} P(\omega_n) = e^{-1}\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} = e^{-1}\cdot e = 1.$$

Stąd wniosek, że tak określona funkcja jest dobrze określonym prawdopodobieństwem.

Przykład 2. Niech Ω posiada skończoną liczbę elementów tzn.: $\Omega = \{\omega_1, \omega_2, \ldots, \omega_n\}$. Ciałem borelowskim jest tutaj rodzina wszystkich podzbiorów zbioru Ω tzn. zdarzenie losowe A posiada zawsze pewną liczbę skończoną zdarzeń elementarnych, niech będzie ich m. Określmy prawdopodobieństwo wzorem:

$$P /A/ = \frac{m}{n};$$

Czyli prawdopodobieństwo zdarzenia losowego A równa się stosunkowi ilości zdarzeń elementarnych sprzyjających zajściu zdarzenia A / zdarzenia elementarne zawarte w zdarzeniu losowym A/ do ilości wszystkich zdarzeń. Tak określona funkcja spełnia aksjomaty prawdopodobieństwa. Jest to klasyczna definicja prawdopodobieństwa.

Przykład 3. Niech Ω będzie dowolnym tworem geometrycznym posiadającym skończoną miarę /długość, pole, objętość/ czyli

$$\mu/\Omega/ < +\infty.$$

Zdarzenia losowe to podzbiory tego zbioru. Prawdopodobieństwo zdarzenia losowego A równa się stosunkowi miary zbioru A do miary całej przestrzeni.

$$P(A) = \frac{\mu(A)}{\mu(\Omega)}.$$

Wzór ten określa nam dobrze prawdopodobieństwo. Jest to definicja prawdopodobieństwa geometrycznego.

Twierdzenie 1.2.1. Suma prawdopodobieństw zdarzenia losowego A i zdarzenia przeciwnego $\bar{A} = \Omega - A$ równa się jedności.

Dowód. Z określenia $\bar{A}$ wynika, że $\bar{A} \cup A = \Omega$ czyli:

$$P/A \cup \bar{A}/ = P/\Omega/ = 1.$$

Ponieważ A i $\bar{A}$ są rozłączne więc:

$1 = P/A \cup \bar{A}/ = P/A/ + P/\bar{A}/$ co kończy dowód.

Twierdzenie 1.2.2.

$$P/A \cup B/ = P/A/ + P/B/ - P/A \cap B/$$

gdzie A i B dowolne zdarzenia losowe.

Dowód. $A \cup B = A \cup /B - A \cap B/,$

$B = A \cap B \cup /B - A \cap B/.$

Po prawej stronie tych równości znajdują się zbiory rozłączne a więc:

$$P/A \cup B/ = P/A/ + P/B - A \cap B/,$$
$$P/B/ = P/A \cap B/ + P/B-A \cap B/.$$

Odejmując stronami te równości otrzymamy:

$$P/A \cup B/ - P/B/ = P/A/ - P/A \cap B/ \quad \text{czyli}$$
$$P/A \cup B/ = P/A/ + P/B/ - P/A \cap B/,$$ co należało udowodnić.

Twierdzenie 1.2.3. Jeżeli zdarzenia losowe A i B spełniają relację $A \subset B$ to:

$$P/A/ \leqslant P/B/.$$

Dowód. Zauważmy, że $B = A \cup /B - A/$ i zdarzenia A i B-A wyłączają się a więc:

$$P/B/ = P/A/ + P/B-A/$$

Ponieważ: $P/B-A/ \geqslant 0$, to $P/B/ \geqslant P/A/$.

Zadania:

Zad.1. Rzucamy dwoma kostkami do gry. Niech A - zderzenie losowe polegające na tym, że suma oczek na kostkach jest nieparzysta, B - zdarzenie losowe polegające na tym, że na choć jednej z kostek wypadnie jedynka.
Opisać zdarzenia $A \cap B$, $A \cup B$, $A \cap \bar{B}$.

Zadanie 2. Czy zdarzenia losowe A i B są jednakowo możliwe jeżeli:

a/ $\bar{A} = \bar{B}$, b/ $A \cup C = B \cup C$, c/ $A \cap C = B \cap C$.

Zadanie 3. Jeżeli A i B dowolne zdarzenia losowe. Udowodnić równości:

a/ $P/\bar{A} \cap \bar{B}/ = 1 - P/A/ - P/B/ + P/A \cap B/$;
b/ $P/A/ + P/\bar{A} \cap B/ = P/B/ + P/\bar{B} \cap A/$.

Zadanie 4. Wybieramy przypadkowo dwie liczby z ciągu 1,2, ...n, opisać przestrzeń zdarzeń elementarnych, oraz znaleźć prawdopodobieństwo, że jedna z nich będzie mniejsza od k, a druga większa od k, gdzie $1 < k < n$ jest dowolną liczbą całkowitą.

Zadanie 5. /Zadanie Banacha/. Pewien matematyk nosi przy sobie dwa pudełka zapałek. Ilekroć chce ona zapalić papierosa, wydobywa jedno pudełko losowo z kieszeni. Znaleźć prawdopodobieństwo, że w chwili gdy po raz pierwszy wydobędzie on puste pudełko, drugie pudełko będzie zawierało r zapałek /r = 0,1,..., n; n jest tu ilością zapałek, które na początku znajdowały się w każdym z pudełek/. Opisać przestrzeń zdarzeń elementarnych.

Zadanie 6. Wybierzmy losowo równanie kwadratowe $x^2 + ax + b = 0$, gdzie $|a| \leqslant R$, $|b| \leqslant R$, $R < +\infty$. Opisać przestrzeń zdarzeń elementarnych.
Jakie jest prawdopodobieństwo, że:
a/ rozwiązania równania są rzeczywiste,
b/ oba rozwiązania są dodatnie.

Zadanie 7. /Zadanie Buffona/. Na siatkę równoległych o odległości 2 a rzucamy igłę o długości 2 l. Obliczyć prawdopodobieństwo, że igła przetnie siatkę.

Zadanie 8. W kwadrat o wierzchołkach /0,0/, /0,1/, /1,0/ i /1,1/ rzucamy losowo punkt. Niech $/\xi, \eta/$ oznacza jego współ-

rzędne. Zakładamy, że prawdopodobieństwo wpadnięcia punktu w dany obszar wewnątrz kwadratu zależy tylko od powierzchni tego obszaru i jest do niej proporcjonalne.
Obliczyć:
a/ $P(|\xi - \eta| < Z)$,

gdzie $0 < Z < 1$.

b/ $P/\xi \cdot \eta < Z/$

1.3. Prawdopodobieństwo warunkowe

Definicja 1.3.1. $P/A \mid B/ = \frac{P/A \cap B/}{P/B/}$, gdzie $P/B/ > 0$,

Wzór ten czytamy następująco: prawdopodobieństwo zajścia zdarzenia A pod warunkiem, że zaszło zdarzenie B równa się stosunkowi prawdopodobieństwa iloczynu zdarzeń A i B do prawdopodobieństwa zdarzenia B.
Pokażemy teraz, że prawdopodobieństwo warunkowe spełnia wszystkie aksjomaty prawdopodobieństwa.
Zdarzenie B można przedstawić w postaci:

$$B = A \cap B \cup \bar{A} \cap B ,$$

gdzie $\bar{A}$ jest zdarzeniem przeciwnym do zdarzenia A. Tak więc spełniona jest nierówność $A \cap B \subset B$ co pociąga za sobą nierówność prawdopodobieństw $P / A \cap B/ \leqslant P/B/$. Ponieważ $P / A \cap B / \geqslant 0$ i $P /B/ > 0$ to

$$0 \leqslant \frac{P/A \cap B/}{P/B/} \leqslant 1, \text{ czyli } 0 \leqslant P/A|B/ \leqslant 1.$$

Jest to właśnie wyrażenie aksjomatu.1. Niech dalej $A|B$ będzie zdarzeniem pewnym to znaczy: $A \cap B = B$. W takim razie $P/A \cap B/ = P/B/$ a więc

$$P /A|B/ = 1, \text{ aksjomat } 2.$$

Rozważmy alternatywę $\bigcup_i A_i|B$ parami wyłączających się zdarzeń.
Można napisać

$$\bigcup_i (A_i|B) \quad (\bigcup_i A_i)|B ,$$

a więc

$$P\left(\bigcup_i (A_i|B)\right) \quad P\left((\bigcup_i A_i)|B\right) .$$

Z definicji prawdopodobieństwa warunkowego oraz z aksjomatu 3 dla prawdopodobieństwa wynika:

$$P\left(\bigcup_i (A_i|B)\right) = \frac{P((\bigcup_i A_i)\cap B)}{P(B)} = \frac{P(\bigcup_i A_i \cap B)}{P(B)} = \sum_i \frac{P(A_i\cap B)}{P(B)} = \sum_i P(A_i|B).$$

Wzór ten wyraża przeliczalną addytywność prawdopodobieństwa warunkowego.

Definicja 1.3.2. Zdarzenia $A_1, A_2, \ldots, A_n$ nazywamy niezależnymi, jeżeli dla dowolnego $1\leqslant r\leqslant n$ i dowolnych $1\leqslant i_1 \leqslant i_2 \leqslant\ldots\leqslant i_r \leqslant n$ mamy

$$P(A_{i_1}\cap A_{i_2}\cap\ldots\cap A_{i_r}) = \prod_{k=1}^{r} P(A_{i_k}).$$

Przykład: W urnie znajdują się cztery paski papieru o jednakowych rozmiarach. Każdy pasek oznaczono jednym z następujących czterech numerów: 110, 101, 011,000 i żaden z dwóch pasków nie został oznaczony jednakowo. Zdarzenie A_1 polega na wyciągnięciu paska z numerem mającym na pierwszym miejscu jedynkę, zdarzenie A_2 - na wyciągnięciu paska z jedynką na drugim miejscu, zdarzenie A_3, na wyciągnięciu paska z jedynką na trzecim miejscu. Ponieważ ilość pasków każdej z tych trzech kategorii jest 2, a ogólna ilość pasków wynosi 4, więc przy założeniu jednakowego prawdopodobieństwa wyciągnięcia każdego z pasków mamy:

$$P/A_1/ = P/A_2/ = P/A_3/ = \frac{1}{2}$$

Oznaczmy przez A koniunkcję zdarzeń $A_1\cap A_2\cap A_3$. Otóż $P/A/ = 0$, gdyż zdarzenie A jest niemożliwe /w żadnym z pasków nie ma trzech jedynek/. Wobec tego, że:

$$P/A_1/ \cdot P/A_2/ \cdot P/A_3/ = \frac{1}{8} \neq 0 = P/A/ = P/A_1\cap A_2\cap A_3/,$$

Zdarzenia A_1, A_2, A_3 są zależne. Wskażemy jednak, że te zdarzenia są parami niezależne. Istotnie, dla pary A_1, A_2 mamy

$$P/A_2 \mid A_1/ = \frac{1}{2} = P/A_2/,$$

gdyż istnieją tylko dwa paski mające na pierwszym miejscu jedynkę, a wśród nich tylko jeden ma na drugim miejscu jedynkę. Analogicznie można wykazać niezależność pozostałych par. W przykładzie tym posłużyliśmy się następującym twierdzeniem.

Twierdzenie 1.3.1. Zdarzenie A i B są niezależne wtedy i tylko wtedy gdy:

$$P(A|B) = P(A).$$

Dowód. Załóżmy, że zdarzenia A i B są niezależne tzn. $P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B)$, a więc

$$P(A|B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)} = \frac{P(A) \cdot P(B)}{P(B)} = P(A)$$

i odwrotnie niech

$$P(A|B) = P(A);$$

czyli:

$$P(A|B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)} = P(A), \text{ stąd}$$

$$P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B),$$

co kończy dowód twierdzenia.

Twierdzenie 1.3.2. Jeżeli zdarzenia losowe $A_1, A_2, \ldots$ wyłączają się parami i wyczerpują zbiór zdarzeń elementarnych Ω tzn. $\Omega = \bigcup_{i=1}^{\infty} A_i$, przy czym $P(A_i) > 0$ dla $i = 1,2, \ldots$, to dla dowolnego zdarzenia losowego B zachodzi równość:

$$P(B) = P(A_1) P(B|A_1) + P(A_2) P(B|A_2) + \ldots = \sum_{i=1}^{\infty} P(A_i) P(B|A_i)$$

Wzór ten nosi nazwę wzoru na prawdopodobieństwo całkowite.

Dowód. Ponieważ dla dowolnego B

$$B = B \cap \Omega = B \cap \left(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i\right) = \bigcup_{i=1}^{\infty} B \cap A_i$$

i zbiory $B \cap A_i$ są parami rozłączne, więc

$$P(B) = P\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} B \cap A_i\right) = \sum_{i=1}^{\infty} P(B \cap A_i)$$

ale:

$$P(B \cap A_i) = P(B|A_i) P(A_i),$$

stąd otrzymujemy

$$P(B) = \sum_{i=1}^{\infty} P(A_i) P(B|A_i),$$

co było do udowodnienia.

Twierdzenie 1.3.3. Jeżeli A_1, A_2, ... spełniają założenia twierdzenia o prawdopodobieństwie całkowitym oraz $P/B/ > 0$, to dla $i = 1,2, \ldots$ zachodzi wzór:

$$P(A_i|B) = \frac{P(A_i)\ P(B|A_i)}{\sum_{i=1}^{\infty} P(A_i)\ P(B|A_i)}$$

Wzór ten nazywa się wzorem Bayesa.

Dowód. Z definicji prawdopodobieństwa warunkowego wynika:

$$P(A_i|B) = \frac{P(A_i \cap B)}{P(B)}$$

Biorąc pod uwagę równość $P(A_i \cap B) = P(A_i)\ P(B/A_i)$

i $P(B) = \sum_{i=1}^{\infty} P(A_i)\ P(B|A_i)$ otrzymamy:

$$P(A_i|B) = \frac{P(A_i)\quad P(B|A_i)}{\sum_{i=1}^{\infty} P(A_i)\, P(B|A_i)},$$

co należało udowodnić.

Przykład. Armaty nr 1 i nr 2 strzelają do tego samego celu. Ustalono, że armata nr 1 przeciętnie oddaje 9 strzałów w tym samym czasie, w którym armata nr 2 oddaje 10 strzałów. Celność armat nie jest jednakowa, mianowicie przeciętnie na każde 10 pocisków wystrzelonych przez armatę nr 1 do celu trafia 8, a przez armatę nr 2 tylko 7. Podczas strzału cel został trafiony przez pocisk, ale nie wiadomo, która armata wystrzeliła ten pocisk. Jakie jest prawdopodobieństwo, że wystrzeliła go armata nr 2 ?. Oznaczmy przez A_1 i A_2 zdarzenie polegające na wystrzeleniu pocisku odpowiednio przez armatę nr 1 i nr 2. Uwzględniając stosunek przeciętnej ilości pocisków, jakie wystrzela armata nr 1, do przeciętnej ilości pocisków wystrzelonych w tym samym czasie przez armatę nr 2, przyjmujemy, że $P/A_1/ = 0,9\ P/A_2/$. Oznaczmy dalej przez B zdarzenie polegające na tym, że pocisk wystrzelony trafia do celu.

Na podstawie danych, które mamy o celności armat, przyjmujemy że:

$P/B|A_1/ = 0{,}8$; $P/B|A_2/ = 0{,}7$

Ze wzoru Bayesa mamy:

$$P(A_2|B) = \frac{P(A_2/\ P(B|A_2)}{P(A_1)\ P(B|A_1) + P(A_2)\ P(B|A_2)} = \frac{0{,}7\ P(A_2)}{0{,}9\ P(A_2)\cdot 0{,}8 + 0{,}7\ P(A_2)}$$

$= 0{,}493$.

Zadania:

Zad.1. Student przyszedł na egzamin znając odpowiedzi jedynie na 20 pytań spośród pytań przewidzianych programem. Egzaminujący zadał studentowi trzy pytania. Posługując się pojęciem prawdopodobieństwa warunkowego znaleźć prawdopodobieństwo tego, że student będzie znał odpowiedzi na wszystkie trzy pytania.

Zad.2. Dane jest $P/A/$, $P/B/$, $P/C/$, $P/A \cap B/$, $P/A \cap C/$, $P/B \cap C/$ i $P/ A \cap B \cap C/$.

Znaleźć:

$$P(C\,|\,\bar{A} \cap \bar{B})$$

Zad.3. Prawdopodobieństwo, że wyroby pewnej fabryki spełniają wymagane normy, wynosi 0,96. Zakładamy uproszczony system sprawdzania,który daje rezultat dodatni z prawdopodobieństwem 0,98 dla sztuk dobrych i z prawdopodobieństwem 0,05 dla sztuk wadliwych. Jakie jest prawdopodobieństwo,że sztuka uznana za dobrą przez kontrolę rzeczywiście spełnia wymagane normy?

Zad.4. Mamy 5 urn pierwszego rodzaju i 10 urn drugiego rodzaju w których odpowiednio znajduje się 3 kule czarne i 5 białych w każdej urnie pierwszego rodzaju i 6 kul czarnych i 5 białych w każdej urnie drugiego rodzaju. Wybrana losowo kula, okazała się biała. Jakie jest prawdopodobieństwo, że kula ta została wybrana z urn pierwszego rodzaju ?.

Zadanie 5. Przez kanał łączności można przekazać jedną z następujących serii liter:

AAAA, BBBB, CCCC,

przy czym odpowiednie prawdopodobieństwa apriori wynoszą:

0,3, 0,4, 0,3

Wiadomo, że działanie szumów zmniejsza prawdopodobieństwo poprawnego odebrania nadanej litery do 0,6, a prawdopodobieństwo odebrania każdej z dwóch innych liter wynosi po 0,2. Zakładamy, że litery przekazywane są niezależnie od siebie. Obliczyć prawdopodobieństwo, że przekazano ciąg AAAA, jeżeli odebrano ciąg ABCA.

1.4. Zmienne losowe. Parametry rozkładu zmiennych losowych

Każdemu zdarzeniu elementarnemu można przyporządkować liczbę np. rzut monetą: orzeł - liczba 1, reszka - liczba 0. Przy rzucie kostką sześcienną można przyporządkować wynikowi rzutu, polegającemu na pojawieniu się jednej z liczb 1,2,3,4,5,6 właśnie tę liczbę, która się pojawi.

Definicja 1.4.1. Jednoznaczną funkcję rzeczywistą $X(\omega)$, gdzie $\omega \in \Omega$ przestrzeń zdarzeń elementarnych, nazywamy zmienną losową, jeżeli zbiór postaci $A = \{\omega : X(\omega) \in (-\infty, x)\}$ jest zdarzeniem losowym.

Definicja 1.4.2. Funkcja $P^{/x/}/S/$ będąca prawdopodobieństwem tego, że zmienna losowa X przybiera wartości należące do S, gdzie S jest dowolnym zbiorem borelowskim na osi x, nosi nazwę funkcji prawdopodobieństwa zmiennej losowej X.
Piszemy:

$$P^{/x/}(S) = P\{\omega : X(\omega) \in S\}$$

Jeżeli znamy funkcję $P^{/x/}/S/$ to mówimy, że został określony rozkład prawdopodobieństwa zmiennej losowej X. Zamiast "rozkład prawdopodobieństwa zmiennej losowej X" będziemy często mówili krótko rozkład zmiennej losowej X.
Rozkład prawdopodobieństwa dogodnie jest scharakteryzować za pomocą funkcji zwanej dystrybuantą.

Definicja 1.4.3.
Dystrybuantą zmiennej losowej X nazywamy funkcję F /x/, określoną wzorem.

$$F/x/ = P\{\omega : \quad X(\omega) < x\}$$

Jeżeli teraz znamy funkcję F/x/ to znamy i rozkład prawdopodobieństwa zmiennej.
Łatwo można pokazać, że:
Twierdzenie 1.4.1. Funkcja rzeczywista F/x/ jest dystrybuantą

pewnego rozkładu, wtedy i tylko wtedy, jeżeli jest funkcją niemalejącą, lewostronnie ciągłą i spełnione są równości:

$$F/-\infty/ = 0,\ F/+\infty/ = 1$$

Obecnie zajmiemy się zdefiniowaniem głównych typów zmiennych losowych. Są to zmienne losowe typu skokowego i zmienne losowe typu ciągłego.

Definicja 1.4.4. Zmienną losową typu skokowego nazywamy taką zmienną losową, która z prawdopodobieństwem równym 1 przybiera wartości należące do pewnego, co najwyżej przeliczanego zbioru S, przy czym każda wartość ze zbioru S ma prawdopodobieństwo dodatnie. Wartości te nazywamy punktami skokowymi, a ich prawdopodobieństwa - skokami.
Niech teraz zmienna losowa X przyjmuje wartość X_i z prawdopodobieństwem P_i. Muszą być spełnione równości:

$$\sum_{i=1}^{n} p_i = 1, \text{ gdy S posiada tylko n elementów}$$

$$\sum_{i=1}^{\infty} p_i = 1, \text{ gdy S jest zbiorem przeliczalnym.}$$

Dystrybuanta F/x/ przybiera tutaj postać:

$$F/x/ = \sum_{x_i<x} p_i,$$

gdzie sumowanie rozciąga się na te wszystkie punkty x_i, które spełniają nierówność $x_i < x$.
Rozważmy z kolei zmienną losową X, przybierającą wartości leżące na osi x i nie mającą punktów skokowych. Dystrybuanta takiej zmiennej losowej jest funkcją ciągłą. Zajmiemy się głównie specjalną klasą takich zmiennych losowych, zwanych zmiennymi losowymi typu ciągłego.

Definicja 1.4.5. Zmienną losową typu ciągłego nazywamy zmienną losową, dla której istnieje taka funkcja nieujemna $f/x/$, że dla każdego rzeczywistego x zachodzi relacja

$$F/x/ = \int_{-\infty}^{x} f/x/dx,$$

gdzie F/x/ jest dystrybuantą zmiennej losowej X. Funkcja f/x/ nosi nazwę funkcji gęstości zmiennej losowej X.
Zamiast "funkcja gęstości" będziemy często mówili krótko gęstość. Funkcja gęstości czyni zadość równości:

$$F/-\infty/ = \int_{-\infty}^{+\infty} f/x/dx = 1$$

Można powiedzieć, że każda funkcja rzeczywista, nieujemna, całkowalna na osi $(-\infty, +\infty)$ i spełniająca równość $\int f/x/dx=1$ jest funkcją gęstości pewnej zmiennej losowej X typu ciągłego. Z rozkładami zmiennych losowych związane są pewne parametry. Poznamy teraz najważniejsze, z nich.

Definicja 1.4.6. Niech zmienna losowa typu skokowego o punktach skokowych x_k i skokach p_k. Szereg

$$E(X) = \sum_k x_k p_k$$

nazywamy wartością średnią jeżeli jest zbieżny /przeciętną, oczekiwaną/.

Definicja 1.4.7. Niech X zmienna losowa typu ciągłego o funkcji gęstości f/x/. Całkę

$$E\ /X/ = \int_{-\infty}^{+\infty} x\ f\ /x/dx$$

nazywamy wartością średnią /przeciętną, oczekiwaną/ jeżeli

$$\int_{-\infty}^{+\infty} x\ f/x/dx < +\infty$$

W przypadkach, w których $\sum_k x_k p_k = +\infty$ lub $\int_{-\infty}^{+\infty} x\ f/x/dx = +\infty$

mówimy, że nie istnieje wartość średnia.

Wartość średnią nazywa się też nadzieją matematyczną.

Definicja 1.4.8. K - tym momentem zmiennej losowej typu skokowego nazywamy szereg postaci:

$$E(X^k) = \sum x^k p_k \quad \text{jeżeli jest on skończony.}$$

Definicja 1.4.9. K - tym momentem zmiennej losowej typu ciągłego o funkcji gęstości f/x/ nazywamy, jeżeli jest skończona, całkę w postaci:

$$E(X^k) = \int_{-\infty}^{+\infty} x^k f/x/dx$$

Definicja 1.4.10. Wariancją zmiennej losowej typu skokowego nazywamy wyrażenie postaci

$$D^2(X) = \sum_k (x_k - E(X))^2 \quad p_k$$

Definicja 1.4.11. Wariancją zmiennej losowej typu ciągłego nazywamy wyrażenie postaci:

$$D^2(X) = \int_{-\infty}^{+\infty} (x - E(X))^2 \ f/x/dx$$

Twierdzenie 1.4.2. Wariancja zmiennej losowej X równa się drugiemu momentowi minus kwadrat pierwszego momentu tzn.

$$D^2(X) = E(X^2) - [E(X)]^2$$

Dowód. Przeprowadzimy dla zmiennej typu skokowego. Analogicznie dowodzi się dla zmiennej X typu ciągłego.

$$D^2(X) = \sum_k (x_k - E(X))^2 p_k = \sum_k \left[x_k^2 - 2x_k E(X) + [E(X)]^2\right] p_k =$$

$$= \sum_k x_k^2 p_k - 2E(X) \sum_k x_k p_k + [E(X)]^2 \sum_k p_k = E(X^2) - 2E(X)E(X) + [E(X)]^2 = E(X^2) - [E(X$$

co należało udowodnić.

Definicja 1.4.12. Pierwiastek kwadratowy z wariancji nazywamy odchyleniem standardowym

Przykłady:

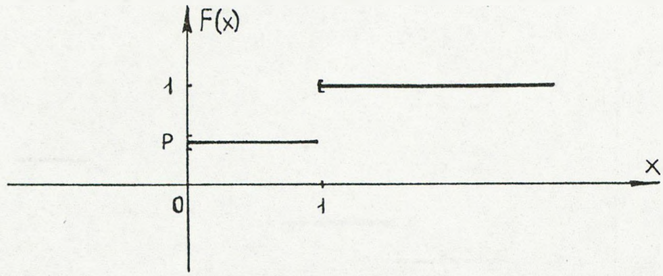
Zmienne losowe typu skokowego

Przykład 1. Zmienna losowa X przyjmuje wartości 0,1 z prawdopodobieństwem równym odpowiednio p i q = 1 - p.

Dystrybuanta tej zmiennej, równa się:

$$F/x/ = \begin{cases} 0 & x < 0, \\ p & 0 \leqslant x < 1, \\ 1 & x \geqslant 1. \end{cases}$$

Na wykresie wygląda to tak:



$F/X/ = 0 \cdot p + 1 \cdot /1-p/ = 1-p$

$E/X^k/ = 0^k p + 1^k /1-p/ = 1-p$

$D^2/X/ = E/X^2/ - [E/X/]^2 = 1-p-/1-p/^2 = 1-p-1+2p-p^2 = p/1-p/$

Przykład 2.

Rozkład dwumianowy /Bernoulli'ego/.

