

A K A D E M I A S Z T A B U G E N E R A L N E G O
im. Generała Broni Karola Świerczewskiego

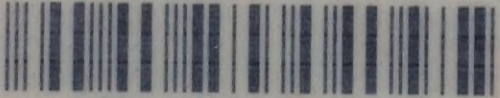
KATEDRA CYBERNETYKI
P. N. TKACZENKO, L. N. KUCEW, G. A. MIESZCZERIAKOW,
A. M. CZAWKIN, A. D. CZEBYKIN

ARCHIWUM

34

**MATEMATYCZNE MODELE DZIAŁAŃ
BOJOWYCH**

tłum. z rosyjskiego
ppłk inż. Remigiusz LAMPKA
ppłk mgr inż. Jan ZDZIECH

Akademii Obrony Narodowej
S/676

05-000712-002-0

12986



A K A D E M I A S Z T A B U G E N E R A L N E G O

im. Generała Broni Karola Świerczewskiego

KATEDRA CYBERNETYKI

**P. N. TKACZENKO, L. N. KUCEW, G. A. MIESZCZERIAKOW,
A. M. CZAWKIN, A. D. CZEBYKIN**

ARCHIWUM

34

**MATEMATYCZNE MODELE DZIAŁAŃ
BOJOWYCH**

tłum. z rosyjskiego

ppłk inż. Remigiusz LAMPKA

ppłk mgr inż. Jan ZDZIECH

Akademii Obrony Narodowej

S/676



05-000712-002-0

12980



W A R S Z A W A

G R U D Z I E Ń

1 9 6 9

A K A D E M I A S Z T A B U G E N E R A L N E G O
im.gen.broni K.Swierczewskiego

KATEDRA CYBERNETYKI

P.N.TKACZENKO, L.N.KUCEW, G.A.MIESZCZERIAKOW, A.M.CZAWKIN,
A.D. CZEBYKIN

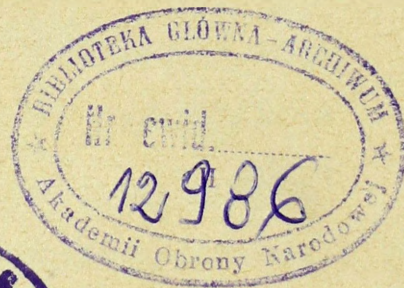
34

M A T E M A T Y C Z N E M O D E L E D Z I A Ł A Ń
B O J O W Y C H

t ł u m . z r o s y j s k i e g o :

ppłk inż. Remigiusz LAMPKA

ppłk mgr inż. Jan ZDZIECH



WARSZAWA

GRUDZIEŃ

1969 r.

Oryginał : Matematyczne modele bojowych działań ;
Matematyczne metody modelowania bojowych
działań taktycznych podziałów przy
pomocy elektronicznych obliczeniowych maszyn.

P.N. Tkaczenko, L.N. Kucew, G.A. Mieszczeriakow,
A.M. Czawkin, A.D. Czebykin pod redakcją
P.N. Tkaczenko. Izd. „Sowietskoje Radio”,
Moskwa 1969.

----- o -----

Książka ta jest poświęcona podstawowym problemom zastosowania metod matematycznych do opisu i modelowania działań bojowych. Rozpatruje się w niej możliwości ilościowej oceny całego szeregu sytuacji konfliktowych poczynając od prostej walki typu pojedynku aż do złożonych działań toczonych przez różne ugrupowania. Wywodom teoretycznym towarzyszy duża ilość praktycznych przykładów ilustrujących możliwe dziedziny zastosowania omawianych modeli.

Książka jest przeznaczona dla osób zajmujących się lub interesujących się modelowaniem.

SPIS TREŚCI

str.

Przedmowa	5
Rozdział 1. ZAGADNIENIA OGÓLNE MODELOWANIA DZIAŁAŃ BOJOWYCH WOJSK	9
1.1 Zagadnienia operacyjno-taktyczne modelowania działań bojowych. Czynniki jakościowe i ilościowe	10
1.2 Obiekty modelowania. Parametry podstawowe. Zadania modelowania. Przegląd literatury.....	13
1.3 Typy modeli matematycznych. Podstawowe etapy modelowania. Analiza wyników i ocena ich dokładności	22
Rozdział 2. MODELE MATEMATYCZNE DZIAŁAŃ BOJOWYCH O CHARAKTERZE POJEDYNKU	27
2.1 Pojedynek - podstawowy element dynamicznego modelu walki	28
2.2 Model pojedynku z uwzględnieniem poprawek strzelania	42
2.3 Model analityczny pojedynku z uwzględnieniem wpływu rzeźby terenu, losowości wykrycia i przesunięcia	58
2.4 Rozwiązania zadań na podstawie analitycznych modeli działań bojowych o charakterze pojedynku .	74
Rozdział 3. MODELE ANALITYCZNE WALKI GRUPOWEJ	97
3.1 Walka ugrupowań środków jednorodnych Formalizacja procesu naturalnego. Budowa modeli walki.	98
3.2 Model walki niejednorodnych ugrupowań liniowych .	113
3.3 Wybrane przykłady zastosowania modeli liniowych .	128
3.4 Uproszczony model analityczny działań typu walki grupowej, przy równomiernej gęstości szyków bojowych	138
3.5 Przykłady zastosowania modeli uproszczonych	157

Rozdział 4. NIEKTÓRE PROBLEMY ZASTOSOWANIA TEORII MASOWEJ OBŚŁUGI PRZY ANALITYCZNYM MODELOWANIU DZIAŁAŃ BOJOWYCH	167
4.1 Sformułowanie działań pododdziałów czołgów w postaci zadania teorii masowej obsługi	167
4.2 Wyznaczenie prawdopodobieństwa odmowy obsługi w strefach	171
4.3 Metody wyznaczania podstawowych parametrów walki ..	185
Rozdział 5. MODELE STOCHASTYCZNE DZIAŁAŃ BOJOWYCH	194
5.1 Sformułowanie problemu i formalizacja procesu bojowego	195
5.2 Metodyka modelowania podstawowych procesów działań bojowych	199
5.3. Struktura algorytmu modelującego na EMC natarcie pododdziału	212
5.4 Dokładność modelowania stochastycznego	228
5.5 Przykłady zastosowania modelu stochastycznego	238
Dodatek 1. Właściwości elektronicznych maszyn cyfrowych stosowanych do modelowania działań bojowych	253
Dodatek 2. O pewnej własności gasnącego strumienia zgłoszeń	262
Dodatek 3. Tablica liczb losowych	270
Bibliografia	273
Skorowidz	276

PRZEDMOWA

Przedkładana uwadze Czytelnika książka przedstawia sobą kolektywną próbę systematyzacji matematycznych metod modelowania działań bojowych^{1/} w dość szerokim przedziale sytuacji konfliktowych.

Oprócz matematycznych modeli działań bojowych autorzy rozpatrują również w szeregu przypadków jeszcze nie w pełni wyjaśnione w dostępnej literaturze problemy wpływu terenu na poszukiwanie, przemieszczanie i rażenie środków walki.

Zastosowanie metod matematycznych i elektronicznych maszyn liczących do modelowania działań bojowych należy do stosunkowo nowej dziedziny badań, która dość szybko rozwija się i zaczyna nabierać coraz większego znaczenia praktycznego. W ostatnich latach w badaniach tych osiągnięto określone wyniki teoretyczne i praktyczne, których pełna systematyzacja i uogólnienie nie są jeszcze możliwe wskutek cząstkowego charakteru poszczególnych badań.

Dlatego też, autorzy nie wytknęli sobie jako celu dania dokładnego przeglądu matematycznych metod modelowania działań bojowych z uwzględnieniem teorii efektywności, teorii strzelania, teorii gier it.d. Zadanie to polegało na tym, aby wyłożyć teoretyczne podstawy zasadniczych, najszerszej wykorzystywanych metod i pokazać możliwości ich praktycznego wykorzystania przy rozwiązywa-

1/ -Autorzy niejednokrotnie nadają terminowi „działania bojowe” znaczenie inne, niż to przyjęto w nauce wojennej. Określają nim mianowicie wszelkie starcia zbrojne, niezależnie od szczebla i zamiaru stron biorących w nich udział, jak również, często pod tym terminem rozumieją działania pomocnicze mające charakter działań zabezpieczających - Przep. tłum.

niu konkretnych problemów.

W oparciu o te metody opracowano matematyczne modele działań bojowych z tymi, lub innymi systemami warunków ograniczających i przedziałów stosowalności, właściwymi dla każdej z metod. Pod pojęciem matematycznego modelu działań bojowych rozumie się, tu i w dalszych rozważaniach, sformalizowany, algorytmiczny /analityczny, lub logiczny / opis procesu bojowego, odzwierciedlający w pożądanym stopniu istotne cechy procesu rzeczywistego, uwzględniający jego podstawowe parametry i pozwalający określić z założoną dokładnością wyniki działań według wybranego kryterium przy założeniu określonych warunków początkowych i wartości podstawowych parametrów.

Układ książki opiera się na zasadzie : „ od prostego do złożonego ” i zakłada kolejne zapoznawanie się czytelnika z poszczególnymi rozdziałami. Ponadto, każdy rozdział, z reguły, jest poświęcony jednemu typowi modeli i może być studiowany oddzielnie.

W rozdziale 1 / autor P.N. Tkaczenko / rozpatruje się krótko operacyjno - taktyczne problemy matematycznego modelowania działań bojowych oraz możliwe pole zastosowań modeli matematycznych. Wymienia się także czynniki ilościowe i jakościowe rozpatrywane przy modelowaniu i podaje sposoby ich oceny.

Rozdział 2 /autor L.N. Kucew / omawia podstawowe problemy występujące przy konstruowaniu i wykorzystaniu modeli prostszych form walki noszących charakter pojedynków. Niezależnie od swej prostoty i niekiedy abstrakcyjności , modele te mogą być niezwłocznie wykorzystane przy kompleksowej ocenie środków walki przeciwdziałających sobie stron i przy obliczaniu t.zw. "współczynników porównawczych pozwalających na określenie jakości

uzbrojenia drogą porównania go z egzemplarzami wzorcowymi.

Badanie modeli pojedynków pozwala również na ocenę pewnych zasad taktycznych związanych głównie z kolejnością i sposobami otwarcia i prowadzenia ognia.

Rozdział 3 /autorzy A.D. Czebykin § 3.1, 3.2, 3.3 i P. N. Tkaczenko § 3.4 i 3.5 / jest poświęcony problemom formalizacji i modelowania grupowych działań bojowych przy zastosowaniu różnych ugrupowań bojowych. Rozpatrywane tu modele, oparte o prosty aparat matematyczny, pozwalają na uzyskanie dostatecznie uzasadnionych wyników wstępnych dotyczących przebiegu i efektów walki. Modele grupowych działań bojowych uwzględniają oprócz jakościowych charakterystyk uzbrojenia i sposobów jego wykorzystania także i wpływ ilości środków walki oraz systemu kierowania nimi; należy to podkreślić jako szczególną ich zaletę.

W rozdziale 4 /autor A.M. Czawkin / omawia się metodykę zastosowania teorii masowej obsługi do modelowania działań bojowych w przypadku ugrupowań o charakterze kolejnościowym. Z teoretycznego punktu widzenia zadanie to sprowadza się do badania wieloetapowego, kolejnościowego systemu masowej obsługi, w którym ubywa aparatów obsługi, a strumień zgłoszeń ma charakter gasnący.

Praktyczne znaczenie takiego postępowania polega na tym, że zastosowana w tym rozdziale metodyka pozwala na rozszerzenie analitycznego modelowania działań bojowych oraz na uzyskanie takich wyników, jakich nie można uzyskać innymi metodami.

Rozdział 5 /autor G.A. Mieszczeriakow § 5.1, 5.2, 5.3 jest poświęcony modelom stochastycznym. Modele te, oparte na metodzie eksperymentu statystycznego, charakteryzują się znacznie większymi możliwościami w porównaniu z modelami innych rodzajów i pozwalają na uwzględnienie znacznej ilości czynników mających wpływ na wyniki działań bojowych.

Należy jednak pamiętać o tym, że zastosowanie modeli stochastycznych pociąga za sobą konieczność poświęcenia większej ilości czasu na opracowanie programów i ich realizację maszynową.

W § 5.4, napisanym wspólnie przez G.A. Mieszczeriakowa i A.M. Czawkina, rozpatruje się oryginalną metodę analizy statystycznej wyników modelowania matematycznego zastosowaną dla ich oceny.

Przykłady do tego rozdziału / § 5.5 / opracował A.D. Czebykin.

Dodatek 1 / P.N. Tkaczenko / formułuje postulaty pod adresem elektronicznych maszyn liczących stosowanych przy modelowaniu działań bojowych.

Dodatek 2 / A. M. Czawkin / zawiera dowód jednego z twierdzeń teorii masowej obsługi, na którym opiera się metoda modelowania matematycznego wyłożona w rozdz. 4.

W celu utrwalenia praktycznych nawyków stosowania modeli matematycznych książka zawiera wiele przykładów. Z metodycznego punktu widzenia rozpatrzenie całego szeregu modeli i odpowiadających im przykładów zbrojnych pojedynków w skali taktycznej ma niebagatelne znaczenie. Czytelnikowi wystarczy dla zrozumienia książki znajomość wyższej matematyki w zakresie szkół akademickich, elementów teorii prawdopodobieństwa i teorii masowej obsługi

Wszystkie uwagi dotyczące treści książki, które będą przyjęte z wdzięcznością, prosimy kierować pod adresem :
Moskwa, Poczta Główna, skr.poczt.693, Wydawnictwo „ Sowietskoje Radio ” .

P.N. Tkaczenko

ZAGADNIENIA OGÓLNE MODELOWANIA DZIAŁAŃ BOJOWYCH WOJSK

Podstawowymi właściwościami prowadzenia działań bojowych we współczesnych warunkach są : nagłe zmiany sytuacji, duży rozmach, doskonałość środków napadu i obrony oraz wysoka dynamiczność, przejawiająca się w gwałtownych zmianach położenia i składu walczących stron w niewielkich stosunkowo przedziałach czasu.

Historia sztuki wojennej potwierdza, że charakter działań bojowych na samodzielnych kierunkach operacyjnych określa się nie tylko stosunkiem ilościowym stron walczących ale i specyfiką jakościową środków napadu i środków obrony /czołgi - broń przeciwpancerna, samoloty - środki OPL itp./. Niezależnie od równej liczebności stron, wszędzie tam, gdzie następowało zachwianie specyfiki jakościowej środków obrony i napadu, natychmiast działania bojowe przyjmowały charakter dynamiczny. Należy zauważyć, że efektywność środków napadu i obrony określa się biorąc pod uwagę, nie tylko doskonałość techniki bojowej, ale przede wszystkim sposoby i charakter wykorzystania jej w walce.

Na wyniki działań bojowych, oprócz jakości i ilości broni, ma również wpływ dość znaczna liczba różnorodnych czynników, takich jak, stan i możliwości systemu rozpoznania i dowodzenia, przygotowanie składu osobowego, stan moralno polityczny wojsk, stan i możliwości zaplecza, warunki terenowe, atmosferyczne itp. Wpływ każdego z tych czynników na zwycięstwo ma charakter dosyć złożony. Przejawia się on poprzez oddziaływanie fizyczne i informacyjne /patrz § 1.2/, oraz poprzez sprzężenia funkcjonalne, nie w pełni jeszcze ustalone i zbadane. Wskutek tego, rozwiązywanie wielu zagadnień praktycznych odnośnie wyposażenia technicznego wojsk, organizacji i prowadzenia działań bojowych, prowadzi się niekiedy w oparciu o niezupełnie sprawdzone i uzasadnione sytuacje.

Do zagadnień takich zalicza się : wybór typów i kalibrów

broni, określenie optymalnej proporcji między różnymi rodzajami wojsk, ustalenie granicznych gęstości rozródowania ugrupowań bojowych, racjonalny stosunek kosztów między systemem dowodzenia i uzbrojenia, zagadnienia struktury organizacyjno - etatowej wojsk i wiele innych. Dla odpowiedniego rozwiązywania tego typu zagadnień niezbędna jest naukowo uzasadniona metodyka, umożliwiająca uzyskiwanie zarówno jakościowych, jak i ilościowych wskazań.

W związku z powyższym, w ostatnim okresie czasu, obserwuje się znaczny wzrost zainteresowania metodami modelowania matematycznego i możliwościami zastosowania ich w działalności wojska.

1.1 Zagadnienia operacyjno - taktyczne modelowania działań bojowych. Czynniki jakościowe i ilościowe

W wojsku w szerokim zakresie były i są stosowane różnorodne sposoby modelowania działań bojowych. Wiadomo na przykład, że przed szturmem Izmaïła, wojska wielkiego rosyjskiego dowódcy A.W. Suworowa, wykorzystywały model murów fortecznych. Na modelu tym rozpracowywano najlepsze warianty przeprowadzenia szturm. W okresie drugiej wojny światowej, przed napaścią na amerykańską bazę morską Pearl Harbour, Japończycy zbudowali model tej bazy z uwzględnieniem wszelkich zapór, dla uzyskania najlepszego wariantu niespodziewanego ataku.

Zwykle ćwiczenia dowódczo-sztabowe i gry wojenne, można również traktować jako modele działań bojowych. Ich swoistość jako modeli, związana jest z dużą ilością różnych uwarunkowań, z niezupełnie pełnym uwzględnieniem przeciwdziałania przeciwnika i z szeregu innymi ograniczeniami.

Prowadzone ćwiczenia z udziałem wojsk, zawierają mniej ograniczeń i pozwalają uzyskać o wiele więcej danych dla oceny różnych wariantów działań bojowych. Jednakże i w tym przypadku nie sposób

uwzględnić w całości przeciwdziałania przeciwnika z nieodzowną dokładnością.

Głównym mankamentem większości obecnie prowadzonych ćwiczeń jest to, że prowadzone są one jednorazowo. Dlatego też uzyskiwane wyniki mają charakter losowy, a wobec tego nie mogą stanowić ostatecznej podstawy do wysuwania poważnych wniosków.

Oczywiście należy podkreślić konieczność uwzględniania czynnika losowości przy modelowaniu tak bardzo złożonych zdarzeń, jakimi są działania bojowe. Nie biorąc pod uwagę tego, że na ich rezultat mają pełny wpływ określone obiektywne prawidłowości, w każdej oddzielnej walce lub starciu, prawidłowości te mogą przejawiać się w sposób losowy. Tylko średni wynik, wielokrotnie powtarzanych w jednakowych warunkach zdarzeń może być reprezentatywny i pozbawiony czynnika losowego.

Dowodzono, że ostateczne, średnie wyniki, można uzyskać w przypadku istnienia dużej grupy zdarzeń losowych. W związku z tym, z uwagi na szereg przyczyn - technicznych, ekonomicznych, organizacyjnych - ani jedno ćwiczenie nie powinno być przeprowadzane tylko jeden raz. Wprawdzie mogą zachodzić takie przypadki, z uwagi na potrzebę ujawnienia wszystkich możliwych wariantów wzajemnego oddziaływania ścierających się stron przy jednakowej początkowej ich liczebności i ugrupowaniu. Staje się więc jasne, że niewłaściwe i niecelowe byłoby zaprzestanie modelowania działań bojowych w tej lub innej formie. Jakie jest wobec tego wyjście z tych sprzeczności? Wyjście jest jedno - zastosowanie metod modelowania matematycznego działań bojowych wojsk z równoczesnym wykorzystaniem elektronicznej techniki obliczeniowej. Modelowanie matematyczne okazuje się niezwykle przydatne przy rozwiązywaniu zagadnień użycia i oceny efektywności wzorów uzbrojenia, przy opracowywaniu najdoskonalszych sposobów prowadzenia działań bojowych, w szkoleniu i podwyższaniu kwalifikacji kadr dowódczych.

Celem każdej bitwy lub starcia jest zadanie odpowiednich strat przeciwnikowi. Przy małym stopniu porażenia, opór przeciwnika nieco słabnie. Jak mówią, przeciwnik "dusi się", ale nie traci zdolności do walki. Przy dużym stopniu porażenia, przeciwnik wstrzymuje działania bojowe. Za najwyższy stopień rażenia uważa się całkowite zniszczenie przeciwnika.

Na wynik działań bojowych wpływa początkowa liczebność walczących stron i tempo wprowadzania rezerw, ilość i jakość uzbrojenia, wyszkolenie stanu osobowego i jego cechy moralno-polityczne, przygotowanie kadr dowódczych, stan środków dowodzenia, bojowe i materiałowo-techniczne zabezpieczenie wojsk, stan tyłów, warunki meteorologiczne i topograficzne. Szereg z tych czynników, nie da się w chwili obecnej wyrazić w postaci ilościowej, dlatego też, uwzględnienie ich wpływu może być mierzone w sposób szacunkowy. Przede wszystkim odnosi się to do czynnika moralnego.

Wysoki duch moralny wojsk przejawia się w ich wytrzymałości i zdolności prowadzenia działań bojowych w trudnych warunkach, na przykład w przypadku dużych strat. Każdemu wiadomo, że z mniejszymi liczebnie wojskami, ale odpowiednio wytrzymałymi i nieugiętymi, można osiągnąć taki sam rezultat, jak z o wiele bardziej liczebnymi, ale o niższym morale. Jednakże brak jest możliwości ilościowej oceny cech moralnych wojsk. Próba uzyskania takiej oceny możliwa jest tylko na drodze pośredniej. W oparciu o doświadczenia minionych wojen ustalono, że wojska przeciętnie tracą zdolność do oporu i dezorganizują się wówczas, gdy ich liczebność zaczyna zmniejszać się poniżej 60% stanu początkowego [32].

Wojska o wyższym stanie moralnym nie tracą zdolności bojowej nawet przy znacznie wyższym procencie strat. Szeroko znane są przypadki, obrazujące sytuacje, w których walka między ścierającymi się stronami trwa do tej pory, dopóki istnieją żołnierze zdolni do trzymania broni. Jest to szczególnie charakterystyczne dla wojen wyzwoleniczych i rewolucyjnych.

Stan moralny wojsk zależy od takich czynników jak: charakter i cele wojny, skład socjalny armii, poziom pracy wychowawczej i dyscypliny, postępowanie kadry dowódczej, poziom medycznego i materialowego zabezpieczenia wojsk, długotrwałość uczestnictwa w walkach. Wyjaśnienie i ocena wpływu wszystkich tych czynników na poziom gotowości bojowej wojsk jest zadaniem bardzo trudnym.

Do czynników jakościowych należy również stopień wyszkolenia wojsk. Daje się on właściwie już oceniać ilościowo. Na przykład, dobrze wyszkolony celowniczy, dokładnie i szybko nastawia celownik, co uwidacznia się w wynikach i szybkości strzelania, które można już obiektywnie w sposób ilościowy zmierzyć.

Najbardziej wiarogodnym źródłem oceny ilościowej czynników jakościowych są dane statystyczne, uzyskiwane w czasie specjalnych ćwiczeń wojskowych, strzelań doświadczalnych i bombardowań. Na niejednokrotnie prowadzonych za granicą tego typu ćwiczeniach tworzy się specjalne grupy dla rejestracji i sporządzania chronometraży działań większej liczby obsłóg bojowych, załóg, dowództw, stanowisk. Zebrane w ten sposób dane statystyczne w dalszej kolejności rozpracowuje się a następnie wykorzystuje przy obiektywnej ocenie przygotowania bojowego wojsk oraz przy modelowaniu matematycznym.

1.2. Obiekty modelowania. Parametry podstawowe.

Zadania modelowania. Przegląd literatury

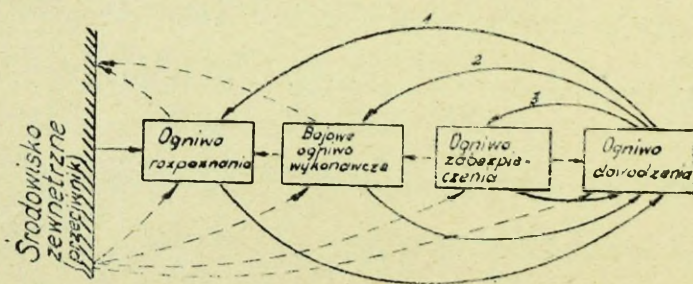
Obiektem modelowania może być system bojowy w całości lub jego podstawowe ogniwa. Pod pojęciem systemu bojowego rozumiany całości kształt środków zarówno aktywnych jak i pasywnych, organizacyjnie kierowanych i działających w celu wykonania postawionego zadania bojowego. Środki aktywne /broń, wojska/ przeznaczone są do realizacji bezpośredniego oddziaływania na przeciwnika. Środki pasywne /inżynieryjne, transportowe, tyłowe, łączności, pododdziały obsługi

itp./ nie oddziałują bezpośrednio na przeciwnika a przeznaczone są do zabezpieczenia działalności bojowej środków aktywnych.

Dowolny system bojowy posiada następujące /rys.1.1/ ogniwa podstawowe : rozpoznanie, bojowe / wykonawcze/ zabezpieczenie i dowodzenie. Funkcje każdego ogniwa i kolejność wzajemnego oddziaływania na inne określa się z uwagi na strukturę systemu, wykonywane zadania i przyjęte lub ustalone prawidłowości funkcjonowania systemu.

Wszystkie ogniwa systemu znajdują się pod oddziaływaniem fizycznym środowiska zewnętrznego /przeciwnika/ wpływającym na zmiany stanu systemu. Odwrotne oddziaływanie fizyczne na środowisko zewnętrzne, przejawia tylko ogniwo bojowe systemu. Oprócz zewnętrznych oddziaływań fizycznych w systemie, prowadzących do pogorszenia jego stanu, istnieją jeszcze wewnętrzne fizyczne związki, prowadzące z kolei do poprawy jego stanu, drogą uzupełniania stanu osobowego i środków materiałowo - technicznych.

Wszystkie ogniwa systemu, sprzężone są z ogniwem dowodzenia, poprzez bezpośrednie i zwrotne sprzężenia informacyjne, służące do przekazywania rozkazów, przyjmowania meldunków o ich wykonaniu i o stanie kierowanych obiektów.



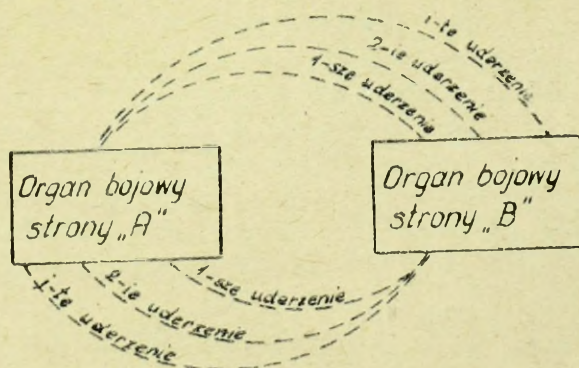
Rys.1.1. Uogólniony schemat strukturalny systemu bojowego
- Uogólnione sprzężenia fizyczne , -uogólnione sprzężenia informacyjne , 1 - obwód wykrywania ; 2 - obwód bojowy ; 3 - obwód zabezpieczenia

Stan systemu określa się w oparciu o całokształt stanów

każdego ogniwa, charakteryzowanych następującymi podstawowymi parametrami :

ω_i - uogólniona współrzędna i - tego ogniwa opisująca jego położenie lub szybkość przemieszczania ; n_i - bieżąca liczebność, przyporządkowywana jednorodnym stanom ; v_i - szybkość zmiany liczebności ; m_i - wartość oczekiwana wyników wykonania zadania podstawowego ; t_i - czas wykonania zadania podstawowego ;
 μ_i - miara dokładności wykonania zadania podstawowego.

W zależności od przeznaczenia systemu i jego składu, przytoczone powyżej parametry, z uwagi na cel badań można uzupełniać i uszczegóławiać. W szeregu interesujących przypadkach praktycznych można przedstawiać systemy bojowe stron walczących w postaci pojedynczych ogniw, obrazujących oddziaływanie jednego ogniwa na drugie , jak to pokazano na schemacie rys.1.2. Wybierając konkretny sposób fizycznego oddziaływania /rodzaj broni i sposób jej wykorzystania/ i przyjmując określone ugrupowanie bojowe dla każdego ogniwa, przy pomocy takiego schematu, można rozwiązać stosunkowo znaczny kompleks zadań, związanych z ilościową oceną jakości broni każdej ze stron, przy równoczesnym uwzględnieniu różnorodnych sposobów jej zastosowania.



Rys.1.2. Schemat oddziaływania fizycznego stron poprzez wymianę uderzeń ogniowych

Dla uzyskania takiej oceny winno się brać pod uwagę następujące dane wyjściowe :

- liczebności początkowe ogniw bojowych ;

- przyjęte sposoby tworzenia ugrupowań bojowych ;
- charakterystyki techniczne broni /donośność, szybkostrzelność, rozrzut, powierzchnia rażenia / ;
- przyjęte sposoby wykorzystywania danej broni /strzelanie docelowe, strzelanie powierzchniowe, kolejność strzelania itp./.

W oparciu o powyższe dane wyjściowe i schemat oddziaływania bojowego stron ustala się zależności matematyczne zmian liczebności ich w czasie.

Jako chwilę zakończenia działań bojowych, traktuje się zwykle chwilę wykonania zadania bojowego, tj. osiągnięcie nakazanego stopnia obezwładnienia lub zniszczenia jednej ze stron. Przyjmuje się, że ta strona, która wcześniej dobieje się wykonania zadania bojowego, posiada broń bardziej efektywną i umiejętniej ją wykorzystuje. Porównując położenie stron w chwili zakończenia działań bojowych, można przejść do oceny ilościowej jakości broni i ustalenia stosownych współczynników dla różnych rodzajów broni. Zagadnienia te rozpatruje się szczegółowo w rozdz.1 i 3.

W szczególnym przypadku, kiedy ogniwa bojowe każdej ze stron mają tylko po jednym środku aktywnym / $n_{10} = n_{20} = 1/$, wówczas mamy do czynienia ze starciem zbrojnym o charakterze pojedynku. Jeśli w składzie ogniwa bojowego każdej ze stron jest więcej środków aktywnych, wówczas starcie zbrojne przyjmuje charakter walki grupowej.

W oparciu o schemat na rys. 1.2 , oprócz badania oceny jakości uzbrojenia, można również badać wpływ następujących czynników na wyniki działań bojowych :

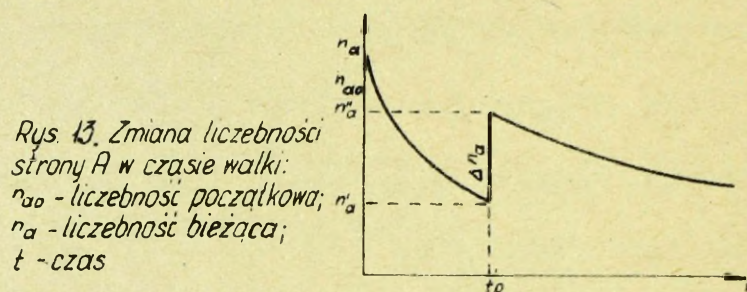
- terenu i budowli ochronnych ;
- ugrupowania bojowego, jego gęstości i szybkości przemieszczania ;

- wzajemnego stosunku i wpływu początkowej liczebności stron ;
- kolejność prowadzenia ognia z uwzględnieniem lub bez uwzględnienia widoczności celów.

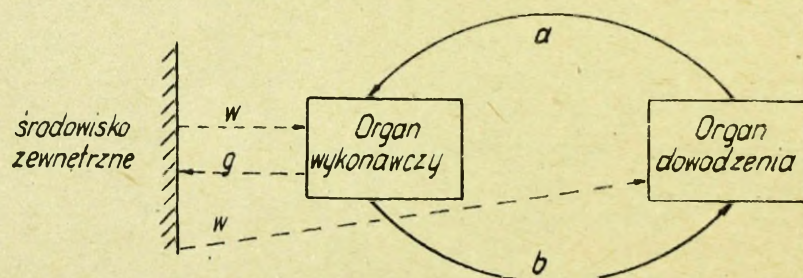
Rzecz prosta, że do wyników uzyskanych w oparciu o powyższy stosunkowo prosty schemat, należy odnosić się bardzo ostrożnie, określać granice ich stosowalności, wychodząc z przyjętych warunków i ograniczeń systemu. W szczególności schemat na rys. 1.2 nie pozwala uwzględniać wpływu ognia rozpoznania na wyniki działań bojowych, ognia dowodzenia i zaopatrzenia, które mają niezwykle istotne znaczenie.

Często, celem uwzględnienia wpływu powyższych ogniw, wprowadza się ich charakterystyki w skład danych wyjściowych ognia bojowego, co pozwala na prowadzenie badań w ramach schematu przedstawionego na rys. 1.2. Na przykład, jeśli pracę organów rozpoznania oceni się za pomocą średniego czasu wykrycia celu, to czas ten można brać pod uwagę, przy ustalaniu kolejności prowadzenia ognia, przyjmując, że ostrzał celu następuje dopiero po jego wykryciu. Wpływ organów tyłowych, rozumianych w szerokim sensie a rozpatrywanych tylko z punktu widzenia uzupełniania składu osobowego organu dowodzenia, uzupełnienia w broń i amunicję, można uwzględniać, wprowadzając w odpowiednich chwilach czasu zmiany ilościowe ognia bojowego, związane właśnie z pracą organów tyłowych. Na rys. 1.3 przykładowo pokazana jest krzywa zmian liczebnych jednej ze stron w trakcie walki. W chwili t_p zostały wprowadzone rezerwy w ilości $\Delta n_a = n_a'' - n_a'$ w wyniku czego zmniejszyło się tempo strat i walka zaczęła przebiegać korzystniej dla tej strony. W analogiczny sposób można uwzględniać wpływ organów tyłowych.

W wielu praktycznych przypadkach, wskazanym jest przedstawienie systemu bojowego w postaci połączenia dwóch ogniw : bojowego i dowodzenia /rys. 1.4/. Obiektami modelowania będą tutaj, system uzbrojenia i system dowodzenia. Badanie takich systemów wymaga z reguły zastosowania bardzo złożonego aparatu matematycznego. Związane jest to z tym, że dowodzenie wojskami, w odróżnieniu



od innych systemów, obfituje w cały szereg cech specyficznych. System dowodzenia zaliczany jest do klasy probabilistycznych dynamicznych systemów informacyjnych. Dynamika tych systemów obejmuje zarówno zmiany samej struktury systemu, jak i zmiany ich składu, występujące w trakcie procesu dowodzenia, pod wpływem warunków



Rys. 14. Typowy szkic dowodzenia
 a - bezpośrednie sprzężenie informacyjne; b - zwrotne sprzężenie informacyjne;
 w - bezpośrednie oddziaływanie fizyczne; g - zwrotne oddziaływanie fizyczne;

zewnętrznych /przeciwnika/. Funkcjonowanie takich systemów, odbywa się na skutek obiegu informacji. Ilość przekazywanej informacji nie ma jednoznacznego wpływu na wyniki dowodzenia. Stochastyczny

charakter sprzężeń informacyjnych a więc i probabilistyczny charakter systemów dowodzenia, przejawiają się w nieokreśloności wzajemnego stosunku między wejściami i wyjściami tych systemów.

W oparciu o schemat 1.4 , przy użyciu metod matematycznych, można rozwiązywać następujące zadania :

- określenie charakterystyk ilościowych systemu dowodzenia i ich wpływu na wyniki działań bojowych ;
- wstępne uzasadnienie potrzeb systemu dowodzenia w zależności od jego struktury, liczby i typów organów dowodzenia, czasu zbierania, opracowywania i przekazywania informacji itp. ;
- ocena wpływu niezawodności i dokładności pracy systemu dowodzenia na wyniki działań bojowych ;
- ustalenie wzajemnego stosunku między niezawodnością systemu dowodzenia i nakładami ;
- określenie racjonalnego stosunku między kosztami systemu dowodzenia i systemu uzbrojenia i in.

Próba przybliżonego rozwiązywania tego typu zadań pokazana jest w przykładzie uproszczonego modelu walki grupowej w § 3.5.

Nie posiadamy jeszcze w chwili obecnej w należyty sposób rozpracowanej metodyki rozwiązywania takich zadań, która pozwalałaby na uzyskiwanie ostatecznych wyników mających w ramach rozpatrywanych zagadnień znaczenie ogólnie teoretyczne.

Wykaz opublikowanej za granicą, głównie w USA , literatury naukowo - teoretycznej dotyczącej modelowania matematycznego działań bojowych, obejmuje około dwustu pozycji; głównie są to artykuły umieszczone w czasopiśmie amerykańskiego towarzystwa badań operacyjnych /ORSA/ , począwszy od 1956 r., i prace centrum naukowego firmy „ RAND CORPORATION ”. Większość tych prac poświęcona jest matematycznym badaniom działań bojowych, według schematu

pokazanego na rys. 1.2 , tj. według schematu bezpośrednich starć zbrojnych ogniwo bojowych, różniących się składem, liczebnością i uzbrojeniem.

Jedną z pierwszych prac w zakresie modelowania matematycznego działań bojowych była praca wykonana w 1916 r. przez angielskiego księdza i matematyka Lanchestera [32] . Rozpatrywano w niej działania bojowe lotnictwa, które w tym okresie zaczynało formować się w samodzielny rodzaj sił zbrojnych. Z różnych przyczyn, praca ta w swoim czasie nie zyskała sobie uznania i pozostawała w zapomnieniu do 1947 r. Praktyczne zainteresowanie matematycznymi modelami działań bojowych, szeroko wystąpiło dopiero w trakcie drugiej wojny światowej. Zainteresowaniu temu towarzyszyły szerokie badania o różnym stopniu szczegółowości, których przegląd dali w swej książce Morse i Kimball [13] . W okresie powojennym, obserwuje się dalszy rozwój badań w zakresie modelowania matematycznego działań bojowych. Dowolnie szczegółowej analizie poddawane były prostsze sytuacje bojowe o charakterze pojedynków. Względnie pełna bibliografia tych prac została ujęta przez Anckera [33] , i opublikowana w czasopiśmie ORSA w 1963 r. Dało się zauważyć intensywne badania, oparte o zastosowanie w różnych ujęciach metody Lanchestera [34, 35, 36] . We wszystkich tych pracach rozpatrywane były w zasadzie zagadnienia dynamiki działań bojowych i efektywności uzbrojenia, na przykładzie pojedynków i grupowych starć zbrojnych środków jednorodnych /samoloty przeciw samolotom, okręty przeciw okrętom, artyleria przeciw artylerii itp. /.

Zadanie związane z badaniem działań bojowych sił powietrznych morskich i artylerii w oparciu o modelowanie matematyczne sprowadzało się do badania efektywności środków obrony przeciwlotniczej [37] . Nowym czynnikiem pojawiającym się w tych badaniach były matematyczne metody analizy pracy systemów rozpoznania i dowodzenia.

Zastosowanie tych metod wiązało się z użyciem elektronicznych maszyn liczących. W oparciu o te i inne badania ukazała się w efekcie monografia, stanowiąca matematyczną teorię poszukiwania celów [26]. Co się tyczy matematycznych metod analizy pracy organów tyłowych, to pierwsza praca o tym kierunku związana z tyłami wojsk lotniczych opublikowana była w 1960 r. [38]. Następnie ukazało się jeszcze kilka prac obejmujących zagadnienia szczególne [39].

Mniej więcej w tym samym czasie w USA, rozpoczęto badania dynamiki działań bojowych wojsk lądowych z uwzględnieniem wpływu terenu i budowli inżynierskich. Jedną z pierwszych prac z tego zakresu poświęcona była modelowaniu działań wzmocnionej kompanii czołgów na rejon umocniony. Opublikowanie jej miało miejsce w 1959 r. [29]. W pracy tej na plan pierwszy wystąpiło zagadnienie zastosowania metod badań statystycznych i elektronicznych maszyn liczących przy modelowaniu działań wojsk lądowych. W następnych pracach, rozpatrywano zagadnienia ewentualnego rozszerzenia zastosowania tych i innych metod, przy matematycznych badaniach działań bojowych wojsk lądowych. W szczególności dużo uwagi poświęcano metodom opartym na teorii masowej obsługi [40].

W rodzimej literaturze, zagadnienia modelowania działań bojowych, znalazły odzwierciedlenie w szeregu pracach, na przykład w opracowaniach zespołu autorskiego pod kierownictwem prof. J. Czujewa i w opracowaniach E.S. Wentcel [5,21], poświęconych zasadniczym problemom, teorii efektywności bojowej, metodom jej oceny it.d.

Podstawową rolę w tworzeniu teorii modelowania działań bojowych / w rozwoju metod matematycznych leżących u jej podstaw)

odegrały prace B.W. Gniedenki, N.P. Buslenki i J.N.Kowalenki [6,23,78]. W pracach tych zostały przedstawione zasady opisu matematycznego systemów złożonych, niezbędny aparat obliczeniowy oraz metodyka analizy uzyskanych wyników.

Oprócz wyżej przedstawionych prac, prowadzono cały szereg badań w zakresie modelowania matematycznego. Badania te często związane były z konkretnymi celami i nie posiadają ogólnie teoretycznego znaczenia. Publikowano je w postaci artykułów, zamieszczanych w różnych czasopismach. Pod względem metodycznym nie przedstawiają one specjalnego znaczenia.

Można ogólnie uważać, że stan kształtowania się podstawowych zasad teorii modelowania jest w zasadzie zakończony. Istnieje odpowiedni aparat matematyczny oraz metodyka prowadzenia badań z zastosowaniem elektronicznej techniki obliczeniowej. Zgromadzone zostało duże doświadczenie w zakresie analizy ilościowej dynamiki działań bojowych w różnych sytuacjach. Następny etap prac winien obejmować sprawę uogólnień posiadanych doświadczeń, rozwój metod matematycznych dla wszechstronnych badań sytuacji złożonych, występujących w pełnych systemach bojowych.

1.3. Typy modeli matematycznych.

Podstawowe etapy modelowania.

Analiza wyników i ocena ich dokładności

Budowa modelu dla pewnego procesu fizycznego / w danym przypadku dla procesu działań bojowych/ oznacza dobranie odpowiedniego procesu matematycznego, charakteryzującego się następującymi właściwościami :

1/ między elementami procesu matematycznego i obiektami procesu fizycznego ustala się pewne wzajemne stosunki ;

2/ w obu procesach przyjmuje się takie same przedziały czasowe ;

3/ zmiany stanu odpowiednich elementów procesu matematycznego, dzięki określonym wzorom i formułom matematycznym, są odbiciem określonych zmian obiektów procesu fizycznego.

Powyżej zwracaliśmy już uwagę na to, że w przypadku procesów działań bojowych, wszelkie prawidłowości są o tyle złożone, że opisanie ich w sposób wyczerpujący jest niemożliwe. Wskutek tego, model matematyczny, charakteryzuje się określonym stopniem przybliżenia, pozwalającym rozróżniać dla jednego i tego samego procesu fizycznego modele bardziej lub mniej dokładne.

W zależności od metod modelowania matematycznego, modele dzieli się na dwie zasadnicze klasy : a/ analityczne i b/ stochastyczne.

W modelach analitycznych, wyniki modelowania uzyskuje się poprzez odpowiednie przetwarzanie danych, przy użyciu formuł i zależności matematycznych. Zależności te, przykładowo mogą być oparte na metodach algebry liniowej, teorii równań różniczkowych, rachunku prawdopodobieństwa, teorii gier it.p. Widoczne jest to nawet w nazwach modeli analitycznych, które w zasadzie odzwierciedlają konkretne metody matematyczne w oparciu o które były budowane.

Modele statystyczne opierają się na metodzie Monte Carlo [2], którą w szczególności stosuje się bądź w przypadkach złożonych bądź w sytuacjach, kiedy nieznane są zależności matematyczne, między pewnymi obiektami. Pozwala ona znaleźć rezultat ich wzajemnego oddziaływania przy pomocy sztucznych badań stochastycznych i opisu logicznego. Jeśli stan wszystkich obiektów opisywany jest w jednakowych przedziałach czasu, wówczas otrzymujemy tak zwany „ Δt - model”. Jeśli natomiast stan obiektów opisywany jest tylko w określonych chwilach ich wzajemnego oddziaływania, wówczas uzyskujemy model nazywany „modelem z punktami węzłowymi”.

Znane są również modele kombinowane w których część procesów bada się metodami stochastycznymi, a pozostałe - analitycznymi. Modele takie są wygodne do badania działań bojowych o wielkiej skali.

Oprócz podziału według metod matematycznych, modele klasyfikuje się również w zależności od charakteru i skali działań bojowych. W zależności od sposobów tworzenia ugrupowań bojowych przyjęto rozpatrywać modele o następującej charakterystyce starć zbrojnych : walki o charakterze pojedynku, działania bojowe ugrupowań i ugrupowań liniowych usytuowanych na płaszczyźnie lub w przestrzeni. Wybór odpowiedniego typu modelu oraz stopnia jego dokładności zależy przede wszystkim od założonych celów badań, charakteru danych początkowych, poziomu zgłębienia modelowanego procesu oraz możliwości praktycznej budowy modelu.

W większości przypadków, celem oceny efektywności uzbrojenia, wystarczy posiadać model analityczny działań bojowych o charakterze pojedynku. Ocena efektywności bojowej amunicji może być dokonana w oparciu o model analityczny działań bojowych rozśrodkowanych ugrupowań. Dla analizy manewrów taktycznych i głębszych badań dynamiki działań bojowych, mogą być zastosowane modele stochastyczne. Niestety, nie ma możliwości ustalenia ogólnych zaleceń, związanych z wyborem modelu matematycznego dla rozwiązania konkretnych zadań. Często bowiem, te same zadania, mogą być rozwiązywane w oparciu o różnorodne modele matematyczne. Równocześnie, każdy model matematyczny pozwala rozwiązywać dość szeroki krąg zadań, o czym jest mowa w rozdz. 2 i 3. Dokonując wyboru określonego typu modelu matematycznego, należy przede wszystkim brać pod uwagę konkretne warunki początkowe.

Matematyczne opracowywanie modeli działań bojowych, obejmuje następujące główne etapy :

- postawienie zadania i sformułowanie celów badań ;
- formalizacja opisu badanego procesu działań bojowych ;
- opracowanie algorytmu modelu ;
- wybór kryteriów oceny wyników modelowania ;
- przygotowanie programu modelu ;
- uruchomienie programu na EMC i jego weryfikacja ;
- ocena dokładności uzyskanych wyników ;
- realizacja modelu.