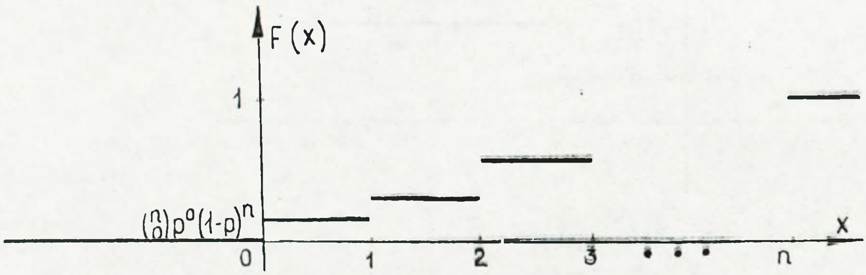
W rozkładzie tym zmienna losowa przyjmuje wartość $k=0,1,2,\ldots,n$ z prawdopodobieństwami.

$$p_k = P/X=K/ = /{}^n{}_k/\, p^k /1-p/^{n-k}, \quad 0 < p < 1$$

Dystrybuanta dla tego rozkładu jest postaci

$$F/x/ = \begin{cases} 0 & x < 0, \\ \binom{n}{0} p^o /1-p/^n & 0 \leqslant x < 1, \\ \binom{n}{o} p^o /1-p/^n + /{}^n_1/p^1/1-p/^{n-1} & 1 \leqslant x < 2, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots & \\ 1 & x \geqslant n. \end{cases}$$

Wykres dla tego rozkładu jest postaci:



Obliczymy teraz wartość średnią:

$$E(X)=\sum_k x_k p_k=\sum_{k=0}^{n}k\binom{n}{k}p^k(1-p)^{n-k}=\sum_{k=1}^{n}k\binom{n}{k}p^k(1-p)^{n-k}=np\sum_{k=1}^{n}k\frac{(n-1)!}{k!(n-k)!}p^{k-1}(1-p)^{n-k}$$

$$=np\sum_{k=1}^{n}\frac{(n-1)!}{(k-1)!\,[n-1-(k-1)]!}p^{k}(1-p)^{n-1-[k-1]}=np\sum_{l=0}^{n-1}\binom{n-1}{l}p^{l}(1-p)^{n-1-l}=np[p+1-p]^{n-1}=np.$$

Korzystaliśmy tutaj z dwumianu Newtona:

$$(a+b)^n=\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}a^k b^{n-k}.$$

Aby obliczyć wariancję muszę policzyć drugi moment $E/X^2/$

$$E(X^2)=\sum_k x_k^2 p_k=\sum_{k=0}^{n}k^2\binom{n}{k}p^k(1-p)^{n-k}$$

Skorzystamy z równości:

$$K^2=/K-1/K+K$$

$$\sum_{k=0}^{n}\left[(k-1)k+k\right]\binom{n}{k}p^k(1-p)^{n-k}=\sum_{k=0}^{n}k(k-1)\binom{n}{k}p^k(1-p)^{n-k}+\sum_{k=0}^{n}k\binom{n}{k}p^k(1-p)^{n-k}=$$

$$=n(n-1)p^2\sum_{k=2}^{n}k(k-1)\frac{(n-2)!}{k!\,(n-k)!}p^{k-2}(1-p)^{n-k}+np=$$

$$=n(n-1)p^2\sum_{k=2}^{n}\frac{(n-2)!}{(k-2)!\,(n-2-(k-2))!}p^{k-2}(1-p)^{n-2-(k-2)}+np=$$

$$=n(n-1)p^2\sum_{l=0}^{n-2}\binom{n-2}{l}p^{l}(1-p)^{n-2-l}+np=n(n-1)p^2+np.$$

Obliczymy teraz wariancję:

$$D^2(X)=E(X^2)-[E(X)]^2=n(n-1)p^2+np-n^2p^2=$$
$$=n^2p^2-np^2+np-n^2p^2=np(1-p).$$

Przykład 3. Rozkład Poissona

Mówimy, że zmienna losowa X jest o rozkładzie Poissona, jeżeli przyjmuje wartości całkowite dodatnie z prawdopodobieństwami

$$p_k=P(X=k)=\frac{\lambda^k}{k!}e^{-\lambda}$$ /λ -stała dodatnia/

Dla tej zmiennej obliczymy wartość średnią oraz wariancję

$$E(X)=\sum_k x_k p_k=\sum_{k=0}^{\infty}k\frac{\lambda^k}{k!}e^{-\lambda}=\lambda e^{-\lambda}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{\lambda^{k-1}}{(k-1)!}=\lambda e^{-\lambda}e^{\lambda}=\lambda$$

Widzimy teraz jak interpretować stałą $\lambda>0$ we wzorze

$$p_k=\frac{\lambda^k}{k!}e^{-\lambda}$$

Mówimy więc, że X jest o rozkładzie Poissona o wartości średniej λ.

Rozkład ten ma duże znaczenie w zastosowaniach. Obliczmy drugi moment

$$E(X^2)=\sum_k x_k^2 p_k=\sum_{k=0}^{\infty}k^2\frac{\lambda^k}{k!}e^{-\lambda}=\sum_{k=0}^{\infty}[k(k-1)+k]\frac{\lambda^k}{k!}e^{-\lambda}=$$
$$=\sum_{k=2}^{\infty}k(k-1)\frac{\lambda^k}{k!}e^{-\lambda}+\sum_{k=1}^{\infty}k\frac{\lambda^k}{k!}e^{-\lambda}=\lambda^2e^{-\lambda}\sum_{k=2}^{\infty}\frac{\lambda^{k-2}}{(k-2)!}+\lambda=$$
$$=\lambda^2e^{-\lambda}e^{\lambda}+\lambda=\lambda^2+\lambda$$

Czyli stąd wariancja równa się:

$$D^2(X)=E(X^2)-[E(X)]^2=\lambda^2+\lambda-\lambda^2=\lambda$$

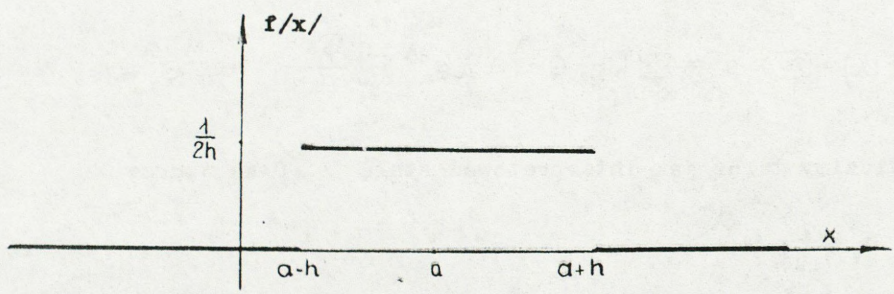
Widzimy więc, że i wariancja w rozkładzie Poissona równa się λ.

Zmienne losowe typu ciągłego

Przykład 1. Rozkład jednostajny /prostokątny/ jest to najprostszy rozkład typu ciągłego. Rozkład ten definiuje się przez funkcję gęstości:

$$f/x/ = \begin{cases} \frac{1}{2h} & \text{dla} \quad a-h \leqslant x \leqslant a+h \qquad a \text{ i } h > 0 \text{ pewne stałe} \\ 0 & \text{dla } x \text{ pozostałych} \end{cases}$$

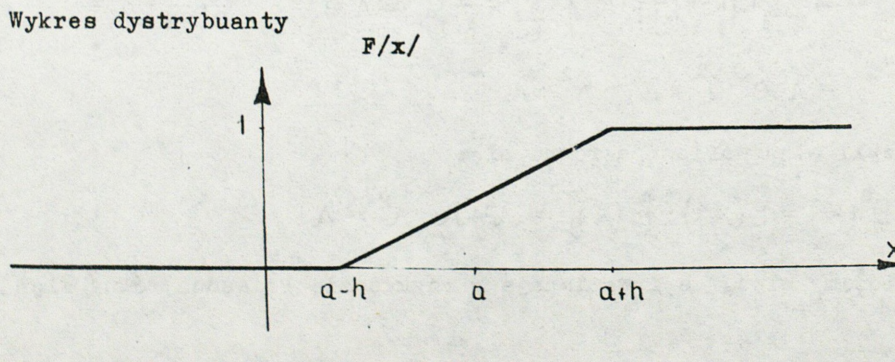
Wykres funkcji gęstości



Dystrybuanta rozkładu jednostajnego jest postaci:

$$F/x/ = \begin{cases} 0 & x < a-h \\ \frac{1}{2h}\int\limits_{a-h}^{x} dx = \frac{x-/a-h/}{2h} & a-h \leqslant x \leqslant a+h \\ 1 & x > a+h \end{cases}$$

Wykres dystrybuanty



Obliczymy teraz wartość średnią i wariancję

$$E(X) = \int_{-\infty}^{+\infty} x f(x) dx = \int_{a-h}^{a+h} \frac{1}{2h} x dx = \frac{\frac{(a+h)^2}{2} - \frac{(a-h)^2}{2}}{2h} =$$

$$= \frac{a^2 + 2ah + h^2 - a^2 + 2ah - h^2}{4h} = a;$$

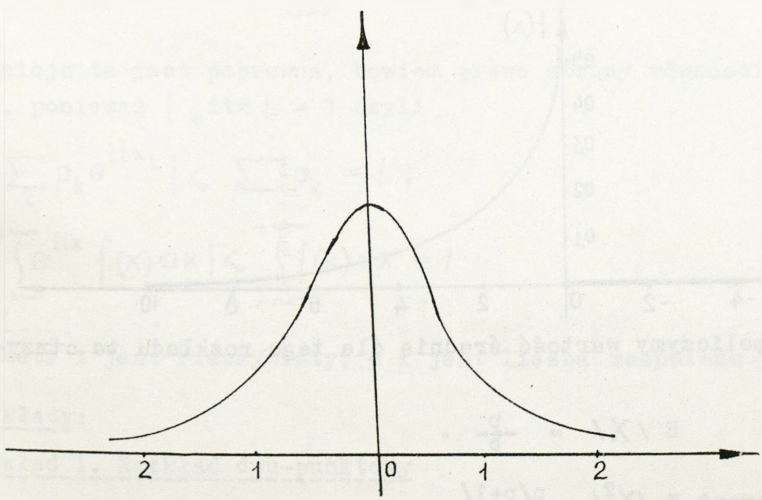
$$D^2(X) = \int_{-\infty}^{+\infty} (x - E(x^2) f(x) dx = \frac{1}{2h} \int_{a-h}^{a+h} (x-a)^2 dx = \frac{\frac{h^3}{3} + \frac{h^3}{3}}{2h} = \frac{h^2}{3}.$$

Przykład 2. Rozkład normalny

Mówimy, że zmienna losowa X jest o rozkładzie normalnym, jeżeli funkcja gęstości jest postaci:

$$f(x) = \frac{1}{\sigma \sqrt{2\pi}} \exp\left(- \frac{(x-m)^2}{2\sigma^2}\right) \text{ gdzie } \sigma > 0$$

Wykres funkcji gęstości gdy m = 0



Rozkład normalny o wartości przeciętnej m i odchyleniu standartowym σ będziemy często oznaczali przez N/m; σ /. Krzywa normalna jest symetryczna względem prostej $x = m$. Rozkład ten jest bardzo ważnym rozkładem dla zastosowań. Wartości dystrybuanty $F/x/$ stablicowane.

Przykład 3. Rozkład Gamma

W zastosowaniach będziemy często korzystali z rozkładu, który się wiąże z funkcją gamma określoną dla $p > 0$

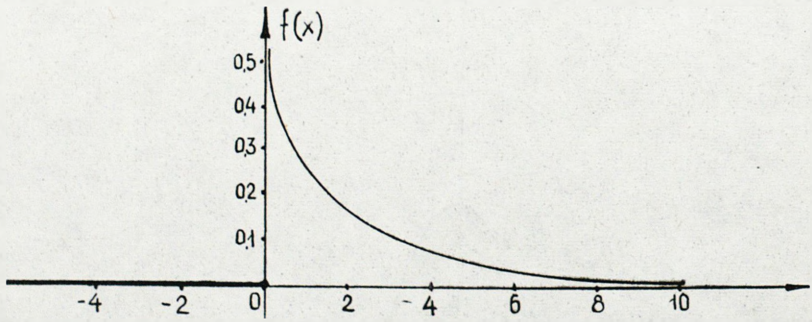
$$\Gamma(p) = \int_0^{+\infty} x^{p-1} e^{-x} dx .$$

Zmienna losowa X jest o rozkładzie gamma, jeżeli funkcja gęstości jest dana wzorem:

$$f/x/ = \begin{cases} 0 & \text{dla} \quad x \leqslant 0 , \\ \frac{b^p}{\Gamma(p)} x^{p-1} e^{-bx} & \text{dla } x > 0 , \end{cases}$$

gdzie $b > 0$ i $p > 0$.

Wykres funkcji gęstości jest postaci:



Jeżeli policzymy wartość średnią dla tego rozkładu to otrzymamy:

$$E /X/ = \frac{p}{b} .$$

Drugi moment $E /X^2/ = \frac{p/p+1/}{b^2}$, czyli

$$D^2(X)=E(X^2)-[E(X)]^2=\frac{p(p+1)}{b^2}-\frac{p^2}{b^2}=\frac{p}{b^2}$$

1.5. Funkcje charakterystyczne i ich własności

Funkcje charakterystyczne zmiennych losowych są to wartości przeciętne innej funkcji losowej. Oczywiście w pewien sposób zależnej od zmiennej losowej pierwotnej. Funkcje te stanowią cenny aparat badawczy w rachunku prawdopodobieństwa, a w szczególności w teorii procesów stacjonarnych.

Niech X będzie zmienną losową, a F/x/ jej dystrybuantą

Definicja 15.1. Funkcją charakterystyczną zmiennej losowej X nazywamy funkcję postaci:

a/ w przypadku nieciągłej zmiennej losowej

$$\varphi(t)=E(e^{itX})=\sum_k p_k e^{itx_k};$$

b/ w przypadku ciągłej zmiennej losowej o funkcji gęstości f/x/:

$$\varphi(t)=E(e^{itX})=\int_{-\infty}^{+\infty} e^{itx} f(x)\,dx.$$

Definicja ta jest poprawna, bowiem prawe strony równości mają sens, ponieważ $|e^{itx}|=1$ czyli

$$\left|\sum_k p_k e^{itx_k}\right| \leqslant \sum p_k = 1;$$

$$\left|\int_{-\infty}^{+\infty} e^{itx} f(x)\,dx\right| \leqslant \int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\,dx = 1.$$

Parametr t jest rzeczywisty, a i jest liczbą zespoloną.

Przykłady:

Przykład 1. Rozkład dwu-punktowy

X przyjmuje wartość 0,1 z odpowiednimi prawdopodobieństwami p, 1-p, $0 \leqslant p \leqslant 1$,

$p_0 = p,$ $\quad \varphi(t) = \sum_k e^{itx_k} p_k = e^{i\cdot t\cdot 0} p + e^{it}(1-p) =$

$p_1 = 1 - p,$ $\quad = p + e^{it} - pe^{it}.$

Przykład 2. Rozkład Poissona

$$p_k = P/X = k/ = \frac{\lambda^k}{k!} e^{\lambda}$$

$$\varphi(t) = \sum_k e^{itx_k} p_k = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\lambda^k}{k!} e^{-\lambda} e^{itk} = e^{-\lambda} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(\lambda e^{it})^k}{k!} =$$

$$= e^{-\lambda} e^{\lambda e^{it}} = e^{\lambda(e^{it}-1)}.$$

Przykład 3. Rozkład jednostajny na odcinku $[0,1]$

$$f/x/ = \begin{cases} 0 & \text{dla } x<0, \\ 1 & \text{dla } 0 \leqslant x \leqslant 1, \\ 0 & \text{dla } x > 1; \end{cases}$$

$$\varphi(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{itx} f(x)dx = \int_0^1 e^{itx} dx = \frac{e^{itx}}{it}\Big|_0^1 = \frac{e^{it}-1}{it}.$$

Przykład 4. Rozkład normalny o funkcji gęstości

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}}$$ czyli rozkład normalny o parametrach 0,1 tzn.: N(0,1)

$$\varphi(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{itx} f(x)dx = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{itx} e^{-\frac{x^2}{2}} dx = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{(x-it)^2}{2}} e^{-\frac{t^2}{2}} dx = e^{-\frac{t^2}{2}}$$

ponieważ $\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{(x-it)^2}{2}} dx = 1$.

Twierdzenie 1.5.1. Jeżeli istnieje l-ty moment $E/X^l/$ zmiennej losowej X, to wyraża się on wzorem:

$$E(X^2) = \frac{\varphi^{(l)}(0)}{i^l} \quad ,$$

w którym $\varphi^{(l)}(0)$ jest wartością l-tej pochodnej funkcji charakterystycznej $\varphi(t)$ tej zmiennej losowej w punkcie t = 0 .

Przykład 1. Rozkład dwu-punktowy

$$\varphi(t) = p + e^{it} - pe^{it}, \quad \varphi'(t) = ie^{it} - pie^{it}$$

czyli

$$E(X) = \frac{\varphi'(0)}{i} = \frac{ie^{i\cdot 0} - pie^{i\cdot 0}}{i} = \frac{i - pi}{i} = 1 - p.$$

Przykład 2. Rozkład Poissona

$$\varphi(t) = e^{\lambda(e^{it}-1)}; \quad \varphi'(t) = \lambda ie^{it} e^{\lambda(e^{it}-1)},$$

czyli $E(X) = \frac{\varphi'(0)}{i} = \frac{\lambda i}{i} = \lambda.$

Przykład 3. Rozkład normalny

$$\varphi(t) = e^{-\frac{t^2}{2}}; \quad \varphi'(t) = -te^{-\frac{t^2}{2}},$$

czyli

$$E(X) = \frac{\varphi'(0)}{i} = \frac{0}{i} = 0.$$

1.6. Funkcje tworzące prawdopodobieństwa

Przy badaniu zmiennych losowych przybierających jedynie liczby całkowite $k = 0,1,2, \ldots$ prościej jest posługiwać się funkcjami tworzącymi prawdopodobieństwa niż funkcjami charakterystycznymi. Niech X będzie zmienną losową i niech

$$p_k = P(X=k), \quad k = 0,1,2, \ldots$$

gdzie $\sum_k p_k = 1$.

Definicja 1.6.1. Funkcję tworzącą prawdopodobieństwa całkowito-liczbowej zmiennej losowej X nazywamy funkcją ψ /S/ określoną wzorem:

$$\psi(S) = \sum_k p_k S^k,$$

gdzie $-1 \leqslant s \leqslant 1$.

Przykład 1. Zmienna losowa o rozkładzie dwumianowym danym wzorem:

$$p_k = \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k} \qquad /k=0,1,\ldots,n/,$$

czyli

$$\Psi(S) = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} (ps)^k (1-p)^{n-k} = (ps+q)^n .$$

Przykład 2. Rozkład Poissona:

$$p_k = e^{-\lambda} \frac{\lambda^k}{k!} \qquad /k= 0,1,2, \ldots/$$

więc $$\Psi(S) = \sum_{k=0}^{\infty} e^{-\lambda} \frac{(\lambda S)^k}{k!} = e^{-\lambda} e^{\lambda S} = e^{-\lambda(1-S)} .$$

Jeżeli istnieje moment rzędu l zmiennej X, to można go wyznaczyć za pomocą pochodnych funkcji tworzącej prawdopodobieństwa w punkcie 1,

$$E(X) = \Psi'(1),$$
$$E(X^2) = \Psi''(1) + \Psi'(1)$$

2. Łańcuchy Markowa

2.1. Własność Markowa

Aby mówić o procesach Markowa, wyjaśnimy na wstępie co to jest własność Markowa.
W tym celu rozważmy przykład, następującej gry. W grze tej pionek każdego z graczy musi przejść skończoną liczbę,punktów 1,2,...,m.
Przejście z jednego punktu do drugiego określa ilość oczek kostki wyrzuconej przez gracza. I tak, jeżeli pionek gracza znajdował się w punkcie i i gracz wyrzucił liczbę 6, to pionek przesuniemy do punktu i+6. Przy tym można określić, że pionek przechodzi z punktu "i" do punktu "j" z pewnym prawdopodobieństwem. Oznaczmy to prawdopodobieństwo przez p_{ij}. Oczywiste

jest, że prawdopodobieństwo przejścia pionka z punktu "i" do punktu "j" nie zależy od tego jaką drogą pionek trafił do punktu "i", a zależy tylko od położenia pionka w momencie rzutu kostką.
Przedstawiona tu sytuacja określa własność Markowa /niezależność p_{ij}/.

2.2. Łańcuchy Markowa

Weźmy pod uwagę ciąg doświadczeń, w rezultacie których może zaistnieć jedno i tylko jedno zdarzenie, spośród $\{E_1\ E_2, \ldots\}$.
Zdarzenia te nazywa się stanami.
Zamiast pisać "Stan E_i" piszemy poprostu /stan i/. Ciąg doświadczeń zależny jest od pewnego parametru t, którego często będziemy interpretować jako czas. Parametr ten będzie przebiegał bądź zbiór liczb całkowitych, bądź zbiór liczb rzeczywistych. Oznaczmy ciąg doświadczeń przez $\{\xi(t)\}_{t\in T}$.
Równość $\xi(t) = i$ oznacza, że w momencie t doświadczenie /proces/ znajduje się w stanie "i".

Definicja 2.1. Mówimy, że ciąg doświadczeń $\{\xi(t)\}_{t\in T}$ jest powiązany w łańcuch Markowa, jeżeli: proces w momencie "s" znajduje się w stanie i, to w następnym momencie t znajdować się będzie w stanie j z pewnym prawdopodobieństwem $p_{ij}/s,t/$ niezależnym od drogi przejścia do stanu i w momentach wcześniejszych niż s.
Prawdopodobieństwa $p_{ij}\ /s,t/ = P\{\xi(t)=j \mid \xi(s)=i\}$

$$i,j = 1,2, \ldots.$$

nazywamy prawdopodobieństwem przejścia ze stanu i do stanu j.

Definicja 2.2. Łańcuch Markowa nazywamy jednorodnym, jeżeli prawdopodobieństwa przejścia $p_{ij}\ /s,t/$ zależą tylko od różnicy t - s

$$\left(p_{ij}(s,t) = p_{ij}(t-s) \qquad (i,j = 1,2,\ldots)\right)$$

Jeżeli teraz T będzie zbiorem liczb naturalnych to $p_{ij}/n/$ oznacza prawdopodobieństwo przejścia ze stanu i do stanu j w n krokach. Dla jednorodnych łańcuchów Markowa wystarczy podać wartość $p_{ij}\ /1/ = p_{ij}$ tzn. prawdopodobieństwo przejścia ze

stanu "i" do stanu "j" w jednym kroku.
Macierz, której elementami są prawdopodobieństwa przejścia p_{ij}, nosi nazwę <u>macierzy przejścia</u>. Macierz tę oznaczać będziemy symbolem M_1

$$M_1 = \begin{bmatrix} p_{11}, & p_{12}, & p_{13} & \dots \\ p_{21}, & p_{22}, & p_{23} & \dots \\ p_{31}, & p_{32}, & p_{33} & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots \end{bmatrix} .$$

Oczywiście wszystkie wyrazy p_{ij}, są nieujemne jako prawdopodobieństwa. Niech układ znajduje się w stanie "i" a zdarzenia polegające na tym, iż w wyniku dokonanego doświadczenia układ bądź zostanie w stanie i bądź przejdzie do któregoś ze stanów j gdzie $j \neq i$, jest zdarzeniem pewnym. Ponieważ zdarzenia j wyłączają się parami, otrzymujemy dla i = 1,2, ... równość:

$$P\left(\left(\sum_{j=1}^{\infty} j\right) \mid i\right) = \sum_{j=1}^{\infty} p_{ij} = 1 .$$

Tak więc suma prawdopodobieństw w każdym wierszu macierzy M_1, równa się jedności.
Pokażemy teraz, że znając macierz M_1 można wyznaczyć $p_{ij}/n/$.
Zacznijmy od obliczenia $p_{ij}/2/$. Zauważmy, że zdarzenie A polegające na przejściu układu ze stanu "i" do stanu "j" w dwu doświadczeniach jest alternatywą zdarzeń A_k, gdzie A_k polega na przejściu układu ze stanu "i" do stanu "k" i następnie ze stanu "k" do stanu "j". Mamy więc dla każdej pary liczb /i,j/:

$$p_{ij}^{/2/} = \sum_k p_{ik}\, p_{kj},$$

gdzie sumowanie po k rozciąga się na wszystkie możliwe strony.
Rozumując zupełnie podobnie, znajdziemy dla n= 2,3,4, ...

$$p_{ij}/n/ = \sum_k p_{ik}/m/\, p_{kj}/n-m/ .$$

m jest liczbą całkowitą czyniącą zadość nierówności $1 \leqslant m < n$.
Równość ta nosząca nazwę <u>równości Markowa</u> ma podstawowe znaczenie w teorii jednorodnych łańcuchów Markowa.
Macierz, której elementami są prawdopodobieństwa przejścia $p_{ij}/n/$, będziemy nazywali macierzą przejścia w n krokach i będziemy oznaczali symbolem M_n. Łatwo wyrazić zależność między macierzami M_n i M_1.

Znajdźmy najpierw zależność między M_1 i M_2. Ze wzoru Markowa dla n - 2 widać, że wyraz macierzy M_2 leżący na przecięciu i - tego wiersza i j - tej kolumny jest sumą iloczynów wyrazów i - tego wiersza macierzy M_1 przez wyrazy j - tej kolumny tej macierzy. Zgodnie więc z regułą mnożenia macierzy otrzymujemy:

$$M_2 = M_1^2 .$$

Stosując metodę indukcji zupełnej otrzymamy wzór

$$M_n = M_1^n .$$

2.3. Przykłady łańcuchów Markowa

Przykład 1. Niech T będzie zbiorem liczb $\{1,2,\ldots, n\}$

$$p_{ij}/m,m+1/ = \begin{cases} \dfrac{\lambda_m^{j-1}}{(j-1)!} e^{-\lambda_m} & \text{jeśli } j \geqslant i, \\ 0 & \text{jeśli } j < i \end{cases}$$

gdzie i,j, = 1,2, ... oraz m = 1,2, ..., n-1,

Jeżeli założymy że: $\lambda_1 \neq \lambda_2 \neq \ldots \neq \lambda_{n-1}$ oraz $\lambda_i > 0$

Otrzymujemy przykład niejednorodnego łańcucha Markowa, bowiem p_{ij} /m,m+1/ istotnie zależą od m. Oczywiście, przyjmując $\lambda_1 = \lambda_2 = \ldots = \lambda_{n-1}$ otrzymamy łańcuch o jednorodnym mechaniźmie przejścia.

Łatwo, można policzyć, że prawdopodobieństwa przejścia w r krokach ze stanu i do stanu j wyrażają się wzorami:

$$p_{ij}(m,m+r) = \begin{cases} \dfrac{\left(\sum_{i=m}^{m+r-1} \lambda_i\right)^{j-1}}{(j-1)!} \exp\left(-\sum_{i=m}^{m+r-1} \lambda_i\right) & \text{jeśli } j \geqslant i, \\ 0 & \text{jeśli } j < i . \end{cases}$$

Ten właśnie łańcuch Markowa może być przyjęty jako model obsługi centrali telefonicznej przy założeniu, że obserwacje są dokonywane jedynie w chwilach t = 1,2, ..., n. Zagadnienie to będziemy rozpatrywali dokładniej w następnych rozdziałach skryptu. Łańcuch Markowa, który został opisany jest czasami nazywany procesem wzrostu, ponieważ z upływem czasu masa prawdopodobieństwa przesuwa się do stanów o coraz wyższych numerach. Tak właśnie przedstawia się sytuacja w modelu obsługi centrali, ponieważ ilość rozmów wzrasta z upływem czasu.

Przykład 2. Rozpatrzmy błędny ruch cząsteczki po zbiorze liczb całkowitych. Ruch ten odbywa się następująco: cząsteczka z prawdopodobieństwem p $0 < p < 1$ przesuwa się o jedną liczbę w prawo lub z prawdopodobieństwem $q = 1 - p$ w lewo tzn: Jeżeli cząsteczka znajdowała się w punkcie n to z prawdopodobieństwem p znajdzie się w punkcie $n + 1$ lub z prawdopodobieństwem $1 - p$ znajdzie się w punkcie $n - 1$. Oznaczmy przez ξ /n/ położenie czątki po n ruchach.

Ciąg ξ/0/, ξ/1/, ξ/2/, ... jest łańcuchem Markowa, ponieważ prawdopodobieństwo przejścia ze stanu i do stanu j nie zależy od drogi przejścia do stanu i, a tylko od położenia cząsteczki w momencie zerowym. Prawdopodobieństwo przejścia ze stanu i do stanu j w n ruchach oznaczymy przez p_{ij}/n/, oczywiste jest, że jeżeli $|i-j| > n$ przejście ze stanu i do stanu j w n ruchach jest niemożliwe i p_{ij} /n/ = 0. Także cząsteczka może tylko przejść do tych stanów j w n ruchach dla których /i-j/ i n mają tą samą parzystość tzn:

liczba $m = \frac{n + /i-j/}{2}$ jest liczbą naturalną.

Jeżeli $j \geqslant i$ to trafić do stanu j można wtedy i tylko wtedy, gdy ze wszystkich n kroków $m = \frac{n + /i-j/}{2}$ kroków będzie w prawo, i prawdopodobieństwo tego zdarzenia równa się

$$p_{ij} /n/ = \binom{n}{m} p^m q^{n-m} \qquad /j > i/.$$

Analogiczne prawdopodobieństwo przejścia ze stanu i do stanu j gdy $j \leqslant i$ równa się

$$p_{ij} /n/ = \binom{n}{m} p^{n-m} q^m \qquad /j \leqslant i/$$

Przykład 3. Ruch błędny cząsteczki z pochłaniającymi ekranami. Jest to model pewnych zjawisk występujących często w fizyce. Cząsteczka może się znajdować w jednym z punktów 1,2,3,..., s na osi X-ów, przy czym cząsteczka z prawdopodobieństwem równym jedności pozostanie na zawsze w punkcie 1, jeśli w pewnej chwili t w tym punkcie się znalazła.