Z metodycznego punktu widzenia najtrudniejszy etap ,poza etapem opracowania algorytmu modelu, stanowi etap wyboru kryteriów oceny wyników modelowania. W modelach walki zbrojnej, w charakterze takich kryteriów, przyjmuje się : czas zakończenia działań bojowych, liczebność stron w chwili zakończenia działań bojowych lub szybkość zmian liczebności na oddzielnych kierunkach i w różnych chwilach czasu. Chwila zakończenia działań bojowych oznacza bądź pełne zniszczenie jednej ze stron, bądź pełną utratą przez nią zdolności do walki. Modelowanie działań bojowych pod kątem zniszczenia jednej ze stron, przy stosowaniu klasycznego uzbrojenia, może, dla strony zwycięskiej postulować zawyżone ilości sił i środków i w ten sposób nie będzie właściwym odbiciem procesu walki. Zwykle bowiem, praktyczne działania bojowe kończą się wówczas, kiedy z różnych przyczyn /naruszenie systemu dowodzenia, brak amunicji, spadek ducha bojowego, dezorganizacja itp/ jedna ze stron, traci zdolność do jakiegokolwiek oporu. W każdym konkretnym przypadku winno się wybierać takie kryteria, które najlepiej pozwalają ocenić wyniki działań bojowych oraz określić wpływ czynników podstawowych, rozpatrywanych w § 1.1.

Jedno z ważnych zagadnień modelowania stanowi ocena dokładności uzyskanych wyników. W pierwszej kolejności musi się określić

zakres i stopień wiarygodności wyników modelowania. Wiadomym jest bowiem, że założenia każdej teorii winny być skonfrontowane z uzyskiwanymi w praktyce danymi doświadczalnymi, a rozumianymi w szerokim sensie. Jednakże nie jest możliwe poddawanie pełnemu praktycznemu sprawdzeniu, teoretycznych modeli działań bojowych. Dlatego też naukowcy zagraniczni, dla oceny dokładności modeli, stosują weryfikację cząstkową, bądź metody analogii historycznych lub ćwiczenia eksperymentalne.

Cząstkowa weryfikacja sprowadza się do porównania podstawowych bloków modeli, na przykład bloku poszukiwania, strzelania z rzeczywistymi układami i ich strukturą. Uważa się, że jeżeli podstawowe bloki modelu wiernie odzwierciedlają rzeczywistość a sprzężenia między nimi są ujęte prawidłowo, to wyniki są pewne i można się na nich opierać w dalszym wnioskowaniu.

Drugi sposób weryfikacji oparty jest na modelowaniu walk i starć zbrojnych, prowadzonych w minionych wojnach, których wyniki są dokładnie znane. Porównanie wyników teoretycznych z rzeczywistymi, pozwala ocenić dokładność modelowania. Ważnym jest tutaj warunek, aby wyników porównywanych była odpowiednio duża ilość.

Wreszcie, dla weryfikacji modeli, organizuje się specjalne ćwiczenia doświadczalne. W armii USA na poligonie w Aberdeen, został utworzony dla tych celów doświadczalny pułk czołgów. Prowadzi on ćwiczenia z pozoracją ognia. Ćwiczenia te są wielokrotnie powtarzane a wyniki ich są dokładnie rejestrowane. Strzelanie z dział czołgowych prowadzi się różnokolorowymi pociskami z ołowiu. Rozpłaszczając się na pancerzu pozostawiają znaki, według których, określa się czas i wynik strzelania.

Metodyki uwzględniania jakościowych i ilościowych czynników oceny dokładności otrzymywanych wyników, będą przedstawione w rozdziałach, poświęconych analizie odpowiednich typów modeli matematycznych.

MODELE MATEMATYCZNE DZIAŁAŃ BOJOWYCH O CHARAKTERZE POJEDYŃKU

W rozdziale pierwszym rozpatrzone zostały podstawowe cele i zadania modelowania matematycznego działań bojowych. Obecnie zostaną omówione problemy modelowania prostych form zbrojnego starcia mającego charakter pojedynku, w którym przeciwnicy mają do swojej dyspozycji po jednym środku bojowym /np. czołgu, środku przeciwpancernym / .

Analiza takiej prostej sytuacji nie pozwala rozpatrzyć wielu ważnych problemów związanych ze współdziałaniem środków ogniowych i z kierowaniem walką. Jednak już w działaniach bojowych mających charakter pojedynku, można wykryć czynniki cechujące dynamikę walki, prześledzić wpływ różnych warunków na przebieg i oczekiwany wynik starcia oraz wykorzystać rezultaty modelowania matematycznego do rozwiązywania niektórych zadań praktycznych związanych z orientacyjną oceną efektywności rodzajów uzbrojenia.

Przy rozwiązywaniu tych problemów właśnie pojedynki były przedmiotem badań wielu specjalistów (patrz, np. [28,38]) .

Rozpatrzenie działań bojowych o charakterze pojedynku oprócz praktycznego znaczenia ma także ważne znaczenie metodyczne, ponieważ w całej pełni ukazuje podstawowe zasady modelowania matematycznego, które nie są ukryte pod wieloma możliwościami stron w złożonych warunkach walki.

Pozwoli to czytelnikowi, który interesuje się rozwiązywaniem specyficznych zadań, nie mieszczących się w ramach znanych schematów, zrealizować samodzielnie wszystkie niezbędne kalkulacje i obliczenia w celu zbudowania i wykorzystania przy rozwiązywaniu tych zadań odpowiednich modeli matematycznych, pozwoli

szybciej i łatwiej zorientować się, jak wykorzystać w swojej dalszej pracy współczesny aparat matematyczny badań operacyjnych.

2.1. Pojedynek - podstawowy element dynamicznego modelu walki

Strzelanie do celu jest jedną z podstawowych części, która wchodzi w skład działań bojowych. Wynik strzelania do celu zależy od wielu czynników : od charakterystyk środka ogniowego prowadzącego strzelanie, od odległości strzelania, od charakteru obrony celu itd.

Wskutek równoczesnego wpływu całego szeregu błędów, jakie występują przy strzelaniu, trafienie w cel jest zdarzeniem losowym. W rezultacie strzelania może ono wystąpić lub nie z pewnym prawdopodobieństwem.

W przypadku nie trafienia pierwszym strzałem, prawdopodobieństwo trafienia następnym strzałem w cel może być większe, jeśli będą wprowadzone poprawki zmniejszające niektóre błędy, jakie zostały popełnione przy przygotowaniu pierwszego strzału / np. błędy popełnione przy określeniu położenia celu / .

Trafienie w cel nie zawsze jest równoznaczne z jego rażeniem. Np. aby razić czołg trzeba przebić pancierz i uszkodzić jego najważniejsze elementy. Wynik strzelania można charakteryzować prawdopodobieństwem rażenia celu /przy danych warunkach trafienia/ lub średnią ilością trafień koniecznych do rażenia celu.

Średnia ilość trafień zależy od : odległości strzelania, charakterystyk środka ogniowego prowadzącego strzelanie, rodzaju pocisku i innych czynników.

Dla rażenia niektórych celów nie konieczne jest ich bezpośrednie trafienie. Wybuch pocisku w odpowiedniej odległości od celu może doprowadzić do jego rażenia. Łącząc oba rodzaje celów,

z punktu widzenia możliwości ich rażenia, powstaje pojęcie rozkładu rażenia, który określa odpowiednie prawdopodobieństwo rażenia celu dla każdego możliwego położenia celu i punktu trafienia /lub wybuchu/ pocisku.

Określenie charakteru i parametrów rozkładu rażenia różnych celów oraz badanie wpływu różnorodnych warunków na rozrzut przy strzelaniu są przedmiotem teorii strzelania i rozpatrywane są w odpowiedniej literaturze [14].

Będziemy zakładać prawdopodobieństwo rażenia celu dla każdego strzału, licząc, że przy tym uwzględnia się rozrzut pocisków i rozkład rażenia.

Następnie będziemy zakładać, że w wyniku strzału cel może być rażony lub nie poniesie żadnych strat. Nie będziemy uwzględniać więc możliwego nagromadzenia się strat dla danego celu.

Naszym podstawowym zadaniem będzie określenie oczekiwanych wyników bojowego starcia, w którym strony za pomocą środków ogniowych oddziałują na siebie. Dynamika tego procesu powinna być przedstawiona w modelach matematycznych działań bojowych. Prostszy z wielu takich dynamicznych modeli walki są pojedynki - modele matematyczne starcia dwóch pojedynczych środków bojowych.

Każdy środek biorący udział w pojedynku dąży w procesie walki do rażenia przeciwnika. Dlatego w warunkach dynamiki walki pojęcie celu, jako pasywnego obiektu, do którego prowadzi się strzelanie, nie wyczerpuje istoty rzeczywistego procesu. Środek, który oddaje strzał, sam staje się celem i do niego prowadzone jest strzelanie.

W celu odzwierciedlenia istoty starcia stron należy uwzględnić przeciwdziałanie przeciwnika w trakcie strzelania. Jedną z form przeciwdziałania są uderzenia odwetowe. W tym przypadku chwile wzajemnego, ogniowego oddziaływania stron biorących udział w starciu - chwile uderzeń - są w pełni określone i wcześniej

wiadome.

Na tej podstawie może być obliczony oczekiwany wynik starcia. Dla ilustracji rozpatrzmy proste przykłady. Założymy, że w pojedynku biorą udział dwa środki ogniowe A i B, każdy ze środków może oddać nieograniczoną ilość strzałów.

Prawdopodobieństwo rażenia przeciwnika kolejnym strzałem nie zależy od poprzednich strzałów i wynosi p dla środka A i q , dla środka B.

Założmy, że pierwszy strzela środek A, następnie strzela środek B, później znów strzela środek A itd. Wynik poprzedniego strzału otrzymujemy zanim nastąpi strzał następny. W dalszych rozważaniach założenie to będziemy formułować jako natychmiastowe otrzymanie wyników prowadzonego ognia. W naszych założeniach możemy otrzymywać prawdopodobieństwo Π_B przebiegu pojedynku polegającego na tym, że środek B będzie rażony pod warunkiem, że pierwszy strzał wykona strona A. Można obliczyć to ze wzoru :

$$\Pi_B = p + \frac{1-p}{1-q} p + \frac{1-p}{1-q} \frac{1-p}{1-q} p + \dots$$

Wyrażenie to może być uproszczone, ponieważ jak łatwo można zauważyć, jest to suma członów postępu geometrycznego. Uwzględniając to, przy dostatecznie dużej liczbie strzałów otrzymamy :

$$\Pi_B = \frac{p}{1 - \frac{1-p}{1-q}} \quad /2.1/$$

Identycznie może być określone prawdopodobieństwo Π_A rażenia środka A :

$$\Pi_A = \frac{q \frac{1-p}{1-q}}{1 - \frac{1-p}{1-q}} \quad /2.2/$$

Wyrażenia /2.1/ i /2.2/ otrzymane są pod warunkiem, że pierwszy strzał oddaje strona A. Można, pomimo wcześniej przy-

jętej kolejności strzelania, rozpatrzyć drugi wariant, kiedy pierwszy strzał oddaje strona B, a zasada kolejności uderzeń jest zachowana.

W tym przypadku wyrażenia dla π_A^* i π_B^* będą odpowiednio równe :

$$\pi_A^* = \frac{q}{1 - (1-p)/(1-q)} \quad /2.3/$$

$$\pi_B^* = \frac{p / (1 - q)}{1 - (1-p)/(1-q)}$$

Jeżeli np. $p = 0,5$, $q = 0,25$ to wstawiając te dane do wzorów /2.1/ - /2.3/, otrzymamy :

$$\pi_A = \frac{0,25 \cdot 0,5}{1 - 0,5 \cdot 0,75} = 0,2$$

$$\pi_B = \frac{0,5}{1 - 0,5 \cdot 0,75} = 0,8$$

$$\pi_A^* = \frac{0,25}{1 - 0,5 \cdot 0,75} = 0,4$$

$$\pi_B^* = \frac{0,5 \cdot 0,75}{1 - 0,5 \cdot 0,75} = 0,6$$

Z wyników tego przykładu widać, że zmiana kolejności strzelania wpływa w sposób istotny na wartość prawdopodobieństwa. Stąd wniosek, że problem kolejności strzelania środków ogniowych biorących udział w pojedynku nie może być rozwiązywany dowolnie. W warunkach kiedy kolejność strzelania może być dowolna, uwzględniając równe możliwości środków ogniowych uczestniczących w pojedynku, należy określać średnią wielkość prawdopodobieństwa na podstawie dwóch poprzednio otrzymanych wyników odnoszących się do różnych kolejności rozpoczęcia strzelania.

Uwzględniając to, oczekiwane wyniki prawdopodobieństwa odzwierciedlające możliwie dokładnie stosunek sił środków ogniowych biorących udział w pojedynku wynoszą :

$$\bar{\pi}_A = \frac{0,2 + 0,4}{2} = 0,3$$

$$\bar{\pi}_B = \frac{0,8 + 0,6}{2} = 0,7 \quad /2.4/$$

Przyjęcie średnich wyników pozwala przypuszczać, że dowolna z dwóch rozpatrywanych kolejności strzelania może w realnych warunkach wystąpić z jednakowym prawdopodobieństwem.

Otrzymane wyniki /2.4/ należy rozumieć w sposób następujący : z ogólnej liczby pojedynków około 30 % zakończy się rażeniem środka A i około 70 % rażeniem środka B.

Obliczenia te są proste, jednak wcześniejsze określenie chwil uderzeń przedstawia dość duże trudności i nie odpowiada rzeczywistemu rozkładowi uderzeń w czasie walki.

W rzeczywistości, często bywa tak, że chwile strzałów są zdarzeniami losowymi i wcześniej nie mogą być dokładnie określone. Oprócz tego w rzeczywistym pojedynku ogólna liczba strzałów, którą oddaje każda strona nie może być także dokładnie określona, ponieważ środek ogniowy biorący udział w pojedynku może być rażony zanim wystrzeli swój zapas amunicji. Chwile strzałów i ogólna liczba strzałów oddana przez środki ogniowe biorące udział w pojedynku są zdarzeniami losowymi.

Okoliczności te mogą być uwzględnione w modelach matematycznych zbudowanych na podstawie przypadkowego rozkładu ognia w procesie walki. Zadanie uwzględnienia przypadkowego rozkładu ognia w modelach matematycznych może być rozwiązane na podstawie rozpatrzenia losowego strumienia strzałów.

Zasady te rozpatrzmy na prostym przykładzie. Załóżmy, podobnie jak poprzednio, że w pojedynku biorą udział dwa środki A i B, szybkostrzelności ich są jednakowe i wynoszą λ strzałów na jednostkę czasu, a prawdopodobieństwa rażenia jednym strzałem wynoszą odpowiednio: p dla środka A i q dla środka B. Ilość amunicji dla środków nieograniczona.

Środki biorące udział w pojedynku prowadzą strzelanie w miarę gotowości, stopień gotowości danego środka do oddania następnego strzału nie zależy od ilości oddanych strzałów i od tego ile czasu trwa przygotowanie. Jeżeli w chwili t środek ogniowy przygotowuje się do oddania kolejnego strzału, to do chwili $t + \Delta t$ / dla dostatecznie małych wielkości Δt / kolejny strzał jest oddany z prawdopodobieństwem $\lambda \cdot \Delta t + o / \Delta t$ / , przy czym dla $o / \Delta t$ / spełniony jest warunek

$$\lim_{t \rightarrow 0} \frac{o / \Delta t /}{t} = 0$$

W matematyce, uproszczenia dokonane w stosunku do przypadkowego rozkładu ognia oznaczają, że mamy do czynienia z tzw. najprostszym strumieniem strzałów. Szybkostrzelność środków ogniowych λ jest średnią szybkostrzelnością lub średnią liczbą strzałów, którą oddaje każdy ze środków w jednostce czasu.

Pojedynek rozpoczyna się od chwili $t = 0$, oba środki biorące udział w pojedynku od tej chwili zaczynają jednocześnie przygotowywać strzelanie i w miarę gotowości strzelać jeden do drugiego.

Oznaczmy przez $P_A / t /$ i $P_B / t /$ prawdopodobieństwa rażenia środków A i B w zależności od czasu t , który upłynął od rozpoczęcia pojedynku. Obecnie pokażemy, jak można określić wielkości prawdopodobieństw $P_A / t /$ i $P_B / t /$.

Jeżeli do dowolnej chwili $t \geq 0$ pojedynek trwa, to jest oba środki nie zostały rażone, wówczas w dostatecznie małym przedzia-

le czasu Δt / do czasu $t + \Delta t$ / mogą wystąpić następujące zdarzenia :

- C_1 - środek A odda strzał i razi cel, prawdopodobieństwo wystąpienia tego zdarzenia wynosi : $p \lambda \Delta t + O / \Delta t /$;
- C_2 - środek B odda strzał i razi cel, prawdopodobieństwo wystąpienia tego zdarzenia wynosi : $q \lambda \Delta t + O / \Delta t /$;
- C_3 - środek A odda strzał i nie razi celu, prawdopodobieństwo wystąpienia tego zdarzenia wynosi : $/1 - p \lambda \Delta t + O / \Delta t /$;
- C_4 - środek B odda strzał i nie razi celu, prawdopodobieństwo wystąpienia tego zdarzenia wynosi :
 $/ 1 - q \lambda \Delta t + O / \Delta t /$;
- C_5 - żaden ze środków A i B nie odda strzału, prawdopodobieństwo wystąpienia tego zdarzenia wynosi :
 $1 - 2 \lambda \Delta t + O / \Delta t /$;
- C_6 - oba środki oddały strzały, prawdopodobieństwo wystąpienia tego zdarzenia wynosi : $O / \Delta t /$.

Są to wszystkie możliwe i wzajemnie wykluczające się zdarzenia. Jedno z nich wystąpi napewno. Założymy teraz, że znamy wielkość $P_A / t /$ i chcemy określić $P_A / t + \Delta t /$ t.j. prawdopodobieństwo rażenia środka A do czasu $t + \Delta t$. Zdarzenie „ rażenie środka A w czasie $t + \Delta t$ ” może zaistnieć albo na początku przedziału czasu przedłużającego się pojedynku o czas Δt , albo w końcu czasu Δt . Oznaczmy przez $\pi_A / \Delta t /$ - prawdopodobieństwo rażenia środka A w przedziale $[0, \Delta t]$, a przez $\pi_B / \Delta t /$ - prawdopodobieństwo rażenia środka B w tym samym przedziale, wówczas możemy zapisać

$$P_A / t + \Delta t / = \pi_A / \Delta t / + [1 - \pi_A / \Delta t / - \pi_B / \Delta t /] P_A / t /$$

gdzie : $[1 - \pi_A / \Delta t / - \pi_B / \Delta t /]$ - prawdopodobieństwo, że po

upływie czasu Δt oba środki nie będą rażone, tj. pojedynek będzie trwał dalej.

Rażenie środka A w przedziale czasu $[0, \Delta t]$ zachodzi tylko w tym przypadku, kiedy wystąpi zdarzenie C_2 , rażenie środka B zachodzi tylko w przypadku wystąpienia zdarzenia C_1 . Wówczas :

$$\begin{aligned} \overline{N}_A / \Delta t / &= q \cdot \lambda \cdot \Delta t + 0 / \Delta t / , \\ \overline{N}_B / \Delta t / &= p \cdot \lambda \cdot \Delta t + 0 / \Delta t / . \end{aligned}$$

Wykorzystując te wyrażenia otrzymamy :

$$P_A / t + \Delta t / = q \cdot \lambda \cdot \Delta t + [1 - (p+q)/\lambda \cdot \Delta t] P_A / t / + 0 / \Delta t /$$

Postępując analogicznie otrzymamy wyrażenie na określenie prawdopodobieństwa rażenia środka B w przedziale czasu $t + \Delta t$

$$P_B / t + \Delta t / = p \cdot \lambda \cdot \Delta t + [1 - (p+q)/\lambda \cdot \Delta t] P_B / t / + 0 / \Delta t / .$$

Po odpowiednich przekształceniach i założeniu, że $\Delta t \rightarrow 0$ otrzymamy następujące równania różniczkowe :

$$\frac{d P_A / t /}{dt} = \lambda \cdot q - \lambda / p + q / P_A / t / ,$$

$$\frac{d P_B / t /}{dt} = \lambda \cdot p - \lambda / p + q / P_B / t / . \quad /2.5/$$

Rozwiązując te równania dla warunków początkowych

$P_A / 0 / = P_B / 0 / = 0$ możemy dla dowolnej chwili trwania pojedynku określić prawdopodobieństwa rażenia do tej chwili każdego ze środków biorących udział w pojedynku.

Ponieważ zapas amunicji środków bojowych biorących udział w pojedynku jest nieograniczony /pojedynek może trwać nieskończenie długo / dlatego interesować nas będą następujące wyrażenia:

$$P_A^* = \lim_{t \rightarrow \infty} P_A / t/ ,$$

$$P_B^* = \lim_{t \rightarrow \infty} P_B / t/ .$$

Wyrażenia te możemy otrzymać rozpatrując równania /2.5/

$$P_A^* = \frac{q}{p + q} ,$$

$$P_B^* = \frac{q}{p + q} . \quad /2.6/$$

Przy otrzymywaniu stosunków /2.6/ zakładamy, że

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \frac{dP_A/t/}{dt} = \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{dP_B/t/}{dt} = 0 .$$

Znaczenie tych wyrażeń zostanie wyjaśnione nieco dalej.

Podstawiając do wyrażeń /2.6/ wartości prawdopodobieństw rażenia z poprzednio rozpatrywanego przykładu, a mianowicie : $p = 0,5$ i $q = 0,25$ otrzymamy : $P_A = 0,33$ i $P_B = 0,67$. Wyniki te, tylko nieznacznie różnią się od otrzymanych poprzednio /2.4/. W celu otrzymania ich nie potrzebowaliśmy żadnych dodatkowych hipotez dotyczących wyrównania szans obu środków oraz kolejności strzelania.

Schemat przypadkowego rozkładu ognia i wyprowadzony układ równań w celu określenia charakterystyk pojedynku mogą być szybko przystosowane /omówione to będzie później/ dla różnych szybkostrzelności środków biorących udział w pojedynku, kiedy uwzględnia się wiele dodatkowych czynników / losowość wykrycia, rzeźba terenu itd./ . Podejście to, może mieć zastosowanie do grupowej walki, ale w tych warunkach przyjęcie schematu kolejnych uderzeń jest stosunkowo trudne.

Widzimy, że przypadkowy rozkład ognia w czasie, doprowadził nas do prostych wzorów /2.6/, które pozwalają określić oczekiwane wyniki pojedynku przy założeniu, że zapas amunicji jest nie-

ograniczony. Założenie o nieograniczonej ilości amunicji dla środków biorących udział w pojedynku w większości przypadków należy traktować jako sposób wygodny z metodologicznego punktu widzenia, który prowadzi do prostych wzorów na obliczenie interesujących nas wskaźników, a wyniki otrzymane przy założeniu o nieograniczonej ilości strzałów można wykorzystać dla oceny wyników pojedynku, w którym każdy środek może oddać ograniczoną /czasem bardzo małą/ ilość strzałów.

Rzecz w tym, że pojedynek / z dużym prawdopodobieństwem/ kończy się po wykonaniu kilku obopólnych uderzeń, jeżeli prawdopodobieństwa rażenia w oddzielnych strzałach nie są całkiem małe. I tak np. w warunkach naszego liczbowego przykładu, środek A po oddaniu pięciu strzałów razi przeciwnika z prawdopodobieństwem równym 0,97.

Jeżeli uwzględnimy, wymianę uderzeń, to będzie oczywiste, że w olbrzymiej większości przypadków jeden ze środków biorących udział w pojedynku będzie rażony / pojedynek zostanie zakończony/ wcześniej, zanim środek ogniowy A zdąży oddać 6 strzałów. Dlatego praktycznie najzupełniej obojętne jest w warunkach pojedynku, przyjmować ilość amunicji środka A równą 6,10 czy też nieskończenie wielką.