To samo dotyczy punktu s. Punkty 1 i s nazywamy ekranami pochłaniającymi. Jeżeli zaś cząsteczka znajduje się w chwili t w punkcie i, gdzie $2 \leqslant i \leqslant s-1$, to w jednostce czasu przejdzie z prawdopodobieństwem p do punktu $i+1$, a z prawdopodobieństwem $q = 1 - p$ przejdzie do punktu $i - 1$. Mamy tu jednorodny łańcuch Markowa o s stanach, przy czym stan E_i polega na tym, że cząsteczka znajduje się w punkcie i. Istotnie, prawdopodobieństwo przejścia ze stanu i w chwili t do stanu j w chwili $t + 1$ zależy jedynie od stanu i, w którym cząsteczka się znajduje w chwili t, ale nie zależy od stanów, w których się cząsteczka znajdowała w czasie poprzedzającym określoną chwilę t, ani też nie zależy bezpośrednio od t /zależy jedynie od stanu w chwili t/ mamy tu prawdopodobieństwa przejścia:

$$p_{11} = p_{ss} = 1$$

a dla $2 \leqslant i \leqslant s-1$

$$p_{ij} = \begin{cases} p & \text{dla } j = i+1, \\ q = 1-p & \text{dla } j = i-1, \\ 0, & \text{dla pozostałych } j . \end{cases}$$

Macierz przejścia M_1, jest więc tu postaci:

$$M_1 = \begin{bmatrix} 1\ 0\ 0\ 0 & \dots & 0\ 0\ 0 \\ q\ 0\ p\ 0 & \dots & 0\ 0\ 0 \\ \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots \\ 0\ 0\ 0\ 0 & & q\ 0\ p \\ 0\ 0\ 0\ 0 & & 0\ 0\ 1 \end{bmatrix}.$$

Przykład 4. Model ruchu błędnego bez ekranów pochłaniających o przeliczalnej ilości stanów. Niech zbiorem stanów będzie zbiór liczb naturalnych, a prawdopodobieństwa przejścia są dane wzorami

$$p_{11} = q = 1 - p$$

$$p_{ij} = \begin{cases} p & \text{dla } i = 1,2,3, \dots\ j = i+1, \\ q & \text{dla } i = 2,3, \dots .\ j = i-1, \\ 0 & \text{dla pozostałych par } /i,j/. \end{cases}$$

Liczba 1 jest ekranem odbijającym.

Macierz przejścia M_1 jest tu postaci

$$M_1 = \begin{bmatrix} q\ p\ 0\ 0\ 0\ \dots \\ q\ 0\ p\ 0\ 0\ \dots \\ 0\ q\ 0\ p\ 0\ \dots \\ \dots\dots\dots\dots \\ \dots\dots\dots\dots \\ \dots\dots\dots\dots \end{bmatrix} .$$

Przykład 6. Proces urodzin i śmierci. Ten przykład łańcucha Markowa jest przyjmowany jako model zmian liczności populacji na skutek urodzin lub śmierci. Przypuśćmy, że badamy populację jednorodną, której mechanizm zmian liczebności /na skutek urodzin i śmierci/ nie zmienia się w czasie. Niech ξ /s/ oznacza liczność populacji w chwili s. Niech $q_j \geqslant 0$ oznacza prawdopodobieństwo powstania j osobników w chwili s + 1 z jednego osobnika należącego do badanej populacji w chwili s i niech:

$$\sum_{j=0}^{\infty} q_j = 1 .$$

Niech w chwili s populacja liczy i osobników; przyjmijmy również założenie, że każdy osobnik działa niezależnie od drugiego w procesie wytwarzania osobników tworzących następne pokolenie. Przy tych założeniach prawdopodobieństwo p_{ij} wytworzeni przez i osobników należących do populacji w chwili S nowych j osobników w chwili s + 1, wyraża się wzorem

$$p_{ij} = \sum_{j_1+j_2+\dots+j_i=j} q_{j1}\, q_{j2} \cdots q_{ji} = q_j^{/i*/} .$$

Niech φ/s/ oznacza funkcję tworzącą ciągu $/q_0, q_1, q_2, \dots/$ tzn.

$$\varphi(S) = \sum_{j=0}^{\infty} q_j s^j .$$

Rozpatrzmy teraz rozwinięcie na szereg potęgowy funkcji $\varphi(s)^i$

Weźmy na początku:

$$(\varphi(S))^2 = \Big(\sum_{j=0}^{\infty} q_j s^j\Big)\Big(\sum_{j=0}^{\infty} q_j s^j\Big) = q_0 s^0\Big(\sum_{j=0}^{\infty} q_j s^j\Big) + q_1 s^1\Big(\sum_{j=0}^{\infty} q_j s^j\Big) +$$

$$+ q_2 s^2\Big(\sum_{j=0}^{\infty} q_j s^j\Big) + \dots = (q_0 q_0)s^0 + (q_0 q_1 + q_1 q_0)s^1 +$$

$$+ (q_0 q_2 + q_1 q_1 + q_2 q_0)s^2 + \dots = \sum_{j=0}^{\infty} \Big(\sum_{j_1+j_2=j} q_{j_1} q_{j_2}\Big) s^j$$

Czyli ogólnie:

$$(\varphi(s))^i = \sum_{j=0}^{\infty}\Big(\sum_{j_1+j_2+\dots+j_i=j} q_{j_1}\cdot q_{j_2}\cdots q_{j_i}\Big)s^j .$$

Stąd już widać, że $q_j^{/i*/}$ jest współczynnikiem przy s^j w rozwinięciu w szereg potęgowy funkcji $(\varphi(s))^i$.

Przypuśćmy z kolei, że w chwili t = 0 populacja składa się z jednego osobnika. Prawdopodobieństwo, że w chwili t = 1 będzie się składać z j osobników, jest równe q_i, tzn. współczynnikowi przy s^j w rozwinięciu funkcji φ /s/. Obliczmy z kolei prawdopodobieństwo, że w chwili t = 2 populacja będzie się składać z j osobników.

Prawdopodobieństwo zdarzenia, że populacja w chwili t = 1 liczy i osobników, a w chwili t = 2 liczy j osobników jest równe $q_i\, q_j^{/i*/}$.

Prawdopodobieństwo zaś, że w chwili t = 2 populacja liczy j osobników, otrzymujemy przez zsumowanie ze względu na i iloczynów $q_i\, q_j^{/i*/}$

$$\sum_{i=0}^{\infty} q_i\, q_j^{(i*)} .$$

Ale suma ta jest współczynnikiem przy s^j w rozwinięciu w szereg potęgowy funkcji:

$$\varphi^{(2)}(s) = \varphi(\varphi(s)) = \sum_{i=0}^{\infty} q_i (\varphi(s))^i .$$

Dokładnie to samo rozumowanie prowadzi do wniosku, że prawdopodobieństwo, iż populacja w chwili t + 1 będzie liczyła j osobników, jest równe współczynnikowi przy s w rozwinięciu funkcji

$$\varphi^{t+1}(s) = \varphi(\varphi^t(s)) \qquad /t = 1,2, \dots/ .$$

Niektóre zagadnienia procesu urodzin lub śmierci sprowadzają się do zbadania superpozycji φ^t /S/ funkcji tworzącej φ /S/. Model łańcucha o jakim mówiliśmy, nosi nazwę procesów gałązkowych. Znajdują one zastosowanie do badań nad rozwojem kolonii bakteryjnych oraz reakcji łańcuchowych.

Przykład 6. Proces rozpadu /Ra/

Wiadomo, że z upływem czasu t, cząsteczka radu /Ra/ pod wpływem rozpadu promieniotwórczego przechodzi w cząsteczkę radonu Rn.
Przy tym rozpadzie pojawia się jedna cząstka L /jądro atomu helu/. Jeżeli teraz założymy, że każdy atom Ra rozpada się na atom Rn, po upływie czasu t, niezależnie od warunków zewnętrznych z prawdopodobieństwem p/t/ wtedy liczba v/t/ atomów radu uległych rozpadowi w czasie t jest równa liczbie cząstek L powstałych w tym czasie.
Liczba ta podlega rozkładowi Poissona tzn.:

$$p/v/t/ = k/ = \frac{a^k}{k!} e^{-a}$$

gdzie: a=n . p/t/, n = - liczba atomów radu w chwili t = 0.
Stąd wniosek, że liczba atomów radu po czasie t równa się n - v/t/.
Jeżeli znana jest liczba atomów radu w dowolnym momencie s : ξ /s/ = i, to niezależnie od charakteru procesu rozpadu do momentu S, z prawdopodobieństwem $\frac{a^k}{k!} e^{-a}$, a=ip/t-s/ w przedziale czasowym s do t wypromieniowuje k cząstek L. W takim razie ξ /t/ jest łańcuchem Markowa. Z prawdopodobieństwem przejścia ze stanu i do stanu j danym wzorem

$$p_{ij}/s,t/ = \frac{a^{i-j}}{/i-j/!} e^{-a}, \quad a = ip\,/t-s/, \quad j \leqslant i \,.$$

Oczywiście dla $j > i$ przejście ze stanu i do stanu j jest niemożliwe, a więc p_{ij} /s,t/ = 0.
Opisany wyżej probabilistyczny model radioaktywnego rozpadu atomów radu na atomy radonu jest taki, że proces ten jest jednorodnym procesem Markowa z dwoma stanami dla każdego atomu: rad lub radon. Jeżeli w początkowej chwili t = 0, ilość atomów radu równa się n_o, to liczba v/t/ powstałych w czasie t cząstek L ma rozkład Poissona z parametrem $a = n_o p/t/$

$$P \left\{ v/t/ = k \right\} = \frac{a^k}{k!} = e^{-a} \qquad /k=0,1,2,\ldots/$$

Niech teraz p/t/ - prawdopodobieństwo tego, że atom radu ulegnie rozpadowi w czasie t ma postać

$$p/t/ = 1 - e^{-\lambda t}$$

gdzie λ - gęstość rozpadu Ra → Rn dla oddzielnych atomów tzn. λ jest taką stałą, że prawdopodobieństwo przejścia Ra → Rn w małym przedziale czasowym Δt równa się: $\lambda \Delta t + O/\Delta t/$. Rozpatrzmy teraz ilość radu zmieniającą się w czasie t. Jeżeli liczba cząstek L równa się v/t/, to liczba pozostałych atomów radu równa się

$$\xi/t/ = n_0 - v/t/.$$

Średnia ilość radu po czasie t jest równa:

$$n/t/ = E\xi/t/ = n_0 - n_0 p/t/ = n_0 e^{-\lambda t}$$

Wykładniczy charakter funkcji n/t/ mówi, w szczególności o tym, że T to czas, w którym średnio ulegnie rozpadowi połowa ilości radu tzn.: T jest taką liczbą, że $n/T/ = \frac{n_0}{2}$ jest pewną liczbą dodatnią, Czas ten nazywamy stałą półrozpadu. Jest ona związana z gęstością rozpadu Ra → Rn równością $T\lambda = \log 2$.

2.4. Klasyfikacja stanów jednorodnych łańcuchów Markowa

Będziemy rozpatrywali łańcuch Markowa o skończonej albo nieskończonej liczbie stanów. Oznaczmy przez $M_1 = [p_{ij}]$ /i,j=1,2,.../ macierz prawdopodobieństw przejść rozważanego łańcucha, oczywiście $p_{ij} \geq 0$ i $\sum p_{ij} = 1$.

Mówimy, że stan j jest osiągalny ze stanem i, jeżeli istnieje taka liczba naturalna $n \geq 1$, że $p_{ij}/n/ > 0$ tzn. istnieje taka ilość kroków $n \geq 1$, że prawdopodobieństwo przejścia ze stanu i do stanu j jest dodatnie.

Niechaj j będzie ustalonym stanem i załóżmy, że w chwili początkowej układ jest w stanie j. Niech $f_j/n/$ oznacza prawdopodobieństwo zdarzenia, że układ po raz pierwszy powróci do stanu po $n \geq 1$ krokach. A więc:

$$f_j/1/ = p_{jj}$$

$$f_j/2/ = p_{jj}^{/2/} - f_j/1/\, p_{jj}$$

i ogólnie:

$$f_j/n/ = p_{jj}/n/-f_j/1/\ p_{jj}/n-1/-f_j/2/\ p_{jj}/n-2/$$

suma $$f_j = \sum_{n-1}^{\infty} f_j/n/$$

jest prawdopodobieństwem zdarzenia, że układ w ogóle wróci do stanu j. Jeżeli $f_j = 1$, to czas pierwszego powrotu do stanu j jest dobrze określoną zmienną przypadkową. Czas jaki upływa od chwili, w której układ był w stanie j, do chwili powrotu układu do stanu j po raz pierwszy, nazywamy <u>czasem powrotu do</u> stanu j. Jeśli $f_j = 1$, pierwszy moment

$$\mu_j = \sum_{n=0}^{\infty} n \cdot f_j(n),$$

nazywamy <u>przeciętnym czasem powrotu do stanu j</u>

Zauważmy jednocześnie, że w przypadku gdy $f_j < 1$, istnieje dodatnie prawdopodobieństwo, że układ nigdy nie wróci do stanu j. Teraz korzystając z pojęcia czasu powrotu dokonamy klasyfikacji stanów łańcucha Markowa.

1. <u>Stan chwilowy</u>: Stan j będziemy nazywali stanem chwilowym, jeśli powrót do stanu j nie jest zdarzeniem pewnym, tzn. jeśli $f_j < 1$.
2. <u>Stan rekurencyjny</u>: Stan j nazywamy rekurencyjnym jeżeli powrót ze stanu j do stanu j jest zdarzeniem pewnym tzn. jeśli $f_j = 1$.
3. <u>Stan zerowy</u>: Stan rekurencyjny j nazywamy stanem zerowym jeżeli przeciętny czas powrotu do stanu j jest równy nieskończoności tzn.
$$\mu_j = +\infty$$
4. <u>Stan okresowy o okresie t</u>: Stan j nazywamy stanem okresowym o okresie t, jeśli powrót do stanu j jest niemożliwy z wyjątkiem być może powrotu po t,2t,3t, ... krokach oraz t jest największą liczbą całkowitą, większą od jedności, mającą tę własność.
5. <u>Stan istotny</u>: Stan rekurencyjny j, który nie jest stanem zerowym, ani stanem okresowym nazywamy stanem istotnym /lub ergodycznym/.

6. Stan nieistotny: Stan i nazywamy stanem nieistotnym jeżeli istnieje stan j osiągalny ze stanu i tzn. $p_{ij}/n/ > 0$ i stan i nie jest osiągalny ze stanu j tzn. $p_{ij}/n/ = 0$ dla każdego $n = 1,2,\ldots$.

Celem zbadania własności rozkładu czasu powrotu będziemy korzystali z pojęcia funkcji tworzących. Relacja $f_j/n/=p_{jj}/n/$ $f_j(1)p_{jj}/n-1/ \ldots f_j/n-1/\ p_{jj}$ wiąże ze sobą prawdopodobieństwa $f_j/n/$ pierwszego powrotu z prawdopodobieństwem $p_{jj}/n/$ przejścia w n krokach.

Załóżmy, że:

$$f_j/0/ = 0, \quad p_{jj}/0/ = 1.$$

Wprowadzimy funkcje tworzące

$$F/S/ = \sum_{n=0}^{\infty} f_j/n/\ S^n ,$$

$$G/S/ = \sum_{n=0}^{\infty} p_{jj}/n/\ S^n .$$

Jeżeli teraz przekształcimy równanie:

$$f_j/n/=p_{jj}/n/ - f_j/1/p_{jj}/n-1/ - \ldots - f_j/n-1/\ p_{jj}$$

$$* \quad p_{jj}/n/=f_j/n/p_{jj}/0/+f_j/n-1/p_{jj}/1/+ \ldots +f_j/1/p_{jj}/n-1/+$$

$$+ f_j/0/\ p_{jj}/n/$$

to otrzymaną równość można uogólnić na równość funkcji tworzących.

Zauważmy, że lewa strona * jest n-tym $n > 0$ współczynnikiem rozwinięcia funkcji G/S/ na szereg potęgowy, a prawa strona n-tym współczynnikiem rozwinięcia na szereg potęgowy funkcji F/s/ . G/s/. Ponieważ równość zachodzi dla każdego $n > 0$ i dla $n > 0$ $p_{jj}/0/ = 1$ można napisać równość:

$$G/s/ - 1 = F/s/\ G/s/$$

lub w postaci:

$$G/s/ = \frac{1}{1-F/s/}$$

Z równości tej wynika natychmiast twierdzenie.

Twierdzenie: Stan j jest stanem rekurencyjnym $\leftrightarrow$ gdy:

$$\lim_{S \to 1-} G/s/ = \sum_{n=0}^{\infty} p_{jj}/n/ = \infty .$$

Przykład 1. Rozważmy błądzenie przypadkowe cząstki po zbiorze punktów całkowitych $i = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$, Niech $p > 0$ oznacza prawdopodobieństwo przesunięcia w jednym kroku o jednostkę w prawo, a $q = 1 - p > 0$ o jednostkę w lewo. Załóżmy następnie, że startujemy w chwili 0 ze stanu $i = 0$. Prawdopodobieństwo powrotu w n krokach do stanu zero wynosi:

$$p_{oo}/n/ = \begin{cases} 0 & \text{jeśli n jest liczbą nieparzystą,} \\ \binom{n}{\frac{1}{2}n} p^{\frac{1}{2}n} q^{\frac{1}{2}n} & \text{jeśli n jest liczbą parzystą .} \end{cases}$$

Funkcja tworząca ma postać:

$$G/S/ = \sum_{n=0}^{\infty} \binom{2n}{n} p^n q^n s^{2n} = \sum_{n=0}^{\infty} /-1/^n 2^{2n} \binom{-\frac{1}{2}}{n} p^n q^n s^{2n} = \sum_{n=0}^{\infty} \binom{-\frac{1}{2}}{n} /-4pqs^2/^n$$

$$= /1-4pqs^2/^{-\frac{1}{2}} .$$

Skorzystałem tutaj z następującej równości algebraicznej:

$$\binom{2n}{n} = /-1/^n 2^n \binom{-\frac{1}{2}}{n}$$

Zbadajmy teraz $\lim_{S \to 1-} G/s/$:

$$\lim_{S \to 1-} G/S/ = \lim_{S \to 1-} /1-4pq\, s^2/^{-\frac{1}{2}} = /1-4pq/^{-\frac{1}{2}} .$$

Jeżeli teraz $p \neq q$ to $\lim_{S \to 1-} G/s/$ jest skończony a więc stan $i = o$ jest chwilowy. To samo można powiedzieć, o każdym innym stanie. Czyli w tym przypadku wszystkie stany są chwilowe. Jest to wynik zgodny z intuicją jeśli bowiem $p > q$ /lub

$p < q$/ należy spodziewać się wyraźnego przesunięcia w prawo /lub w lewo/.

Jeżeli teraz $p = q = \frac{1}{2}$ to $\lim_{s \to 1-} G/s/ = \infty$, a

więc wszystkie stany są rekurencyjne. Ponieważ powrót do stanu z którego układ wyszedł w pewnym momencie jest możliwy tylko po parzystej liczbie kroków, a więc w tym przypadku wszystkie stany są okresowe, o okresie 2.
Z kolei:

$$F/s/ = 1 - /1 - 4pq\, s^2/^{\frac{1}{2}}$$

i jeśli $p = q = \frac{1}{2}$, przeciętny czas powrotu

$$\mu_j = \sum_{n=0}^{\infty} n f_j(n) = \lim_{s \to 1-} s(1-s^2)^{-\frac{1}{2}} = +\infty$$

Jest to wynik raczej nieoczekiwany. Istotnie, błądzenie przypadkowe w szczególnym przypadku możemy wyobrazić sobie jako ciąg niezależnych rzutów rzetelną monetą. Przy tej interpretacji odcięta punktu, w którym znajduje się w chwili n cząsteczka błądząca, jest równa różnicy między liczbami, otrzymanych w n rzutach orłów i reszek.
Odcięta równa zero odpowiada stanowi równowagi w tym sensie, że ilość orłów byłaby taka sama co ilość reszek. Ponieważ w rozważanym przypadku wszystkie stany są rekurencyjne, prawdopodobieństwo powrotu do stanu zero jest równe 1. Ale uwzględniając fakt, że oczekiwany /średni/czas powrotu jest nieskończony, może się zdarzyć, że na powrót do stanu równowagi trzeba będzie czekać bardzo długo.
Rozpatrzmy teraz następujące kryterium:

Twierdzenie. Jeżeli stan j jest chwilowy to szereg $\sum_{n=1}^{\infty} p_{jj}/n/$ jest zbieżny. Jeżeli stan j jest rekurencyjny zerowy to szereg ten jest rozbieżny chociaż $p_{jj}/n/ \to 0$ dla $n \to \infty$. Jeżeli j jest stanem ergodycznym /istotnym/ to $\mu_j < \infty$ i

$$p_{jj}/n/ \to \frac{1}{\mu_j}$$

Jeżeli j jest stanem rekurencyjnym okresowym o okresie t i niezerowym, to $\mu_j < \infty$ i

$$p_{jj}/nt/ \to \frac{t}{\mu_j}$$

przy czym p_{jj} /n/ = 0 dla każdego n nie będącego krotnością t. Najistotniejszym wnioskiem z tego twierdzenia jest to, że wyłączając stany okresowe $p_{jj}/n/$ posiada określoną granicę /równą zero, jeżeli j stan jest stanem zerowym lub jest stanem chwilowym, a w pozostałych przypadkach $p_{jj}/n/ \to \frac{1}{\mu_j}$/. W przypadku stanów okresowych istnieje tylko granica na podciągu n = t, 2t, 3t, ... ,

Niech teraz j będzie ustalonym stanem rekurencyjnym i niech k będzie innym stanem osiągalnym ze stanu j. Prócz tego niech N jest najmniejszą taką liczbą, że $p_{jk}/N/ = \alpha > 0$.

Prawdopodobieństwo powrotu ze stanu k do stanu j musi być dodatnie, bo w przeciwnym razie prawdopodobieństwo tego, że układ nie wróci do stanu j byłoby nie mniejsze niż α i nierówność $f_j \leq 1 - \alpha < 1$ przeczyła by temu, że j jest stanem rekurencyjnym. Stąd wniosek, że istnieje M, że $p_{kj}/M/ = \beta > 0$. Dalej, dla dowolnego n zachodzi

$$x/\ p_{jj}/n+N+M/ \geq p_{jk}/N/\ p_{kk}/n/\ p_{kj}/M/ = \alpha \cdot \beta \cdot p_{kk}/n/$$

i

$$xx/\ p_{kk}/n+N+M/ \geq p_{kj}/M/ p_{jj}/M/\ p_{jk}/N/ = \alpha \cdot \beta\ p_{jj}/n/.$$

Z tych nierówności wynika, że asymptotyczne zachowanie się ciągów $p_{jj}/n/$ i $p_{kk}/n/$ jest jednakowe. Z tego wniosku wyprowadzimy ważną własność:

Z założenia, że j jest stanem rekurencyjnym, a więc szereg $\sum_{n=1}^{\infty} p_{jj}/n/$ jest rozbieżny. Biorąc pod uwagę nierówność xx/ zauważmy także, że szereg $\sum_{n=1}^{\infty} p_{kk}/n/$ jest rozbieżny, a więc i stan k jest także rekurencyjny.

Jeżeli $p_{jj}/n/ \to 0$, to także $p_{kk}/n/ \to 0$ i na odwrót. Na koniec jeżeli stan j posiada okres t, to i stan k musi posiadać ten sam okres. Stąd wniosek, że ze stanu rekurencyjnego można osiągnąć tylko stan rekurencyjny. Wszystkie te stany są tego samego typu tzn. wszystkie zerowe, lub wszystkie ergodyczne, lub wszystkie okresowe niezerowe o tym samym okresie.

2.5. Twierdzenie ergodyczne dla łańcuchów Markowa

W poprzednim paragrafie rozpatrzyliśmy zachowanie się $p_{jj}/n/$ gdy $n \to \infty$. Ten rezultat rozszerzymy na przypadek $p_{jk}/n/$ przy dowolnych stanach j i k. Dla tego przypadku udowodnimy, że prawdopodobieństwo znalezienia się układu w momencie n w stanie k jeżeli n jest duże nie zależy od stanu początkowego. Niech tak jak poprzednio $f_{jk}/n/$ - prawdopodobieństwo tego, że wychodząc ze stanu j układ osiągnie stan k pierwszy raz po n krokach.
Widać natychmiast, że:

$$p_{jk}/n/ = f_{jk}/n/+f_{jk}/n-1/\ p_{kk}+f_{jk}/n-2/p_{kk}/2/ + \dots +f_{jk}/1/p_{kk}/n-1/$$

Równanie to pozwala wyrazić $f_{jk}/n/$ przez $p_{jk}/n/$ i na odwrót.

Twierdzenie 1. Jeżeli stan k jest nierekurencyjny lub rekurencyjny zerowy to $p_{jk}/n/ \to 0$ dla dowolnego stanu j.

Twierdzenie 2. Niech $M_1 = [p_{jk}]$ będzie macierzą przejścia /w jednym kroku/ jednorodnego łańcucha Markowa o skończonej ilości stanów $\{1,2, \dots s\}$. Jeżeli istnieje taka liczba r, że wyrazy $p_{jk}/r/$ macierzy M_r w s_1 kolumnach, gdzie $s_1 \geqslant 1$, czynią zadość relacji.

$$x/ \quad \min_{1 \leqslant j \leqslant s} p_{jk}/r/ = \delta > 0,$$

to znaczy istnieje S_1 kolumn, których wszystkie elementy są różne od zera, to zachodzi wtedy równość:

$$xx/ \quad \lim_{n \to \infty} p_{ij}/n/ = p_k \qquad \text{dla } k=1,2,\dots,s,$$

przy czym $p_j \geqslant \delta$ dla tych k dla których zachodzi relacja x/.
Ponadto

$$\sum_{k=1}^{S} p_k = 1 .$$

Twierdzenie to nosi nazwę twierdzenia ergodycznego a prawdopodobieństwa graniczne p_k - prawdopodobieństw ergodycznych.

Przykład 1. Niech macierz przejścia w jednym kroku równa się

$$M_1 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ q & 0 & p \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Przykład łańcucha Markowa o 3 stanach, model błądzenia cząstki po zbiorze $\{1,2,3\}$ z ekranami pochłającymi 1 i 3.

Obliczmy teraz M_2

$$M_2 = M_1^2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ q & 0 & p \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ q & 0 & p \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ q & 0 & p \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = M_1 .$$

Ogólnie będzie

$$M_n = M_1 .$$

Tak więc założenie twierdzenia erodycznego nie jest spełnione. Nie istnieje takie r, przy którym M_r ma przynajmniej jedną kolumnę wyrazów $p_{ij}/r/$ dodatnich. Jest zarazem oczywiste, że i teza twierdzenia 2 nie jest spełniona, gdyż $p_{11}/n/ = 1$, a więc $\lim\limits_{n\to\infty} p_{11}/n/ = 1$, zaś $\lim\limits_{n\to\infty} p_{21}/n/ = q$, a $\lim\limits_{n\to\infty} p_{31}/n/ = 0$.

Nieregularność w rozważanym łańcuchu Markowa spowodowana jest istnieniem dwóch stanów istotnych 1 i 3 takich, że przejście z jednego z nich do drugiego jest niemożliwe, a więc zbiór stanów istotnych nie tworzy tu jednej klasy.

Przykład 2. Rozważmy jednorodny łańcuch Markowa o czterech stanach $\{1,2,3,4\}$ i o macierzy przejścia

$$M_1 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ 0 & 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 & 0 \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 & 0 \end{bmatrix} .$$

Otrzymamy tu:

$$M_2 = M_1^2 = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 & 0 \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ 0 & 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{bmatrix} .$$

Ogólnie dla $k = 1,2,3, \ldots$ będzie

$$M_{2k+1} = M_1, \qquad M_{2k} = M_2 .$$

Tak więc ani założenie, ani teza twierdzenia 2 nie są spełnione. Zauważmy tutaj okresowość jaka występuje w tym łańcuchu. Wszystkie stany są tu istotne, ale okresowe. I tak np.: ze stanu 1 do stanu 1 układ może wrócić z prawdopodobieństwem dodatnim jedynie w parzystej ilości kroków. Okresowość ta powoduje nieregularność, w której rezultacie teza twierdzenia 2 nie zachodzi.