Oprócz tego założyliśmy na początku, że ilość amunicji środków biorących udział w pojedynku jest nieograniczona. Po otrzymaniu danych o oczekiwanych wynikach pojedynku możemy rozwiązać problem określenia średniej ilości strzałów, którą może oddać każdy ze środków biorących udział w pojedynku. Wcześniej zostały określone prawdopodobieństwa rażenia każdego ze środków biorących udział w pojedynku, a dla rozwiązania postawionego problemu trzeba było obliczyć jaką liczbę strzałów powinni oddać przeciwnicy, aby osiągnąć założone prawdopodobieństwa.

Jeżeli oznaczymy przez N_A i N_B szukane ilości strzałów środków A i B i wykorzystamy wzory /2.6/ to z następujących wyrażeń

$$\frac{p}{p+q} = 1 - /1 - p/^{N_A}$$

$$\frac{p}{p+q} = 1 - /1 - q/^{N_B} \quad /2.7/$$

otrzymamy :

$$N_A = \frac{\lg q - \lg /p + q/}{\lg /1 - p/}$$

$$N_B = \frac{\lg p - \lg /p + q/}{\lg /1 - q/} \quad /2.8/$$

Po podstawieniu danych liczbowych / z przykładu rozpatrzonego poprzednio/ do wzorów /2.8/ średnie ilości strzałów dla środków wyniosą :

$$N_A = \frac{\lg /0,25/ - \lg /0,5 + 0,25/}{\lg /1 - 0,5/} \approx 1,59 ;$$

$$N_B = \frac{\lg /0,5/ - \lg /0,5 + 0,25/}{\lg /1 - 0,25/} \approx 1,41 ;$$

Oznacza to, że każdy ze środków ogniowych w czasie trwania jednego pojedynku odda średnio mniej niż dwa strzały.

W związku z tym, że przedstawiona powyżej metoda może mieć zastosowanie do rozwiązywania wielu problemów, należy rozpatrzyć te problemy oraz związane z nimi ilościowe współczynniki efektywności działań bojowych.

Przy pojedynczym strzale do celu zadanie strzelającego jest proste - razić cel. W pojedynku jeden ze środków lub oba środki

mogą stawiać przed sobą zadanie - razić przeciwnika. Efektywność środka ogniowego dążącego do rażenia przeciwnika celowo jest oceniana przez podanie prawdopodobieństwa rażenia strony przeciwnej biorącej udział w pojedynku. Ten ilościowy wskaźnik dokładnie określa cel strony biorącej udział w pojedynku: czym wyższy wskaźnik, tym częściej pojedynek zakończy się zrealizowaniem postawionego zadania i odwrotnie.

W niektórych problemach należy uwzględniać dynamikę walki nie tylko w czasie ale i w przestrzeni. Często, jedna ze stron /np. atakujący czołg/ może stawiać przed sobą cel - wyjście na określoną rubież, a druga strona /np. środek przeciwpancerny/- niedopuszczenie przeciwnika do wyjścia na daną rubież. Efektywność działań tych środków w walce należy oceniać przez podanie prawdopodobieństwa wykonania stojących przed nim zadań; dla czołgu - przez podanie prawdopodobieństwa wyjścia na daną rubież, dla środka przeciwpancernego - przez podanie prawdopodobieństwa niedopuszczenia przeciwnika do wyjścia na daną rubież.

Na pierwszy rzut oka wydaje się, że otrzymaliśmy różne kryteria oceny efektywności działań środków biorących udział w pojedynku. Jednak przy bardziej wnikliwym rozpatrzeniu tego zagadnienia okazuje się, że mogą one być wyrażone przez jeden wskaźnik - prawdopodobieństwo rażenia środka przeciwnika biorącego udział w pojedynku. W istocie, środek dążący do wyjścia na określoną rubież do chwili wykonania zadania nie powinien być rażony. Jego sukces może być określony przez podanie prawdopodobieństwa jego nierażenia do określonej chwili trwania pojedynku.

Prawdopodobieństwo nierażenia i prawdopodobieństwo rażenia są to prawdopodobieństwa zdarzeń przeciwnych. „Środek”, który dąży do niedopuszczenia przeciwnika do wyjścia na określoną rubież, powinien razić przeciwnika do chwili osiągnięcia przez

niego tej rubieży. I znów zadanie sprowadza się do określenia prawdopodobieństwa rażenia przeciwnika.

Wzajemne przesunięcie pojedynczych środków w przestrzeni może odbywać się ze stałą lub ze zmienną prędkością. Np, atakujący czołg może dokonywać manewru prędkością. W celu prawidłowego przedstawienia w modelach matematycznych właściwości walki należy przewidzieć możliwość uwzględnienia prędkości przesunięcia. To znaczy, że trzeba uwzględniać możliwe zmiany odległości strzelania w czasie walki, a w następstwie tego zmiany prawdopodobieństwa rażenia pojedynczym strzałem.

W początkowym okresie walki przeciwnicy mogą się nie widzieć nawzajem. Proces poszukiwania i wykrywania celu, ogólnie mówiąc, jest procesem losowym. Uwzględnienie właściwości tego procesu powinno również znaleźć swoje odzwierciedlenie w modelach matematycznych działań bojowych mających charakter pojedynku. Losowość poszukiwania i wykrywania, dobrze zamaskowanemu środkowi, pozwala przyjąć taktykę wyczekiwania tj. prowadzić ogień nie w miarę gotowości, a w chwili najbardziej dogodnej dla siebie.

Na zakończenie trzeba stwierdzić, że ważną rolę w realnych warunkach odgrywa rzeźba terenu i przedmioty terenowe. Narzucają one określone ograniczenia na przesunięcia, na możliwości poszukiwania, wykrywania celu i strzelania środków biorących udział w pojedynku.

Oprócz czynników wymienionych duży wpływ na przebieg i wynik pojedynku mają stan i rodzaj gruntu, pora roku, pora doby, warunki atmosferyczne itd. Dokładne uwzględnienie wszystkich czynników w jednym uniwersalnym modelu matematycznym typu pojedynku ze względu na nadmierną złożoność jest praktycznie nieracjonalne.

Dlatego z zasady formułujemy zadanie, które należy rozwiązać

na bazie modelowania matematycznego, a przy budowie odpowiedniego modelu matematycznego o charakterze pojedynku uwzględniamy tylko podstawowe czynniki, które mogą mieć decydujący wpływ na wyniki rozwiązania postawionego zadania.

Np. jeżeli postawiono zadanie, zbadać wpływ efektywności środków wykrywania celów na ogólną efektywność danego typu uzbrojenia, to oczywiste jest, że decydującym czynnikiem będzie rzeźba terenu.

Rzeźba terenu wpływa bowiem na bezpośrednią widoczność środków biorących udział w pojedynku. Właśnie dlatego model matematyczny powinien uwzględniać wpływ rzeźby terenu na przebieg i wynik pojedynku.

Zaletą modeli matematycznych działań bojowych o charakterze pojedynku jest : ich prostota, pogładowość i szybkość obliczeń. Jest wiele problemów, które mogą być rozwiązane w ten sposób. Niektóre z nich zostały już omówione. Obecnie przejdziemy do bardziej szczegółowego rozpatrzenia niektórych problemów mających charakter pojedynku, do budowy i wykorzystania odpowiadających im modeli matematycznych.

2.2. Model pojedynku z uwzględnieniem poprawek strzelania

Rozpatrzmy model matematyczny przedstawiający starcie dwóch pojedynczych środków ogniowych. Każdy z tych środków może w czasie strzelania wprowadzać poprawki.

Przy budowie modelu założymy, że pojedynek zakończy się wcześniej, zanim środki ogniowe biorące udział w pojedynku zbliżą się na taką odległość, z której z dużym prawdopodobieństwem mogą razić przeciwnika pojedynczym strzałem. Zapas amunicji jest nieograniczony.

Założenie to, jak już poprzednio wyjaśniliśmy, jest do przyjęcia wtedy, kiedy prawdopodobieństwo rażenia celu pojedynczym strzałem nie jest całkiem małe. Ponadto zakładamy, że straty nie sumują się, a wynik strzelania otrzymujemy po każdym strzale. Strzelanie prowadzone jest w miarę gotowości środków ogniowych.

Zakładamy średnie szybkostrzelności środków ogniowych na jednostkę czasu :

λ_1 - szybkostrzelność środka ogniowego A ;

λ_2 - szybkostrzelność środka ogniowego B ;

Zakładamy, że średnie szybkostrzelności są stałe, a stopień gotowości jednego lub drugiego środka ogniowego do oddania kolejnego strzału nie zależy od ilości oddanych strzałów oraz od tego ile czasu trwa przygotowanie strzelania i od czasu przygotowania strzału. Środki ogniowe przygotowują strzały niezależnie jeden od drugiego. Możliwości środków ogniowych, po wprowadzeniu poprawek, liczymy w następujący sposób : przez p_i oznaczamy prawdopodobieństwo rażenia przez środek ogniowy strony A celu przeciwnika w zależności od numeru strzału „i”, przez q_i oznaczamy takie samo prawdopodobieństwo dla środka ogniowego strony B .

Po oddaniu kilku strzałów nie mamy możliwości wprowadzenia poprawek. Wyjaśniamy to w następujący sposób :
przez m oznaczamy kolejny numer strzału oddanego przez stronę A , przez n oznaczamy kolejny numer strzału oddanego przez stronę B. Dla m i n istnieje możliwość wprowadzenia poprawek na efektywność ognia. Matematycznie zapisujemy to :

$$p_i = p_n ; \quad i = n, n + 1, \dots, ;$$

$$q_j = q_m ; \quad j = m, m + 1, \dots, ; \quad /2.9/$$

U podstaw dynamicznego modelu leży następujące założenie :
jeżeli w dowolnej chwili t środek ogniowy jest gotowy do oddania kolejnego strzału, to do chwili $t + \Delta t$; gdzie Δt jest bardzo małą wielkością, strzał może nastąpić z prawdopodobieństwem

$\lambda_1 \Delta t + O / \Delta t /$, jeżeli strzelanie przygotowuje strona A,
i z prawdopodobieństwem $\lambda_2 \Delta t + O / \Delta t /$, jeżeli strzelanie przygotowuje strona B .

Przez $O / \Delta t /$ oznaczamy liczbę, której rząd wielkości jest znacznie mniejszy niż Δt . Z tego określenia widać, że dla dowolnej wielkości C otrzymamy : $C \cdot O / \Delta t / = O / \Delta t /$.

Stan pojedynku będziemy charakteryzować parą liczb $/i, j/$ gdzie : i - oznacza numer kolejnego strzału przygotowywanego przez stronę A ; j - numer kolejnego strzału strony B . Pojedynek będzie trwał dopóty, dopóki jeden ze środków nie zostanie rażony. W rezultacie dokonanych założeń prawdopodobieństwo jednoczesnego oddania strzałów przez oba środki równa się zero. Model wyklucza więc możliwość jednoczesnego rażenia obu środków w czasie jednego starcia. Oznacza to, że zdarzenia prowadzące do rażenia jednej ze stron wyczerpują zbiór wszystkich możliwych zdarzeń odpowiadających temu doświadczeniu, a suma ich prawdopodobieństw równa się jedności. W tych warunkach wystarczy określić

prawdopodobieństwo rażenia jednego z przeciwników biorących udział w pojedynku.

Przy tych założeniach przebieg pojedynku nie zależy od tego w jakiej chwili nastąpił stan $/i,j/$, a zależy tylko od tego stanu.

Oznaczmy przez $\gamma_{ij}/t/$ prawdopodobieństwo, że w pojedynku zwycięży strona A /prawdopodobieństwo rażenia strony B /, która w chwili t osiągnęła stan $/i,j/$. Jest rzeczą oczywistą, że w chwili $t = 0$, żadna ze stron biorących udział w pojedynku zwyciężyć nie może, dlatego też $\gamma_{ij}/0/ = 0$, dla dowolnych stanów $/i,j/$.

Ostatecznie nas będą interesować wartości prawdopodobieństwa zawarte w przedziałach dla $\gamma_{ij}^* = \lim_{t \rightarrow \infty} \gamma_{ij}/t/$ a szczególnie:

- prawdopodobieństwo zwycięstwa w pojedynku strony A przy założeniu, że ilość amunicji jest nieograniczona /czas nieograniczony, rozchód amunicji nieograniczony/.

Wyprowadzimy układ równań różniczkowych. Rozwiązując ten układ znajdziemy wartości prawdopodobieństwa zwycięstwa strony A. Załóżmy, że w danej chwili pojedynek znajdował się w stanie $/i,j/$, to jest strona A przygotowywała i -ty strzał, a strona B przygotowywała j -ty strzał. Należy określić $\gamma_{ij}/t/$ dla danej chwili t .

W czasie Δt może zaistnieć jedno z następujących zdarzeń:

1. Strona A wykona kolejny strzał i razi cel. Pojedynek kończy się zwycięstwem strony A. Prawdopodobieństwo wystąpienia tego zdarzenia wyniesie : $\lambda_1 p_i \Delta t + 0 / \Delta t /$
2. Strona A wykona kolejny strzał i nie razi celu. Pojedynek przejdzie do stanu $/i+1,j/$. Prawdopodobieństwo wystąpienia tego zdarzenia wyniesie : $\lambda_1 /1 - p_i/ \Delta t + 0 / \Delta t /$.
3. Strona B wykona kolejny strzał i razi cel. Pojedynek kończy

się zwycięstwem strony B. Prawdopodobieństwo wystąpienia

tego zdarzenia wyniesie : $\lambda_2 q_j \Delta t + 0 / \Delta t /$.

4. Strona B wykona kolejny strzał i nie razi celu. Pojedynek przejdzie do stanu $/i, j+1/$. Prawdopodobieństwo wystąpienia tego zdarzenia wyniesie : $\lambda_2 / 1 - q_j / \Delta t + 0 / \Delta t /$.
5. Żadna ze stron nie wykona strzału. Pojedynek pozostanie w stanie $/i, j/$. Prawdopodobieństwo wystąpienia tego zdarzenia wyniesie : $1 - / \lambda_1 + \lambda_2 / \Delta t + 0 / \Delta t /$.
6. Obie strony wykonają po jednym strzale, które doprowadzą do określonych wyników. Prawdopodobieństwo tego zdarzenia wyniesie : $[\lambda_1 \Delta t + 0 / \Delta t /] \cdot [\lambda_2 \Delta t + 0 / \Delta t /] = 0 / \Delta t /$.

Postępując w ten sposób wyczerpaliśmy wszystkie możliwości i otrzymaliśmy zbiór niezależnych zdarzeń. Jedno ze zdarzeń tego zbioru na pewno wystąpi w czasie Δt . Widzimy, że w warunkach wystąpienia zdarzenia 1, strona A odnosi zwycięstwo z prawdopodobieństwem równym jedności, a w warunkach wystąpienia zdarzenia 3 z prawdopodobieństwem równym zero.

Założmy, że na początku pojedynku $/ t = 0 /$ wystąpił stan $/i, j/$.

Rozdzielamy wtedy interesujący nas przedział $[0, t]$ na początkowy przedział $[0, \Delta t]$ i na następny $[\Delta t, t]$. Dla przedziału $[0, \Delta t]$ mamy zbiór wszystkich możliwych i wzajemnie wykluczających się zdarzeń. Jeżeli teraz założymy prawdopodobieństwo wystąpienia zwycięstwa strony A w interesującym nas przedziale czasu pod warunkiem, że wystąpi jedno ze zdarzeń tego zbioru, to zadanie nasze będzie mieć rozwiązanie stosunkowo proste. Założymy, że dla dowolnych przedziałów czasu mniejszych od t , a w szczególności dla przedziału $[\Delta t, t]$, wartości prawdopodobieństwa osiągnięcia zwycięstwa dla dowolnego możliwego stanu pojedynku są nam znane. Wtedy rozpatrzmy wszystkie możliwe przejścia z jednego

stanu do drugiego, jakie mogą wystąpić w czasie $[0, \Delta t]$ i prawdopodobieństwa zwycięstwa odpowiadające tym warunkom.

Prawdopodobieństwo zwycięstwa strony A, pod warunkiem, że wystąpi zdarzenie 1 równe jest jedności. Prawdopodobieństwo zwycięstwa strony A pod warunkiem, że wystąpi zdarzenie 2 równe jest $\Psi_{i+1,j} / t - \Delta t$, ponieważ pojedynek przechodzi do stanu $/i+1,j/$ i do końca interesującego nas przedziału czasu zostało $t - \Delta t$ jednostek czasu. Prawdopodobieństwo zwycięstwa strony A pod warunkiem, że wystąpi zdarzenie 3 jest równe 0, to jest strona A będzie rażona, i pojedynek kończy się. Prawdopodobieństwo zwycięstwa strony A pod warunkiem, że wystąpi zdarzenie 4 albo 5 będzie odpowiednio równe $\Psi_{i,i+1} / t - \Delta t /$ albo $\Psi_{i,j} / t - \Delta t /$. Zdarzenie 6 ma prawdopodobieństwo wystąpienia równe $0/\Delta t$, dlatego też nie ma celu rozpatrywać możliwości zwycięstwa pod warunkiem jego wystąpienia. Uwzględniając to, co dotychczas powiedzieliśmy, możemy prawdopodobieństwo zwycięstwa strony A w chwili t określić z następującego wyrażenia :

$$\begin{aligned} \Psi_{ij} / t / &= \lambda_1 p_i \Delta t + \lambda_1 / 1 - p_i / \Delta t \Psi_{i+1,j} / t - \Delta t / + \\ &+ \lambda_2 q_j \Delta t \cdot 0 + \lambda_2 / 1 - q_j / \Delta t \cdot \Psi_{i,j+1} / t - \Delta t / + \\ &+ [1 - / \lambda_1 + \lambda_2 / \Delta t] \Psi_{ij} / t - \Delta t / + 0 / \Delta t / . \quad / 2.10 \end{aligned}$$

Z tego wyrażenia po odpowiednich przekształceniach otrzymamy

$$\begin{aligned} \frac{\Psi_{ij} / t / - \Psi_{ij} / t - \Delta t /}{\Delta t} &= \lambda_1 p_i + \lambda_1 / 1 - p_i / \Psi_{i+1,j} / t - \Delta t / + \\ &+ \lambda_2 / 1 - q_j / \Psi_{i,j+1} / t - \Delta t / - / \lambda_1 - \lambda_2 / \Psi_{ij} / t - \Delta t / + \frac{0 / \Delta t /}{t} \end{aligned}$$

Przechodząc do granicy jeżeli $t \rightarrow 0$, otrzymamy równanie różniczkowe odpowiadające wyżej wymienionemu wyrażeniu :

$$\frac{d\psi_{ij}/t/}{dt} = \lambda_1 p_i + \lambda_1 / 1 - p_i / \psi_{i+1, j} / t / + \lambda_2 / 1 - q_j / \psi_{i, j+1} / t / - / \lambda_1 + \lambda_2 / \psi_{ij} / t / \quad / 2.11 /$$

Ponieważ warunki pojedynku nie ulegają zmianie jeżeli ilość pocisków wystrzelonych przez obie strony jest większa od m i n , które określają możliwość wprowadzenia poprawek na wyniki strzelania, dlatego też jest rzeczą oczywistą, że dla $i \geq n$ i dla dowolnych $j = 1, 2, \dots$ będzie spełniony warunek

$$\psi_{ij} / t / \equiv \psi_{nj} / t / \quad , \quad \text{a dla } j \geq m \text{ i dla dowolnych } i = 1, 2, \dots$$

$\psi_{ij} / t / \equiv \psi_{im} / t /$. W tych warunkach równania /2.11/ przedstawiają skończony układ równań różniczkowych, a rozwiązanie tego układu pozwala dla jakichkolwiek wartości t i możliwych stanów pojedynku określić wartości prawdopodobieństwa $\psi_{ij} / t /$:

$$\frac{d\psi_{nm} / t /}{dt} = \lambda_1 p_n - / \lambda_1 p_n + \lambda_2 q_m / \psi_{nm} / t / ;$$

$$\frac{d\psi_{im} / t /}{dt} = \lambda_1 p_i + \lambda_1 / 1 - p_i / \psi_{i+1, m} / t / - / \lambda_1 + \lambda_2 q_m / \psi_{im} / t / \quad / i = 1, 2, \dots, n - 1 / , \quad / 2, 12 /$$

$$\frac{d\psi_{nj} / t /}{dt} = \lambda_1 p_n - / \lambda_1 p_n + \lambda_2 / \psi_{nj} / t / + \lambda_2 / 1 - q_j / \psi_{n, j+1} / t / \quad / j = 1, 2, \dots, n - 1 / ,$$

$$\frac{d\psi_{ij} / t /}{dt} = \lambda_1 p_i + \lambda_1 / 1 - p_i / \psi_{i+1, j} / t / + \lambda_2 / 1 - q_j / \psi_{i, j+1} / t / - / \lambda_1 + \lambda_2 / \psi_{ij} / t /$$

$$/ i = 1, 2, \dots, n - 1 ; j = 1, 2, \dots, m - 1 / .$$

Układ ten można rozwiązać dla warunków początkowych $\Psi_{ij}(0) = 0$ i otrzymać jako odpowiedź prawdopodobieństwo zwycięstwa strony A w chwili t. Takie sformułowanie zadania ma określony sens.

Rozwiązanie znacznie upraszcza się, jeżeli interesują nas wartości prawdopodobieństwa dla pewnych przedziałów czasu przy $t \rightarrow \infty$. Dla dostatecznie dużych wartości t pojedynki zawsze kończy się. To znaczy, że zmiany wartości prawdopodobieństwa zwycięstwa strony A nie będą miały praktycznie znaczenia dla coraz to większego odcinka czasu t.

Warunek ten wyraża się wzorem :

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \frac{d\Psi_{ij}/dt}{dt} = 0$$

Dla otrzymania wartości Ψ_{ij}^* prawdopodobieństwa zwycięstwa strony A w pojedynku, trzeba w układzie równań /2.12/ lewe strony równań przyrównać do zera. Wtedy układ równań różniczkowych przekształci się w układ równań liniowych, rozwiązanie tego układu pozwoli otrzymać szukane wartości prawdopodobieństwa zwycięstwa. Realizując wymienione czynności, po odpowiednich przekształceniach, dochodzimy do następujących wyrażeń :

$$\Psi_{nm}^* = \frac{p_n \lambda_1}{\lambda_1 p_n + \lambda_2 q_m}$$

$$\Psi_{im}^* = \frac{\lambda_1 p_i + \lambda_1 / 1 - p_i / \Psi_{i+1,m}^*}{\lambda_1 + q_m \lambda_2} \quad /i = 1, 2, \dots, n-1/$$

$$\Psi_{nj}^* = \frac{\lambda_1 p_n + \lambda_2 / 1 - q_j / \Psi_{n,j+1}^*}{\lambda_1 p_n + \lambda_2} \quad /j = 1, 2, \dots, m-1/ \quad /2.13/$$

$$\Psi_{ij}^* = \frac{\lambda_1 p_i + \lambda_1 / 1 - p_i / \Psi_{i+1,j}^* + \lambda_2 / 1 - q_j / \Psi_{i,j+1}^*}{\lambda_1 + \lambda_2}$$

$$/ i = 1, 2, \dots, n - 1 ; j = 1, 2, \dots, m-1/ .$$

Stosunki /2.13/ przedstawiają algorytm, który pozwala obliczyć szukaną wartość $\Psi_{1,1}^*$. W ten sposób otrzymaliśmy podstawowe rozwiązanie wyżej wymienionego zadania. Obliczenia praktyczne stosunków /2.13/ są możliwe przy wykorzystaniu środków małej mechanizacji albo na elektronicznych maszynach cyfrowych.