Przykład 3. Weźmy teraz łańcuch o macierzy przejścia:

$$M_1 = \begin{bmatrix} q & p & 0 \\ q & 0 & p \\ 0 & q & p \end{bmatrix} .$$

To M_2 równa się:

$$M_2 = M_1^2 = \begin{bmatrix} q & p & 0 \\ q & 0 & p \\ 0 & q & p \end{bmatrix} \begin{bmatrix} q & p & 0 \\ q & 0 & p \\ 0 & q & p \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} q^2+pq & qp & p^2 \\ q^2 & 2qp & p^2 \\ q^2 & pq & qp+p^2 \end{bmatrix} .$$

Założenia twierdzenia 2 są spełnione. Zauważmy, że wszystkie trzy stany są istotne, nieokresowe i tworzą jedną klasę.

Przykład 4. Weźmy teraz model błądzenia cząstki po zbiorze $\{1,2,3\}$ z jednym ekranem pochłaniającym i z jednym ekranem odbijającym.

$$M_1 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ q & 0 & p \\ 0 & q & p \end{bmatrix}$$

Stan 1 jest ekranem pochłaniającym, a stan 3 ekranem odbijającym. Mamy tu:

$$M_2 = M_1^2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ q & 0 & p \\ 0 & q & p \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ q & 0 & p \\ 0 & q & p \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ q & pq & p^2 \\ q^2 & pq & qp+p^2 \end{bmatrix}$$

Założenia twierdzenia 2 są więc spełnione. Łatwo widzieć, że stan 1 jest stanem istotnym nieokresowym, a pozostałe dwa stany są chwilowe.

Można także udowodnić, że dla jednorodnych łańcuchów Markowa o skończonej ilości stanów, jeżeli wszystkie stany istotne są nieokresowe i tworzą jedną klasę, to założenia twierdzenia 2 są spełnione. Nie jest wykluczone, że niektóre stany są chwilowe.

Pokażemy teraz, jak można obliczyć prawdopodobieństwa ergodyczne, jeżeli wiadomo, że one istnieją. Weźmy teraz wyprowadzone poprzednio równanie Markowa:

$$p_{ij}/n/ = \sum_{k=1}^{s} p_{ik}/n-1/\, p_{kj}$$

Jeżeli więc graniczne prawdopodobieństwa p_j istnieją to po przejściu do granicy przy $n \to \infty$ po obydwu stronach ostatniej równości otrzymujemy:

$$\text{XXX/} \quad p_j = \sum_{k=1}^{s} p_k p_{kj} \qquad /j = 1,2,\ldots, s/$$

Z tych równań oraz ze związku

$$\sum_{j=1}^{s} p_j = 1$$

możemy wyznaczyć szukane prawdopodobieństwo

$$p_j .$$

Przykład 1. Rozpatrzmy przykład łańcucha o macierzy:

$$M_1 = \begin{bmatrix} q & p & 0 \\ q & 0 & p \\ 0 & q & p \end{bmatrix}$$

Poprzednio pokazaliśmy, że łańcuch ten spełnia założenia twierdzenia ergodycznego, czyli prawdopodobieństwa ergodyczne p_j istnieją. W naszym przykładzie wzory xxx/ są postaci:

$$\begin{aligned} p_1 &= p_1 q + p_2 q, \\ p_2 &= p_1 p + p_3 q, \\ p_3 &= p_2 p + p_3 p. \end{aligned}$$

Są to równania liniowe, z których otrzymujemy:

$$p_2 = \frac{p}{q} p_1; \qquad p_3 = \left(\frac{p}{q}\right)^2 p_1 .$$

Ze związku $p_1 + p_2 + p_3 = 1$ otrzymujemy:

$$p_1 \left[1 + \frac{p}{q} + \left(\frac{p}{q}\right)^2 \right] = 1 .$$

Tak więc jeżeli $p = q = \frac{1}{2}$, to $p_1 = p_2 = p_3 = \frac{1}{3}$

i wówczas w granicy każdy stan jest jednakowo prawdopodobny. Jeśli zaś $p \neq q$, to

$$p_j = \frac{1 - \frac{p}{q}}{1 - \left(\frac{p}{q}\right)^3} \left(\frac{p}{q}\right)^{j-1} \qquad /j = 1,2,3/$$

Jeżeli $p > q$, to prawdopodobieństwa p_j będą wzrastały wraz z numerami stanów j; przy $p < q$ sytuacja będzie przeciwna. Wyniki te są zgodne z intuicją.

I tak np.: gdy $\frac{p}{q} = 2$ otrzymujemy:

$$p_1 = \frac{1}{7}, \quad p_2 = \frac{2}{7} \quad p_3 = \frac{4}{7},$$

gdy $\frac{p}{q} = \frac{1}{2}$, otrzymujemy

$$p_1 = \frac{4}{7}, \quad p_2 = \frac{2}{7}, \quad p_3 = \frac{1}{7}.$$

Zauważmy, że wszystkie trzy graniczne prawdopodobieństwa są dodatnie. Wiąże się to z tym, że wszystkie trzy stany są istotne. W łańcuchach o przeliczalnej ilości stanów może tak nie być.

Przykład 2. Teraz niech łańcuch Markowa jest o macierzy przejścia równej:

$$M_1 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ q & 0 & p \\ 0 & q & p \end{bmatrix}.$$

Wzory xxx/ dla tego przykładu są postaci

$$p_1 = p_1 + p_2 q$$

$$p_2 = p_3 q$$

$$p_3 = /p_2 + p_3/p$$

z tego układu równań liniowych i ze związku

$p_1 + p_2 + p_3 = 1$ otrzymamy $p_1 = 1$, $p_2 + p_3 = 0$.

Jak już wspomnieliśmy wyżej, tak się dzieje dlatego, że stany 2 i 3 są stanami chwilowymi.

2.6. Zadania

1. Macierz przejścia jednorodnego łańcucha Markowa równa się

$$M_1 = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{3} & \frac{1}{6} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{3} & \frac{1}{6} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{3} & \frac{1}{6} \end{bmatrix}$$

a/ O ilu stanach jest dany łańcuch Markowa.

b/ Obliczyć prawdopodobieństwo przejścia w dwu krokach z dowolnego stanu.

2. Elektron może znajdować się na jednej z przeliczalnej ilości orbit w zależności od posiadanej energii. Przejście z i-tej do j-tej orbity w ciągu 1 sekundy jest możliwe z prawdopodobieństwem

$$c_i e^{-\alpha /i-j/} \qquad \text{gdzie } \alpha > 0 .$$

Znaleźć: a/ Prawdopodobieństwa przejścia elektronu z i-tej do j-tej orbity w ciągu 2 sekund.

b/ Stałe c_i.

3. Wykazać, że jeśli $\{\xi/n/\}$ /n=0,1,2, .../ jest łańcuchem Markowa to dla $n_1 > n_2 > \ldots > n_k$

$$P\left(\xi/n/=i_1 \mid \xi/n_2/=i_2, \ldots, \xi/n_k/=i_k/ = P\left(\xi/n_1/=i_1 \mid \xi/n_2/=i_2/\right.\right.$$

Jest to inne sformułowanie warunku Markowa podanego w tym rozdziale.

4. Dokonać klasyfikacji stanów dla łańcuchów Markowa o podanych macierzach przejścia:

a/ $$M_1 = \begin{bmatrix} 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 \end{bmatrix}$$

b/ $$M_1 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$c/ \qquad M_1 = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 & 0 & 0 \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 \\ \frac{1}{4} & \frac{1}{4} & 0 & 0 & \frac{1}{2} \end{bmatrix}$$

5. Zbadać czy łańcuchy Markowa o macierzach przejścia:

a/ $M_1 = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$ b/ $M_1 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$ c/ $M_1 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$

d/ $M_1 = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ e/ $M_1 = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$ f/ $M_1 = \begin{bmatrix} 0 & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & 0 \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{bmatrix}$

1/ Są ergodyczne

2/ Znaleźć graniczne prawdopodobieństwa przejścia

6. Łańcuch Markowa jest o macierzy przejścia postaci:

$$M_1 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

a/ Poklasyfikować wszystkie stany tego łańcucha

b/ Czy łańcuch ten jest ergodyczny

c/ Znaleźć $p_j = \lim_{n \to \infty} p_{ij}(n)$

7. Macierz przejścia łańcucha Markowa jest równa:

$$M_1 = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} & 0 & 0 \\ \frac{1}{4} & \frac{1}{2} & \frac{1}{4} & 0 & 0 \\ \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{bmatrix}$$

a/ Poklasyfikować wszystkie stany tego łańcucha.

b/ Zbadać, czy łańcuch jest ergodyczny i znaleźć prawdopodobieństwa ergodyczne.

3. Procesy Markowa

3.1. Definicja procesów Markowa i ich typy

Do tej pory zajmowaliśmy się tylko co najwyżej przeliczalną ilością zmiennych losowych zależnych. Potrzeby fizyki, techniki, a w szczególności elektroniki zmuszają nas do badania nieprzeliczalnych zbiorów zmiennych losowych i to zmiennych zależnych, bowiem o nieprzeliczalnych zbiorach zmiennych losowych niezależnych nie da się nic powiedzieć.

Definicja 3.1.1. Proces $\{\xi/t/, t \in T\}$ jest procesem Markowa wtedy i tylko wtedy, jeżeli dla n = 1,2,... i dla dowolnych wartości parametru $t_m \in T$ /m=0,1,...,n/ gdzie $t_0 < t_1 < \ldots < t_n$, oraz dla dowolnych liczb rzeczywistych y i x równość następująca:

$$P\{\xi(t_n)<y \mid \xi(t_{n-1})=x, \xi(t_{n-2})=x_{n-2}, \ldots, \xi(t_1)=x_1, \xi(t_0)=X_0\} =$$

$$= P\left(\xi(t_n)<y \mid \xi(t_{n-1})=x\right)$$

zachodzi dla dowolnych liczb rzeczywistych

$$x_{n-2}, x_{n-3}, \ldots, x_1, x_0 .$$

Innymi słowy spełniony jest warunek Markowa. Z tej definicji widać od razu, że łańcuchy Markowa, są procesami Markowa.

Równość powyższą można odczytać tak, że dystrybuanta procesu nie zależy od wszystkich wartości jakie przybierał w momentac t_{n-1}, t_{n-2}, ... t_1, t_o, a tylko zależy od wartości w momencie t_{n-1}.

Definicja 3.1.2. Proces Markowa $\{\xi/t/, t\in T\}$ nazywamy jedno rodnym, jeżeli dla dowolnych $t_1 \in T$, $t_2 \in T$, gdzie $t_1 < t_2$ dystrybuanta

$$F/t_1, x, t_2, y/ = P\left(\xi/t_2/ < y \mid \xi/t_1/ = X/\right.$$

zależy jedynie od różnicy $t = t_2 - t_1$, a nie zależy od tego jakie t_1, t_2 weźmiemy.

Piszemy w tym przypadku:

$$F/t_1, x, t_2, y/ = F/t,x,y/.$$

3.2. Procesy stochastyczne o przyrostach niezależnych

Definicja 3.2.1. Proces stochastyczny $\{\xi/t/, t\in T\}$ nazywamy procesem o przyrostach niezależnych jeżeli dla dowolnych

$t_o \leqslant t_1 \leqslant t_2 \leqslant \ldots \leqslant t_n \leqslant \ldots$ należących do T

przyrosty $\xi_k = \xi/t_{k+1}/ - \xi/t_k/$, gdzie k = 0,1,2,...

są niezależnymi zmiennymi losowymi.

Jeżeli teraz proces $\{\xi/t/, t\in T\}$ o przyrostach niezależnych czyni zadość relacji $P(\xi/t_o/= b/ = 1$, gdzie t_o jest chwilą początkową, a b jest stałą to rozważany proces jest procesem Markowa.

Proce stochastyczny o przyrostach niezależnych z czasem dyskretnym t /tzn. t = 0,1,2, .../ jest poprostu ciągiem sum o rosnącej ilości składników niezależnych zmiennych losowych:

$$\xi_k = \xi/k+1/ - \xi/k/$$

czyli $\xi/t/ - \xi/0/ = \xi_o + \xi_1 + \ldots + \xi_{t-1}$

gdzie t = 0,1,2, ...

Przykład 1. Proces Gaussa

Proces ten jest inaczej nazywany procesem normalnym.

Proces stochastyczny nazywamy procesem normalnym, keśli każdy skończenie wymiarowy rozkład zmiennych losowych procesu jest normalny tzn. dla każdego ciągu $t_1, t_2, \ldots, t_n$

$\left(\xi/t_1/, \quad \xi/t_2/, \ldots, \quad \xi/t_n/\right)$ ma rozkład normalny.

Proces ten jest także nazywany procesem Wienera albo procesem ruchów Browna. Znajduje on zastosowanie jako przybliżony model zachowania się cząsteczki podlegającej ruchom Browna. Cząsteczka startuje w momencie zero z punktu zero:

$$\xi/t_o/ \equiv 0 .$$

Zakładamy, że przesunięcia cząsteczki na niezachodzących na siebie odcinkach czasu są niezależnymi zmiennymi losowymi o rozkładzie normalnym, wartości oczekiwanej równej zero i wariancji równej długości przedziału. Tak więc zmienne losowe

$$\xi/t_i/ - \xi/\tau_i/ \qquad /i = 1,2, \ldots, k/$$

$$0 \leqslant \tau_1 \leqslant t_1 \leqslant \tau_2 \leqslant t_2 \leqslant \ldots \leqslant \tau_k \leqslant t_k$$

są niezależne, o wartościach oczekiwanych zero i wariancjach równych $t_i - \tau_i$ odpowiednio.

Jest to właśnie przykład procesu o przyrostach niezależnych. W konsekwencji funkcja gęstości łącznego rozkładu zmiennych losowych $\xi/t_1/, \quad \xi/t_2/, \ldots, \quad \xi/t_k/$ wyraża się wzorem:

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi t_1}} \exp\left(-\frac{x_1^2}{2t_1}\right) \prod_{j=1}^{k-1} \frac{1}{\sqrt{2\pi\,(t_{j+1}-t_j)}} \exp\left(-\frac{(x_{j+1}-x_j)^2}{2(t_{j+1}-t_j)}\right).$$

Realizacje tego procesu mogą być uważane za funkcje ciągłe, Przez realizację procesu stochastycznego rozumiemy funkcję $\xi/t, \omega_o/$, gdzie zdarzenie losowe ω_o jest ustalone i jest to funkcja czasu t.

Przykład 2. Proces Poissona

Drugim przykładem procesu o parametrze ciągłym i o przyrostach niezależnych jest proces Poissona. Analogicznie jak poprzednio przyjmujemy:

$$\xi/t_0/ \equiv 0.$$

O przyrostach procesu zakłada się, że na niezachodzących na siebie przedziałach czasowych, są niezależnymi zmiennymi loso wymi, każda o rozkładzie Poissona, o wartościach oczekiwanych równych liczbie λ $/\lambda > 0/$ pomnożonej przez długość przedziału. Wynika stąd, że prawdopodobieństwo

$$p(\xi(t_1)=j_1,\ \xi(t_2)=j_2,\dots,\xi(t_k)=j_k;\ 0<t_1<t_2<\dots<t_k)=$$

$$=\begin{cases} \dfrac{(\lambda t_1)^{j_1}}{j_1!}\exp(-\lambda t_1)\prod\limits_{k=1}^{k-1}\dfrac{\lambda(t_{u+1}-t_u)^{j_{u+1}-j_u}}{(j_{u+1}-j_u)!}\exp\left(-\lambda(t_{u+1}-t_u)\right) \\ \text{jeśli liczby całkowite } j_1, j_2, \dots, j_k \text{ spełniają warunek} \\ 0 \leqslant j_1 \leqslant j_2 \leqslant \dots \leqslant j_k, \\ 0 \quad \text{w przeciwnym przypadku} \end{cases}$$

3.3. Proces ruchu Browna

W przykładzie poprzedniego paragrafu zajmowaliśmy się proces Gaussa z przyrostami niezależnymi określonym dla skończonego lub nieskończonego $T = [a,b]$ takiego, że:

$$E[\xi(t)-\xi(s)]=0, \quad D[\xi(t)-\xi(s)]=t-s, \qquad \text{gdzie } t,s \in T \quad s$$

Proces takiego typu jest modelem opisującym dokładnie ruch Browna. Zajmiemy się teraz dokładniejszym opisaniem tego zja wiska.

Opiszemy teraz ruch Browna jako ciągłe błądzenie przypadkowe Niech $\xi/t/$ będzie ruchem Browna na odcinku $T = [0,1]$ zakł damy, że $\xi/0/ = 0$. Rozpatrzmy wartości $\xi/t/$ tylko w momentach dyskretnych $t = \frac{k}{n}$, $k = 0,1,\dots, n$.

Niech $\Delta\xi/t/ = \xi/t+\frac{1}{n}/ - \xi/t/$

oraz załóżmy, że $\xi_n = \xi_n/t/$ - proces stochastyczny, któr otrzymujemy w rezultacie liniowej interpolacji między sąsied mi wartościami

$\xi/\frac{k-1}{n}/$ i $\xi/\frac{k}{n}/$ to znaczy, że:

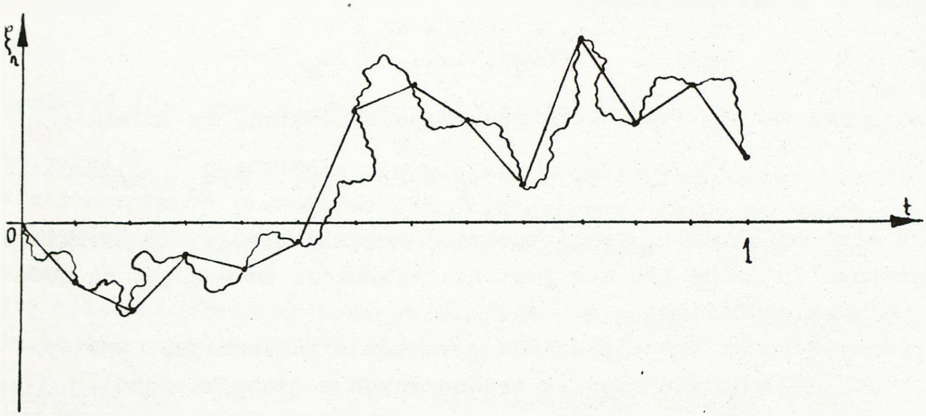
$$\xi_n/t/ = \sum_{m=0}^{k-1}\Delta\xi/\frac{m}{n}/ + /nt-k/\,\Delta\xi\left(\frac{k}{n}\right)$$

gdzie $k = [nt]$ - część całkowitą liczby nt /jeżeli

$0 \leqslant t < \frac{1}{n}$ to $\xi_n /t/ = nt \Delta\xi/0//$.

Każda trajektoria $\xi_n/t, \omega_0/$ /realizacja procesu przy ustalonym ω_0/ procesu stochastycznego $\xi_n = \xi_n/t/$ jest ciągłą krzywą łamaną o wierzchołkach w punktach $/t = \frac{k}{n}, \; \xi = \xi/\frac{k}{n}, t//$

Patrz rysunek poniżej:



Rozpatrzmy teraz ciąg procesów losowych $\xi_n/t/$ gdy n = 1,2,... opisanego wyżej typu. Z prawdopodobieństwem 1 jednostajnie po $t \in T$.

$$\xi_n/t/ \longrightarrow \xi/t/, \quad \text{gdy } n \longrightarrow \infty.$$

Ruch Browna $\xi/t/$, $t \geqslant 0$ może także być opisany jako proces Markowa o funkcji przejścia

$$P\,/t,x,B/ = \int_B p/t,x,y/\,dy\,.$$

Wzór ten czytamy: prawdopodobieństwo znalezienia się punktu x w zbiorze B w chwili t równa się całce po funkcji gęstości przejścia p/ t,x,y,/, która jest fundamentalnym rozwiązaniem równania różniczkowego typu parabolicznego

$$\frac{\partial p}{\partial t} = \frac{1}{2}\,\frac{\partial^2 p}{\partial x^2}$$

i daje się zapisać wzorem

$$p\,/t,x,y/ = \frac{1}{\sqrt{2\pi t}}\, e^{-\frac{/y-x/^2}{2t}}\,.$$

4. Procesy stacjonarne

Definicja 4.1. Weźmy pod uwagę proces stochastyczny $\{\xi/t/ : t \in T\}$. Proces ten jest procesem ściśle stacjonarnym, jeśli dla każdej liczby naturalnej m oraz dowolnych $t_1, t_2, \ldots t_m$ i h należących do T zmienne losowe

$$\xi/t_1/,\quad \xi/t_2/, \ldots, \quad \xi/t_m/$$

mają ten sam łączny rozkład prawdopodobieństwa, co zmienne:

$$\xi/t_1 + h/,\quad \xi/t_2 + h/, \ldots, \quad \xi/t_m + h/.$$

To samo można sformułować bardziej zwięźle mówiąc, że struktura probabilistyczna procesu jest niezmiennicza ze względu na przesunięcia wzdłuż osi czasowej.

Podamy teraz kilka przykładów procesów stacjonarnych, występujących jako modele zjawisk zachodzących w rzeczywistości.

Przykład 1. Pierwszy przykład związany jest ze zjawiskiem tzw. szumu.

Obserwujemy natężenie ξ /t/ prądu na wyjściu lampy próżniowej. Zaobserwowane natężenie w chwili t jest sumą efektów wywołanych przez elektrony trafiające w anodę w chwili t lub w chwilach poprzedzających t. Lampa i obwód mogą być scharakteryzowane za pomocą funkcji g/t/, której wartości mierzą udział w obserwowanym natężeniu w chwili t efektów wywołanych elektronem trafiającym w anodę w chwili t = o.

Przypuśćmy, że zdarzenia polegające na trafieniu elektronów w anodę są zdarzeniami niezależnymi.

Następnie niech prawdopodobieństwo trafienia w przedziale czasu $/t, t + \Delta t/$ będzie równe:

$$\beta \Delta t.$$

Przy tych założeniach liczba trafień w czasie $(0,t)$ jest procesem Poissona. Przyjmujemy następnie, że efekty wywołane przez poszczególne elektrony sumują się. W konsekwencji natężenie prądu w chwili t dane jest wzorem:

$$\xi/t/ = \sum_{t_\nu \leq t} g\,/t-t_\nu/$$

gdzie przez t_ν , oznaczono momenty, w których zaistniały zdarzenia polegające na trafieniu elektronów w anodę. Zauważmy, że proces $\xi/t/$ można również zapisać w postaci:

$$\xi/t/ = \int_{-\infty}^{+\infty} g/t-\tau/\ dn\ /\tau/ = \int_{-\infty}^{t} g/t-\tau/\ dn\ /\tau/$$

ponieważ g/t/ jest równa zeru dla t ujemnych.

Przykład 2. W poprzednim przykładzie podaliśmy opis procesu stacjonarnego o parametrze czasowym ciągłym. Łańcuchy Markowa stanowią prosty przykład procesu stacjonarnego o czasie dyskretnym.

Aby opisać dokładniej procesy stacjonarne należy wprowadzić pojęcie zmiennej losowej zespolonej.

Definicja 4.2. Jeżeli ξ, η będą zmiennymi losowymi rzeczywistymi, wówczas $\zeta = \xi + i\eta$ / i - jednostka urojona/ nosi nazwę zmiennej losowej zespolonej.

Rozkład zmiennej losowej ζ jest wyznaczony przez dystrybuantę dwuwymiarową:

$$F/x,y/ = P\left\{ \xi < x\ ;\ \eta < y \right\}$$

Definicja 4.3. Niech $\left\{\xi/t/,\ t \in T\right\}$ i $\left\{\eta/t/,\ t \in T\right\}$,

są procesami stochastycznymi rzeczywistymi i niech $\zeta/t/ \equiv$ $\equiv \xi/t/ + i\ \eta\ /t/$ dla $t \in T$. Wówczas $\left\{\zeta/t/,\ t \in T\right\}$ jest procesem stochastycznym zespolonym.

Definicja 4.4. Wariancją zmiennej losowej zespolonej nazywamy wyrażenie:

$$D^2(\zeta) = E\left(|\zeta - E(\zeta)|^2\right).$$

Udowodnimy teraz, że:

$$D^2(\zeta) = D^2(\xi) + D^2(\eta) \qquad \text{gdy } \zeta = \xi + i\eta$$

Dowód: $D^2(\zeta) = E\left(|\zeta - E(\zeta)|^2\right) = E\left(|\xi + i\eta - E(\xi + i\eta)|^2\right) =$

$$= E\left(|(\xi - E(\xi)) + i(\eta - E(\eta))|^2\right) = E\left((\xi - E(\xi))^2 + (\eta - E(\eta))^2\right) =$$

$$= E\left[(\xi - E(\xi))^2\right] + E\left[(\eta - E(\eta))^2\right] = D^2(\xi) + D^2(\eta);$$

co było do udowodnienia.

Definicja 4.5. Kowariancją zmiennych losowych ζ_1, ζ_2 nazywamy wyrażenie:

$$E\left\{\left[\zeta_1 - E(\zeta_1)\right]\left[\overline{\zeta_2 - E(\zeta_2)}\right]\right\}$$

gdzie $\overline{\zeta_2 - E(\zeta_2)}$ jest rozumiane, jako sprzężeniem w sensie liczb zespolonych wyrażenia $\zeta_2 - E(\zeta_2)$.

Definicja 4.6. Stochastyczny proces zespolony $\{\zeta/t/, -\infty < t < +\infty\}$ jest stacjonarny w węższym sensie - jeżeli dla n = 1,2 ... i dla dowolnych rzeczywistych $t_1, t_2, \ldots, t_n$ ... i τ, zachodzi równość:

$$F_{t_1 t_2, \ldots, t_n}(x_1, x_2, \ldots, x_n, y_1, \ldots, y_n) =$$

$$= P\{\xi(t_1) < x_1, \xi(t_2) < x_2, \ldots \xi(t_n) < x_n, \eta(t_1) < y_1, \ldots, \eta(t_n) < y_n\} =$$

$$= P\{\xi(t_1+\tau) < x_1, \ldots, \xi(t_n+\tau) < x_n, \eta(t_1+\tau) < y_1, \ldots, \eta(t_n+\tau) < y_n\} =$$

$$= F_{t_1+\tau, \ldots, t_n+\tau}(x_1, x_2, \ldots, x_n, y_1, y_2, \ldots, y_n).$$

Z tej definicji procesu stacjonarnego wynika, że jeżeli $\xi/t/$, $\eta/t/$ posiadają momenty drugiego rzędu a $\zeta/t/ = \xi/t/ + i\eta/t/$ jest procesem stacjonarnym w węższym sensie to dla dowolnych rzeczywistych t i τ zachodzą następujące równości:

$$E(\zeta/t/) = E(\xi/t/ + i\eta/t/) = m_1 + im_2 = \text{const.}$$

/1/ $$D^2(\zeta/t/) = D^2(\xi/t/) + D^2(\eta/t/) = \sigma^2 = \text{const.}$$

$$E\left\{\left[\zeta/t+\tau/ - E(\zeta/t+\tau)\right]\left[\overline{\zeta/t/ - E(\zeta/t/)}\right]\right\} = R(\tau).$$

Funkcja R/τ/ nosi nazwe funkcji korelacyjnej.

$$R(0) = E\left\{\left[\zeta(t) - E(\zeta(t))\right] \cdot \left[\overline{(\zeta(t)) - E(\zeta(t))}\right]\right\} = E\left(|\zeta(t) - E(\zeta(t))|^2\right) = D^2(\zeta(t))$$

$$R(-\tau) = E\left\{\left[\zeta(t-\tau) - E(\zeta(t-\tau))\right]\left[\overline{\zeta(t) - E(\zeta(t))}\right]\right\} =$$

$$= \overline{E\left\{\left[\zeta(t) - E(\zeta(t))\right]\left[\overline{\zeta(t-\tau) - E(\zeta(t-\tau))}\right]\right\}} = \overline{R(\tau)}.$$

Szczególnie ważne znaczenie ma rzeczywisty stacjonarny proces normalny tzn. proces stacjonarny czyniący zadość wzorom

$$E\left(\xi/t/\right) = m = \text{const.}$$

$$D^2\left(\xi/t/\right) = \sigma^2 = \text{const.}$$

$$E\left\{\left[\xi(t+\tau) - E(\xi(t+\tau))\right]\left[\xi(t) - E(\xi(t))\right]\right\} = R(\tau),$$

przy $m = 0$ i $\sigma = 1$ i mający tę własność, że dla $n = 1,2, \ldots$ i dla dowolnych t_m /$m = 1,2,\ldots, n$/ zmienna losowa $\left\{\xi/t_1/, \ldots \xi/t_n/\right\}$ ma rozkład normalny to znaczy, że zmienna taka posiada funkcję charakterystyczną postaci

$$\varphi_{t_1,t_2,\ldots t_n}(v_1,\ldots,v_n) = \exp\left(-\frac{1}{2}\sum_{j=1}^{n}\sum_{k=1}^{n} R(t_k - t_j)\, v_j v_k\right).$$

W zastosowaniach trudno zazwyczaj operować wielowymiarowymi rozkładami zmiennych losowych $\xi/t/$. Często można z obserwacji znaleźć jedynie momenty tych zmiennych.

W związku z tym wprowadzimy określenie procesu stacjonarnego w szerszym sensie.

Definicja 4.7. Proces zespolony $\left\{\zeta/t/,\ t \in T\right\}$ jest stacjonarny w szerszym sensie, jeśli istnieją wartości przeciętne, wariancje i kowariancje zmiennych losowych tego procesu i czynią zadość równościom /1/.

Z tego określenia widać, że proces stacjonarny w węższym sensie, mający momenty rzędu drugiego, jest stacjonarny w szerszym sensie.

Wprowadzimy teraz kilka pojęć, które pozwolą nam dokładnie opisać procesy stacjonarne.

Definicja 4.8. Proces zespolony $\left\{\zeta/t/, -\infty < t < +\infty\right\}$ stacjonarny w szerszym sensie, jest ciągły, jeżeli dla każdego rzeczywistego t

$$\lim_{\tau \to 0} E\left(\left|\zeta(t+\tau) - \zeta/t/\right|^2\right) = 0 .$$

Podamy teraz twierdzenie udowodnione przez Chinczyna. Twierdzenie to, odgrywa fundamentalną rolę dla teorii procesów stacjonarnych.

Twierdzenie 4.1. Warunkiem koniecznym i dostatecznym na to, aby funkcja $R/\tau/$ była funkcją korelacyjną procesu $\{\zeta/t/, -\infty<t<+\infty\}$, stacjonarnego w szerszym sensie, ciągłego i spełniającego warunki:

$$E\left(\zeta/t/\right)=0,$$
$$D^2\left(\zeta/t/\right)=1,$$

jest istnienie dystrybuanty $F/\lambda/$ takiej, że

$$R(\tau)=\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-i\lambda\tau}\,dF(\lambda),$$

gdzie całka jest rozumiana jako całka Stieltjesa.
Funkcja $F/\lambda/$ występująca w tym twierdzeniu nosi nazwę dystrybuanty widmowej. Oczywiście funkcja korelacyjna wyznacza jednoznacznie dystrybuantę widmową. Gdy istnieje gęstość $f/\lambda/ = F'(\lambda)$ to odpowiednio proces nosi nazwę procesu z widmem ciągłym. Jeżeli przy tym $R/\tau/$ jest absolutnie całkowalną funkcją na osi $/-\infty<\tau<+\infty/$, to gęstość widmową $f/\lambda/$ można wyznaczyć i równa się ona:

$$f(\lambda)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-i\lambda\tau}R(\tau)\,d\tau\ .$$

Jeżeli dystrybuanta widmowa $F/\lambda/$ wzrasta tylko w punktach skokowych λ_k, to odpowiedni proces nosi nazwę procesu z widmem skokowym.
O wzorze z twierdzenia Chinczyna mówimy, że daje on reprezentację widmową funkcji korelacyjnej.

Przykład: Niech $\{\xi/t/\}$ $/t=0,\pm1,\pm2,\ldots/$ będzie ciągiem zmiennych losowych rzeczywistych o wartościach przeciętnych równych zero, parami nieskorelowanych i o odchyleniach standartowych równych 1. Funkcja korelacyjna $R/\tau/$ jest tu postaci

$$R(\tau)=E\left(\xi(t+\tau)\cdot\xi(t)\right)=\begin{cases}1 & \text{dla } \tau=0,\\ 0 & \text{dla } \tau\neq 0\end{cases}$$

Zauważmy, że:

$$R(\tau)=\int_{-\pi}^{\pi}\frac{\cos\lambda\tau}{2\pi}\,d\lambda$$

a więc rozważany proces ma gęstość widmową:

$$f/\lambda/=\frac{1}{2\pi}$$

Rozważany w tym przykładzie proces stacjonarny ma stałą gęstość widmową. Taki proces nosi nazwę białego szumu. Nazwa ta wiąże się z interpretacją dystrybuanty widmowej w zagadnieniach fizycznych i pochodzi stąd, że w rozkładzie widmowym światła białego intensywność fal wszystkich częstotliwości jest jednakowa.

5. Procesy gałązkowe

5.1. Procesy gałązkowe Galtona - Batsona

Paragraf ten rozpoczniemy podaniem zadania sformułowanego przez Galtona i dotyczącego zagadnienia wymieralności rodzin.
Niech $p_0, p_1, p_2, \ldots$ będą prawdopodobieństwami zdarzenia polegającego na tym, że ojciec pewnej rodziny ma odpowiednio 0,1,2,... synów i dalej każdy z nich z takimi samymi prawdopodobieństwami posiada odpowiednio 0,1,2,...synów itd. Jakie jest prawdopodobieństwo, że męska linia w r - tym pokoleniu zaniknie, albo ogólniej jakie jest prawdopodobieństwo, że w danym pokoleniu jest dana liczba mężczyzn?. Zadanie to rozwiązał dokładnie Batson. Początkowo zdefiniujemy dokładniej proces Galtona - Batsona, a później damy odpowiedź na dane pytanie.
Niech $Z_0, Z_1, Z_2, \ldots$, będzie ciągiem zmiennych losowych powiązanych w łańcuch Markowa, którego stanami są liczby naturalne. Będziemy interpretować Z_n jako ilości osobników w n-tym pokoleniu. Jeżeli nie będziemy zakładali nic innego to zawsze przyjmujemy $Z_0 = 1$. Odpowiednio własności procesu przy $Zo \neq 1$ łatwo otrzymać, przy założeniu, że procesy zaczynające się od różnej ilości elementów początkowych, rozwijają się niezależnie.
Niech teraz P oznacza miarę naszego procesu. Rozkład prawdopodobieństwa Z_1 określają liczby

$$P\,/Z_1 = K/ = p_k \qquad k = 0,1,2,\ldots$$

gdzie oczywiście $\sum_{k=1}^{\infty} p_k = 1$.

Wielkość p_k interpretujemy, jako prawdopodobieństwa, tego, że osobnik żyjący w n-tym pokoleniu wyda na świat w /n + 1/-szym pokoleniu K osobników.

Zakładamy, że p_k nie zależy od pokolenia n.
Warunkowy rozkład Z_{n+1} pod warunkiem $Z_n=k$, określany z założenia, że różne osobniki rozmnażają się niezależnie. Z założenia tego wynika, że Z_{n+1} posiada rozkład taki sam jak suma k niezależnych zmiennych losowych, z których każda posiada rozkład taki sam jak Z_1.
Jeżeli teraz $Z_n=0$ to z prawdopodobieństwem 1, Z_{n+1} równa się zero.
Prawdopodobieństwa przejścia określimy następująco

$$P_{ij} = P\left\{ Z_{n+1} = j \mid Z_n = i \right\} \qquad i,j\ n = 0,1, \ldots$$

Wielkości te są określone dla wszystkich i i j, tylko oprócz przypadku

$$P\left\{ Z_n = i \right\} = 0 .$$

Teraz zajmiemy się własnościami tych rozkładów, momentami zmiennych Z_n oraz twierdzeniami granicznymi.
Przy badaniu tego rodzaju procesów potrzebne nam będą funkcje tworzące

$$F/S/ = \sum_{k=0}^{\infty} p_k S^k , \quad |S| \leqslant 1$$

gdzie S - liczba zespolona .
Iteracje funkcji tworzącej f/s/ określamy równościami:

$$f_o/S/ = S, \qquad f_1/S/ = f/S/$$

$$f_{n+1}(S/ = f\ /f_n/S/) \qquad n = 1,2, \ldots$$

Z tych równości wynika natychmiast, że:

$$f_{n+m}/S/ = f_n/f_m/S/ \qquad m,n = 0,1,\ldots$$

Zakładać będziemy także:
1/ Żadna z liczb p_o, p_1, ... nie jest równa 1 oraz $p_o+p_1 < 1$.
2/ Wartość oczekiwana zmiennej losowej Z_1 jest skończona to znaczy:

$$E\ /Z_1/ = \sum_{k=0}^{\infty} K\ p_k < +\infty$$

Podstawowym wynikiem jest twierdzenie, które odkrył po raz pierwszy Batson.

Dotyczy ono następującej rzeczy.

Twierdzenie 5.1.1. Funkcja tworząca zmiennej losowej Z_n równa się f_n - n-tej iteracji funkcji tworzącej f/s/.

Twierdzenie to pozwala w sposób prosty policzyć funkcję tworzącą zmiennej Z_n oraz jej rozkład i momenty. Z punktu widzenia rachunku prawdopodobieństwa proste obliczanie momentów jest bardzo istotne, przy badaniu własności granicznych.

Oznaczmy teraz= $E\,Z_1 = m$, $D^2 Z_1 = \sigma^2 = E\,Z_1^2 - m^2$.

Widać z definicji f/s/, że:

$$m = f'/1/; \qquad \sigma^2 = f''/1/ + m - m^2 .$$

Momenty zmiennej losowej Z_n, można otrzymać różniczkując równanie:

$$f_{n+1}/s/ = f/fn/s/\,/$$

$$\text{lub} \quad f_{n+1}/S/ = f_n/f/s/\,/$$

i biorąc wartości w punkcie s = 1.

Różniczkując pierwsze równanie otrzymamy

$$f'_{n+1}/1/ = f'\left(f_n/1/\right) f'_n/1/ = f'/1/ \,.\, f'_n/1/,$$

skąd na podstawie indukcji matematycznej wynika, że:

$$f'_n/1/ = m^n \qquad n = 0,1,2, \ldots$$

Jeżeli $f''/1/ < \infty$, to można równanie poprzednie różniczkować jeszcze raz i otrzymamy

$$f''_{n+1}/1/ = f'/1/\, f''_n/1/ + f''/1/ \left[f'_n/1/\right]^2$$

Z równania tego można wyznaczyć $f''_n/1/$ dla n = 0,1,2,3 ... oraz wariancję:

$$x/ \quad D^2 Z_n = E\,Z_n^2 - /E\,Z_n/^2 = \begin{cases} \dfrac{\sigma^2 m^n/m^n-1/}{m^2 - m}, & m \neq 1, \\ n\,\sigma^2, & m = 1. \end{cases}$$

W ten sposób udowodniliśmy twierdzenie.

Twierdzenie 5.1.2. Wartość oczekiwana EZ_n równa się m^n n=0,1,... Jeżeli $D^2Z = \sigma^2 < \infty$, to D^2Z_n istnieje i dane jest wzorem /x/

Teraz zajmiemy się rozwiązaniem zadania, które podaliśmy na początku tego rozdziału tzn. znajdziemy prawdopodobieństwo wymieralności rodziny.

Definicja 5.1.1. Wymarciem, nazywamy zdarzenie polegające na tym, że ciąg zmiennych losowych $\{Z_n\}$ oprócz skończonej ilości elementów składa się z samych zer.
Ponieważ Z_n przyjmuje wartości naturalne, to wymarcie jest zdarzeniem losowym polagającym na tym, że $Z_n \to 0$. Dalej, jeżeli:

$$P\,/Z_{n+1} = 0 \mid Z_n = 0/ = 1,$$

to prawdziwa jest równość:

$$P/Z_n \to 0/ = P\left\{Z_n = 0 \text{ dla jakiegoś } n\right\} = P\left\{/Z_1=0/ \cup /Z_2=0/ \cup \ldots\right\} =$$

$$= \lim_{n\to\infty} P\left\{/Z_1=0/ \cup \ldots \cup /Z_n=0/\right\} = \lim_{n\to\infty} P\left\{Z_n=0\right\} =$$

$$= \lim_{n\to\infty} f_n/0/.$$

Ciąg $f_n/0/$ jest ciągiem niemalejącym.

Definicja 5.1.2. Oznaczmy przez q prawdopodobieństwo wymarcia rodziny tzn.

$$q = P\left\{Z_n \to 0\right\} = \lim f_n/0/$$

Definicja 5.1.3. Jeżeli $m = EZ_1 \leqslant 1$, to prawdopodobieństwo wymarcia równa się 1. Jeżeli $m > 1$, to prawdopodobieństwo wymarcia równa się nieujemnemu jednoznacznemu rozwiązaniu równania:

$$s = f/s/$$

Rozwiązanie wybieramy mniejsze od jedynki.

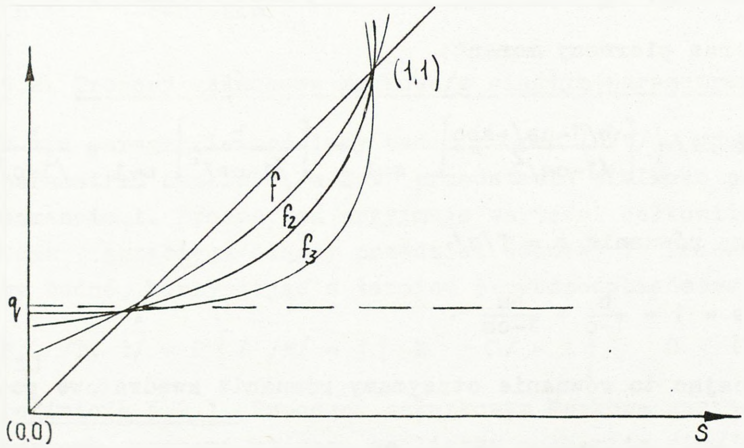
Uwaga: Łatwo, zauważyć, że $S \leqslant f/s/ \leqslant f/q/ = q$ gdzie $0 \leqslant s \leqslant q$.
Na mocy indukcji matematycznej $0 \leqslant s \leqslant q$ otrzymujemy

$f/s/ \leqslant f_2/s/ \leqslant f_3/s/ \leqslant \ldots \leqslant q$. Ponieważ $f_n/s/ \geqslant f_n/0/$, to $f_n/s/ \to q$. Teraz, jeżeli $m > 1$ i $q < s < 1$ to prawdziwe są nierówności $1 > s \geqslant f/s/ \geqslant f_2/s/ \geqslant \ldots \ldots$ dlatego w tym przypadku także $f_n/s/ \to q$

Reasumując dla dowolnego m:

$$\lim_{n \to \infty} f_n/S/ = q, \qquad 0 \leqslant S < 1 .$$

Patrz rysunek poniżej.



Wykres funkcji $f/s/$, $f_2/s/$ i $f_3/s/$ w przypadku gdy $0 < q < 1$.

Oczywiste jest, że ciąg $\{Z_n\}$ zbieżny jest albo do ∞, albo do 0; dokładniej opisze ten fakt następujące twierdzenie:

Twierdzenie 5.1.4. Dla dowolnego skończonego $m = EZ_1$

$$\lim_{n \to \infty} P\{Z_n = K\} = 0 \quad \text{dla } k = 1,2, \ldots$$

Prócz tego $Z_n \to \infty$ z prawdopodobieństwem $1 - q$ i $Z_n \to 0$ z prawdopodobieństwem q.

Przykład. Załóżmy, że prawdopodobieństwa $p_1, p_2, \ldots$ tworzą postęp geometryczny tzn. $p_k = b\,c^{k-1}$, $k = 1,2, \ldots$ gdzie $b > 0$, $c > 0$, $b \leqslant 1 - c$, a

$$p_0 = 1 - p_1 - p_2 \ldots$$

Obliczamy teraz funkcję tworzącą $f/S/ = \sum_{k=0}^{\infty} p_k S^k$

$$f(s) = p_0 s^0 + \sum_{k=1}^{\infty} p_k s^k = 1 - \sum_{l=1}^{\infty} p_k + \sum_{k=1}^{\infty} p_k s^k = 1 - \sum_{k=1}^{\infty} bc^{k-1} + \sum_{k=1}^{\infty} bc^{k-1} s^k =$$

$$= 1 - \frac{b}{1-c} + \frac{b}{c} \sum_{k=1}^{\infty} (cs)^k = 1 - \frac{b}{1-c} + \frac{b}{c} \frac{cs}{1-cs} = 1 - \frac{b}{1-c} + \frac{bs}{1-cs} .$$

Stosując zasadę indukcji matematycznej można także stwierdzić, że $f_n/s/$ jest podobnej postaci co $f/s/$ tyle, tylko, że inne są współczynniki b_n, c_n.

Obliczmy teraz pierwszy moment:

$$EZ_1 = m = f'/1/ = \left[\frac{b/1-cs/+sbc}{/1-cs/^2} \right]_{s=1} = \left[\frac{b}{/1-cs/^2} \right]_{s=1} = \frac{b}{/1-c/^2}$$

Rozwiązujemy równanie $s = f/s/$

czyli

$$s = 1 - \frac{b}{1-c} + \frac{bs}{1-cs} .$$

Przekształcając to równanie otrzymamy równanie kwadratowe postaci

$$/xx/ \quad C/1-c/\, S^2 - /1-c^2-b/\, S + /1 - c - b/ = 0.$$

Dodatnim pierwiastkiem takiego równania jest wielkość:

$$S_o = \frac{1 - b - c}{c\,/1 - c/} .$$

Jeżeli $m = 1$ to $1 = m = \frac{1}{/1-c/^2}$ czyli $b = /1-c/^2$,

stąd

$$S_o = \frac{1-/1-c/^2-c}{/1-c/c} = \frac{/1-c/\,/1-1+c/}{/1-c/c} = \frac{/1-c/c}{/1-c/c} = 1 ,$$

jeżeli $m \neq 1$ to jest jedyny ujemny pierwiastek równania /xx/ różny od 1.

Stąd dla $m > 1$ $\quad S_o = q$

Iteracje $f/s/$ można przedstawić następująco

$$f_n/S/ = 1 - m^n \frac{1 - S_o}{m^n - S_o} + \frac{m^n /\frac{1-So}{m^n-So}/^2 S}{1 - /\frac{m^n - 1}{m^n - S_o}/ S}$$

gdy $m \neq 1$ i $n = 1,2,\ldots$

$$f_n/S/ = \frac{nc-/nc+c-1/s}{1-c-nc-ncs}, \; 0 < c < 1, \; m = 1, \quad n = 1,2, \ldots$$

5.2. Procesy gałązkowe Markowa/z ciągłym parametrem/

W tym paragrafie będziemy badać proces $\{Z/t/\}$ gdzie t jest parametrem czasowym, a Z/t/ przedstawia wielkość populacji w momencie t. Proces ten przyjmuje wartości całkowite dodatnie. Czas t przebiega ciągły przedział czasowy T. Proces ten będziemy badać, korzystając z terminu prawdopodobieństwa przejścia:

$$P_{ij} /\tau, t/ = P\{Z /t/ = j \mid Z /\tau/ = i\} \qquad 0 \leqslant \tau \leqslant t.$$

Definicja 5.2.1. Procesem gałązkowym Markowa nazywamy, łańcuch Markowa, stanami którego są liczby całkowite nieujemne a prawdopodobieństwa przejścia spełniają równania /xxx/ /które niżej opiszemy/. Zakładając, że b - ciągła, ściśle dodatnia funkcja, p_i - ciągłe i nieujemne, $p_1/t/ \equiv 0$

$$\sum_{j=0}^{\infty} p_j/t/ \equiv 1 .$$

Jeżeli b i p_i nie zależą od t to mówimy, że proces jest jednorodny w czasie.

Uwaga 1. Dopuszczamy także przypadek, gdy $\sum_j P_{ij}/\tau, t/ < 1$, gdzie $\tau \leqslant t$.
W przypadku tym, oznacza, że Z/t/ może przyjmować wartości równe ∞ na skończonym przedziale czasowym.

Uwaga 2. Dla prostoty wykładu zakładać będziemy, że $b/t/ > 0$, lecz można także przyjmować, że $b/t/ \geqslant 0$.
Od tego momentu niech Z/t/ będzie procesem gałązkowym Markowa z prawdopodobieństwami przejścia:

/x/ $P_{ik}/\tau, t/ = P\left\{ Z/t/ = k \mid Z/\tau/ = i \right\}$ $i,k=0,1,2,\ldots,$

$0 \leqslant \tau \leqslant t$.

Ponieważ proces gałązkowy Markowa, jest łańcuchem Markowa, a więc prawdopodobieństwa przejścia muszą spełniać równanie Kołmogorowa - Chapmana postaci:

/xx/ $$P_{ik}/\tau,t_2/ = \sum_{j=0}^{\infty} P_{ij}/\tau, t_1/\, P_{jk}/t_1,t_2/ \qquad i,k = 0,1,2,\ldots,$$

gdzie $0 \leqslant \tau \leqslant t_1 \leqslant t_2$.

Prawdopodobieństwa przejścia P_{ik} spełniają równania różniczkowe postaci:

/xxx/ $$\begin{cases} \dfrac{\partial P_{ik}(\tau,t)}{\partial t} = -kb(t)P_{ik}(\tau,t) + b(t)\sum\limits_{j=1}^{k+1} P_{ij}(\tau,t)\,j\,p_{k-j+1}(t), \\ P_{ik}(\tau,\tau+0) = \delta_{ik}, \end{cases}$$

gdzie

$$\delta_{ik} = \begin{cases} 1 & \text{gdy } i = k, \\ 0 & \text{gdy } i \neq k \end{cases} .$$

Układ ten nazywamy układem prostym.
Prawdopodobieństwa przejścia P_{ik} spełniają także układ równań różniczkowych zwany układem odwrotnym. Układ ten jest postaci:

/xxxx/ $$\begin{cases} \dfrac{\partial P_{ik}(\tau,t)}{\partial \tau} = ib(\tau)P_{ik}(\tau,t) - ib(\tau)\sum\limits_{j=i-1}^{\infty} p_{j-i+1}(\tau)P(\tau,t) \text{ dla } i > 0, \\ \dfrac{\partial P_{ok}}{\partial \tau} = 0 \qquad P_{ik}(t-0,t) = \delta_{ik}, \end{cases}$$

gdzie $t + 0$ i $t - 0$ rozumiane jest jako granica punktów t_n dążących do t, odpowiednio z prawej strony, lub z lewej strony punktu t.

Definicja 5.2.2. Zbiór funkcji $\left\{P_{ik}/\tau, t/\right\}$ nazywamy rozwiązaniem układu /xxx/ lub /xxxx/ jeżeli funkcje te spełniają układy /xxx/ lub /xxxx/ oraz są to funkcje nieujemne, bezwzględnie ciągłe względem τ i t osobno, spełniające równania /xx/ i nierówności:

$$\sum_{k} P_{ik} /\tau, t/ \leq 1 \qquad i = 0,1,2, \ldots,.$$

Można pokazać, że każde rozwiązanie układu /xxx/ lub /xxxx/ posiada następującą własność /xxxxx/ :

$$P_{ik} /\tau, t/ = \sum_{r_1+r_2+\ldots+r_i=k} P_{1r_1} /\tau, t/ \cdot P_{1r_2} /\tau, t/ \cdot \ldots$$

$$\ldots \cdot P_{1r_i} /\tau, t/.$$

Równość tą można interpretować tak:
Populacja składająca się z i elementów żyjących w momencie τ do t posiada rozkład taki jak suma niezależnych populacji, z której każda powstała z jednego elementu /osobnika/.
Niech teraz $\{P_{ik}/\tau, t/\}$ jest dowolnym rozwiązaniem układu prostego /xxx/.

Definicja 5.2.3. Niech $h/s,t/ = \sum_{k=0}^{\infty} p_k/t/ \, s^k$ dla $|s| \leq 1$

gdzie p_i są funkcjami takimi jak funkcje z definicji 5.2.1.
Niech

$$/i/. \quad F_i/s, \tau, t,/ = \sum_{k=0}^{\infty} P_{ik}/\tau, t/ \, s^k \qquad |s| \leq 1$$

gdzie P_{ik} - pewne rozwiązanie układu /xxx/
Jeżeli obie strony równań /xxxx/ pomnożymy przez s^k i przesumujemy po k, to formalnie otrzymamy równania

$$(ii) \quad \begin{cases} \dfrac{\partial F_i(s,\tau,t)}{\partial t} = b(t)\left[h(s,t)-s\right] \dfrac{\partial F_i(s,\tau,t)}{\partial} \\ F_i(s,\tau,\tau+0) = s^i \qquad i = 0,1,2 \ldots \end{cases}$$

Prawdziwe jest następujące twierdzenie.

Twierdzenie 5.2.1. Istnieje dokładnie jedno rozwiązanie $\{P_{ik}\}$ układu /xxx/. Funkcje tworzące F_i określone wzorem /i/ spełniają równania /ii/ gdy $|s| < 1$ prócz tego $F_i = /F_1/^i$ $i=0,1,2,\ldots$

W takim razie własność /xxxxx/ procesów gałązkowych jest spełniona.
Podobne twierdzenie dla układu odwrotnego jest też prawdziwe.

Twierdzenie 5.2.2. Układ /xxxx/ posiada tylko jedno rozwiązanie posiadające własność /xxxxx/ procesów gałązkowych i to rozwiązanie jest jednoznacznym rozwiązaniem układu prostego /xxx/. Funkcja tworząca F_1 określona wzorem /i/ dla i = 1 spełnia równanie następujące

/iii/
$$\begin{cases} \dfrac{\partial F_1}{\partial \tau} = -b(\tau)\left[h(F_1,\tau)-F_1\right] & \text{dla } |S| \leq 1 \\ F_1 \,/S,t-0,t/ = S\ ,\ t > 0 & \end{cases}$$

Zajmiemy się teraz przykładami procesów gałązkowych Markowa.

Przykład 1. Najbardziej znanym przykładem procesu gałązkowego Markowa jest proces urodzin i śmierci, który definiujemy następująco. Zakładamy, że dowolna cząsteczka /element, osobnik/ istnieje w momencie t; z prawdopodobieństwem $\mu/t/$ dt umiera w przedziale /t,t + dt/; z prawdopodobieństwem $\lambda/t/$ dt, w tym samym przedziale rozmnaża się i powstają dwa osobniki. Ostatnie wymienione zdarzenie polega na tym, że pozostaje stara cząsteczka i rodzi się nowa. Dla tego procesu otrzymujemy:

$$p_i/t/ = 0 \qquad i = 1 \quad \text{lub} \quad i > 2$$

$$p_0/t/ = \mu/t/ \big/ \left(\lambda/t/ + \mu/t/\right),$$
$$p_2/t/ = \lambda/t/ \big/ \left(\lambda/t/ + \mu/t/\right),$$
$$b\,/t/ = \lambda/t/ + \mu/t/.$$

Równanie /iii/ przyjmuje tutaj postać

$$\frac{\partial F_1/S,\tau,t/}{\partial \tau} = -\,/1-F_1/\left[\mu(\tau) - \lambda(\tau)\ F_1\right]$$

$$F_1\,/S,t-0,t/ = S\,.$$

Rozwiązanie tego równania podał Kendall i jest ono postaci:

$$F_1/S, \tau, t/ = \frac{\xi + /1-\xi-\eta/s}{1-\eta s}$$

gdzie:

$$\xi = 1 - \frac{e^{-\rho}}{W}, \qquad \eta = 1 - \frac{1}{W}$$

a
$$\rho/\tau, t/ = \int_\tau^t \left[\mu/x/ - \lambda/x/\right] dx$$

i
$$W/\tau, t/ = e^{-\rho}\left[1 + \int_\tau^t e^{\rho/t,x/} \mu/x/\, dx\right].$$

Skąd dla prawdopodobieństw otrzymujemy wyrażenia

$$P_{10}/\tau, t/ = \xi, \quad P_{1m} = /1-P_{10}/\ /1-\eta/\eta^{n-1} \quad \text{dla } n = 1,2, \ldots \quad /i\nu/$$

Jeżeli $Z/\tau/ = 1$ to pierwszy moment $m_1/\tau, t/ = e^{-\rho}$ a wariancja równa się $e^{-\rho}/2W-1-e^{-\rho}/$. Z równań $/i\nu/$ i określenia ξ wynika, że prawdopodobieństwo wymarcia równa się 1 to znaczy

$$\lim_{t\to\infty} P_{10}/\tau, t/ = 1 \quad \text{dla każdego} \quad \tau \geqslant 0,$$

wtedy i tylko wtedy jeżeli $\int_0^\infty \mu(t)e^{\rho(0,t)}dt = \infty$.