Dla zilustrowania możliwości budowy modelu matematycznego i charakteru rozwiązywanych zadań, rozpatrzmy kilka przykładów, rozwiązania których przeprowadzone zostały na elektronicznych maszynach cyfrowych.

W przykładach tych założono : $m = n = 5$.

Ilościowe wskaźniki, charakteryzujące warunki pojedynku stron i otrzymane wyniki obliczeń są przedstawione w tablicy 2.1.

Wyniki obliczeń przytoczone w tablicy przedstawiają ilościowe oceny charakteryzujące stosunek sił stron biorących udział w pojedynku dla określonych warunków. Oprócz tego porównanie wyników otrzymanych przy rozwiązywaniu różnych przykładów pozwala wyciągnąć wiele bardzo pożytecznych wniosków odnośnie wpływu tych lub innych parametrów na oczekiwane wyniki pojedynku.

Obecnie przeanalizujemy otrzymane wyniki. W przykładzie pierwszym rozpatruje się pojedynki stron, których efektywność ogniowa w czasie rozpoczynania pojedynku jest jednakowa. Charakteryzuje się ona równymi szybkostrzelnościami /średnio 10 strzałów/jednostkę czasu/ i równymi prawdopodobieństwami rażenia celu jednym strzałem / $p_1 = q_1 = 0,2$ /. W czasie trwania pojedynku, po wprowadzeniu poprawek strona A podwyższa swoje prawdopodobieństwo rażenia celu jednym strzałem do 0,3.

Efektywność poprawek strony B jest znacznie większa. To doprowadza do tego, że średnio w 38 % pojedynki kończy się

Ilościowe charakterystyki warunków i oczekiwanych wyników pojedynku

Nr przykła- du	Strona	Prawdopodobieństwo rażenia prze- ciwnika kolejnym strzałem					Szybko- strzel- ność	Prawdopo- dobieństwo zwycięstwa strony w pojedynku	Charakte- rystyki oczekiwa- nych wyni- ków w poje- dunku
		1	2	3	4	5			
1	A	0,20	0,25	0,30	0,30	0,30	10	0,38	Przewaga B
	B	0,20	0,50	0,70	0,80	0,82	10	0,62	
2	A	0,10	0,25	0,35	0,40	0,41	10	0,36	Przewaga B
	B	0,20	0,50	0,70	0,80	0,82	10	0,64	
3	A	0,30	0,30	0,30	0,30	0,30	10	0,44	Lekka prze- waga B
	B	0,20	0,50	0,70	0,80	0,82	10	0,56	
4	A	0,70	0,75	0,75	0,75	0,75	10	0,49	Równowaga sił stron
	B	0,70	0,85	0,95	0,97	0,99	10	0,51	
5	A	0,75	0,75	0,75	0,75	0,75	10	0,51	Równowaga sił stron
	B	0,70	0,85	0,95	0,97	0,99	10	0,49	
6	A	0,01	0,02	0,03	0,04	0,05	5	0,59	Lekka prze- waga A
	B	0,03	0,03	0,03	0,03	0,03	5	0,41	
7	A	0,50	0,60	0,70	0,80	0,99	5	0,43	Lekka prze- waga B
	B	0,70	0,70	0,70	0,70	0,70	5	0,57	
8	A	0,10	0,25	0,35	0,40	0,41	10	0,58	Przewaga A
	B	0,20	0,50	0,70	0,80	0,82	5	0,42	
9	A	0,10	0,20	0,30	0,40	0,50	10	0,59	Przewaga A
	B	0,20	0,40	0,60	0,80	0,99	5	0,41	
10	A	0,01	0,02	0,03	0,04	0,05	5	0,31	Znacna przewaga B
	B	0,01	0,02	0,03	0,04	0,05	10	0,69	
11	A	0,50	0,60	0,70	0,80	0,90	5	0,32	Znacna przewaga B
	B	0,50	0,60	0,70	0,80	0,90	10	0,68	
12	A	0,10	0,20	0,30	0,40	0,50	20	0,50	Równowaga sił stron
	B	0,90	0,90	0,90	0,90	0,90	5	0,50	

korzystnie dla strony A i w 62 % korzystnie dla strony B.

Żeby prześledzić jak zmieniają się stosunki sił stron biorących udział w pojedynku, założymy, że strona A ma w chwili rozpoczęcia pojedynku środek ogniowy o nieco mniejszej mocy, ale posiada możliwość wprowadzenia bardziej efektywnych poprawek niż strona B, porównamy wyniki otrzymane w przykładzie 1 z wynikami obliczeń przykładu 2. W ostatnim przykładzie środek A posiada prawdopodobieństwo rażenia celu jednym strzałem równe 0,1 / to jest dwa razy mniejsze niż w przykładzie 1 /. Ale w rezultacie wprowadzonych poprawek wielkość prawdopodobieństwa powiększa się do 0,41. Uwzględniając to otrzymamy prawie taki sam wynik jak w poprzednim przykładzie : strona A wygrywa pojedynek z prawdopodobieństwem 0,36.

Z rozpatrzonych przykładów można wyciągnąć wniosek, że poprawki mają decydujący wpływ na oczekiwany wynik pojedynku. To jednak nie zmniejsza znaczenia początkowej mocy ogniowej środków biorących udział w pojedynku. Na przykład, jeżeli strona A posiada środek ogniowy, którego prawdopodobieństwo rażenia celu jednym strzałem $p_1 = 0,3$ i nie wprowadza żadnych poprawek / patrz przykład 3/, a poza tym zachowane są warunki jak w przykładzie 2, to prawdopodobieństwo zwycięstwa strony A w pojedynku wzrasta do 0,44.

Pojedynki mogą odbywać się w różnych warunkach. W związku z tym wpływ poprawek może przejawiać się w różny sposób. W pojedynku, którego ilościowe charakterystyki stron biorących w nim udział zostały przedstawione w przykładzie 4, podobnie jak w przykładzie 1, środki ogniowe stron przy rozpoczęciu pojedynku posiadają jednakowe charakterystyki ogniowe. Strona A bardzo mało podwyższa swoją efektywność przez wprowadzenie poprawek, natomiast możliwości strony B w tym przypadku

są bardzo duże / $q_5 = 0,99$ /. Jednak przewaga strony B jest bardzo nieznaczna : średnio 49 % pojedynków wygrywa strona A , a 51 % strona B.

W warunkach tego przykładu decydujące znaczenie ma to, że początkowe efektywności strzałów stron są wysokie / $p_1 = q_1 = 0,7$ /. W tych warunkach stosunki sił stron określane są przez prawdopodobieństwa rażenia celu pierwszymi strzałami. Rzecz w tym, że tylko nieznacznie zwiększenie do 0,75 prawdopodobieństwa rażenia celu pierwszym strzałem dla strony A w przykładzie 5 doprowadza do przewagi strony A w pojedynku. To, że strona B wprowadza poprawki i może osiągnąć znaczne podwyższenie swojej efektywności nie ma większego znaczenia.

Fakt ten można było zauważyć już wcześniej analizując stosunki /2.6/, które znacznie ograniczają warunki pojedynku stron. Założymy, że strona A będzie zmieniać wartości p . Wówczas zmiana prawdopodobieństwa rażenia danego środka biorącego udział w pojedynku może być określone wielkością pochodnej $\frac{dP_B^*}{dp}$.

Oczywiste jest, że im większa wartość $\frac{dP_B^*}{dp}$ to przy równych przyrostach Δp prawdopodobieństwa p , następują większe zmiany P_B^* . Zgodnie z /2.6/ otrzymamy, że
$$\frac{dP_B^*}{dp} = \frac{q}{p + q/2}.$$

Analizując otrzymany wynik zauważymy, że czym mniejsza wartość p , tym większy wpływ może spowodować zmiana tej wartości. Następnie można powiedzieć, że jeżeli przeciwnik jest znacznie silniejszy niż strona A, to efektywność poprawek obniża się wraz ze wzrostem względnej siły przeciwnika.

Te wnioski potwierdzają rozpatrzone przykłady, o bardzo złożonych warunkach pojedynku, z uwzględnieniem poprawek strzelania przez obie strony biorące udział w pojedynku.

Następnym problemem, który może być rozwiązany na podstawie analizy wyników obliczeń jest problem wykorzystania średnich wyników prawdopodobieństwa do określenia mocy ogniowej środków. W celu oceny możliwości przyjęcia takiego przybliżonego przedstawienia i wynikających z tego błędów rozpatrzmy przykłady 6 i 7.

W tych przykładach rozpatruje się pojedynek, w którym biorą udział jednakowe środki bojowe. W celu obliczenia wskaźników oczekiwanych wyników pojedynku, stronie A odpowiadają rzeczywiste, poprawione wartości prawdopodobieństw rażenia. Obliczanie poprawek wprowadzanych przez stronę B jest przybliżone i wykonywane na podstawie założonych średnich wartości prawdopodobieństwa rażenia celu jednym strzałem; w czasie pojedynku nie zmienia się. W przykładzie 6 gdzie efektywność strzelania jest niska, to doprowadza do tego, że środek A, który jest taki sam jak środek przeciwnika uzyskuje przewagę /59 % zwycięstw /.

Fakt ten uwarunkowany jest tym, że pierwsze dwa strzały, w których poprawione wartości prawdopodobieństwa są mniejsze od wartości średniej, nie określają dokładnie przebiegu pojedynku. Rozstrzygnięcie pojedynku następuje w następnych strzałach, dla których $p = 0,05$. Wartość q w tym czasie wynosi 0,03. To wyjaśnia przewagę środka A.

W innych przypadkach przyjęcie podobnej wartości średniej daje pozorną przewagę środkowi B, to jest prowadzi do faktycznego zawyżenia wskaźnika efektywności dla tego środka. Poglądowo widać to z przykładu 7, w którym środek A wygrywa średnio tylko 43 % pojedynków. Spowodowane jest to tym, że pojedynek bardzo często kończy się po wzajemnej wymianie dwóch - trzech strzałów. W tym czasie za cenę uśrednienia strona B uzyskuje pewną przewagę.

W dwóch rozpatrzonych przykładach odchylenia od rzeczywistej

wielkości prawdopodobieństwa zwycięstwa stron / 0,5 / nie przekraczają 0,1. Odchylenie może być bardzo małe, ponieważ otrzymano go dla przypadku pojedynku, w którym brali udział równi sobie przeciwnicy, a ponadto odchylenie to może doprowadzić do znacznych błędów przy rozwiązywaniu niektórych zadań. Na przykład, jeżeli chcielibyśmy scharakteryzować stosunek sił stron wielkością prawdopodobieństwa ich zwycięstwa w pojedynku, to w przykładzie 6 zamiast wartości 1 w wyniku uśrednienia otrzymalibyśmy wskaźnik równy $\frac{0,41}{0,59} \approx 0,7$.

To jest znacznie różniący się od stanu równowagi sił w walce. Przytoczony przykład mówi także o trochę nieustabilizowanym charakterze wybranego wskaźnika. Jednak fakt rzeczywistego odchylenia ma miejsce i spowodowany jest niedokładnym określeniem charakterystyk środków biorących udział w pojedynku.

Jeżeli uśrednienie wskaźników efektywności spowodowane jest rzeczywiście koniecznością, to przy realizacji należy dokonać analizy warunków możliwości ich przyjęcia, wykorzystując do tego model pojedynku.

W analizie tej możemy znaleźć taką wartość wskaźnika efektywności strzelania, która w warunkach nas interesujących doprowadzi do bardzo małych błędów w dalszych obliczeniach. W taki sposób mogą być otrzymane wartości prawdopodobieństwa rażenia, które potem będą wykorzystane w modelach matematycznych, tam gdzie wskaźniki te w czasie walki odgrywają decydujące znaczenie.

Na zakończenie rozpatrzmy ostatni problem związany z uproszczonymi modelami matematycznymi o charakterze pojedynku, dotyczący wpływu szybkostrzelności środków ogniowych na wyniki pojedynku.

Obecnie przejdziemy do rozpatrzenia pojedynku, w którym nie są wprowadzane poprawki. Matematyczne przedstawienie tego

modelu oparte jest na równaniach /2.5/. Równania te dotyczą przypadków jednakowych szybkostrzelności środków biorących udział w pojedynku.

Założenie o tym, że szybkostrzelność stron A i B są różne i średnio wynoszą λ_1 i λ_2 strzałów w jednostce czasu doprowadzi do drobnych zmian układu równań /2.5/. Z formalnego punktu widzenia zmiany te polegają na tym, że zamiast p i q będziemy rozpatrywać niektóre uogólnione prawdopodobieństwa $p^* = \lambda_1 p$ i $q^* = \lambda_2 q$, tak zwane gęstości /intensywności/ strumienia strzałów, a wielkość λ w równaniach /2.5/ zastąpimy 1. W związku z tym ulegną zmianie wyrażenia /2.6/. W celu określenia oczekiwanych wyników pojedynku otrzymamy bardziej ogólne wyrażenia :

$$P_B^* = \frac{p \lambda_1}{\lambda_1 p + \lambda_2 q},$$
$$P_A^* = \frac{q \lambda_2}{\lambda_1 p + \lambda_2 q} \quad /2.6'/$$

Jeżeli nie wprowadzamy poprawek, to oczekiwane wyniki pojedynku, przy założeniu, że szybkostrzelność środków obu stron są różne, możemy otrzymać na podstawie wyrażen /2.6'/ . Problem oceny wpływa danego parametru może być rozwiązany dokładnie tak samo jak wcześniej rozwiązany został problem oceny wpływu prawdopodobieństwa rażenia, z tą tylko różnicą, że zamiast p i q podstawimy wartości $p^* = \lambda_1 p$ i $q^* = \lambda_2 q$.

Jako przykłady wykorzystania wyrażen /2.6'/ rozpatrzmy pojedynek, w którym $p = 0,2$, $q = 0,5$, $\lambda_1 = 10$; $\lambda_2 = 5$. Podstawiając te dane do wyrażen /2.6/ łatwo obliczymy, że $P_B^* = 0,44$. Oznacza to, że dwukrotna przewaga szybkostrzelności środka A nie równoważy stosunkowo małej efektywności strzelania tego środka. Jeżeli zwiększymy szybkostrzelność środka A do 15 strzałów

w jednostce czasu, a pozostałe dane zostawimy bez zmian, to prawdopodobieństwo zwycięstwa strony A wzrasta do 0,55. Trzykrotny wzrost szybkostrzelności daje stronie A przewagę w pojedynku.

W pojedynkach charakteryzujących się możliwością wprowadzania poprawek w czasie strzelania oraz różnymi szybkostrzelnościami środków ogniowych, wpływ szybkostrzelności może być oceniony na podstawie obliczeń wykonanych według algorytmu /2.13/. Obecnie krótko przeanalizujemy wyniki rozwiązań niektórych przykładów z tabeli 2.1.

W przykładzie 8 strona B posiada w każdym kolejnym strzale prawdopodobieństwo rażenia celu dwa razy większe, ale dwa razy mniejszą szybkostrzelność. W tych warunkach okazuje się, że dwa razy większa szybkostrzelność daje większy efekt niż dwa razy większe prawdopodobieństwo rażenia celu każdym oddzielnym strzałem. Strona A wygrywa średnio 58 % pojedynków. Podobnie sprawa przedstawia się w przykładzie 9, gdzie strona A wygrywa średnio 59 % pojedynków.

Interesująco przedstawia się porównanie wyników rozwiązań przykładów 8 i 2. Warunki tych pojedynków charakteryzują się tym, że w przykładzie 2 szybkostrzelności środków ogniowych obu stron są jednakowe. W przykładzie 8 widać wpływ podwyższenia szybkostrzelności strony A. Prawdopodobieństwo zwycięstwa strony A znacznie wzrasta / od 0,36 do 0,58 / .

W pojedynkach środków ogniowych posiadających jednakowe prawdopodobieństwa rażenia celu jednym strzałem i różne szybkostrzelności oraz możliwość wprowadzenia poprawek strzelania. w czasie trwania pojedynku, wpływ dwukrotnie większej szybkostrzelności powoduje, że środek ogniowy mający dwa razy większą szybkostrzelność wygrywa średnio około 70 % pojedynków /patrz przykłady : 10 i 11/.

Na zakończenie rozpatrzmy pojedynek dwóch środków o znacznie różniących się prawdopodobieństwach rażenia celu jednym strzałem, /przykład 12/. Środek A posiada bardzo małe prawdopodobieństwo rażenia celu pierwszym strzałem /0,1/ i doprowadza przez wprowadzenie poprawek, wartość prawdopodobieństwa do 0,5. Środek B posiada wysokie prawdopodobieństwo rażenia celu każdym strzałem i poprawek w czasie strzelania nie wprowadza. Czterokrotna przewaga szybkostrzelności jaką dysponuje środek A wyrównuje w tych warunkach przewagę środka B /duże prawdopodobieństwo/ : Siły biorące udział w pojedynku są równe / każdy z przeciwników zwycięża z prawdopodobieństwem 0,5 /.

Niewątpliwie, przeprowadzona analiza jest właściwa w stosunku do przykładów rozpatrzonych w tablicy 2.1. i nie daje wyczerpującego obrazu w stosunku do wszystkich możliwych wariantów pojedynku. Celem naszym było pokazać na konkretnych przykładach możliwości modeli matematycznych przy rozwiązywaniu wielu praktycznych problemów.

Posługując się wynikami i wnioskami otrzymanymi na podstawie obliczeń należy pamiętać o ograniczeniach modeli matematycznych. Ograniczenia te są określone przez założenia przyjęte przy wyprowadzeniu równań na podstawie których otrzymujemy algorytm /2.13/, wykorzystywany w celu obliczeń interesujących nas wskaźników efektywności działań stron biorących udział w pojedynku.

2.3. Model analityczny pojedynku z uwzględnieniem wpływu rzeźby terenu, losowości wykrycia i przesunięcia.

Podobnie jak poprzednio rozpatrywać będziemy pojedynek dwóch środków A i B. Na początku pojedynku środki znajdują się w pewnej odległości od siebie, a w trakcie pojedynku odległość ta zmniejsza się. Środek bojowy strony A przesuwa się ze stałą prędkością V_A , a środek B z prędkością V_B . Dlatego też, jeżeli na początku pojedynku odległość między przeciwnikami wynosiła R_0 , to po upływie czasu t odległość $R(t)$ będzie równa:

$$R(t) = R_0 - (V_A + V_B) t. \quad /2.14/$$

Jeżeli w dowolnej chwili oba środki nie są rażone, to można zakładać, że pojedynek przedłuży się dopóty, dopóki $R(t)$ nie będzie mniejsza od danej wartości R_{min} / w szczególności można rozpatrywać przypadek, kiedy $R_{min} = 0$ / , której będzie odpowiadać pewna wartość $t = T$ lub dopóki jeden ze środków nie będzie rażony. Wielkość T , można otrzymać z wyrażenia /2.14/ podstawiając wartość $R(t) = R_{min}$, jest to maksymalny czas trwania pojedynku. Przebieg pojedynku, który kończy się rażeniem jednego z przeciwników, w czasie nie przekraczającym T nazywać będziemy skutecznym przebiegiem pojedynku dla tej strony, której środek nie został rażony.

W stosunku do efektywności strzelania środków biorących udział w pojedynku zakładać będziemy, że prawdopodobieństwa rażenia zależą tylko od odległości strzelania i nie zależą od numeru kolejnego strzału wykonywanego do celu / to jest nie są wprowadzone poprawki podczas strzelania /. Podobnie jak poprzednio prawdopodobieństwa rażenia celu oznaczać będziemy symbolami p i q / p - dla strony A, q - dla strony B /. Średnie szybko-

strzelności środków ogniowych stron uważać będziemy jako stałe. Założymy, że na przygotowanie pierwszych strzałów potrzeba średnio trochę więcej czasu, niż na przygotowanie następnych.

Przygotowanie i prowadzenie ognia poprzedzone jest procesem wykrycia celu. Uważamy, że wykrycie celu i prowadzenie do niego ognia jest możliwe tylko w warunkach bezpośredniej widoczności. Jeżeli występuje bezpośrednia widoczność to efektywność środków wykrywania przeciwników zależy tylko od odległości i od tego czy cel prowadzi ogień będąc w zasięgu bezpośredniej widoczności. Wpływ rzeźby terenu uważamy za możliwy tak w przypadku istnienia, jak i nie istnienia bezpośredniej widoczności w procesie zbliżania się stron biorących udział w pojedynku. Średni czas trwania pojedynku zarówno przy istnieniu jak i nie istnieniu bezpośredniej widoczności będziemy uważali za zależny tylko od odległości.

Zależności wymienionych przez nas średnich wartości parametrów od odległości między przeciwnikami, przedstawiać będziemy jako funkcje schodkowe / to znaczy uważać będziemy jako parametry przedziałami stałe/. Na przykład dla prawdopodobieństwa rażenia $p = p / R /$, będzie to oznaczać, że niektóre dane wartości $R_{\min} = R_N < R_{N-1} < \dots < R_0$, są takie, że $p / R / = \text{constans}$ dla wszystkich $R \in /R_{i+1}, R_i /$

Pomimo uwzględnienia wymienionych czynników będziemy uważali, że każdy z przeciwników może stosować określoną taktykę przy wyborze chwili otwarcia ognia. Strona A może nie otwierać ognia do chwili, kiedy $R > R_A$, a strona B do chwili kiedy $R > R_B$.

Wprowadzenie do modelu tych możliwości odzwierciedla właściwości pojedynku w warunkach terenowych z uwzględnieniem konieczności wykrycia celu. Ponieważ strzelającego jest łatwiej wykryć, dlatego też w określonych warunkach można uzyskać przewagę, jeżeli:

przeciwnika dopuścimy na najbardziej dogodną dla nas odległość. W tych warunkach należy liczyć się z pewnym ryzykiem.

Przeciwnik po zakłóceniu bezpośredniej widoczności, może osiągnąć żadaną rubież i wykonać stojące przed nim zadanie. Stopień tego ryzyka i wielkość oczekiwanej wygranej, w zależności od zastosowanej taktyki, mogą być wykryte w rezultacie modelowania.

Przy budowie modelu będziemy uważać, że zakłócenie bezpośredniej widoczności prowadzi do utraty wzajemnej obserwacji. Po wystąpieniu bezpośredniej widoczności obaj przeciwnicy powinni od nowa prowadzić poszukiwanie celu. Jeżeli chodzi o charakter rażenia celu, to zakładamy, że zostaną zrealizowane warunki, które zostały szczegółowo omówione w § 2.1 i 2.2.

W ten sposób, w rozpatrywanym modelu, który ma charakter pojedynku, możliwe są następujące zdarzenia :

- wystąpienie bezpośredniej widoczności ;
- zakłócenie bezpośredniej widoczności ;
- wykrycie celu ;
- gotowość do otwarcia ognia ;
- wykonanie strzału / jeżeli nie ma ograniczeń w odległości w związku z technicznymi charakterystykami środków rażenia lub z zamiarem taktycznym tej lub innej strony biorącej udział w pojedynku / ;
- rażenie celu .

Jeżeli wystąpienie i zakłócenie bezpośredniej widoczności zależą od siebie i oddziałują jednocześnie na oba środki biorące udział w pojedynku, to pozostałe zdarzenia odnoszą się do strony A i B. Zakładamy, że rozwój pojedynku w przestrzeni, z punktu widzenia wzajemnego położenia stron, określają stosunki /2.14/.

Na podstawie powyższego opisu słownego można ustalić, że dla danej chwili / jeżeli pojedynek do tego czasu nie zakończył

się / pojedynek znajduje się w jednym z dziesięciu następujących różnych możliwych stanów S:

- S₀ - przeciwnicy znajdują się w zasięgu bezpośredniej widoczności i aktywnie poszukują celu ;
- S₁ - strona B wykryła przeciwnika, jednak nie prowadziła do niego ognia, kiedy znalazł się w zasięgu bezpośredniej widoczności ; strona A prowadzi wykrywanie celu;
- S₂ - strona B wykryła przeciwnika i prowadziła do niego ogień kiedy znajdował się w zasięgu bezpośredniej widoczności, strona A jeszcze nie wykryła celu ;
- S₃ - strona A wykryła cel, ale ognia nie. prowadziła, strona B jeszcze nie wykryła celu ;
- S₄ - strona A wykryła przeciwnika i prowadziła ogień, strona B jeszcze nie wykryła celu ;
- S₅ - przeciwnicy wykryli się nawzajem, ale żaden z nich ognia nie prowadził kiedy znajdowali się w zasięgu bezpośredniej widoczności ;
- S₆ - przeciwnicy wykryli się nawzajem, strona B prowadziła już ogień, strona A po wystąpieniu bezpośredniej widoczności ognia nie prowadziła;
- S₇ - przeciwnicy wykryli się nawzajem, środek A prowadził już ogień, środek B ognia nie prowadził;
- S₈ - przeciwnicy wykryli się nawzajem i obaj prowadzili ogień po wystąpieniu bezpośredniej widoczności ;
- S₉ - zakłócenie bezpośredniej widoczności .

Do tych stanów, przy wystąpieniu których pojedynek może trwać dalej, należy dodać dwa "końcowe" możliwe zdarzenia :

- U_A - środek B został rażony, zwyciężyła strona A ;
- U_B - środek A został rażony, zwyciężyła strona B .

Przy wystąpieniu jednego z końcowych zdarzeń, pojedynek zostaje przerwany. Jeżeli wystąpi stan S_0 , to środki kontynuują nadal zbliżanie się. Wszelkie inne aktywne działania nie prowadzą do sukcesu, dopóki nie zostanie przywrócona bezpośrednia widoczność. W czasie trwania pojedynku są możliwe przejścia z jednego stanu w drugi. Założymy, że w pewnym przedziale, dowolnie wybranego czasu t , zawartego w granicach $0 \leq t \leq T$, parametry określające efektywność wykrycia i strzelania oraz charakteryzujące zakłócenie i przywrócenie bezpośredniej widoczności są stałe.^{x/} Wtedy możliwe przejścia pojedynku z jednego stanu do drugiego i odpowiadające im prawdopodobieństwa dla małych przedziałów czasu Δt mogą być opisane tak jak w tabelicy 2.2. Przy opisie przejść w stosunku do których występują ograniczenia w prowadzeniu ognia spowodowane odległością, będziemy oznaczać symbolami Q_1 i Q_2 następujące wielkości :

$$Q_1 = \begin{cases} 1, & \text{jeżeli } R/t \leq R_A ; \\ 0, & \text{jeżeli } R/t > R_A ; \end{cases} \quad Q_2 = \begin{cases} 1, & \text{jeżeli } R/t \leq R_B \\ 0, & \text{jeżeli } R/t > R_B \end{cases}$$

/2.15/

Obecnie objaśnimy tabelicę 2.2. Przy określaniu prawdopodobieństwa przejść wykorzystywaliśmy następujące założenia.

Jeżeli środek prowadzi wykrywanie, to w czasie Δt wykrycie celu występuje z prawdopodobieństwem $\lambda_j \Delta t + O(\Delta t)^2$. Wówczas $j = 1$, kiedy przeciwnik jeszcze nie strzelał podczas wystąpienia bezpośredniej widoczności i $j = 2$, kiedy przeciwnik już prowadził ogień. Wskaźnik i określa stronę prowadzącą wykrywanie ; kiedy strona A prowadzi wykrywanie wówczas $i = 1$, a kiedy strona B prowadzi wykrywanie to $i = 2$.

x/ Za początek pomiaru czasu przyjmujemy chwilę, w której rozpoczęło się zbliżanie środków i której odpowiada maksymalna odległość R_0 . Przypisek autora.

Struktura możliwych przejść w czasie Δt
i odpowiadające im wartości prawdopodobieństw ^{x/}

Stan do chwili t		Możliwe przejścia z jednego stanu do drugiego w czasie t		
Oznaczenie stanu	Charakterystyka stanu	Oznaczenie nowego stanu	Charakterystyka stanu przeszłego	Prawdopodobieństwo przejścia
1	2	3	4	5
S_0	Obaj przeciwnicy prowadzą rozpoznanie	S_3	Strona A wykryła przeciwnika	$\gamma_{11} \Delta t + 0(\Delta t)$
		S_1	Strona B wykryła przeciwnika	$\gamma_{21} \Delta t + 0(\Delta t)$
		S_9	Zakłócona została bezpośrednia widoczność	$\delta \Delta t + 0(\Delta t)$
		S_0	Nic nie zaistniało	$1 - (\gamma_{11} + \gamma_{21} + \delta) \Delta t + 0(\Delta t)$
S_1	Strona B wykryła przeciwnika	U_B	Strona B wykonała pierwszy strzał i raziła cel.	$\Theta_2 \lambda_{21} q \Delta t + 0(\Delta t)$
		S_2	Strona B wykonała pierwszy strzał, ale nie uzyskała sukcesu.	$\Theta_2 \lambda_{21} (1-q) \Delta t + 0(\Delta t)$
		S_5	Strona A wykryła cel.	$\gamma_{11} \Delta t + 0(\Delta t)$
		S_9	Zakłócona została bezpośrednia widoczność.	$\delta \Delta t + 0(\Delta t)$
		S_1	Nic nie zaistniało	$1 - (\delta + \gamma_{11} + \lambda_{21} \Theta_2) \Delta t + 0(\Delta t)$

1	2	3	4	5
S ₂	Strona B wykryła przeciwnika i prowadziła ogień.	U _B	Strona B wykryła kolejny strzał i raziała cel.	$\lambda_{22} q \Delta t + O(\Delta t)$
		S ₂	Strona B wykonała kolejny strzał i nie uzyskała sukcesu.	$\lambda_{22} (1 - q) \Delta t + O(\Delta t)$
		S ₆	Strona A wykryła przeciwnika.	$\gamma_{12} \Delta t + O(\Delta t)$
		S ₉	Zakłócona została bezpośrednia widoczność.	$\delta \Delta t + O(\Delta t)$
		S ₂	Nic nie zaistniało.	$1 - (\delta + \gamma_{12} + \lambda_{22}) \Delta t + O(\Delta t)$
S ₃	Strona A wykryła przeciwnika	U _A	Strona A wykonała pierwszy strzał i raziała cel.	$\theta_1 \lambda_{11} p \Delta t + O(\Delta t)$
		S ₄	Strona A wykonała pierwszy strzał i nie uzyskała sukcesu.	$\theta_1 \lambda_{11} (1 - p) \Delta t + O(\Delta t)$
		S ₅	Strona B wykryła przeciwnika.	$\gamma_{21} \Delta t + O(\Delta t)$
		S ₉	Zakłócona została bezpośrednia widoczność.	$\delta \Delta t + O(\Delta t)$
		S ₃	Nic nie zaistniało	$1 - (\delta + \gamma_{21} + \theta_1 \lambda_{11}) \Delta t + O(\Delta t)$

1	2	3	4	5
S ₄	Strona A wykryła przeciwnika i prowadziła ogień	U _A	Strona A wykonała kolejny strzał i razila cel.	$\lambda_{12} p \Delta t + O(\Delta t)$
		S ₄	Strona A wykonała kolejny strzał i nie uzyskała sukcesu.	$\lambda_{12} (1-p) \Delta t + O(\Delta t)$
		S ₇	Strona B wykryła przeciwnika.	$\gamma_{22} \Delta t + O(\Delta t)$
		S ₉	Zakłócona została bezpośrednia widoczność	$\delta \Delta t + O(\Delta t)$
		S ₄	Nic nie zaistniało	$1 - (\delta + \gamma_{22} + \lambda_{12}) \Delta t + O(\Delta t)$
S ₅	Obaj przeciwnicy wykryli się, ale nie strzelali	U _A	Strona A wykonała pierwszy strzał i razila cel.	$\theta_1 \lambda_{11} p \Delta t + O(\Delta t)$
		U _B	Strona B wykonała pierwszy strzał i razila cel.	$\theta_2 \lambda_{21} q \Delta t + O(\Delta t)$
		S ₇	Strona A wykonała pierwszy strzał i nie osiągnęła sukcesu	$\theta_1 \lambda_{11} (1-p) \Delta t + O(\Delta t)$
		S ₆	Strona B wykonała pierwszy strzał i nie osiągnęła sukcesu	$\theta_2 \lambda_{21} (1-q) \Delta t + O(\Delta t)$
		S ₉	Zakłócona została bezpośrednia widoczność	$\delta \Delta t + O(\Delta t)$

1	2	3	4	5
		S ₅	Nic nie zaistniało	$1 - (\delta + \lambda_{21}\theta_2 + \lambda_{11}\theta_1)\Delta t + O(\Delta t)$
S ₆	Obaj przeciwnicy wykryli się; strona B prowadziła strzelanie, strona A nie strzelała	U _A	Strona A wykonała pierwszy strzał i raziała cel.	$\theta_1\lambda_{11}p\Delta t + O(\Delta t)$
		U _B	Strona B wykonała kolejny strzał i raziała cel	$\lambda_{22}q\Delta t + O(\Delta t)$
		S ₈	Strona A wykonała pierwszy strzał i nie uzyskała sukcesu	$\theta_1\lambda_{11}(1-p)\Delta t + O(\Delta t)$
		S ₆	Strona B wykonała kolejny strzał i nie osiągnęła sukcesu	$\lambda_{22}(1-q)\Delta t + O(\Delta t)$
		S ₉	Zakłócona została bezpośrednia widoczność	$\delta\Delta t + O(\Delta t)$
		S ₆	Nic nie zaistniało	$1 - (\delta + \theta_1\lambda_{11} + \lambda_{22})\Delta t + O(\Delta t)$
S ₇	Obaj przeciwnicy wykryli się; strona A prowadziła już strzelanie strona B nie strzelała	U _A	Strona A wykonała kolejny strzał i raziała cel	$\lambda_{12}p\Delta t + O(\Delta t)$
		U _B	Strona B wykonała pierwszy strzał i raziała cel	$\theta_2\lambda_{21}q\Delta t + O(\Delta t)$
		S ₇	Strona A wykonała kolejny strzał i nie uzyskała sukcesu	$\lambda_{12}(1-p)\Delta t + O(\Delta t)$
		S ₈	Strona B wykonała pierwszy strzał i nie uzyskała sukcesu	$\theta_2\lambda_{21}(1-q)\Delta t + O(\Delta t)$

1	2	3	4	5
		S_9	Zakłócona została bezpośrednia widoczność	$\delta \Delta t + O(\Delta t)$
		S_7	Nic nie zaistniało	$1 - (\delta + \theta_2 \lambda_{21} + \lambda_{22}) \Delta t + O(\Delta t)$
		U_A	Strona A wykonała kolejny strzał i raziła cel	$\lambda_{12} p \Delta t + O(\Delta t)$
		U_B	Strona B wykonała kolejny strzał i raziła cel	$\lambda_{22} q \Delta t + O(\Delta t)$
S_8	Obaj przeciwnicy wykryli się i prowadzili ogień	S_8	Strona A wykonała kolejny strzał i nie uzyskała sukcesu	$\lambda_{12} (1-p) \Delta t + O(\Delta t)$
		S_8	Strona B wykonała kolejny strzał i nie uzyskała sukcesu	$\lambda_{22} (1-q) \Delta t + O(\Delta t)$
		S_9	Zakłócona została bezpośrednia widoczność	$\delta \Delta t + O(\Delta t)$
		S_8	Nic nie zaistniało	$1 - (\delta - \lambda_{22} + \lambda_{12}) \Delta t + O(\Delta t)$
				S_0
S_9	Zakłócona została bezpośrednia widoczność; strony zbliżają się	S_9	Nic nie zaistniało	$1 - \Psi \Delta t + O(\Delta t)$

x/ Przejścia, którym odpowiadają bardzo małe prawdopodobieństwa, których rząd wielkości jest mniejszy niż Δt nie są rozpatrywane, ponieważ nie wpływają na wyniki analizowanego pojedynku. Przypisek autora

Jeżeli środek przygotowuje strzał do celu to w czasie Δt strzał ten wystąpi z prawdopodobieństwem $\lambda_{ij} \Delta t + O(\Delta t)$. Wskaźnik j określa numer przygotowywanego strzału; $j = 1$ jeżeli przygotowywany jest pierwszy strzał; $j = 2$ jeżeli przygotowywany jest drugi lub następne strzały. Wartość $i = 1$ wtedy, kiedy strzał przygotowuje strona A oraz $i = 2$ kiedy strzał przygotowuje strona B.

Jeżeli występuje bezpośrednia widoczność, to w czasie Δt może ona być zakłócona z prawdopodobieństwem: $\delta \Delta t + O(\Delta t)$.

W przypadku, kiedy jest zakłócona bezpośrednia widoczność, to jej odtworzenie może wystąpić z prawdopodobieństwem $\psi \Delta t + O(\Delta t)$.

Teraz opierając się na przykładach analogicznych do rozpatrzonych wcześniej w § 2.2 i wykorzystując prawdopodobieństwa przejść od jednego do drugiego stanu oraz strukturę możliwych przejść przytoczonych w tabelicy 2.2 możemy wyprowadzić układ równań różniczkowych. Układ równań będzie opisywał zmianę w czasie prawdopodobieństw wyniku pojedynku dla każdej ze stron.

Oznaczmy przez $f_1(t)$ prawdopodobieństwo wyniku pojedynku do czasu T , jeżeli do chwili t ($0 \leq t \leq T$) wystąpił stan S_1 ($i = 0, 1, \dots, 9$).

Aby uprościć zapis wyrażeń określających $f_1(t)$ i nie powtarzać oddzielnie dla każdej ze stron odnośnego układu równań, wprowadzimy pomocnicze wielkości ξ_1 i ξ_2 :

$$\xi_1 = \begin{cases} 1, & \text{jeżeli rozpatruje się prawdopodobieństwa wyniku pojedynku na korzyść strony A,} \\ 0, & \text{w przypadku przeciwnym;} \end{cases}$$
$$\xi_2 = \begin{cases} 1, & \text{jeżeli rozpatruje się prawdopodobieństwa wyniku pojedynku na korzyść strony B,} \\ 0, & \text{w przypadku przeciwnym.} \end{cases}$$

Rozpatrzmy całokształt możliwych przejść w czasie Δt zgodnie z tablicą 2.2 jako zbiór wszystkich możliwych i wzajemnie wykluczających się zdarzeń. Jak łatwo zauważyć prawdopodobieństwo wyniku pojedynku, pod warunkiem, że przejdzie on w jeden ze stanów U_A lub U_B określa się bardzo prosto. Wynosi ono jeden albo zero. Prawdopodobieństwo wyniku pojedynku do czasu T pod warunkiem, że do chwili $t + \Delta t$ pojedynek przejdzie do stanu S_i będzie równe $f_i / t + \Delta t$. Po dokonaniu tych uwag możemy zapisać:

$$f_0(t) = \gamma_{21} \Delta t f_1(t + \Delta t) + \gamma_{11} \Delta t f_3(t + \Delta t) + \delta \Delta t f_9(t + \Delta t) + [1 - (\gamma_{11} + \gamma_{21} + \delta) \Delta t] f_0(t + \Delta t) + O(\Delta t);$$

$$f_1(t) = \vartheta_2 \theta_2 \lambda_{21} q \Delta t + \theta_2 \lambda_{21} (1 - q) \Delta t f_2(t + \Delta t) + \gamma_{11} \Delta t f_3(t + \Delta t) + \delta \Delta t f_9(t + \Delta t) + [1 - (\delta + \gamma_{11} + \theta_2 \lambda_{21}) \Delta t] f_1(t + \Delta t) + O(\Delta t)$$

$$f_2(t) = \vartheta_2 \lambda_{22} \Delta t q + \lambda_{22} \Delta t (1 - q) f_2(t + \Delta t) + \gamma_{12} \Delta t f_6(t + \Delta t) + \delta \Delta t f_9(t + \Delta t) + [1 - (\delta + \gamma_{12} + \lambda_{22}) \Delta t] f_2(t + \Delta t) + O(\Delta t);$$

$$f_3(t) = \vartheta_1 \theta_2 \lambda_{11} \Delta t p + \lambda_{11} \Delta t \cdot \theta_1 (1 - p) f_4(t + \Delta t) + \gamma_{21} \Delta t f_5(t + \Delta t) + \delta \Delta t f_9(t + \Delta t) + [1 - (\delta + \gamma_{21} + \lambda_{11} \theta_1) \Delta t] f_3(t + \Delta t) + O(\Delta t);$$

$$f_4(t) = \vartheta_1 \lambda_{12} \Delta t p + \lambda_{12} \Delta t (1 - p) f_4(t + \Delta t) + \gamma_{22} \Delta t f_7(t + \Delta t) + \delta \Delta t f_9(t + \Delta t) + [1 - (\delta + \gamma_{22} + \lambda_{12}) \Delta t] f_4(t + \Delta t) + O(\Delta t);$$

$$f_5(t) = \varrho_1 \theta_1 \lambda_{11} \Delta t p + \varrho_2 \theta_2 \lambda_{21} \Delta t q + \theta_1 \lambda_{11} \Delta t (1-p) f_7(t + \Delta t) - \\ - \theta_2 \lambda_{21} \Delta t (1-q) f_6(t + \Delta t) + \delta \Delta t f_9(t + \Delta t) + \\ + [1 - (\delta + \theta_1 \lambda_{11} + \theta_2 \lambda_{21}) \Delta t] f_5(t + \Delta t) + O(\Delta t);$$

$$f_6(t) = \varrho_1 \lambda_{11} \Delta t \theta_1 p + \varrho_2 \lambda_{22} \Delta t q + \theta_1 \lambda_{11} \Delta t (1-p) f_8(t + \Delta t) + \\ + \lambda_{22} \Delta t (1-q) f_6(t + \Delta t) + \delta \Delta t f_9(t + \Delta t) + \\ + [1 - (\delta + \lambda_{22} + \theta_1 \lambda_{11}) \Delta t] f_6(t + \Delta t) + O(\Delta t);$$

$$f_7(t) = \varrho_1 \lambda_{12} \Delta t p + \varrho_2 \lambda_{21} \Delta t \theta_2 q + \lambda_{12} \Delta t (1-p) f_7(t + \Delta t) + \\ + \lambda_{21} \Delta t \theta_2 (1-q) f_8(t + \Delta t) + \delta \Delta t f_9(t + \Delta t) + \\ + [1 - (\delta + \lambda_{21} \theta_2 + \lambda_{12}) \Delta t] f_7(t + \Delta t) + O(\Delta t);$$

$$f_8(t) = \varrho_1 \lambda_{12} \Delta t p + \varrho_2 \lambda_{22} \Delta t q + [(1-p) \lambda_{12} + \\ + (1-q) \lambda_{22}] \Delta t f_8(t + \Delta t) + \delta \Delta t f_9(t + \Delta t) + \\ + [1 - (\delta + \lambda_{22} + \lambda_{12}) \Delta t] f_8(t + \Delta t) + O(\Delta t);$$

$$f_9(t) = \Psi \Delta t f_0(t + \Delta t) + [1 - \Psi \Delta t] f_9(t + \Delta t) + O(\Delta t)$$

Przekształcając otrzymane wyrażenia przy założeniu, że $\Delta t \rightarrow 0$ otrzymamy układ równań różniczkowych, który opisuje zmianę w czasie prawdopodobieństwa f_1/t :

$$\frac{df_0(t)}{dt} = -\gamma_{21} f_1(t) - \gamma_{11} f_3(t) - \delta f_9(t) + \\ + (\gamma_{21} + \gamma_{11} + \delta) f_0(t);$$

$$\frac{df_1(t)}{dt} = -\varrho_2 \Theta_2 \lambda_{21} q - \Theta_2 \lambda_{21} (1-q) f_2(t) - \gamma_{11} f_3(t) - \delta f_9(t) + (\delta + \gamma_{11} + \Theta_2 \lambda_{21}) f_1(t);$$

$$\frac{df_2(t)}{dt} = -\varrho_2 \lambda_{22} q - \lambda_{22} (1-q) f_2(t) - \gamma_{12} f_6(t) - \delta f_9(t) + (\delta + \gamma_{12} + \lambda_{22}) f_2(t);$$

$$\frac{df_3(t)}{dt} = -\varrho_1 \Theta_1 \lambda_{11} p - \lambda_{11} \Theta_1 (1-p) f_4(t) - \gamma_{21} f_5(t) - \delta f_9(t) + (\delta + \gamma_{21} + \lambda_{11} \Theta_1) f_3(t);$$

$$\frac{df_4(t)}{dt} = -\varrho_1 \lambda_{12} p - \lambda_{12} (1-p) f_4(t) - \gamma_{22} f_7(t) - \delta f_9(t) + (\delta + \gamma_{22} + \lambda_{12}) f_4(t);$$

$$\frac{df_5(t)}{dt} = -\varrho_1 \Theta_1 \lambda_{11} p - \varrho_2 \Theta_2 \lambda_{21} q - \Theta_1 \lambda_{11} (1-p) f_7(t) - \Theta_2 \lambda_{21} (1-q) f_6(t) - \delta f_9(t) + (\delta + \Theta_1 \lambda_{11} + \Theta_2 \lambda_{21}) f_5(t);$$

$$\frac{df_6(t)}{dt} = -\varrho_1 \lambda_{11} \Theta_1 p - \varrho_2 \lambda_{22} q - \Theta_1 \lambda_{11} (1-p) f_3(t) - \lambda_{22} (1-q) f_6(t) - \delta f_9(t) + (\delta + \lambda_{22} + \Theta_1 \lambda_{11}) f_6(t);$$

$$\frac{df_7(t)}{dt} = -\varrho_1 \lambda_{12} p - \varrho_2 \lambda_{21} \Theta_2 q - \lambda_{12} (1-p) f_7(t) - \lambda_{21} \Theta_2 (1-q) f_8(t) - \delta f_9(t) + (\delta + \lambda_{21} \Theta_2 + \lambda_{12}) f_7(t);$$

$$\frac{df_8(t)}{dt} = -\varrho_1 \lambda_{12} p - \varrho_2 \lambda_{22} q - [(1-p) \lambda_{12} + (1-q) \lambda_{22}] f_8(t) - \delta f_9(t) + (\delta + \lambda_{22} + \lambda_{12}) f_8(t);$$

$$\frac{df_9(t)}{dt} = -\Psi f_0(t) + \Psi f_9(t). \quad (2.17)$$

Warunkami ograniczającymi będą:

$$f_i(T) = 0; \quad (i = 0, 1, 2, \dots, 9)$$

Obecnie opiszemy kolejność rozwiązania układu równań /2.17/ w celu otrzymania szukanych wartości prawdopodobieństw $f_i /t/$ odpowiadających chwili $t = 0$, to jest początkowi pojedynku stron. Dla ścisłości obliczeń będziemy zakładać, że szukamy prawdopodobieństwa sukcesu strony A, dlatego w układzie równań /2.17/ przyjmujemy, że $\beta_1 = 1$ i $\beta_2 = 0$.