Teraz zajmiemy się procesami jednorodnymi po czasie to znaczy odpowiednio b i h nie zależy od t; **prawdopodobieństwa** p_{ij} i funkcje tworzące F_i, są funkcjami od argumentu $t - \tau$ i

$$\frac{\partial F_i}{\partial \tau} = -\frac{\partial F_i}{\partial t}.$$

Będziemy pisali $F_1/s,t/$, $h/s/$ i tak dalej zamiast $F_1/s,\tau, t+\tau/$ $h/s,t/$ i tak dalej.

Równania /iii/ są teraz postaci

$$\frac{\partial F_1/S,t/}{\partial t} = b\left[h\left(/F_1/S,t/\right) - F_1/S,t/\right],$$

$$F_1/S,0/ = S \; ; \quad t \geq 0; \qquad |S| \leq 1 .$$

Z tych równań dla $-1 < s < 1$ wynika

$$\int_S^{F_1(s,t)} \frac{dx}{h(x) - x} = bt ,$$

przy założeniu, że $h/x/ - x$ nie przyjmuje wartości zero dla x należących do przedziału $[S,\ F\ /S,\ t/]$.

Następne twierdzenie będzie określać nam warunek konieczny i dostateczny na to aby suma prawdopodobieństw była równa 1.

Twierdzenie 5.2.2. Dla procesów jednorodnych po czasie funkcja tworząca F_1 spełnia warunek $F_1/1,t/ \equiv 1$ wtedy i tylko wtedy jeżeli dla dowolnego $\mathcal{E} > 0$

$$\int_{1-\mathcal{E}}^{t} \frac{du}{h(u) - u} \quad \text{jest rozbieżna} .$$

Wniosek. Jeżeli $h'/1/ < \infty$, to $F_1\ /1,t/ \equiv 1$.

Zajmiemy się teraz prawdopodobieństwem wymarcia. Z układu odwrotnego /xxxx/ wynika, że $P_{oo}/t/ \equiv 1$.

Biorąc pod uwagę równania /xx/ otrzymamy

$$P_{ko}\ /t_1 + t_2/ \geq P_{ko}\ /t_1/\ P_{oo}\ /t_2/ = P_{ko}\ /t_1/ .$$

W takim razie $P_{ko}/t/$ są funkcjami niemalejącymi zmiennej t, przy $k = 0,1,2, \dots$.

Z równości $F_k\ /0,t/ = \left(F_1/0,t/\right)^k$ wynika natychmiast, że prawdziwa jest równość:

$$P_{ko}/t/ = \left(P_{10}/t/\right)^k$$

Definicja 5.2.4. Prawdopodobieństwo wymarcia q określamy wzorem:

$$q = \lim_{t \to \infty} \quad P_{10}/t/ .$$

Będziemy oczywiście rozpatrywać q jako prawdopodobieństwo tego, że potomkowie jednej cząstki /elementu/ w ostateczności zginą. Wartość q można oczywiście wyprowadzić z założeń o procesach gałązkowych Markowa.
Wartość średnia cząstek powstałych z jednej cząstki równa się $h'/1/$.
Biorąc pod uwagę ten fakt możemy oczekiwać, że populacja wymrze lub przeżyje w zależności od tego czy nierówność $h'/1/ \leqslant 1$ lub $h'/1/ > 1$ są odpowiednio spełnione.

Twierdzenie 5.2.3. Prawdopodobieństwo wymarcia q równa się najmniejszemu, nieujemnemu pierwiastkowi równania $s = h/s/$. Prócz tego $q = 1$ wtedy i tylko wtedy, gdy $h'/1/ \leqslant 1$.
Jeżeli posłużymy się pojęciem funkcji tworzącej to otrzymamy następujące twierdzenie.

Twierdzenie 5.2.4. Prawdopodobieństwo wymarcia q równa się najmniejszemu nieujemnemu pierwiastkowi równania

$$S = F_1 /s,t/$$

gdzie t dowolna liczba dodatnia.

6. Zastosowania

6.1. Model centrali telefonicznej

Rozdział ten rozpoczniemy zdefiniowaniem co to jest proces sygnałów. Niech $X/t/$ oznacza ilość sygnałów zachodzących w przedziale czasowym $\langle o,t \rangle$, gdzie $0 \leqslant t < \infty \{X/t/ : 0 \leqslant t < \infty\}$ jest procesem stochastycznym wartości całkowite ujemne $i = 0,1,2, \ldots$. Ponadto dla dowolnych t_1 i t_2 $/t_1 < t_2/$ przyrost $X/t_2/ - X/t_1/$ może być równy $0,1,2, \ldots$. O procesie $\{X/t/ : 0 \leqslant t < \infty\}$ będziemy zakładali, że spełnia następujące warunki.

Warunek I: Proces $\{X/t/, \ 0 \leqslant t < \infty\}$ jest procesem o przyrostach niezależnych. Warunke ten orzeka, więc, że ilość sygnałów w rozłącznych przedziałach czasowych $\langle t_o, t_1)$, $\langle t_1, t_2)$, ..., $\langle t_{n-1}, t_n)$ są niezależnymi zmiennymi losowymi.

Warunek II. Proces $\{X/t/, 0 \leq t < \infty\}$ jest procesem o przyrostach jednorodnych.
Innymi słowy prawdopodobieństwo pojawienia się określonej ilości sygnałów w przedziałach czasowych o jednakowej długości jest stałe.
Niech teraz dla $t > 0$

$$W_i/t/ = P\left\{ X/t/ - X/0/ = i\right\} \qquad /i = 0,1,2, \ldots/$$

W_i /t/ jest prawdopodobieństwem tego, że w przedziale długości t pojawi się i razy rozważany sygnał.

Warunek III. Dla procesu $\{X/t/ : 0 \leq t < \infty\}$ zachodzą relacje

$$\lim_{t \to 0} \frac{W_i/t/}{t} = \lambda \;/\lambda > 0/, \qquad \lim_{t \to 0} \frac{1-W_0/t/-W_1/t/}{t} = 0 .$$

Pierwsza z tych relacji orzeka, że prawdopodobieństwo jednego sygnału w małym przedziale czasowym długości t równa jest $\lambda/t/ + 0/t/$. Relacja druga orzeka, że prawdopodobieństwo zachodzenia przynajmniej dwóch sygnałów w przedziale czasowym długości t jest rzędu 0/t/, gdzie 0/t/ jest wielkością dążącą do zera wraz z t dążącym do zera. Innymi słowy, cały warunek III, orzeka, że sygnały zachodzą nagle, błyskawicznie, w małych odcinkach czasu /asymptotycznie równych zero/, ale tylko pojedynczo, natomiast nie zachodzą naraz parami, trójkami.
O procesie który spełnia te trzy warunki oraz warunek, że $P\,/X/0/ = 0/ = 1$ można udowodnić, że jest jednorodnym procesem Poissona. Dla przypomnienia podam jeszcze raz definicję procesu Poissona.

Definicja 6.1.1. Skokowy proces stochastyczny $\{X/t/, 0 \leq t < \infty\}$ o przyrostach niezależnych i jednorodnych, o stanach $i = 0,1,2, \ldots$ jest jednorodnym procesem Poissona, jeśli dla dowolnego punktu t dla $0 \leq t < \infty$ zachodzi relacja:

$$P\left(X/t/ = i/ = \frac{/\lambda t/^i}{i!} e^{-\lambda t} \qquad /i = 0,1, \ldots/\right.$$

gdzie $\lambda > 0$.

Przykład 1. Rozważmy pracę centrali telefonicznej. Sygnałem jest tu sygnał abonenta pragnącego uzyskać połączenie telefoniczne. Warunek I jest spełniony, gdyż ilość rozmów telefonicznych w rozłącznych przedziałach czasowych **jest z dobrym** przybliżeniem **niezależna.**
Warunek II jest spełniony, gdy rozpatrujemy tę samą porę dnia, a więc gdy natężenie zgłaszanych rozmów jest jednakowe. Warunek III w przybliżeniu też jest spełniony, ponieważ zgłoszenia abonentów nie mogą nastąpić jednocześnie gdyż centrala jest zajęta, oraz sygnały następują natychmiastowo.
Jeżeli teraz:

$$p_{ij}(t) = P(X(t_2) = j \mid X(t_1) = i) = P(X(t_2) - X(t_1) = j - i) \frac{(\lambda t)^{j-i}}{(j-i)!} e^{-\lambda t},$$

gdzie $t = t_2 - t_1$, $j \geqslant i$; oczywiste jest, że:

$$p_{ij}/t/ = 0 \quad \text{dla} \quad j < i .$$

Ze wzorów powyższych wynikają następujące relacje dla $i = 0,1,2,\ldots$

$$q_i = \lim_{t \to 0} \frac{1 - p_{ii}/t/}{t} = \lim_{t \to 0} \frac{1 - e^{-\lambda t}}{t} = \lambda ,$$

oraz

$$q_{ij} = \lim_{t \to 0} \frac{p_{ij}/t/}{t} = \lim_{t \to 0} \frac{/\lambda t/^{j-1} e^{-\lambda t}}{/j-i/!\, t} = \begin{cases} \lambda & \text{dla } j = i+1 \\ 0 & \text{dla } j > i+1 \text{ oraz dla } j < i \end{cases}$$

$$\sum_{\substack{j \\ j \neq i}}^{i} q_{ij} = q_i .$$

Wyrażenia q_i i q_{ij} noszą nazwę intensywności procesu stochastycznego. Jak widać, intensywności w jednorodnym procesie Poissona są stałe /niezależne od t/.

Oczywiście proces Poissona można traktować jako pierwsze przybliżenie badania pracy centrali telefonicznej i dlatego zajmiemy się bardziej ogólnymi modelami. Uogólnienia mogą iść w dwóch kierunkach.

Pierwsze uogólnienie polega na tym, że intensywność λ określona wzorem $\lambda = \lim\limits_{t \to 0} \frac{W_i/t/}{t}$ może być zależna od stanu w jakim się proces znajduje.

Drugie uogólnienie polega na rozpatrywaniu procesów uwzględniających nie tylko pojawienie się pewnych zdarzeń, ale także ich zanikanie.

Zajmiemy się teraz drugim uogólnieniem, będziemy rozpatrywali procesy, w których badane zjawiska mogą nie tylko powstawać, ale także zanikać.

W przykładzie dotyczącym pracy centrali telefonicznej model uwzględniający nie tylko ilość napływających rozmów, jak to było w procesie sygnałów, ale także ilość rozmów kończących się w pewnym okresie czasu. Model taki będzie lepszą idealizacją matematyczną warunków w jakich rzeczywiście pracuje centrala telefoniczna.

Rozważmy znów proces sygnałów $\{X/t/,\ 0 \leqslant t < \infty\}$, czyniący zadość warunkom I - III o intensywności równej λ. Weźmy pod uwagę długość życia sygnału, która jest wielkością losową, i załóżmy, że ma ona rozkład wykładniczy. Oznaczając tę zmienną przez T mamy na jej funkcję gęstości g/t/ wzór:

$$g/t/ = \begin{cases} 0 & \text{dla } t \leqslant 0, \\ \mu e^{-\mu t} & \text{dla } t > 0, \end{cases}$$

gdzie $\mu > 0$.

Założenie, że długość "życia" sygnału ma rozkład wykładniczy, jest dobrym przybliżeniem w wielu zastosowaniach i ma duże znaczenie teoretyczne. Istotnie przy tym założeniu mamy równość:

$$\lim_{\Delta t \to 0} \frac{P(T < t + \Delta t \mid T \geqslant t)}{\Delta t} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{P(t \leqslant T < t + \Delta t)}{\Delta t\, P(T \geqslant t)} =$$

$$= \frac{g(t)}{P(T \geqslant t)} = \mu .$$

Z tej równości wynika, że prawdopodobieństwo tego, że sygnał wygaśnie w przedziale czasowym $\langle t, t+\Delta t\rangle$, jeżeli przetrwał już t jednostek czasu jest dla małych Δt równe $\mu \Delta t + O/\Delta t/$ i prawdopodobieństwo to nie zależy od t, to znaczy nie zależy od tego jak długo w przeszłości przetrwał sygnał. Przy tych założeniach proces powstawania i wygaszania sygnałów tak zwany proces urodzin i śmierci jest procesem Markowa.

Oprócz tych założeń przyjmujemy, że długości życia poszczególnych sygnałów są niezależne i są także niezależne od ilości napływających sygnałów, oraz że ilość sygnałów wygasających w pewnym przedziale czasu zależna jest od długości przedziału, ale nie zależy od jego krańców. Jeżeli więc w chwili t czynnych jest i sygnałów, to prawdopodobieństwo wygaśnięcia jednego sygnału w przedziale $/t, t+\Delta t/$ równe jest

$$\mu i \Delta t + O/\Delta t/$$

a prawdopodobieństwo wygaśnięcia więcej niż jednego sygnału jest rzędu $O/\Delta t/$.

Prawdopodobieństwo pojawienia się sygnału i zarazem wygaśnięcia jednego z czynnych sygnałów w czasie długości Δt jest także rzędu $O/\Delta t/$.

Oznaczmy przez $Y/t/$ ilość sygnałów czynnych w chwili t i rozważmy proces $\{Y/t/ : 0 \leqslant t < \infty\}$. Będziemy mówili, że proces $Y/t/$ jest w stanie j, jeżeli w chwili t trwa j sygnałów. Znajdźmy prawdopodobieństwo całkowite $C_j/t/$ tego, że proces będzie w chwili t w stanie j.

$$C_j/t/ = P/Y/t/ = j/ \quad \text{dla } j = 0,1,2, \ldots$$

Dla tych wielkości mamy następujący układ równań:

$$C_0/t+\Delta t/ = C_0/t/ \left[1-\lambda\Delta t+O/\Delta t/\right] + C_1/t/ \;/\mu\Delta t+O/\Delta t/ \; +O/\Delta t/$$

$$C_j/t/+\Delta t/ = C_j/t/ \left[1-\lambda\Delta t+O/\Delta t/\right]\left[1-\mu j\Delta t+O/\Delta t/\right] +$$

$$+C_{j-1}/t/\left[\lambda\Delta t+O/\Delta t/\right] + C_{j+1}/t/\left[\mu/j+1/\Delta t+O/\Delta t/\right] + O/\Delta t/$$

$$/j = 1,2, \ldots/$$

Istotnie, proces może być w chwili $t+\Delta t$ w stanie 0, jeżeli bądź był w tym stanie w chwili t i w przedziale $\langle t, t+\Delta t/$ nie pojawił się nowy sygnał, bądź proces był w chwili t w stanie 1, a w przedziale t,t+ t wygasł. W ten sposób uzasadniliśmy równość pierwszą tego układu.

Dalsze równości można czytać tak: proces może być w chwili $t + \Delta t$ w stanie j /$j \geqslant 1$/, jeżeli bądź był w chwili t w stanie j, a w przedziale $\langle t, t + \Delta t/$, żaden nowy sygnał nie pojawił się i żaden z czynnych sygnałów nie wygasł, bądź proces był w chwili t w stanie j-1, a w przedziale $\langle t, t + \Delta t/$ pojawił się nowy sygnał, bądź proces był w chwili t w stanie j+1, a w przedziale $\langle t, t + \Delta t)$ wygasł jeden z czynnych sygnałów, a prawdopodobieństwo wszystkich innych możliwych sytuacji jest rzędu $O / \Delta t/$.

Dzieląc każde równanie tego układu przez Δt i przechodząc do granicy przy Δt dążącym do zera otrzymujemy z tych równań układ równań różniczkowych postaci:

$$C_0'/t/ = -\lambda C_0/t/ + \mu C_1/t/$$

$$C_j'/t/ = \lambda C_{j-1}/t/ - /\lambda + j\mu/ C_j/t/ + \mu /j+1/ C_{j+1}/t/$$

dla j = 1,2, ...

Aby rozwiązać ten układ równań, skorzystać należy z aparatu funkcji tworzącej.

Oznaczmy:

$$f/t,S/ = \sum_{j=0}^{\infty} C_j/t/ S^j .$$

Różniczkując po t funkcję f/t,s/ otrzymamy:

$$\frac{\partial f/t,s/}{\partial t} = \sum_{j=0}^{\infty} \frac{dc_j/t/}{dt} S^j = -\lambda\ {}_0/t/\ /1-S/ + \mu C_1/t/\ /1-S/ -$$

$$- \lambda C_1/t/\ /1-S/\ S + 2\mu\ C_2/t/\ S\ /1-S/ + \ldots =$$

$$= -\lambda\ /1-S/ \sum_{j=0}^{\infty} C_j/t/ S^j + \mu\ /1-S/ \sum_{j=1}^{\infty} j\, C_j/t/ S^{j-1} =$$

$$= -\lambda\ /1-S/\ f/t,s/ + \mu\ /1-S/ \frac{\partial f/t,s/}{\partial s} .$$

Tak więc funkcja tworząca f/ t,s/ czyni zadość liniowemu równaniu różniczkowemu o pochodnych cząstkowych rzędu pierwszego.

$$\frac{\partial f}{\partial t} - \mu /1-S/ \frac{\partial f}{\partial s} = - \lambda /1-S/f \cdot$$

Przyjmując, że w chwili t = 0 jest $C_i/0/ = 1$.
Funkcja f/t,s/ spełnia warunek początkowy postaci

$$f/0,s/ = S^i.$$

Rozwiązując równanie powyższe i biorąc pod uwagę warunek początkowy otrzymamy ostatecznie, że:

$$f/t,s/ = \left[1-/1-S/\, e^{-\mu t}\right]^i \exp\left[- \frac{\lambda}{\mu} /1-S//1-e^{\mu t}/\right] \cdot$$

Pierwszy czynnik w tym wzorze jest funkcją tworzącą zmiennej losowej o rozkładzie Poissona o wartości średniej /a więc i wariancji/ równej $\frac{\lambda}{\mu}$ $/1-e^{-\mu t}/$, a drugi czynnik - funkcją **tworzącą prawdopodobieństwa zmiennej o rozkładzie dwumianowym,** w którym prawdopodobieństwo sukcesu jest równe $e^{\mu - t}$, a więc sukces polega na tym, że sygnał trwa nie krócej niż t. Tak więc Y/t/ jest dla każdego t sumą dwóch niezależnych zmiennych losowych, z których jedna ma rozkład Poissona, a druga rozkład dwumianowy. Stąd otrzymujemy:

$$C_j(t) = \exp\left[-\frac{\lambda}{\mu}(1-e^{\mu t})\right] \sum_{k=0}^{\min(i,j)} \binom{i}{k} \left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^{j-k} \frac{e^{-\mu t k}(1-e^{-\mu t})^{i+j-2k}}{(j-k)!}$$

dla j = 0,1,2, ...

Stąd $E(Y(t)) = \frac{\lambda}{\mu}(1-e^{-\mu t}) + ie^{-\mu t}$

$$D^2(Y(t)) = (1-e^{-\mu t})\left(\frac{\lambda}{\mu} + ie^{-\mu t}\right).$$

W przypadku szczególnym, gdy i = 0, Y /t/ ma rozkład Poissona, przy czym:

$$c_j(t) = \exp\left[-\frac{\lambda}{\mu}(1-e^{-\mu t})\right] \frac{\left[\frac{\lambda}{\mu}(1-e^{-\mu t})\right]^j}{j!} \qquad (j = 0,1,2,\dots)$$

Zauważmy, że $C_j/t/ = \sum_i C_i/0/\; P_{ij}/t/ \cdot$

Z przyjętego warunku początkowego $C_i/0/ = 1$ wynikają równości

$$c_j/t/ = p_{ij}/t/ \qquad /j=0,1,2,\dots/$$

Oraz ze wzoru na $C_j/t/$ wynika zależność:

$$\lim_{t\to 0} C_j/t/ = \begin{cases} 1 & \text{dla } j = i, \\ 0 & \text{dla } j \neq i. \end{cases}$$

Uwzględniając dodatkowo układ równań różniczkowych, które spełniają $C_j/t/$ otrzymujemy intensywność

$$q_i = \lim_{t\to 0} \frac{1-p_{ii}(t)}{t} = \lim_{t\to 0} \frac{1-C_i(t)}{t} = -C_i'(0) = \lambda + i\mu ,$$

$$q = \lim_{t\to 0} \frac{p_{ij}(t)}{t} = C_j'(0) = \begin{cases} i\mu & \text{dla } j = i-1, \\ \lambda & \text{dla } j = i+1, \\ 0 & \text{dla } j \neq i-1, i, i+1 . \end{cases}$$

Łatwo sprawdzić, że dla każdego t zachodzi równość

$$\sum_{j=0}^{\infty} C_j/t/ = 1 .$$

Ze wzorów na $C_j/t/$ widać, że przy $t \to \infty$ rozkład Y/t/ jest zbieżny do rozkładu Poissona /niezależnie od stanu początkowego/ o wartości przeciętnej $\frac{\lambda}{\mu}$. Tak więc:

$$C_j = \lim_{t\to\infty} C_j(t) = \frac{(\lambda/\mu)^j}{j!} \exp\left(-\frac{\lambda}{\mu}\right)$$

dla $j = 0,1,2, \dots$

<u>Przykład 2</u>. Rozważmy pracę centrali telefonicznej o tak dużej ilości linii, że sygnał pojawiający się w dowolnej chwili znajduje linię wolną. Możemy wówczas przyjąć, że centrala ma nieskończenie wiele linii.

Oznaczając przez Y /t/ ilość linii zajętych w chwili t, widzimy, że Y/t/ jest procesem o przeliczalnej ilości stanów.

Znaleziony wyżej wzór na $C_j/t/$ pozwala na obliczenie dla każdego t prawdopodobieństwa całkowitego $C_j/t/ = P/ Y /t/ = j/$, a wzór na C_j daje granicę tego prawdopodobieństwa przy t dążącym do ∞ .

Przykład 3. Rozważmy teraz pracę centrali telefonicznej o skończonej ilości linii. Przyjmujemy, że rozważana centrala jest tak skonstruowana, że sygnał pojawiający się w chwili, gdy wszystkie linie są zajęte, nie czeka na zwolnienie się linii, a więc przepada.

Jest to tzw. centrala z przepadającymi sygnałami, czyli centrala automatyczna. Najważniejszym zagadnieniem, wymagającym rozwiązania przed zaplanowaniem konstrukcji takiej centrali, jest wyznaczenie prawdopodobieństwa tego, że w chwili t wszystkie linie będą zajęte.

Tym zagadnieniem zajmiemy się obecnie, ograniczymy się jednak, do znalezienia granic szukanych prawdopodobieństw przy $t \to \infty$.

Niech Y /t/ oznacza jak dotychczas ilość sygnałów czynnych w chwili t. Zachowujemy wszystkie dotychczasowe założenia o tym procesie z jedną różnicą, że ilość stanów procesu jest skończona, mianowicie j = 0,1, ..., m, a więc $C_j/t/ = 0$ dla $j > m$ czyli równania rozpatrywane poprzednio są postaci:

$$C_0(t+\Delta t) = C_0(t)\left[1-\lambda\Delta t + O(\Delta t)\right] + C_1(t)\left[\mu\Delta t + O(\Delta t)\right] + O(\Delta t)$$

$$C_j(t+\Delta t) = C_j(t)\left[1-\lambda\Delta t + O(\Delta t)\right]\left[1-\mu j\Delta t + O(\Delta t)\right] +$$

$$+ C_{j-1}(t)\left[\lambda\Delta t + O(\Delta t)\right] + C_{j+1}(t)\left[\mu(j+1)\Delta t + O(\Delta t)\right] + O(\Delta t), \quad j=1,2,\dots,m-1$$

$$C_m(t+\Delta t) = C_m(t)\left[1-\mu m\Delta t + O(\Delta t)\right] + C_{m-1}(t)\left[\lambda\Delta t + O(\Delta t)\right] + O(\Delta t).$$

Tak jak poprzednio dzielimy przez t i liczymy granicę przy $\Delta t \to 0$.

W ten sposób otrzymujemy układ równań różniczkowych.

$$C'_0(t) = -\lambda C_0(t) + \mu C_1(t)$$

$$C'_j(t) = \lambda C_{j-1}(t) - (\lambda + j\mu)C_j(t) + \mu(j+1)C_{j+1}(t) \qquad j=1,2,\dots,m-1$$

$$C'_m(t) = \lambda C_{m-1}(t) - \mu m C_m(t).$$

Zadaniem naszym jest znalezienie granic c_j funkcji $c_j/t/$ przy $t \to \infty$ niezależnych od rozkładu początkowego $c_j/0/$ /j = 0,1,2, ..., m/.

Na podstawie twierdzenia ergodycznego możemy stwierdzić, że prawe strony równań mają granicę przy $t \to \infty$ istnieją więc także granice funkcji $C_j'/t/$, jednakże mogą być one zbieżne jedynie do zera, gdyż w przeciwnym razie zachodziłaby relacja $C_j/t/ \to \infty$. Dla wyznaczenia stałych c_j otrzymujemy więc układ równań:

$$-\lambda C_0 + \mu C_1 = 0, \quad \lambda C_{j-1} - (\lambda + j\mu) C_j + \mu (j+1) C_{j+1} = 0 \qquad (j = 1, 2, \ldots, m-1)$$

$$\lambda C_{m-1} - \mu m C_m = 0.$$

Z równań tych otrzymujemy

$$C_j = \frac{1}{j!}\left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^j C_0 \qquad (j = 1, 2, \ldots, m).$$

Uwzględniając, że $C_0 + \ldots + C_m = 1$, otrzymujemy

$$C_0 = \frac{1}{\sum_{k=0}^{m} \frac{1}{k!}\left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^k} \quad .$$

Ostatecznie otrzymujemy

$$C_j = \frac{\frac{1}{j!}\left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^j}{\sum_{k=0}^{m} \frac{1}{k!}\left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^k} \qquad (j = 0, 1, \ldots, m)$$

Wzór ten nosi nazwę wzoru Erlanga

Przykład 4. Następująca tablica zawiera wartości c_j obliczone ze wzoru Erlanga dla $m = 5$ i $m = 10$ przy $\lambda = \mu$ i $\lambda = 2\mu$.

j	m = 5		m = 10	
	$\lambda = \mu$	$\lambda = 2\mu$	$\lambda = \mu$	$\lambda = 2\mu$
0	0,36810	0,13761	0,36788	0,13534
1	0,36810	0,27523	0,36788	0,27067
2	0,18405	0,27523	0,18394	0,27067
3	0,06135	0,18349	0,06131	0,18045
4	0,01534	0,09174	0,01533	0,09022
5	0,00307	0,03670	0,00307	0,03609
6			0,00051	0,01203
7			0,00007	0,00344
8			0,00001	0,00086
9			0,00000	0,00019
10			0,00000	0,00004

Z tablicy tej widać, że przy $\lambda = 2\mu$ i przy pięciu przewodach prawdopodobieństwo, że wszystkie przewody będą zajęte, jest dość duże, mianowicie wynosi około 0,04, a więc w przybliżeniu co dwudzieste piąte zgłoszenie będzie stracone, natomiast 10 przewodów przy tym samym stosunku $\lambda = 2\mu$ całkowicie wystarczy. Dla $\lambda = \mu$ prawdopodobieństwo, że wszystkie przewody będą zajęte, jest już przy m = 5 bardzo małe.

Rozważmy teraz inny typ centrali telefonicznej o skończonej ilości linii tzw. centralę z czekającymi sygnałami, czyli centralę nie automatyczną. Centrala taka działa w ten sposób, że sygnał pojawiający się w momencie gdy wszystkie linie są zajęte, czeka na zwolnienie się linii. W pracy centrali tego typu istotne są dwa zagadnienia:

1/ Znalezienie funkcji prawdopodobieństwa ilości sygnałów czynnych i czekających na zwolnienie się linii.
2/ Znalezienie dystrybuanty długości czasu oczekiwania na zwolnienie się linii. Zajmijmy się na początku pierwszym zagadnieniem, z tym, że ograniczymy się do znalezienia granicy szukanych prawdopodobieństw przy $t \to \infty$.