Następnie określamy chwile odpowiadające odcinkom dla których przyjęte zostały stałe wartości parametrów: $p, q, \delta, \psi, Q_1, Q_2$ itd.

Chwile odpowiadające krańcom tych odcinków oznaczymy przez T_j , a ilość tych odcinków oznaczymy przez N . Następnie uporządkujemy numerację odcinków tak, żeby było $T = T_0, T_j > T_{j+1}, T_N = 0$

Wykorzystując jako graniczne wartości /2.18/, całkujemy układ równań /2.17/ na odcinku $[T_0, T_1]$ i otrzymujemy wartości $f_i /T_1/$, $i = 0, 1, \dots, 9$.

Następnie przyjmujemy otrzymane wartości i całkujemy układ równań /2.17/, tak jak układ równań różniczkowych ze stałymi współczynnikami na kolejnym odcinku. Powtarzając ten proces N razy / N - liczba odcinków / otrzymamy interesujące nas wartości $f_i /0/$.

Prawdopodobieństwa sukcesu strony B w pojedynku znajdujemy zakładając, że $\beta_1 = 0$, a $\beta_2 = 1$ i wykorzystujemy opisany powyżej sposób rozwiązania układu /2.17/.

Układ równań /2.17/ może być rozwiązany metodami numerycznymi przy wykorzystaniu elektronicznej maszyny liczącej. W ten sposób obliczone zostały wyniki wszystkich przykładów rozpatrywanych w następnym paragrafie.

W niektórych przypadkach nie trzeba uwzględniać ukształtowania terenu, różnicy w czasie przygotowania pierwszego i następ-

nych strzałów, prawdopodobieństw wykrycia celu do chwili rozpoczęcia strzelania i po wykonaniu pierwszego strzału. W tych warunkach model jest prostszy i znacznie upraszcza się układ równań /2.17/. Wszystko to pozwala zapisać rozwiązanie tego zadania za pomocą prostych wyrażeń i uprościć znacznie jego praktyczne rozwiązanie. Przy bardzo dokładnym rozpatrzeniu wpływu wielu czynników, układ równań jest bardzo złożony i jedynym sposobem rozwiązania go jest zastosowanie metod numerycznych i elektronicznych maszyn cyfrowych.

2.4. Rozwiązanie zadań na podstawie modeli analitycznych działań bojowych o charakterze pojedynku.

Modele matematyczne działań bojowych o charakterze pojedynku pozwalają rozwiązywać wiele zadań związanych z oceną jakościową środków biorących udział w pojedynku. Niektóre zadania były rozpatrywane w § 2.2. Model pojedynku, który został opisany w poprzednim paragrafie pozwala rozwiązać wiele dodatkowych problemów związanych z oceną efektywności środków bojowych. Obecnie rozpatrzmy rozwiązania niektórych zadań, otrzymanych przy wykorzystaniu tego modelu.

Zadanie 1.

Ilościowa ocena porównawcza różnych rodzajów uzbrojenia

Założymy, że strona A ma dwa rodzaje uzbrojenia A_1 i A_2 . Chcemy przeprowadzić porównawczą ocenę możliwości tych środków, zakładając, że w warunkach bojowych przeciw nim będzie działał środek bojowy B. Porównując oczekiwane wyniki pojedynku środka A_1 z środkiem B oraz środka A_2 z środkiem B otrzymamy odpowiedź na interesujące nas pytanie. Takie porównanie należy przeprowadzić dla wielu różnych warunków, w których mogą odbywać się pojedynki.

Podobnie może być przeprowadzone porównanie środków bojowych przeciwników. Na przykład, w celu porównania środków bojowych A i B o jednakowym przeznaczeniu, ale należących do różnych stron, między którymi możliwy jest pojedynek na polu walki, można również wykorzystać model z § 2.3. W tym celu należy rozpatrzyć i porównać oczekiwane wyniki pojedynku, który może się odbyć w różnych warunkach. Na przykład, jeżeli chodzi o czołgi, to przy modelowaniu pojedynku należy wykorzystywać wartości parametrów, które odpowiadają następującym wariantom: A atakuje,

B broni się; bój spotkaniowy środków A i B oraz atak środka B. Oprócz tego należy zmieniać wpływ warunków ukształtowania terenu, miejsce wykrycia itd. Całkowita ocena porównawcza wymaga dużej ilości obliczeń i dokładnej analizy wyników uzyskanych z rozwiązania.

Zadanie 2

Określenie odpowiedniej odległości otwarcia ognia w działaniach bojowych o charakterze pojedynku.

Przy rozwiązaniu tego zadania powinny być rozpatrzone i porównane wyniki wielu pojedynków, w których odległości otwarcia ognia były różne. W wyniku takiego porównania można określić taktykę, jaką powinny zastosować środki bojowe w różnych działaniach o charakterze pojedynku.

Zadanie 3

Wybór odpowiedniej prędkości przesunięcia.

Na podstawie analizy wyników modelowania i zadań stojących przed środkami bojowymi, z pojedynku można otrzymać określone wnioski, dające odpowiedź na interesujące nas pytanie.

Zadanie 4

Ocena wpływu rzeźby terenu na wynik starcia.

Rozwiązanie tego zadania pozwala określić najbardziej dogodne warunki efektywnego zastosowania tego lub innego typu uzbrojenia, a dla konkretnych warunków pozwala określić odpowiednie sposoby zastosowania danego typu uzbrojenia w działaniach bojowych o charakterze pojedynku.

Zadanie 5

Ocena efektywności środków wykrywania.

Na podstawie modelowania może być wykazana rola środków wykrywania i ich wpływ na ogólną efektywność pojedynczego środka ogniowego biorącego udział w pojedynku.

Zadanie 6

Określenie wielkości jednostek ognia dla środków ogniowych.

Sposób podejścia do rozwiązania tego problemu został rozpatrzony w § 2.1. Problem ten może być rozwiązany także na podstawie analizy wyników modelowania pojedynku z uwzględnieniem losowości rzeźby terenu i wykrycia. W tym przypadku wyniki będą bardziej uzasadnione i bliskie rzeczywistym potrzebom stron biorących udział w pojedynku.

Zadanie 7

Ocena wpływu czynników kierowania.

Porównując oczekiwane wyniki pojedynku dla różnych stanów końcowych, można ocenić wpływ takiego na przykład parametru kierowania walką, jak wskazywanie celów. Na przykład, jeżeli w czasie przeprowadzonej analizy dochodzimy do wniosku, że prawdopodobieństwo zwycięstwa jednej ze stron w znacznym stopniu zależy od tego czy ona widzi, lub nie widzi przeciwnika, to w tym przypadku należy oczekiwać, że wskazanie jej celu odgrywa w określonych warunkach decydującą rolę.

Dokładne rozwiązanie każdego z wyżej wyszczególnionych zadań wymaga rozpatrzenia dużej ilości pojedynków, które mogą odbywać się w różnych warunkach. Dlatego też zatrzymamy się na analizie stosunkowo niedużej liczby przykładów ilustrujących różne warianty pojedynków. Przykłady te uzmysłowią czytelnikowi w sposób poglądowy właściwości ogólnego podejścia i podstawowe etapy rozwiązania wyszczególnionych problemów w oparciu o modelowanie matematyczne.

Ponieważ podstawowa część ilościowych wartości parametrów, które charakteryzują warunki pojedynku będzie się powtarzać w rozpatrywanych przykładach, dlatego też zostanie przyjęty następujący schemat warunków pojedynku.

W tablicach 2.3 i 2.3a przytoczone są wartości wszystkich parametrów charakteryzujących warunki pojedynku dla wariantu pierwszego.

W tablicy 2.4. w celu poglądowego przedstawienia wpływu tych parametrów na wykonanie, przez strony biorące udział w pojedynku, oddzielnych czynności, z których składają się działania bojowe, przedstawione są średnie wartości czasu, niezbędnego na wykonanie tych czynności.

W tablicy 2.5 przedstawione są warunki dla wszystkich pozostałych wariantów, ale opisane są tylko te parametry, które różnią się od parametrów wariantu pierwszego. W tablicy 2.4 wartości przedziałów czasu zależne od prędkości przesunięcia, zostały otrzymane przy założeniu, że prędkość zmiany $V_A = 10$ km/godz, a $V_B = 0$. Przedziały czasu podane są w sekundach. Obecnie wyjaśnimy sposób otrzymania tych danych. Czas niezbędny do pokonania ustalonego przedziału odległości otrzymujemy dzieląc odległość tego przedziału przez prędkość zbliżania się stron biorących udział w walce. Do tego wykorzystujemy odpowiednie wartości z tablicy 2.1 uwzględniając ich miana. I tak dla przedziału odległości od 0 do 200 m otrzymamy

$$\frac{200}{V_A + V_B} = \frac{200 \cdot 3600}{20 \cdot 1000} = 72 \text{ sek}$$

Przedział czasu /wartość średnia/ niezbędnego do wykrycia, otrzymujemy jako wielkość odwrotną do wartości parametru γ_{ij} /i.j = 1,2/. Na przykład, jeżeli odległość zmienia się w granicach 1500-2000 m, to w celu wykrycia przeciwnika, który jeszcze nie prowadził strzelania, strona B traci średnio $\frac{1}{0,1} = 10$ sek. Średni czas przygotowania strzału określa się jako wielkość odwrotną do odpowiedniej wartości parametru λ_{ij} /i.j = 1,2/.

Przy tym należy pamiętać, że wartość λ ij podana w tabelicy 2.3 zmienia się w zależności od liczby strzałów oddanych w ciągu minuty oraz, że szybkostrzelność nie zależy, w naszym modelu, od odległości strzelania. W ten sposób, przy wszystkich odległościach, na przygotowanie kolejnego strzału /nie pierwszego/ strona A będzie tracić średnio $\frac{60}{3} = 20$ sek.

Tablica 2.3

Charakterystyki ilościowe środków stron, warunków starcia /wariant podstawowy/

Charakterystyka parametru	Oznaczenie	Mia- no	Przedziały odległości do celu w m, dla których wartości parametrów są stałe						
			0-200	200-500	500-1000	1000-1500	1500-2000	2000-2500	2500-3000
Efektywność strzelania środka A	p	-	0,9	0,9	0,7	0,5	0,2	0,1	0,05
Efektywność strzelania środka B	q	-	0,9	0,8	0,5	0,2	0,05	0	0
Efektywność wykrycia przez stronę A celu niestrzelającego	11	$\frac{1}{\text{sek}}$	0,05	0,03	0,015	0,015	0,01	0,01	0,01
Efektywność wykrycia przez stronę A celu strzelającego	12	$\frac{1}{\text{sek}}$	0,2	0,2	0,15	0,15	0,1	0,1	0,1
Efektywność wykrycia przez stronę B celu niestrzelającego	21	$\frac{1}{\text{sek}}$	0,1	0,1	0,1	0,1	0,1	0,05	0,05
Efektywność wykrycia przez stronę B celu strzelającego	22	$\frac{1}{\text{sek}}$	0,2	0,2	0,2	0,2	0,2	0,1	0,1
Długość odcinka, na którym wystąpiła bezpośrednia widoczność	δ	1/m	0,02	0,01	0,005	0,002	0,002	0,002	0,002
Długość odcinka, na którym brak bezpośredniej widoczności	ψ	1/m	0,1	0,05	0,05	0,01	0,01	0,005	0,002

Parametry nie zależące od odległości do celu

Charakterystyka parametru	Oznaczenie	Miano	Wartość	Charakterystyka parametru	Oznaczenie	Miano	Wartość
Prędkość przesunięcia strony A	V_A	km/godz	10	Czas na przygotowanie 1-go strzału przez stronę A	λ_{11}	1/min	2
Prędkość przesunięcia strony B	V_B	km/godz	0	Czas na przygotowanie 2-go i następných strzałów przez stronę A	λ_{12}	1/min	3
Odległość otwarcia ognia przez stronę A	R_A	m	3000	Czas na przygotowanie 1-go strzału przez stronę B	λ_{21}	1/min	2
Odległość otwarcia ognia przez stronę B	R_B	m	2000	Czas na przygotowanie 2-go i następných strzałów przez stronę B	λ_{22}	1/min	5

Wartości średnie odcinków czasu /w sek/ niezbędnego do wykonania podstawowych czynności.

Czynność	Parametry określające odcinki czasu	Przedziały odległości do celu w m						
		0-200	200-500	500-1000	1000-1500	1500-2000	2000-2500	2500-3000
Pokonanie przedziału odległości	V_A i V_B	72	180	180	180	180	180	180
Wykrycie przez stronę A przeciwnika nie prowadzącego ognia	δ_{11}	20	33	67	67	100	100	100
Wykrycie przez stronę A przeciwnika prowadzącego ogień	δ_{12}	5	5	7	7	10	10	10
Wykrycie przez stronę B przeciwnika nie prowadzącego ognia	δ_{21}	10	10	10	10	10	20	20
Wykrycie przez stronę B przeciwnika prowadzącego ogień	δ_{22}	5	5	5	5	5	10	10
Przygotowanie 1-go strzału przez stronę A	λ_{11}	30	30	30	30	30	30	30
Przygotowanie kolejnego strzału przez stronę A	λ_{12}	20	20	20	20	20	20	20
Przygotowanie 1-go strzału przez stronę B	λ_{21}	30	30	30	30	30	30	30
Przygotowanie kolejnego strzału przez stronę B	λ_{22}	12	12	12	12	12	12	12
Czas istnienia bezpośredniej widoczności /od chwili jej wystąpienia/	$V_A; \delta$ $V_B;$	18	36	72	180	180	180	180
Czas braku bezpośredniej widoczności /od chwili jej zakłócenia/.	$V_A; \varphi$ $V_B;$	1,8	3,6	3,6	36	36	72	180

Opis rozwiązanych przykładów

Nr przy- kładu	Zmiana wartości parametrów po porównaniu ich z tabli- cą 2.3	Charakterystyka jakościowa sił stron biorących udział w pojedyn- ku oraz warunków pojedynku
1	2	3
1.	Wartości parametrów podane w tabelicy 2.3	Strona A posiada w oddzielnych strzałach o wiele wyższe wskaźniki efektywności niż strona B oraz nie- co mniejszą szybkostrzelność. Stro- na B bardziej efektywnie niż strona A przeprowadza czynności związane z poszukiwaniem i wykryciem celu. Ukształtowanie terenu, szczególnie przy małych odległościach powinno utrudniać wykrycie celów i przygo- towanie strzelania.
2.	$\delta = 0; \psi = 0$; pozostałe parametry takie same jak w poprzednim przykładzie	Warunki walki środków, takie same jak w przykładzie pierwszym, ale teren jest płaski /równina/.
3.	Wartości p zamienione wartościami q wziętymi z drugiego wiersza tabli- cy 2.3	Prawdopodobieństwa rażenia celu pojedynczym strzałem dla obu stron są jednakowe i równe odpowiednim wskaźnikom efektywności strzelania środku B w przykładzie 1. Poza tym stosunki sił stron i warunki są ta- kie, jak w przykładzie 1.
4.	Wartości q zamienione odpowiednimi wartościami p wziętymi z pierwszego wiersza tabelicy 2.3	Pojedynek dwóch środków, mających wskaźniki efektywności strzelania takie same, jak środek A w przy- kładzie 1. Poza tym stosunki sił stron i warunki są takie, jak w przykładzie 1.
5.	Pierwszy i drugi wiersz tabelicy 2.3 zamieniony miejscami	Strona B posiada w oddzielnych strzałach o wiele wyższe wskaźniki efektywności, nieco większą szybko- strzelność niż strona A i bardziej efektywnie wykrywa cele. Poza tym warunki pojedynku są takie, jak w przykładzie 1.
6.	Pierwszy i drugi wiersz tabelicy 2.3 zamieniony miejscami; $R_B = 1000$ m.	Warunki jak w przykładzie 5. Strona B otwiera ogień wtedy, kiedy nastąpi zbliżenie się środków na odległość 1000 m.

1	2	3
7.	Pierwszy i drugi wiersz tabelicy 2.3 zamieniony miejscami; $\sigma = 0; \psi = 0$	Pojedynek odbywa się na płaskim terenie. Poza tym warunki pojedynku są takie, jak w przykładzie 5.
8.	Dla przedziałów odległości 0-200 m i 200-500 m prawdopodobieństwa rażenia celu pojedynczymi strzałami są równe zero /dla obu stron/. Poza tym warunki są takie jak w przykładzie 1.	Stosunek sił stron taki, jak w przykładzie 1. Pojedynek praktycznie kończy się, gdy tylko środki zbliżą się do odległości 500 m.
9.	Dla przedziałów odległości 0-200 m i 200-500 m prawdopodobieństwa rażenia są równe zero i $V_A = 20$ km/godz. Poza tym warunki są takie jak w przykładzie 1.	Stosunek sił stron taki, jak w poprzednim przykładzie. Strona A w czasie trwania pojedynku zwiększa dwukrotnie swoją prędkość przesunięcia.

Sredni czas trwania wystąpienia lub braku bezpośredniej widoczności określa się jako wielkość odwrotną do $\delta / V_A + V_B /$ lub odpowiednio do $\psi / V_A + V_B /$. Przy tym wykorzystując tablicę 2.3 uwzględniamy miana odpowiednich wielkości.

Wartości średnie czasów zużytych na wykonanie określonych czynności oraz średnie czasowe charakterystyki warunków pojedynku, które są opisane w tablicy 2.4, dają możliwość przedstawienia uproszczonego obrazu wykonania oddzielnych czynności. Obecnie zobaczymy, jaki czas zużyje strona A na wykonanie czynności od chwili rozpoczęcia poszukiwania celu, do chwili oddania strzału, jeżeli pojedynek rozpoczyna się z odległości 1500 m i od początku pojedynku istnieje bezpośrednia widoczność. Czas średni na wykrycie celu wynosi 67 sek. Razem z czasem średnim koniecznym na przygotowanie strzału /30 sek/ otrzymamy interesujący nas czas średni, który wyniesie $67 + 30 = 97$ sek. Jeżeli założyć, że w rzeczywistości na wykonanie czynności potrzeba dokładnie tyle czasu, ile wynoszą średnie wartości odpowiednich odcinków czasu, to do chwili zakłócenia bezpośredniej widoczności /czas średni 180 sek/ strona A zdąży wykonać 5 strzałów.

Można spróbować, nie korzystając z naszego modelu, rozwiązać zadanie polegające na określeniu oczekiwanych wyników pojedynku, wykorzystując do tego podany wyżej sposób podejścia. Wcześniej możemy powiedzieć, że nie zawsze otrzymamy wyniki zadowalające. Oprócz tego należy rozpatrywać dowolnie złożony schemat kolejnych uderzeń, którego wady zostały omówione wcześniej. Dlatego wartości średnie wskaźników czasowych należy rozpatrywać jako charakterystyki, na podstawie których można

otrzymać poglądowy obraz przedstawiający stosunki między różnymi czynnościami pojedynku.

Wyniki obliczeń, przeprowadzonych na podstawie rozwiązania układu równań /2,17/ przy wykorzystaniu elektronicznych maszyn cyfrowych są przedstawione w tablicy 2.6. oraz na rysunkach 2.1 i 2.2.

Tablica 2.6.

Obliczone prawdopodobieństwa wyników pojedynku odbywającego się w różnych warunkach

Rozpatrywany wariant	Odległość R/m/ na której występuje stan Si	Stan pojedynku											
		S0	S1	S2	S3	S4	S5	S6	S7	S8	S9		
1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12		
Przykład 1	200	0,304	0,253	0,220	0,454	0,506	0,390	0,285	0,460	0,346	0,297		
	500	0,328	0,267	0,246	0,537	0,590	0,455	0,316	0,534	0,388	0,328		
	1000	0,298	0,259	0,281	0,557	0,610	0,485	0,358	0,564	0,432	0,298		
	1500	0,472	0,446	0,467	0,663	0,703	0,612	0,519	0,673	0,582	0,459		
	2000	0,593	0,558	0,604	0,685	0,704	0,667	0,633	0,694	0,660	0,577		
	2500	0,705	0,705	0,764	0,779	0,789	0,779	0,744	0,789	0,784	0,665		
	3000	0,748	0,748	0,777	0,783	0,788	0,783	0,782	0,788	0,787	0,709		
Przykład 2	200	0,391	0,294	0,210	0,605	0,663	0,489	0,288	0,588	0,375	-		
	500	0,350	0,267	0,235	0,626	0,681	0,512	0,313	0,609	0,403	-		
	1000	0,314	0,267	0,291	0,628	0,680	0,537	0,372	0,624	0,457	-		
	1500	0,493	0,462	0,480	0,696	0,736	0,639	0,533	0,703	0,600	-		
	2000	0,636	0,628	0,642	0,732	0,750	0,711	0,670	0,738	0,698	-		
	2500	0,804	0,804	0,863	0,887	0,893	0,887	0,870	0,893	0,877	-		
	3000	0,898	0,898	0,917	0,930	0,932	0,930	0,919	0,932	0,922	-		
Przykład 3	200	0,304	0,253	0,220	0,454	0,507	0,391	0,286	0,460	0,346	0,297		
	500	0,312	0,253	0,230	0,509	0,559	0,430	0,295	0,505	0,362	0,312		
	1000	0,250	0,217	0,231	0,473	0,518	0,409	0,293	0,476	0,354	0,250		
	1500	0,302	0,284	0,291	0,432	0,458	0,395	0,323	0,435	0,361	0,299		
	2000	0,324	0,320	0,324	0,369	0,378	0,359	0,338	0,371	0,350	0,323		
	2500	0,343	0,343	0,339	0,347	0,347	0,347	0,339	0,347	0,339	0,339		
	3000	0,343	0,343	0,340	0,343	0,343	0,343	0,340	0,343	0,340	0,342		
Przykład 4	200	0,305	0,253	0,220	0,454	0,507	0,391	0,286	0,460	0,346	0,297		
	500	0,310	0,246	0,221	0,523	0,575	0,437	0,292	0,516	0,363	0,309		
	1000	0,230	0,188	0,207	0,509	0,562	0,428	0,285	0,508	0,356	0,230		
	1500	0,259	0,221	0,236	0,512	0,556	0,437	0,300	0,509	0,366	0,257		
	2000	0,274	0,259	0,273	0,426	0,453	0,390	0,319	0,430	0,357	0,273		
	2500	0,473	0,473	0,348	0,605	0,622	0,605	0,348	0,622	0,370	0,403		
	3000	0,550	0,550	0,398	0,614	0,622	0,614	0,396	0,622	0,407	0,481		

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
Przykład 5	200	0,305	0,253	0,220	0,454	0,507	0,391	0,286	0,460	0,346	0,297
	500	0,293	0,233	0,207	0,495	0,544	0,413	0,272	0,487	0,337	0,294
	1000	0,191	0,155	0,166	0,426	0,469	0,356	0,228	0,422	0,285	0,191
	1500	0,145	0,122	0,123	0,292	0,316	0,246	0,156	0,287	0,189	0,149
	2000	0,106	0,099	0,100	0,161	0,169	0,146	0,116	0,160	0,129	0,111
	2500	0,130	0,130	0,059	0,134	0,134	0,134	0,055	0,134	0,055	0,125
	3000	0,129	0,129	0,072	0,129	0,129	0,129	0,070	0,129	0,070	0,129
Przykład 6	200	0,305	0,253	0,220	0,454	0,507	0,391	0,286	0,460	0,346	0,297
	500	0,293	0,233	0,207	0,495	0,544	0,413	0,272	0,487	0,337	0,294
	1000	0,191	0,155	0,166	0,426	0,469	0,356	0,228	0,422	0,285	0,191
	1500	0,611	0,611	0,202	0,750	0,772	0,750	0,191	0,772	0,224	0,540
	2000	0,716	0,716	0,265	0,760	0,766	0,760	0,242	0,762	0,253	0,700
	2500	0,734	0,734	0,309	0,737	0,737	0,737	0,286	0,737	0,286	0,729
	3000	0,733	0,733	0,411	0,737	0,733	0,733	0,395	0,733	0,395	0,732
Przykład 7	200	0,392	0,294	0,210	0,605	0,663	0,489	0,288	0,588	0,375	-
	500	0,314	0,233	0,195	0,584	0,634	0,470	0,268	0,561	0,348	-
	1000	0,205	0,161	0,170	0,496	0,538	0,405	0,236	0,480	0,300	-
	1500	0,149	0,124	0,123	0,314	0,338	0,262	0,158	0,305	0,194	-
	2000	0,107	0,100	0,101	0,171	0,181	0,154	0,118	0,170	0,132	-
	2500	0,157	0,157	0,032	0,170	0,170	0,170	0,029	0,170	0,029	-
	3000	0,168	0,168	0,145	0,170	0,170	0,170	0,014	0,170	0,014	-

W tablicy przedstawione są prawdopodobieństwa wyniku pojedynku dla strony A oraz ilościowe charakterystyki warunków przedstawionych w tablicach 2.3 i 2.5
 Prawdopodobieństwa zwycięstwa strony B w pojedynku dla wyżej wymienionych przykładów w większości przypadków określa się jako dopełnienia do jedności odpowiednich wartości prawdopodobieństw zwycięstwa strony A.