Problematyka tego rodzaju występuje nie tylko w telefonii,ale także w wielu zagadnieniach techniki i życia codziennego. I tak np. "centralą" może być zespół kas biletowych na stacji kolejowej, a "sygnałem" pojawienie się pasażera przy okienku

kasy. Proces jest tu w stanie j, jeżeli j pasażerów kupuje bilet lub czeka w kolejce po bilet.
Jasne jest, że dyrekcja kolei powinna mieć informacje zarówno o intensywności napływu pasażerów, jako też o intensywności sprzedawania biletów przez kasjerów, aby w sposób rozsądny ustalić ilość potrzebnych kas biletowych.
Tego rodzaju procesy nazywamy procesami obsługi masowej.

Niech teraz Y/t/ oznacza ilość sygnałów, które w chwili t bądź trwają, bądź czekają na zwolnienie się linii. Przyjmujemy znów, że strumień pojawiających się sygnałów czyni zadość warunkom I - III i ma intensywność λ, a długość trwania sygnałów ma rozkład wykładniczy z parametrem μ.
Przyjmujemy pozostałe założenia, które doprowadziły do układu równań rozpatrywanych już dwukrotnie. Niech znów $C_j/t/ = P/Y/t/ = j/$ i niech ilość linii będzie równa m. Wówczas równania dla j = 0,1,... m - 1 pozostają bez zmian, gdyż dla takich j przynajmniej jedna linia jest wolna, a więc pojawiający się sygnał nie czeka. Natomiast dla $j \geqslant m$ mamy:

$$C_j(t+\Delta t) = C_j(t)[1-\mu m\Delta t + O(\Delta t)][1-\lambda\Delta t + O(\Delta t)] +$$

$$+ C_{j-1}(t)[\lambda\Delta t + O(\Delta t)] + C_{j+1}(t)[\mu m\Delta t + O(\Delta t)] + O(\Delta t).$$

Równanie to różni się od równań poprzednich tym, że po prawej stronie zamiast μj lub $\mu/j + 1/$ mamy μm, co wynika stąd, że ilość czynnych sygnałów nie może być większa od m. Ostatecznie otrzymujemy układ równań różniczkowych.

$$C_0'(t) = -\lambda C_0(t) + \mu C_1(t)$$

x/ $$C_j'(t) = \lambda C_{j-1}(t) - (\lambda + j\mu) C_j(t) + \mu (j+1) C_{j+1}(t) \qquad j = 1,2,\ldots, m-1$$

$$C_j'(t) = \lambda C_{j-1}(t) - (\lambda + m\mu) C_j(t) + m\mu C_{j+1}(t) \qquad (j \geqslant m)$$

Przechodząc do granicy przy $t \to \infty$ otrzymujemy układ równań:

$$-\lambda C_0 + \mu C_1 = 0$$

$$\lambda C_{j-1} - (\lambda + j\mu) C_j + \mu (j+1) C_{j+1} = 0 \qquad j = 1,2, \ldots m-1$$

$$\lambda C_{j-1} - (\lambda m\mu) C_j + \mu m C_{j+1} = 0, \qquad j = m, m+1, \ldots$$

gdzie $C_j = \lim_{t\to\infty} C_j/t/$. Pochodne $c'_j/t/$ przy $t \to \infty$ dążą do zera, bo w przeciwnym razie prawe strony równań /x/ dążyłyby do do nieskończoności.
Rozwiązując ten układ równań otrzymujemy:

$$C_j = \begin{cases} \frac{1}{j!}\left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^j C_0 & j = 1,2 \ldots, m \\ \frac{1}{m!\, m^{j-m}}\left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^j C_0 & j \geqslant m+1 \end{cases}$$

Mamy

$$\text{xx/} \quad \frac{1}{C_0}\sum_{j=0}^{\infty} C_j = \sum_{j=0}^{m}\frac{1}{j!}\left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^j + \frac{m^m}{m!}\sum_{j=m+1}^{\infty}\left(\frac{\lambda}{m\mu}\right)^j.$$

Jeżeli więc $m < \frac{\lambda}{\mu}$ to prawa strona ostatniej równości jest rozbieżna do ∞, a więc rozkład graniczny nie istnieje.
Istotnie, relacja:

$$\frac{1}{C_0}\sum_{j=0}^{\infty} C_j = \infty$$

może zachodzić, bądź gdy $C_0 \neq 0$, ale $\sum_{j=0}^{\infty} C_j = \infty$, a więc c_j nie są prawdopodobieństwami, bądź gdy $C = 0$, wtedy ze wzorów na C_j /j = 1,2, .../, wynika, że $C_j = 0$ /j=0,1,2,.../.
W ostatnim przypadku prawdopodobieństwo, że ilość sygnałów czekających w kolejce na zwolnienie linii będzie nieskończenie wielka - jest równa jedności.

Gdy $\frac{\lambda}{\mu} < m$, to kładąc $\sum_{j=0}^{\infty} C_j = 1$ otrzymamy ze wzoru /xx/:

$$C_0 = \frac{1}{\sum_{k=0}^{m}\frac{1}{k!}\left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^k + \frac{1}{m!}\cdot\frac{1}{m-\frac{\lambda}{\mu}}\left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^{m+1}}.$$

Ostatecznie otrzymujemy

$$\text{xxx/}\quad C_j = \begin{cases} \dfrac{\frac{1}{j!}\left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^j}{\sum\limits_{k=0}^{m}\frac{1}{k!}\left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^k + \frac{1}{m!}\,\frac{1}{m-\frac{\lambda}{\mu}}\left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^{m+1}} & j = 0, 1, \ldots, m \\[2ex] \dfrac{\frac{1}{m!}\,\frac{1}{m^{j-m}}\left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^j}{\sum\limits_{k=0}^{m}\frac{1}{k!}\left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^k + \frac{1}{m!}\,\frac{1}{m-\frac{\lambda}{\mu}}\left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^{m+1}} & j \geqslant m+1 \end{cases}$$

Mimo, że w praktycznych zagadnieniach mamy, zawsze do czynienia ze skończoną ilością sygnałów, to jednak konsekwencje praktyczne tego, że $m \leqslant \frac{\lambda}{\mu}$, mogą poważnie zakłócić przebieg pracy "centrali" powodując tworzenie się bardzo dużych kolejek. Ilość "linii" nie może być zbyt mała.

Oznaczmy teraz przez Z długość czasu oczekiwania sygnału na zwolnienie się linii, gdy wszystkie linie są zajęte w chwili t pojawienia się tego sygnału, to znaczy gdy $Y/t/ \geqslant m$. Zadaniem naszym jest znalezienie prawdopodobieństwa $P/Z > z/$ dla $z \geqslant 0$. Zagadnienie nasze ograniczymy do dużych wartości t, ponieważ będziemy mogli korzystać z granicznych wzorów. Ponieważ Y/t/ może być w chwili pojawienia się rozważanego sygnału równe jakiejkolwiek liczbie nie mniejszej od m, to z twierdzenia o prawdopodobieństwie całkowitym otrzymamy:

$$P(Z>z) = \sum_{j=m}^{\infty} C_j P(Z>z \mid Y(t)=j).$$

Otóż gdy $Y/t/ = j$ a $j \geqslant m$, to ilość sygnałów czekających równa jest j-m. Jeżeli przy tym zachodzi nierówność $Z > z$, to w czasie z od chwili pojawienia się rozważanego sygnału wygasa co najwyżej j - m sygnałów.

Z założenia, że długość trwania sygnałów ma rozkład wykładniczy o parametrze μ, i z pozostałych założeń o wygasających sygnałach, sformułowanych wyżej oraz z faktu, że ilość zajętych linii jest wciąż równa m, gdyż każdą zwalniającą się linię zajmuje natychmiast kolejny ozekający sygnał, wynika, że strumień sygnałów wygasających stanowi proces Poissona o intensywności, $m\mu$. Tak więc w myśl wzoru na prawdopodobieństwo w procesie Poissona, otrzymujemy, że prawdopodobieństwo tego, że w czasie z wygaśnie l sygnałów, równe jest:

$$\frac{(\mu m z)^l}{l!} e^{-\mu m z},$$

a zatem prawdopodobieństwo, że w czasie z wygaśnie co najwyżej j-m sygnałów, czyli wyrażenie

$$P\left(Z > z \mid Y/t/ = j\right)$$

otrzymamy z równości

$$P(Z>z \mid Y(t)=j) = e^{-\mu m z} \sum_{l=0}^{j-m} \frac{(\mu m z)^l}{l!},$$

Przekształcimy teraz wzór /xxx/ dla $j \geqslant m+1$

$$C_j = \frac{\frac{1}{m!} \cdot \frac{1}{m^{j-m}} \left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^j}{\sum_{k=0}^{m} \frac{1}{k!}\left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^k + \frac{1}{m!} \frac{1}{m-\frac{\lambda}{\mu}} \left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^{m+1}} = \frac{\frac{1}{m!}\left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^m \frac{1}{m^{j-m}} \left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^{j-m}}{\sum_{k=0}^{m} \frac{1}{k!}\left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^k + \frac{1}{m!} \frac{1}{m-\frac{\lambda}{\mu}} \left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^{m+1}} =$$

$$= C_m \frac{1}{m^{j-m}} \left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^{j-m}.$$

A więc:

$$P(Z>z) = \sum_{j=m}^{\infty} C_j P(Z>z \mid Y(t)=j) = \sum_{j=m}^{\infty} C_j \sum_{l=0}^{j-m} e^{-\mu m z} \frac{(\mu m z)^l}{l!} =$$

$$= e^{-\mu m z} \sum_{j=m}^{\infty} C_m \frac{1}{m^{j-m}} \left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^{j-m} \sum_{l=0}^{j-m} \frac{(\mu m z)^l}{l!} =$$

$$= C_m e^{-\mu m z} \sum_{l=0}^{\infty} \frac{(\mu m z)^l}{l!} \sum_{j=m+l}^{\infty} \left(\frac{\lambda}{\mu m}\right)^{j-m} =$$

$$= C_m e^{-\mu m z} \sum_{l=0}^{\infty} \frac{(\lambda z)^l}{l!} \sum_{j=m+l}^{\infty} \left(\frac{\lambda}{\mu m}\right)^{j-m-l} =$$

$$= \frac{C_m e^{-\mu m z}}{1-\frac{\lambda}{\mu m}} \sum_{l=0}^{\infty} \frac{(\lambda z)^l}{l!} = \frac{C_m}{1-\frac{\lambda}{\mu m}} e^{-(m\mu - \lambda)z}.$$

Podstawiając teraz wzór na wartość C_m otrzymamy ostatecznie:

$$P(Z > z) = \frac{\frac{C_0}{m!}\left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^m e^{-(m\mu - \lambda)z}}{1 - \frac{\lambda}{\mu m}}.$$

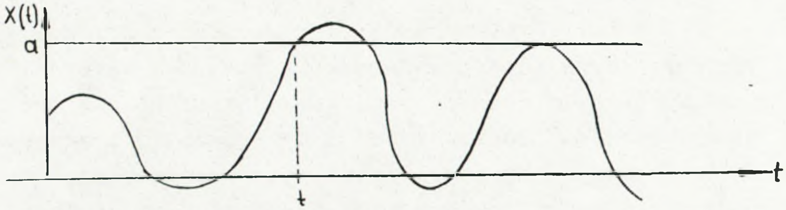
6.2. Strzelanie z kołyszącego się statku

Będziemy zajmowali się określaniem pewnych probabilistycznych charakterystyk procesu, na podstawie danych własności procesów stochastycznych. Najprostszym problemem tego typu jest obliczanie wariancji procesu stochastyczngo w określonej chwili czasu. Takim problemem jest obliczanie dodatkowego rozproszenia prędkości początkowych pocisku przy strzelaniu z kołyszącego się statku. Bardziej złożonym zagadnieniem jest określenie prawdopodobieństwa tego, że wartość procesu stochastycznego w ustalonej chwili czasu nie wyjdzie poza granice pewnego przedziału. Do rozwiązania tego zagadnienia sprowadza się na przykład określenie prawdopodobieństwa trafienia sterowanym pociskiem w cel. Podczas gdy dla rozwiązywania zagadnienia o dodatkowym rozproszeniu prędkości pocisku wystarczy dysponować rezultatami korelacyjnej teorii procesów losowych,to do rozwiązania zagadnienia określenia prawdopodobieństwa trafienia w cel należy znać rozkład X/t/. Wreszcie jeszcze bardziej skomplikowanym zagadnieniem jest określenie prawdopodobieństwa tego, że wartość procesu stochastycznego,gdy czas zmienia się w pewnym przedziale,nie wyjdzie poza określone granice. Jest to tzw. zagadnienie o przewyższaniu danego poziomu i dalej zajmiemy się tym szczegółowo. Do zagadnień podobnych należy także zagadnienie badania różnych typów urządzeń celowniczych przy strzelaniu z kołyszącego się statku.

Wszystkie przytoczone wyżej zagadnienia charakteryzują się tym, że dla ich rozwiązania należy dysponować probabilistycznymi charakterystykami procesów stochastycznych, przy czym w celu rozwiąsania prostszych z nich wystarczy znać tylko momenty drugiego rzędu procesu stochastycznego, natomiast, dla rozwiązania zagadnienia o przewyższeniu danego poziomu przez proces stochastyczny potrzebna jest bardziej szczegółowa informacja o jej własnościach.

Jak zauważyliśmy wyżej, do zagadnień o przewyższaniu zaliczamy: określenie prawdopodobieństwa przewyższania danego poziomu przez proces stochastyczny, znalezienie średniego czasu przebywania procesu ponad danym poziomem i określenie rozkładu prawdopodobieństwa czasu przebywania procesu stochastycznego ponad danym poziomem. Jako przykład można tutaj wskazać zagadnienie określenia średniego czasu, w ciągu którego urządzenia artyleryjskie na okręcie nie są w stanie zabezpieczyć śledzenia celu wskutek tego, że prędkość nastawiania odpowiednich urządzeń śledzących jest mniejsza od prędkości związanej z przypadkowym kołysaniem się statku. Innym przykładem jest zagadnienie określenia współczynnika bezpieczeństwa części maszyn czy konstrukcji, które w czasie eksploatacji narażone są na przypadkowe obciążenie; należy tutaj określić prawdopodobieństwo tego, że w ciągu określonego czasu obciążenie ani razu nie przekroczy dopuszczalnej granicy.
Wzory ogólne na prawdopodobieństwo przewyższenia w jednostce czasu i na średni czas przebywania procesu stochastycznego ponad danym poziomem, które wyprowadzimy niżej, są prawdziwe dla dowolnych procesów stochastycznych, jednak wyniki liczbowe mogą być otrzymane stosunkowo prosto tylko dla procesów normalnych. Określenie rozkładu prawdopodobieństwa czasu przebywania procesu stochastycznego ponad danym poziomem jest zagadnieniem o wiele trudniejszym i jego rozwiązanie nawet dla normalnych procesów wymaga skomplikowanych rozważań.

Niech X/t/ będzie procesem stochastycznym typu ciągłego, zaś a - jego wartością, którego przekroczenie nas interesuje. O własnościach X/t/ nie będziemy na razie nic zakładali. Określimy przede wszystkim prawdopodobieństwo tego, że w nieskończenie małym przedziale czasu dt, następującym bezpośrednio po chwili t, nastąpi przewyższenie poziomu a. Na to, aby takie przewyższenie rzeczywiście nastąpiło /patrz rysunek, na którym przedstawiona jest jedna realizacja procesu stochastycznego/



potrzeba aby zaszły dwa zdarzenia: po pierwsze w chwili t wartość procesu stochastycznego powinna być mniejsza niż a tzn.

$$/6.2.1./ \qquad X/t/ < a$$

i po drugie, w chwili t + dt wartość procesu powinna być większa niż a tzn.

$$/6.2.2./ \qquad X/t + dt/ > a \, .$$

Tak więc prawdopodobieństwo przewyższenia w przedziale czasu dt można zapisać następująco:

$$/6.2.3./ \quad P \left\{ X/t/ < a; \quad X/t + dt/ > a \right\} .$$

Korzystając z ciągłości procesu stochastycznego można nierówności 6.2.1, 6.2.2, nakładając ograniczenia na wartość procesu w dwóch punktach, zastąpić przez nierówności odnoszące się do wartości procesu i jej prędkości w jednym punkcie.
Istotnie, uwzględniając fakt, że przedział czasu dt jest bardzo mały, można z dokładnością do nieskończenie małych rzędu drugiego napisać

$$/6.2.4/ \qquad X/t + dt/ = X/t/ + V/t/ \, dt$$

Stąd nierównoś 6.2.2. jest równoważna nierówności:

$$a - V/t/ \, dt < X/t/$$

i zamiast dwóch nierówności warunkujących istnienie przewyższenia w przedziale dt mamy jedną nierówność podwójną.

$$/6.2.5./ \quad a - V/t/dt < X/t/ < a \qquad \text{dla } V/t/ > 0$$

W celu obliczenia prawdopodobieństwa spełnienia tej nierówności wprowadzimy do rozważań dwuwymiarowy rozkład prawdopodobieństwa

wartości realizacji procesu i jej prędkości w jednej i tej samej chwili t.
Niech funkcją gęstości tej zmiennej losowej będzie.

/6.2.6/ $$f(x,V|t)$$

Szukane prawdopodobieństwo przewyższenia jest równe: /6.2.7./

$$P\{a-V(t)dt<X(t)<a\}=\int_0^{\infty}\int_{a-v dt}^{a} f(x,v|t)\,dx\,dv,$$

gdzie granice całkowania obejmują wszystkie wartości X/t/,V/t/, spełniające nierówności 6.2.5. Całkę wewnętrzną we wzorze 6.2.7. można obliczyć bezpośrednio na podstawie twierdzenia o wartości średniej, gdyż granice całkowania różnią się między sobą o wielkość nieskończenie małą v dt.
A więc otrzymamy:

/6.2.8./ $$\int_{a-v dt}^{a} f(x,v|t)\,dx = v\,dt\, f(a,v|t).$$

Podstawienie powyższego związku do wzoru 6.2.7. daje:
/6.2.9./ $$P\{a-V(t)dt<X(t)<a\}=dt\int_0^{\infty} f(a,v|t)\,v\,dv.$$

Widzimy więc, że prawdopodobieństwo przewyższenia w ciągu nieskończenie małego przedziału czasu dt jest proporcjonalne do wielkości tego przedziału. Dlatego jest celowe wprowadzenie pojęcia czasowej funkcji gęstości dla prawdopodobieństwa przewyższenia, oznaczając przez p/ a|t/ prawdopodobieństwo przewyższenia poziomu a w ciągu jednostki czasu, tj przyjmując:

/6.2.10./ $$P\{a-V(t)dt<X(t)<a\}=p(a|t)\,dt.$$

Porównując wzory 6.2.9. i 6.2.10. otrzymujemy dla gęstości prawdopodobieństwa p/a|t/ wyrażenie

/6.2.11./ $$p/a,t/ = \int_0^{\infty} f(a,v|t)\,v\,dv.$$

W analogiczny sposób można otrzymać czasową gęstość prawdopodobieństwa p'/a|t/ przekroczenia poziomu a przez proces stochastyczny z góry na dół. Powtarzając przytoczone wyżej rozumowanie dla tego przypadku otrzymujemy:

/6.2.12./ $$p'(a|t) = \int_{-\infty}^{0} f(a, v|t)\, v\, dv$$

Łatwo zauważyć, że ponieważ $f(a, v|t) = f(v|a,t)\, f(a|t)$,

więc:

/6.2.13./ $$p(a|t) + p'(a|t) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(a, v|t)\, |v|\, dv = E\left[\frac{|V(t)|}{X(t)} = a\right] f(a|t) \;.$$

Zatem suma prawdopodobieństw przekroczenia danego poziomu a z dołu do góry i z góry na dół, obliczonych na jednostkę czasu, jest równa iloczynowi warunkowej wartości przeciętnej bezwzględnej wartości prędkości zmiany procesu przy ustalonej wartości samej funkcji przez gęstość rozkładu prawdopodobieństwa wartości procesu dla x = a, zaś różnica $p(a|t)$ jest równa iloczynowi warunkowej wartości przeciętnej V/t/ przez f/a|t/.

Korzystając ze wzoru 6.2.11. można otrzymać dla dowolnego przedziału czasu T średni czas przebywania procesu stochastycznego ponad danym poziomem. Istotnie podzielmy przedział T punktami t_j na n równych części dt_j /j = 1,2, ..., n/ położonych bezpośrednio za punktem t_j. Prawdopodobieństwo tego, że wartości procesu stochastycznego $X/t_j/$ przekroczą dany poziom a jest równe:

/6.2.14./ $$P\left\{X(t_j) \geqslant a\right\} = \int_{a}^{\infty} f(x|t_j)\, dx \,.$$

Będziemy zakładali, że długości przedziałów dt_j są na tyle małe, aby można było przy obliczaniu sumarycznego czasu przebywania procesu stochastycznego ponad danym poziomem zaniedbać przypadki, gdy proces X/t/ zmienia znak wewnątrz przedziału. Wprowadźmy do rozważań układ zmiennych losowych Δ_j, z których każda jest równa odpowiedniemu przedziałowi dt_j, lub zero, w zależności od tego, czy w tym przedziale proces stochastyczny jest większy lub równy, czy mniejszy od a. Wtedy oczywiście ogólny czas przebywania procesu ponad danym poziomem a jest równy sumie Δ_j, t_j.

/6.2.15./ $$T_a = \sum_{j=1}^{n} \Delta_j \,.$$

W celu określenia średniego czasu T_a przebywania procesu ponad danym poziomem a w przedziale czasu T znajdziemy wartość przeciętną obu stron równości 6.2.15.
Stosując twierdzenie o wartości przeciętnej sumy otrzymujemy:

$$/6.2.16./ \quad \overline{T_a} = ET_a = \sum_{j=1}^{n} E(\Delta_j)$$

Zmienna losowa Δ_j w myśl jej określenia może przyjmować tylko dwie wartości $/dt_j,\ 0/$, a zatem jej wartość przeciętna jest równa iloczynowi dt_j przez prawdopodobieństwo 6.2.14. to znaczy:

$$/6.2.17./ \quad E(\Delta_j) = dt_j \int_a^{\infty} f(x|t_j)\,dx$$

Podstawiając to wyrażenie do wzoru 6.2.16. i przechodząc do granicy gdy $n \to \infty$ otrzymujemy zamiast $\sum_{j=1}^{n}$ całkę i wobec tego dla średniego czasu przebywania procesu ponad poziomem a w ciągu czasu T będziemy mieli

$$/6.2.18./ \quad \overline{T_a} = \int_0^T \int_a^{\infty} f(x|t)\,dx\,dt\,.$$

W zastosowaniach interesuje nas zwykle średni czas przebywania procesu ponad danym poziomem w ciągu jednego przekroczenia poziomu. W celu określenia tego średniego czasu $\overline{\tau}$ należy podzielić czas $\overline{T_a}$ przez średnią ilość przewyższeń $\overline{N_a}$ danego poziomu w ciągu czasu T. Przedział T podzielimy znów na n różnych części dt_j i wprowadzimy pomocnicze zmienne losowe n_j, równe odpowiednio jedności lub zero, w zależności od tego, czy wewnątrz danego przedziału ma miejsce przewyższenie, czy nie. /Wskutek tego, że przedziały dt_j są bardzo małe, możliwość większej liczby przewyższeń nie bierzemy pod uwagę/. Wtedy całkowita ilość przewyższeń N_a w ciągu czasu T będzie równa sumie μ_j:

$$/6.2.19./ \qquad N_a = \sum_{j=1}^{n} \mu_j\,.$$

Znajdując wartość przeciętną obu stron równości i uwzględniając, że wartość przeciętna każdej ze zmiennych n_j jest równa prawdopodobieństwu przekroczenia poziomu a w j-tym przedziale tj $p/a \mid t_j/ dt_j$, będziemy mieli:

$$\overline{N}_a = EN_a = \sum_{j=1}^{n} p(a|t_j)dt_j . \qquad /6.2.20./$$

Zwiększając ilość przedziałów dt_j, do nieskończoności i podstawiając zamiast $p''/a/t/$ wyrażenie 6.2.11. otrzymujemy:

$$\overline{N}_a = \int_0^T \int_0^\infty v f(a, v|t)\, dv\, dt . \qquad /6.2.21/.$$

Po podzieleniu równości 6.2.18. przez 6.2.21. otrzymamy szukany średni czas trwania przewyższenia

$$\tau = \frac{\overline{T_a}}{\overline{N_a}} = \frac{\int_0^T \int_0^\infty f(x|_t)\, dx\, dt}{\int_0^T \int_0^\infty v f(a, v|_t)\, dv\, dt} . \qquad /6.2.22./$$

Otrzymane wzory mają największą doniosłość dla procesów stacjonarnych, gdyż tylko dla procesów stabilnych w czasie średni czas trwania przewyższenia ma bezpośrednio widoczne znaczenie.

Dla procesów stacjonarnych wzory powyższe upraszczają się, bowiem zarówno gęstość rozkładu wartości realizacji procesu $f/X|t/$ jak i gęstość rozkładu wartości procesu i prędkości $f/X,V \mid t/$ nie zależą od czasu.

Oznaczając te gęstości odpowiednio przez $f/x/$ i $f/x,V/$ widzimy, że całkowanie względem t we wzorach 6.2.18., 6.2.21., 6.2.22., sprowadza się do mnożenia przez T i wobec tego dla średniego czasu przebywania procesu ponad danym poziomem w ciągu czasu T, dla średniej liczby przewyższeń w tym przedziale czasu oraz średniego czasu, trwania przewyższenia otrzymujemy:

$$\overline{T_a} = T \int_a^\infty f(x)\, dx \qquad /6.2.23./$$

$$\overline{N_a} = T \int_0^\infty v f(a, v)\, dv \qquad /6.2.24./$$

$$\overline{\tau} = \frac{\int_a^\infty f(x)\, dx}{\int_0^\infty v f(a, v)\, dv} . \qquad /6.2.25./$$

Zatem, jak należało oczekiwać, dla procesu stacjonarnego wielkości T_a i N_a są proporcjonalne do rozważanego przedziału czasu T, a średni czas trwania przewyższenia nie zależy od tego przedziału czasu. W związku z tym dla procesów stacjonarnych można wprowadzić pojęcie średniej liczby przewyższeń w jednostce czasu n_a przyjmując:

$$\bar{n}_a = \frac{\bar{N}_a}{T}. \tag{/6.2.26./}$$

Oczywiście dla procesów stacjonarnych

$$n_a = \int_0^\infty v f(a,v)\, dv \tag{/6.2.27./}$$

co nie różni się od prawdopodobieństwa przewyższenia w jednostce czasu.

Ponieważ we wszystkich wyżej wyprowadzonych wzorach występują funkcje gęstości f/x | t/ i f/x,V | t/ /f/x/ i f/x,v/ dla procesu stacjonarnego/, do otrzymania ostatecznych, wyników liczbowych potrzebna jest znajomość tych rozkładów. W przypadku rozkładu normalnego - najważniejszego z punktu widzenia zastosowań, wzory można otrzymać stosunkowo - prosto.

Dla procesów normalnych /będziemy rozważali tylko przypadek stacjonarny/rozkład prawdopodobieństwa ich wartości jest jednoznacznie określony przez wartość przeciętną $\bar{X}$ i wariancję:

$$\bar{\sigma}_x^2 = k_x(0) \tag{/6.2.28./}$$

gdzie $k_x(\tau) = E\{[\overline{X(t_1)} - \overline{\bar{x}(t_1)}][X(t_2) - \bar{x}(t_2)]\}$

$i\ \tau = (t_1, t_2) \qquad \overline{X(t_1)},\ \overline{\bar{x}(t_1)}$

wartości sprzężone. Funkcję $K_x/\tau/$ nazywamy funkcją korelacyjną procesu X/t/.

Dla stacjonarnych procesów normalnych funkcja rozkładu procesu jeżeli znane jest $\bar{X}$, i σ_x^2, jest postaci:

$$/6.2.29./ \quad f(x) = \frac{1}{\sigma_x \sqrt{2\pi}} \exp\left[-\frac{(x-\bar{x})^2}{2\sigma_x^2}\right].$$

Prędkość zmiany wartości procesu i wartości tego procesu dla określonej chwili są nieskorelowanymi zmiennymi losowymi, a dla normalnego procesu - niezależnymi zmiennymi losowymi. Dlatego dwuwymiarowa gęstość rozkładu prawdopodobieństwa f/x,v/ jest równa iloczynowi gęstości /normalnych/ rozkładu x i v, czyli:

$$/6.2.30./ \quad f(x,v) = \frac{1}{\sigma_x\sqrt{2\pi}} \exp\left[-\frac{(x-\bar{x})^2}{2\sigma_x^2}\right] \cdot \frac{1}{\sigma_v\sqrt{2\pi}} \exp\left[-\frac{v^2}{2\sigma_v^2}\right],$$

gdzie wariancja prędkości / σ_v^2 / jest równa wartości funkcji korelacyjnej w zerze, a zatem:

$$/6.2.31./ \quad \sigma_v^2 = -\left.\frac{d^2 K_x(\tau)}{d\tau^2}\right|_{\tau=0},$$

zaś wartość przeciętna V/t/ jest wskutek stacjonarności procesu równa zeru.

Podstawiając wyrażenie /6.2.30./ do wzoru /6.2.27./ otrzymujemy dla średniej liczby przewyższeń w jednostce czasu $\bar{n}_a$ /lub, co na jedno wychodzi, dla czasowej gęstości prawdopodobieństwa p/a | t/ = p/a// wyrażenie

$$/6.2.32./ \quad \bar{n}_a = p(a) = \frac{\sigma_v}{2\pi\sigma_x} \exp\left[-\frac{(a-\bar{x})^2}{2\sigma_x^2}\right].$$

Po podstawieniu wyrażenia 6.2.30. do wzoru 6.2.25 otrzymamy:

$$/6.2.33/ \quad \bar{\tau} = \pi \frac{\sigma_x}{\sigma_v} \exp\frac{(a-\bar{x})^2}{2\sigma_x^2} \left[1 - \Phi\left(\frac{a-\bar{x}}{\sigma_x}\right)\right]$$

gdzie Φ /x/ jest funkcją całkowitą Laplace'a. W przypadku szczególnym, gdy a = $\bar{x}$ to jest gdy rozpatrujemy przewyższenia poziomu zerowego, ostatni wzór przejmuje postać:

$$/6.2.34./ \quad \overline{\tau} = \pi \frac{\sigma_x}{\sigma_v} = \pi \sqrt{-\left[\frac{K_x(\tau)}{\ddot{K}_x(\tau)}\right]_{\tau=0}} \, .$$

Określenie rozkładu prawdopodobieństwa czasu trwania przewyższenia jest zagadnieniem trudniejszym niż określenie $\overline{\tau}$ i $p/a \mid t/$, a jego rozwiązanie, mimo, że zostało otrzymane w ogólnej postaci w pracach:
Kuźniecow P.J., Stratanowicz, P.L, i Tichonow W.M.
" О длительности выбросов случайной функции".
oraz MC. Fadden J.A. "The Axis - Crossing Intervals of Random Functions", JRE Transactions on Information Theory 4/1/1958/.
Ze względu na złożoność końcowych wzorów nie zostanie tutaj przytoczone.

Również skomplikowane jest określenie prawdopodobieństwa tego, że w ciągu danego przedziału czasu T nie nastąpi ani jedno przewyższenie /lub nastąpi dana ilość przewyższeń/. Trudność zadania polega na tym, że dla jego rozwiązania należy znać nie tylko średnią liczbę przewyższeń w danym czasie, lecz także rozkład prawdopodobieństwa liczby przewyższeń. Dokładne rozwiązanie tego zagadnienia jest tak samo skomplikowane jak określenie rozkładu prawdopodobieństwa czasu trwania przewyższenia. W wielu zagadnieniach praktycznych, ważną rolę odgrywa przypadek szczególny, gdy średnia liczba przewyższeń w danym przedziale czasu jest na tyle mała, że następowanie kolejnych przewyższeń można uważać za zdarzenia niezależne.
W tym przypadku można przyjmować, że liczba przewyższeń jest w przebliżeniu określona przez rozkład Poissona i zagadnienie może być rozwiązane do końca, gdyż jednym parametrem występującym w rozkładzie jest wartość przeciętna liczby przewyższeń określona wzorami 6.2.24. dla procesu stacjonarnego. Na przykład dla prawdopodobieństwa P_0 tego, że w czasie T nie nastąpi ani jedno przewyższenie, otrzymamy:

$$/6.2.35./ \quad P_0 = \exp\left\{-\int_0^T \int_0^\infty v f(a, v \mid t)\, dv\, dt\right\}$$

lub dla stacjonarnego procesu

$$/6.2.36./ \quad P_0 = \exp\left\{-T \int_0^\infty v f(a, v)\, dv\right\} .$$

Dla normalnego procesu stacjonarnego w myśl wzoru 6.2.32. otrzymujemy

$$P_o = \exp\left\{-\frac{T}{2\pi}\sqrt{\left[-\frac{\ddot{K}_x(\tau)}{K_x(\tau)}\right]_{\tau=0}}\exp\left[-\frac{(a-\bar{x})^2}{2\sigma_x^2}\right]\right\}.$$

Przykład 1. Funkcja korelacyjna kąta bocznego **nachylenia** statku jest określona wzorem:

$$K_\theta(\tau) = Ae^{-\alpha|t|}\left(\cos\beta\tau + \frac{\alpha}{\beta}\sin\beta|\tau|\right).$$

Przyjmując, że proces kołysania się statku opisany jest normalnym procesem stochastycznym, określić, ile razy średnio w ciągu 20 minut ruchu statku kąt bocznego nachylenia statku przekroczy $\pm 25^o$, jeżeli A = 100 stopni^2, $\alpha = 0,1$ sek^{-1}, $\beta = 0,7$ sek^{-1}.

Określimy najpierw wariancję:

$$\sigma_\sigma^2 = K_\theta(0) = -\frac{d^2K_\theta(\tau)}{d\tau^2}\bigg|_{\tau=0} = A(\alpha^2+\beta^2)$$

Szukana liczba przewyższeń $\bar{N}_a = 2T\bar{n}_a$, gdzie czynnik 2 występuje dlatego, że w tym zadaniu rozpatrujemy przekroczenia poziomu a = 25^o z dołu do góry i przekroczenia poziomu - a z góry na dół.

Podstawiając dane zadania do wzoru 6.2.32. otrzymujemy:

$$\bar{N}_a = 2T\frac{\sigma_\theta}{2\pi\sigma_\theta}\exp\left[-\frac{a^2}{2\sigma_\theta}\right] 2T\frac{\sqrt{A(\alpha^2+\beta^2)}}{2\pi\sqrt{A}}\exp\left[-\frac{a^2}{2A}\right] =$$

$$= \frac{120\sqrt{50}}{\pi}e^{-3,125} = 11,6.$$

Przykład 2. Przy warunkach poprzedniego przykładu określić prawdopodobieństwa P_o, P_1, P_2 tego, że w ciągu 2 minut nie nastąpi ani jedno przewyższenie, nastąpi jedno przewyższenie i dwa przewyższenia.

Przyjmując, że możemy skorzystać tutaj z rozkładu Poissona otrzymujemy:

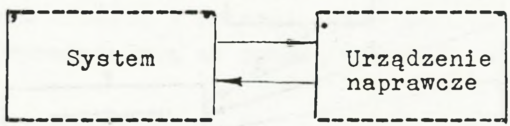
$$P_0 = e^{-\bar{N}_a} = e^{-1{,}16} = 0{,}313,$$

$$P_1 = \bar{N}_a e^{-\bar{N}_a} = 1{,}16\, e^{-1{,}16} = 0{,}363,$$

$$P_2 = \frac{\bar{N}_a^2}{2} e^{-\bar{N}_a} = \frac{1{,}16^2}{2} e^{-1{,}16} = 0{,}211$$

6.3. Zastosowanie procesu urodzin i śmierci do rezerwowania z odnową

Proces urodzin i śmierci można zastosować do badania systemu z rezerwą, w której następuje odnowa uszkodzonych elementów. Przypuśćmy, że mamy system, w którym czas bezawaryjny pracy każdego elementu ma rozkład wykładniczy. Patrz rysunek poniżej.

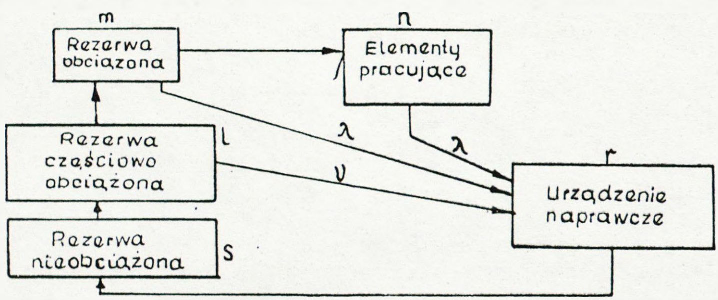


Każdy element po uszkodzeniu przechodzi do urządzenia naprawczego, gdzie następuje jego odnowa, a po odnowie wraca do systemu. Załóżmy, że czas odnowy również ma rozkład wykładniczy. Z założenia wykładniczości wszystkich rozkładów wynika, że praca takiego systemu zawsze opisuje się procesem Markowa o skończonej liczbie stanów. Liczba stanów w ogólnym przypadku jest równa 2^N, gdzie N oznacza liczbę elementów systemu, ponieważ dla opisania pracy systemu powinniśmy w każdej chwili znać zbiór elementów **niesprawnych**, a takich zbiorów jest 2^N. Rozwiązanie układu równań różniczkowych, a w przypadku stacjonarnym, układu równań algebraicznych, jest związane z dużymi trudnościami o charakterze obliczeniowym i algebraicznym. /Równania te były rozpatrywane przy opisie modelu pracy centrali telefonicznej/.

Jednak w wielu rzeczywistych systemach liczbę stanów można w istotny sposób zmniejszyć. Jeśli dla każdego stanu systemu sumaryczna intensywność uszkodzeń i sumaryczna intensywność odnowy zależy nie od zbioru niesprawnych w danej chwili elementów - lecz jedynie od ich liczby, to taki system opisuje się procesem Markowa o liczbie stanów równej N + 1.

Niech λ_k oznacza sumaryczną intensywność uszkodzeń a μ_k - sumaryczną intensywność odnowy pod warunkiem, że w systemie jest k niesprawnych elementów. Wówczas w czasie Δt z prawdopodobieństwem $\lambda_k \Delta t + 0/\Delta t/$ wystąpi jedno uszkodzenie, tzn. że system przejdzie do stanu k+1 i z prawdopodobieństwem $\mu_k \Delta t + 0/\Delta t/$ nastąpi jedna odnowa to znaczy system przejdzie do stanu k - 1. Oznacza to, że system opisuje się procesem urodzin i śmierci.

Rozpatrzmy teraz system następującego rodzaju:



W systemie jest N = n+m+l+s jednakowych elementów /zauważmy, że przez pojęcie element możemy rozumieć element jako nierozkładalną część systemu, część systemu i ogólnie dowolne urządzenie/. Czas bezawaryjnej pracy każdego elementu ma rozkład wykładniczy, n elementów znajduje się w stanie pracy i ma intensywność uszkodzeń równą λ, m elementów znajduje się w rezerwie obciążonej z taką samą intensywnością uszkodzeń, l elementów stanowi rezerwę częściowo obciążoną i ma intensywność udzkodzeń ν i wreszcie s elementów znajduje się w rezerwwie nieobciążonej i w tym stanie nie ulega uszkodzeniom. Każdy uszkodzony element natychmiast przechodzi do urządzenia naprawczego, które składa się z r jednostek naprawczych. Każda jednostka naprawcza może jednocześnie naprawić /bądź odnowić/ jeden element.

Zmienna losowa oznaczająca czas naprawy elementu ma rozkład wykładniczy o parametrze μ. Jeśli wszystkie jednostki naprawcze są zajęte naprawą, to uszkodzony element ustawia się w kolejce. Każdy element uszkodzony w trakcie pracy natychmiast zostaje zamieniony elementem z rezerwy obciążonej, każdy element, który został uszkodzony bądź przeszedł w stan pracy z rezerwy obciążonej, natychmiast zostaje zamieniony elementem z rezerwy częściowo obciążonej i wreszcie każdy element, który został uszkodzony bądź przeszedł do rezerwy obciążonej z rezerwy częściowo obciążonej, natychmiast zostaje zamieniony elementem z rezerwy nieobciążonej. Każdy odnowiony element przechodzi do rezerwy nieobciążonej. System pracuje sprawnie, jeśli liczba sprawnych elementów jest nie mniejsza niż n. Pod pojęciem stanu systemu będziemy rozumieli liczbę niesprawnych elementów w danej chwili. Jest jasne, że praca takiego systemu opisuje się procesem urodzin i śmierci, przy czym parametry procesu $/\lambda_k, \mu_k/$ wyrażają się za pomocą wzorów:

$$/6.3.1./ \quad \lambda_k = \begin{cases} (n+m)\lambda + \nu l & \text{dla } 0 \leq k \leq s \\ (n+m)\lambda + \nu(l+s-k) & \text{dla } s < k \leq s+l \\ (n+m+l+s-k)\lambda & \text{dla } l+s < k \leq N \end{cases} \qquad \mu_k = \begin{cases} k\mu & \text{dla } k \leq r \\ r\mu & \text{dla } k > r \end{cases}$$

Zarejestrujemy jeszcze jeden przypadek, którego nie obejmuje nasz schemat. Liczba elementów w rezerwie nieobciążonej może być praktycznie nieograniczona $s = \infty$. Jest oczywiste, że w tym przypadku nie ma sensu wprowadzać obciążonej i częściowo obciążonej rezerwy. Taki system opisuje się procesem urodzin i śmierci o nieskończonej liczbie stanów, przy czym parametry tego procesu wyrażają się następująco.

$$/6.3.2./ \quad \lambda_k = n\lambda \qquad \mu_k = \begin{cases} k\mu & \text{dla } k \leq r, \\ r\mu & \text{dla } k > r. \end{cases}$$

Rozważany system obejmuje dużą liczbę przypadków szczególnych. Zanotujemy tu przypadki, które często spotyka się w praktyce niezawodności i obliczymy dla nich prawdopodobieństwa graniczne.

a/ System składa się z n elementów. Spośród nich /n-m/ znajduje się w stanie pracy, a m znajduje się w rezerwie obciążonej. Liczba jednostek naprawczych $r \geqslant n$

/6.3.3./ $$\lambda_k = (n-k)\lambda \qquad \mu_k = k\mu$$
$$p_k = \binom{n}{k} \frac{\lambda^k \mu^{n-k}}{(\lambda+\mu)^n}$$

b/ System ten jest taki sam z tym, że jest tylko jedna jednostka naprawcza r = 1. W tym przypadku mamy:

/6.3.4./ $$\lambda_k = (n-k)\lambda \qquad \mu_k = \mu$$
$$p_k = \frac{\frac{1}{(n-k)!}\left(\frac{\mu}{\lambda}\right)^{n-k}}{\sum_{l=0}^{n} \frac{1}{l!}\left(\frac{\mu}{\lambda}\right)^{l}} .$$

c/ W systemie jest n elementów pracujących i nieograniczona rezerwa nieobciążona. Liczba urządzeń naprawczych jest również nieograniczona,

Wtedy: $\lambda_k = n\lambda$, $\mu_k = k\mu$,

/6.3.5./ $$p_k = \frac{\left(\frac{n\lambda}{\mu}\right)^k}{k!} e^{-\frac{n\lambda}{\mu}} .$$

d/ System jest taki sam z tym, że jest tylko jedna jednostka naprawcza r = 1. Dla takiego systemu:

$$\lambda_k = n\lambda , \qquad \mu_k = \mu .$$

Tu rozkład stacjonarny istnieje pod warunkiem, że $n\lambda < \mu$ i w tym przypadku prawdopodobieństwa graniczne wyrażają się wzorami:

/6.3.6./ $p_k = \left(\frac{n\lambda}{\mu}\right)^k \left(1 - \frac{n\lambda}{\mu}\right).$

6.3.1. Parametry niezawodności systemów rezerwowych z odnową

Niezawodność systemu rezerwowego z odnową w zależności od jego struktury i charakteru spełnionych przez niego funkcji można ocenić różnymi parametrami. Rozpatrzmy podstawowe parametry niezawodności tego systemu. Dla konkretności będziemy rozpatrywali powyższy system z parametrami:

$$/n, m, l, s, \lambda, \nu, \mu/.$$

Prawdopodobieństwo bezawaryjnej pracy w przeciągu czasu t. System będzie pracował bazwaryjnie do chwili t, jeśli ani razu do tej chwili liczba uszkodzonych elementów nie przewyższy liczby N - n tj. $\nu/t'/ \leqslant N-n$.
Zakładamy, że w chwili początkowej wszystkie elementy są sprawne, tzn. przy $t' < t$. Zątem prawdopodobieństwo bezawaryjnej pracy systemu jest równe:

$$p/t/ = 1 - P_{N-n+1}/t/$$

przy czym $P_{N-n+1}/t/$ wyraża się wzorem:

$$P_{N-n+1}(t) = \frac{1}{2\pi i}\int_C \frac{e^{st}\lambda_0\lambda_1\ldots\lambda_{N-n+1}}{S\Delta_{N-n+1}(S)}$$

gdzie C krzywa zamknięta a

$\Delta_{N-n+1}(S)$ definiujemy wzorem rekurencyjnym

$$\Delta_0(S) = 1, \quad \Delta_1(S) = S + \lambda_0 + \mu_0, \ldots$$

$$\Delta_{N-n+1}(S) = (S + \lambda_{N-n} + \mu_{N-n})\Delta_{N-n}(S) - \mu_{N-n}\lambda_{N-n-1}\Delta_{N-n-1}(S).$$

Jeśli poziom N-n+1 jest"wysoki" to prawdopodobieństwo bezwaryjnej pracy wyraża się wzorem:

/6.3.7./ $p(t) \approx e^{-\frac{t}{T_{N-n+1}}}.$

Rozpatrzmy konkretne przykłady

a/ $\lambda_k = (n-k)\lambda ; \quad \mu_k = k\mu .$

Dla tego przypadku uszkodzenie systemu następuje wówczas, gdy liczba uszkodzonych elementów staje się równa m + 1.
Sredni czas bezawaryjnej pracy systemu jest równy:

$$T_{m+1} = \sum_{k=0}^{m} \frac{\sum_{l=0}^{k} \binom{n}{l} p^l q^{n-l}}{(n-k)\lambda \binom{n}{k} p^k q^{n-k}} ,$$

przy czym

$$p = \frac{\lambda}{\lambda+\mu} , \qquad q = \frac{\mu}{\lambda+\mu} .$$

Powyższą sumę można doprowadzić do prostszej postaci:

$$/6.3.8./ \quad T_{m+1} = \frac{\sum_{l=0}^{m} \left[\binom{n}{m-l} \left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^{l+1} \frac{1}{l+1} + \frac{1}{m+1-l} \right]}{(\lambda+\mu) \binom{n}{m+1}} .$$

W szczególności gdy m = n - 1 tzn., że jest tylko jeden element pracujący, wtedy

$$/6.3.9./ \quad T_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{\left(1+\frac{\mu}{\lambda}\right)^k}{(\lambda+\mu)^k} .$$

Można udowodnić, że wzór przybliżony /6.3.7./ jest prawdziwy, jeśli.

$$\frac{m+1-np}{\sqrt{npq}} \gg 1 .$$

b/ $\lambda_k = (n-k)\lambda ; \quad \mu_k = \mu .$

Uszkodzenie systemu /tak jak w przypadku a/ następuje wówczas, gdy system przechodzi do stanu m + 1.
Sredni czas bezawaryjnej pracy wyraża się wzorem:

$$/6.3.10/ \quad T_{m+1} = \sum_{k=n-m}^{n} \sum_{l=k}^{n} \frac{(k-1)!}{\lambda l!} \left(\frac{\mu}{\lambda}\right)^{l-k} .$$

Wzór przybliżony /6.3.7./ jest prawdziwy na przykład wtedy, gdy λ i μ są ustalone -, a m jest duże.

Współczynnik gotowości systemu. Nie p/t/ oznacza prawdopodobieństwo tego, że w chwili t system jest sprawny. Graniczną wartość tego prawdopodobieństwa nazywamy współczennikiem gotowości systemu:

$$K_g = \lim_{t \to \infty} p/t/.$$

Łatwo zauważyć, że dla omawianego systemu

/6.3.11./ $$K_g = \lim_{t \to \infty} P\{\nu(t) < N-n+1\} = \sum_{k=0}^{N-n} p_k .$$

Jak już zaznaczyliśmy powyżej, współczynnik gotowości jest równy średniemu udziałowi czasu, w trakcie którego system znajduje się w stanie sprawności. W pewnych przypadkach znajomość współczynnika gotowości systemu jest **niedostateczna** dla oceny niezawodności systemu, a mianowicie trzeba jeszcze znać średnią długość odcinków, w których system, przebywa w stanie sprawności i w stanie niesprawności. Sredni czas przebywania systemu w stanie sprawności /wyłączając pierwszy okres/ jest równy:

/6.3.12./ $$T^{(1)} = \frac{\sum_{k=0}^{N-n} p_k}{\lambda_{N-n} p_{N-n}},$$

a średni czas przebywania systemu w stanie niesprawności jest równy zgodnie ze wzorem:

/6.3.13/ $$T^{(2)} = \frac{\sum_{k=N-n+1}^{n} p_k}{\lambda_{N-n} p_{N-n}}.$$

Podstawowe charakterystyki podatności naprawczej systemu. Jak już mówiliśmy, każdy uszkodzony element przechodzi do urządzenia naprawczego składającego się z r jednostek. Jeśli wszystkie jednostki naprawcze są zajęte odnową, to element staje w kolejce.

Jakość urządzenia naprawczego można scharakteryzować dwoma parametrami:

K' - średnia liczba elementów znajdujących się w kolejce,

K'' - średnia liczba zajętych jednostek naprawczych.

Istotne jest, że charakterystyki te określa się dla warunków stacjonarnych i charakterystyki te nie zależą od czasu. Łatwo wyrazić powyższe liczby przez prawdopodobieństwo graniczne. Przypuśćmy jak powyżej, że $\nu/t/$ oznacza liczbę uszkodzonych elementów w chwili t. Wówczas długość kolejki w tej chwili jest równa zeru, jeśli $\nu/t/ \leqslant r$, i jest równa $\nu/t/-r$, jeśli $\nu/t/ > r$.

Średnia długość kolejki w chwili t wyraża się następująco

$$\sum_{k=r+1}^{N} (k-r) p_k(t) \cdot$$

Wówczas w warunkach stacjonarnych

$$/6.3.14./ \quad K' = \sum_{k=r+1}^{N} (k-r) p_k \cdot$$

Zupełnie analogicznie znajdujemy drugi parametr

$$/6.3.15./ \quad K'' = \sum_{k=0}^{r} k p_k + r \sum_{k=r+1}^{N} p_k \cdot$$

Dla oceny podatności naprawczej i ogólnie do oceny jakości systemu można podejść inaczej. Każdy element w procesie pracy systemu przechodzi wielokrotnie cykl.:

praca - oczekiwanie na naprawę - naprawa - rezerwa.

Niech t_1 oznacza średni czas przebywania elementu w stanie pracy, t_2 - średni czas oczekiwania na naprawę, t_3 - średni czas naprawy i t_4 - średni czas przebywania w rezerwie.

Wprowadźmy oznaczenie $t_o = t_1+t_2+t_3+t_4$.

Wówczas stosunki $K_1 = \frac{t_1}{to}$, $K_2 = \frac{t_2}{to}$, $K_3 = \frac{t_3}{to}$, $K_4 = \frac{t_4}{to}$

dają nam odpowiednie średnie udziały czasu, w których element przebywał w tym bądź innym stanie. Jest jasne, że z równouprawnienia wszystkich elementów wynika, że współczynniki te nie zależą od numeru rozpatrywanego elementu.

W ten sposób wprowadzone współczynniki dobrze i w pełni określają jakość systemu z rezerwą i odnową. Na przykład, duża wartość współczynnika k_3 wskazuje na to, że naprawa jest przeprowadzana powoli, duża wartość k_2 wskazuje na to, że jest mała liczba jednostek naprawczych, a duża wartość k_4 świadczy o tym, że w systemie jest nieusprawiedliwiona duża rezerwa.
Wyrazimy te współczynniki przez prawdopodobieństwa graniczne odpowiednio do czterech stanów, w których może znajdować się element, a mianowicie: praca, oczekiwanie na naprawę, naprawa, rezerwa; wprowadzimy cztery funkcje jednostkowe:

$$e_k^{(i)}(t), \qquad i = 1,2,3,4.$$

Funkcja $e_k^{(i)}$ /t/ jest równa jedności, jeżeli k-ty element w chwili t znajduje się w i-tym stanie, a równa zeru w przeciwnym przypadku.
Na mocy ergodyczności rozważanego systemu:

$$k_i = \lim_{T \to \infty} \frac{1}{T} \int_0^T e_k^{(i)}(t)\,dt.$$

Niech

$$\nu_i(t) = \sum_{k=1}^{N} e_k^{(i)}(t),$$

oznacza liczbę elementów znajdujących się w chwili t w i-tym stanie.
Ponieważ wszystkie elementy są równouprawnione, możemy napisać:
/6.3.16./

$$k_i = \lim_{T \to \infty} \frac{1}{T} \int_0^T e_k^{(i)}(t)\,dt = \lim_{T \to \infty} \frac{1}{NT} \int_0^T \nu_i(t)\,dt = \frac{1}{N} \lim_{t \to \infty} E\left[\nu_i(t)\right].$$

Łatwo zauważyć, że $E[\nu_1$ /t/$]$ jest średnią liczbą elementów znajdujących się w stanie pracy, $E[\nu_2$ /t/$]$ jest średnią liczbą elementów oczekujących na naprawę, $E[\nu_3$ /t/$]$ jest średnią liczbą elementów znajdujących się w naprawie i $E[\nu_4$ /t/$]$ jest średnią liczbą elementów znajdujących się w rezerwie.

Dalej:

$$\nu_1/t/ = \begin{cases} n & \text{jeżeli } \nu/t/ \leqslant N-n, \\ N-\nu(t) & \text{jeżeli } \nu/t/ > N-n, \end{cases}$$

$$\nu_2(t) = \begin{cases} 0 & \text{jeżeli } \nu/t/ \leqslant r, \\ \nu(t)-r & \text{jeżeli } \nu/t/ > r; \end{cases}$$

$$\nu_3(t) = \begin{cases} \nu(t) & \text{jeżeli } \nu/t/ \leqslant r, \\ r & \text{jeżeli } \nu/t/ > r; \end{cases}$$

$$\nu_4(t) = \begin{cases} N-n-\nu(t) & \text{jeżeli } \nu/t/ < N-n, \\ 0 & \text{jeżeli } \nu/t/ \geqslant N-n. \end{cases}$$

Stąd otrzymamy ostateczne wzory dla naszych współczynników:

/6.3.17./ $K_1 = \frac{n}{N} \sum_{k=0}^{N-n} p_k + \sum_{k=N-n+1}^{N} \left(1 - \frac{k}{N}\right) p_k$,

/6.318./ $K_2 = \frac{1}{N} \sum_{k=r+1}^{N} (k-r)\, p_k$,

/6.3.19./ $K_3 = \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{r} k p_k + \frac{r}{N} \sum_{k=r+1}^{N} p_k$,

/6.3.20./ $K_4 = \sum_{k=0}^{N-n} \left(1 - \frac{n+k}{N}\right) p_k$.

Zauważmy na zakończenie, że wprowadzone przez nas charakterystyki nie dają oczywiście pełnego opisu rozważanego systemu. Dla różnych systemów było rzeczą ważną pokazanie z jednej strony, że wszystkie takie charakterystyki zawsze można wyrazić przez prawdopodobieństwa graniczne, a z drugiej strony chcieliśmy zademonstrować te metody, za pomocą których najwygodniej jest obliczać powyższe charakterystyki.

Wydrukowano w 60 egz.
Egz.Nr 1-60 Bibl. Jawna
Wyk.mgr Wojtkowski
Nr ks.1344/2350ŻWW.
Druk ASG-OXV-5149 Zam.3466.z dn.22.12.71 druk uk. 22.12.71.