Obecnie przeprowadzimy krótką analizę wyników przedstawionych w tablicy 2.6. Założymy, że w tablicy 2.3 wartości parametrów określających efektywność wykrycia celów i szybkostrzelności środków bojowych charakteryzują warunki, kiedy strona A atakuje, a strona B broni się. /W dalszych rozważaniach środek strony A w przykładzie 1 nazywać będziemy środkiem I, a środek strony B - środkiem II./

Rozpatrując wyniki rozwiązania przykładu 1 /patrz tablica 2.6/ zobaczymy, że jeżeli pojedynek zaczyna się z odległości 3000 m, to strona A ma zdecydowaną przewagę. Zwycięża ona średnio w 70-80% pojedynków, a strona B wygrywa tylko 20-30% pojedynków. Przy tym oczekiwane wyniki pojedynku tylko nieznacznie zmieniają się w zależności od tego, jaki stan Si wystąpił na początku pojedynku. Oznacza to, że przewaga w efektywności oddzielnych strzałów strony A odgrywa decydującą rolę.

Jeżeli pojedynek zaczyna się z odległości 1500 m, to siły stron są w przybliżeniu równe. Już na tej odległości bardzo istotne jest wystąpienie stanu, w którym znajduje się pojedynek. Np., jeżeli wystąpił stan S_0 to znaczy, że żaden z przeciwników nie wykrył celu, to strona A zwycięża z prawdopodobieństwem 0,47; natomiast jeżeli strona A wykryła cel, a strona B jeszcze nie, to prawdopodobieństwo zwycięstwa strony A wzrasta do 0,66.

Ten istotny wzrost efektywności spowodowany jest wysoką wartością informacji o położeniu celu. Dalsze zmniejszenie odległości odpowiadającej początkowi pojedynku prowadzi do znacznego obniżenia prawdopodobieństwa zwycięstwa strony A. Stąd można wyciągnąć wniosek, że w warunkach przykładu 1 stronie B korzystne jest zbliżenie się do przeciwnika.

W przykładzie 2 zmienione są w porównaniu z rozpatrywanymi warunkami tylko charakterystyki położenia celu. Pojedynek stron odbywa się w terenie równinnym. Rozpatrzenie wyników rozwiązania i ich porównanie z odpowiednimi wynikami przykładu 1 wykazuje, że pojedynek w terenie równinnym jest bardziej korzystny /obojętnie z jakich odległości zaczyna się/ dla strony A. Jeżeli strona B ma możliwość wyboru pozycji obronnej, to można jej wskazać, aby unikała równinnych odcinków terenu.

Warunki przykładu 3 można traktować w następujący sposób: strona A naciera i posiada w swojej dyspozycji środek bojowy I, strona B broni się i posiada w swojej dyspozycji środek bojowy II. Jeżeli w tych warunkach starcie zaczyna się od stanu S_0 , to strona A wygrywa średnio od 30% do 34% pojedynków, w zależności od odległości, od której zaczyna się starcie. Strona B wygrywa 70% starć.

Oczekiwane wyniki uzyskane przy wszystkich odległościach praktycznie nie zależą od wystąpienia lub braku bezpośredniej widoczności. Łatwo się o tym można przekonać, porównując wyniki dla odpowiednich odległości R , uzyskane przy początkowych stanach S_0 i S . Następnie, jeżeli pojedynek zaczyna się z odległości 2000-3000 m, to jego prawdopodobne wyniki, bardzo mało zależą od stanu początkowego. Innymi słowy, również w efektywności wykrycia i szybkostrzelności przy tych warunkach nie odgrywają decydującej roli.

Warunki przykładu 4 są następujące. Naciera i broni się środek I. Broniąca się strona B otwiera ogień z odległości 2000 m. Jeżeli starcie zaczyna się z odległości 2500-3000 m, to fakt ten wyrównuje siły stron, / S_0 / lub daje nieznaczną przewagę brodkowi nacierającemu. Następnie wraz ze zmniejsze-

nieniem odległości początkowej, przewaga strony broniącej się w szybkości wykrycia celu zmniejsza prawdopodobieństwo zwycięstwa strony A, a stan, w którym znajduje się pojedynek, odgrywa decydującą rolę. Tak, na przykład, jeżeli przy odległości 1000 m pojedynek znajdował się w stanie S_0 , to prawdopodobieństwo zwycięstwa strony A wynosi tylko 0,23, natomiast jeżeli rodek A wykrywa cel $/S_3/$, to fakt ten wyrównuje siły stron i strona A w 51% starć osiąga sukces.

W przykładzie 5 w dyspozycji strony nacierającej jest środek II, a w dyspozycji strony broniącej środek I. Rozpatrzenie wyników doprowadza nas do wniosku: strona B znacznie przewyższa stronę A. Prawdopodobieństwo zwycięstwa strony A w pojedynku, przy stanie początkowym S_0 , który występuje na odległościach 1500-3000 m, wynosi 0,11-0,15. Następnie prawdopodobieństwo nieco wzrasta zbliżając się do wyników otrzymanych w warunkach przykładu 1. Spowodowane to jest jednakową efektywnością strzelania środków I i II na małych odległościach. Podobnie jak w poprzednich przypadkach wraz ze zmniejszeniem odległości wzrasta znaczenie efektywności środków wykrywania u nacierającej strony A, podczas gdy informacja o położeniu celu nie ma decydującego znaczenia dla strony B. Żeby przekonać się o tym porównajmy oczekiwane wyniki dla stanów S_0 i S_1 .

Przykład 6 przedstawia sytuację, kiedy zachowane są wszystkie warunki opisane w przykładzie 5, ale broniąca się strona B dąży do osiągnięcia maksymalnych korzyści dla siebie, nie otwierając ognia do odległości 1000 m.

Porównując wyniki obliczeń dla tych warunków z wynikami uzyskanymi w przykładzie 5, upewnimy się, że strona B nie tylko, że nie uzyska żadnych korzyści przy realizacji swojego rozwiązania, ale zmniejszy swoje szanse zwycięstwa w pojedynku. Na przykład, jeżeli w przykładzie 5 prawdopodobieństwo zwycię-

stwa strony A, dla stanu początkowego S_0 i odległości 1500 m wynosiło 0,145, to prawdopodobieństwo dla warunków przykładu 6 wynosi 0,61. Innymi słowy, strona A, która przedtem przegrywała około 85% starć, teraz wygrywa ponad połowę pojedynków.

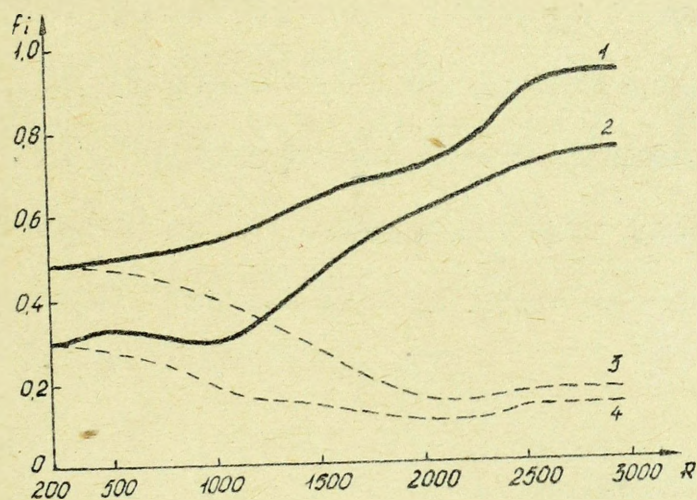
Przykład 7 przedstawia starcie tych samych przeciwników co w przykładzie 5, ale na terenie równinnym. Analizując oczekiwane wyniki starcia dla stanu początkowego S_0 i porównując je z odpowiednimi wartościami z przykładu 5, zauważymy, że teren równinny nieznacznie podwyższa prawdopodobieństwo uzyskania sukcesu w pojedynku przez środek nacierający. Sprawa wygląda tak, jak w przykładzie 2, chociaż strony zamieniły się środkami bojowymi.

Porównanie odpowiednich wyników obliczeń przykładów 5 i 7 dla stanu początkowego S_3 wykazuje, że informacja o położeniu celu w terenie równinnym jest bardziej korzystna dla strony A. Jest to oczywiste, podobnie jak to, że w warunkach terenu pociętego wykryty cel może być zgubiony. Od tej chwili strona broniąca się będzie mieć określoną przewagę przy wykrywaniu celu. W warunkach terenu równinnego przewaga ta trwa tylko do pierwszego wykrycia celu, który zgodnie z przyjętymi założeniami nie może być zgubiony bez zakłócenia bezpośredniej widoczności. W terenie równinnym nie może być zakłóceń bezpośredniej widoczności. W ten sposób rozpatrzyliśmy wyniki obliczeń przedstawione w tablicy 2.6.

Obecnie postaramy się wyjaśnić, jak zmienia się stosunek sił w pojedynku w warunkach, kiedy nie uwzględnia się rzeźby terenu i przypadkowego charakteru wykrycia celu. W tym celu porównamy oczekiwane wyniki starcia zaczynającego się od stanu S_5 w warunkach przykładu 2 /tj. kiedy obaj przeciwnicy widzą się wzajemnie, utrata widoczności jest wykluczona i środki

prowadzą strzelanie tylko podczas starcia/, z odpowiednimi wartościami prawdopodobieństwa zwycięstwa strony A w warunkach przykładu 1 dla stanu zątkowego S_0 . Wyniki obliczeń przedstawimy na wykresie 2.1.

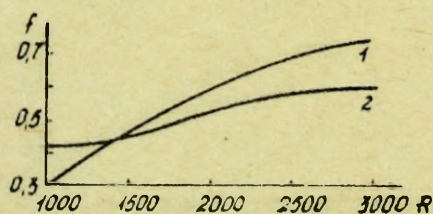
Analogiczne porównanie może być przeprowadzone między wynikami obliczeń dla przykładów 7 i 5. Analizując wykresy przedstawione na rysunku 2.1. upewniamy się, że uwzględnianie wpływu rzeźby terenu i przypadkowego charakteru wykrycia, ma decydujące znaczenie przy ocenie oczekiwanych wyników starcia,



Rysunek 2.1. Wykresy zmiany prawdopodobieństwa zwycięstwa f_i / R /

- 1 - prawdopodobieństwo zwycięstwa A dla stanu S_5 , przykład 2;
- 2 - prawdopodobieństwo zwycięstwa A dla stanu S_0 , przykład 1;
- 3 - prawdopodobieństwo zwycięstwa A dla stanu S_5 , przykład 7;
- 4 - prawdopodobieństwo zwycięstwa A dla stanu S_0 , przykład 5;

Rzecz nie tylko w tym, że różnice między odpowiednimi wartościami zwycięstwa A z uwzględnieniem i bez uwzględnienia tych czynników wynoszą niekiedy 0,2-0,25, ale bardziej decydujące jest to /patrz krzywe 1 i 2/, że ocena stosunku sił może zmieniać się w zależności od tego, czy otrzymaliśmy wynik z uwzględnieniem lub bez uwzględnienia rzeźby terenu i przypadkowości wykrycia. Jeżeli wnioskować na podstawie krzywej nr 1 /tj. nie uwzględniać tych czynników przy obliczeniach/, to można wyciągnąć wniosek o przewadze A niezależnie od odległości, na której rozpoczyna się starcie. Jeżeli wprowadzimy do rozpatrywanych obliczeń charakterystyki ukształtowania terenu i wykrycia /to jest otrzymamy krzywą nr 2/, to stanie się oczywiste, że A będzie mieć przewagę tylko pod warunkiem, że starcie zaczyna się z odległości większej jak 1500 m. Przy mniejszych odległościach strona B częściej będzie odnosić sukcesy.



Rysunek 2.2. Prawdopodobieństwo osiągnięcia danej rubieży:

1. prawdopodobieństwo osiągnięcia rubieży 500 m, $V_A=10\text{km/godz}$
2. prawdopodobieństwo osiągnięcia rubieży 500 m, $V_A=20\text{km/godz}$

Do tej pory rozpatrywaliśmy przykłady, w których pojedynek mógł trwać aż do tej chwili, kiedy odległość między środkami bojowymi była większa od zera. Na rysunku 2.2. są przedstawione niektóre wyniki obliczeń dla dwóch przykładów, w których starcie kończy się, kiedy strony zbliżą się na odległość nie przekraczającą 500 m. Obecnie krótko przeanalizujemy wyniki rozwiązań tych przykładów.

W przykładzie 8 strona A dąży do wyjścia na rubież 500 m. Pozostałe warunki są takie, jak w przykładzie 1. Na rysunku 2.2 krzywa 1 przedstawia wartości prawdopodobieństwa wyjścia A na rubież 500 m pod warunkiem, że starcie zaczyna się ze stanu S_0 . Jeżeli porównamy te wartości z odpowiednimi wartościami prawdopodobieństwa zwycięstwa A z przykładu 1, to przekonamy się o tym, że różnic nie ma. To oznacza, że pojedynek zaczynający się z odległości 1000-3000 m kończy się rażeniem jednego z przeciwników, zanim strony zbliżą się na odległość 500 m.

Przykład 9 różni się od poprzedniego tylko tym, że strona A zwiększa prędkość przesunięcia do 20 km/godz., to jest dwójnie. Wartość prawdopodobieństwa osiągnięcia przez stronę A danej rubieży pod warunkiem, że pojedynek rozpoczyna się ze stanu S_0 określa się z rysunku 2.2.

Porównując krzywe 1 i 2 stwierdzamy, że wzrost prędkości przesunięcia na początku pojedynku na odległościach 1500-3000 m, obniża wartość prawdopodobieństwa wyjścia strony A na daną rubież. Wzrost prędkości przesunięcia na odległości 1300-1400 m praktycznie nie ma żadnego wpływu na wartość prawdopodobieństwa. Jeżeli starcie rozpoczyna się z odległości 1000-1300 m,

to wzrost prędkości przesunięcia daje środkowi nacierającemu pewną korzyść; wartość prawdopodobieństwa wyjścia na daną rubież zwiększa się /krzywa 2 przechodzi wyżej od krzywej 1/. Otrzymany wynik pozwala wysunąć hipotezę, że przy określonych warunkach celowo jest dokonywać zmiany prędkości w czasie przesunięcia.

Takiego typu hipotezy mogą być często wysuwane przy analizie wyników rozwiązania, jednak od hipotezy do końcowego wniosku droga jest daleka. Do tego potrzebna jest wszechstronna analiza możliwości oraz dodatkowe obliczenia.

Na zakończenie zastanowimy się nad stopniem dokładności otrzymanych wyników. Czy dokładne jest pierwsze, drugie czy wszystkie trzy miejsca po przecinku w wynikach przedstawionych w tabelicy 2.6?

Jeżeli założyć, że zostały spełnione wszystkie założenia i przypuszczenia, jakie zostały zrobione przy wyprowadzeniu równań /2.17/, to błędy mogą wynikać tylko z metody obliczeniowej. Przy takim rozumowaniu dokładność obliczeń może być dowolna. Jednak przy ocenie wyników obliczeń będziemy zawsze mówić, że są one wartościami przybliżonymi.

Przybliżony charakter wyników obliczeń spowodowany jest w zasadzie dwiema przyczynami.

Po pierwsze, w modelu w sposób przybliżony uwzględniony został wpływ podstawowych czynników określających przebieg i wynik starcia. Stopień dokładności obliczeń tych czynników ograniczony jest możliwościami zbudowania efektywnego modelu matematycznego pojedynku z punktu widzenia obliczeń i przeprowadzenia analizy wyników. Stąd wynikają ograniczenia i założenia, które w dużym stopniu wypaczają rzeczywisty obraz starcia.

Jedną z możliwych dróg likwidacji tych ograniczeń jest budowanie stochastycznych modeli walki, które są rozpatrywane w rozdziale 5.

Po drugie sytuacja mająca charakter pojedynku nie daje wyczerpujących danych do analizy działań bojowych, Sumowanie wyników pojedynków nie daje obrazu złożonej /grupowej/ walki. Tylko w złożonej walce w całej pełni przejawiają się zależności między środkami bojowymi oraz osobliwości i właściwości kierowania walką.

Podsumowując wyniki modelowania matematycznego prostych form zbrojnej walki należy zrobić kilka uwag ogólnego charakteru. Przede wszystkim należy zaznaczyć, że rozpatrzone w tym rozdziale modele nie wyczerpują różnorodności wyników, jakie mogą być uzyskane w obecnym czasie za pomocą modelowania matematycznego. W tym rozdziale przedstawiony został aparat matematyczny, tylko w tym zakresie, który pozwala czytelnikowi zapoznać się z podstawowymi zasadami modelowania pojedynków oraz z ważniejszymi cechami modeli matematycznych jako środka do badania dynamiki walki.

Zasady modelowania matematycznego i sposób podejścia do rozwiązania zadań, przedstawiających realne procesy, za pomocą środków matematycznych, mogą być wykorzystane dodatkowo do rozwiązywania problemów związanych z oceną efektywności urządzeń przemysłowych, techniki rolniczej itd. Mówiąc o szerokich możliwościach zastosowania aparatu matematycznego nie należy zapominać o granicach praktycznego zastosowania, o znaczeniu konkretnych ilościowych wyników modelowania i o charakterze wniosków osiągniętych na podstawie modelowania.

Rozwiązując zadania praktyczne prostych form zbrojnego starcia za pomocą modeli, należy pamiętać o tym, że wyniki modelowania nie są w żadnym przypadku dokładnymi ilościowymi ocenami efektywności środków bojowych biorących udział w pojedynku. Otrzymane wartości liczbowe są wartościami przybliżonymi, a wnioski wyciągnięte na podstawie tych wartości mają charakter orientacyjnych roboczych hipotez, które następnie należy sprawdzać w ćwiczeniach odbywających się na poligonach. Innym sposobem sprawdzenia jest tworzenie bardziej dokładnych modeli matematycznych walki, zbudowanych w oparciu o mniej złożony system warunków ograniczających i założeń specjalnie utworzonych w celu sprawdzenia danego rodzaju hipotez.

Obok praktycznego zastosowania modele prostych form zbrojnego starcia posiadają bardzo duże znaczenie metodologiczne. Ze względu na prostotę sytuacji bojowych, przy budowie modeli matematycznych prostych form zbrojnego starcia widać: jak działają podstawowe zasady i metody matematycznego modelowania, wyraźne występowanie podstawowych czynników charakteryzujących matematyczne modele walki.

Zdobycie nawyków modelowania i opracowania zasad budowy modeli prostszych sytuacji bojowych, wykorzystanie i doskonalenie przyjętego aparatu matematycznego oraz rozwiązywanie zadań praktycznych ułatwia opis i analizę złożonych form walki. W tym zrozumieniu pojedynki są podstawą bardziej złożonych modeli matematycznych.

MODELE ANALITYCZNE WALKI GRUPOWEJ

Rozpatrzone w rozdziale poprzednim modele prostszych form walki zbrojnej, pojedynków ogniowych, okazują się niezwykle pożytecznymi przy rozwiązywaniu zagadnień związanych z oceną efektywności broni, środków obserwacji i elementarnych manewrów taktycznych. Jednakże, nie dają one odpowiedzi na podstawowe pytania, pojawiające się w toku ilościowych badań działań bojowych. Nie pozwalają ustalić odpowiednich parametrów, charakteryzujących dynamikę działań bojowych. Parametrami tymi są : tempo natarcia, ścierających się stron, absolutna lub względna liczebność i jej zmiany w trakcie walki, sposób i gęstość ugrupowań bojowych itp. Ilościowe badanie dynamiki działań bojowych w całości oraz określanie parametrów podstawowych, może być przeprowadzone tylko w oparciu o matematyczne modele walki grupowej.

W niniejszym rozdziale, dokonuje się próby zastosowania aparatu analitycznego do badania prostych form walki grupowej.

Mając powyższy cel na uwadze, w pierwszej kolejności rozpatruje się model walki jednorodnych ugrupowań liniowych, ustala się zależności, pozwalające określić liczebność stron zarówno w trakcie walki jak i w chwili zakończenia działań bojowych. Wprowadza się współczynniki współmierności środków, uwzględniające wskaźniki jakościowe i ilościowe różnych rodzajów broni. Ustala się niezbędne założenia, pozwalające uogólnić dany model na przypadek walki grupowej środków niejednorodnych. Odbywa się to drogą ekwiwalentnej zamiany w każdej chwili czasu niejednorodnego ugrupowania na ugrupowanie jednorodne. W końcowym etapie, rozpatruje się uproszczony model walki grupowej przy równomiernej gęstości ugrupowań bojowych.

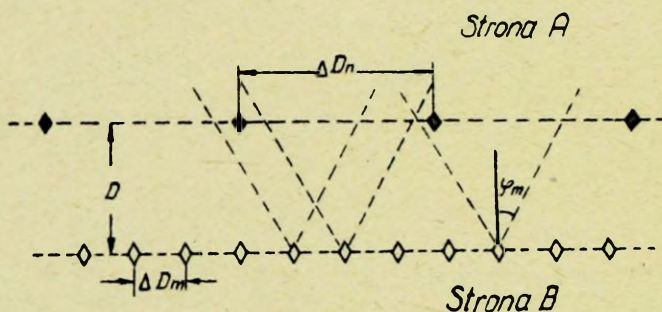
W rozdziale przytacza się również przykłady i schematy, uzupełniające materiał i ukazujące możliwy zakres zastosowania rozpatrywanych modeli.

3.1. Walka ugrupowań środków jednorodnych.

Formalizacja naturalnego procesu.

Budowa modeli walki

Rozpatrzmy walkę dwóch przeciwdziałających ugrupowań. Przed każdym z nich stoi zadanie - zniszczenie przeciwnika ogniem swoich środków. Ugrupowanie A, posiada w swoim składzie n_{a0} środków ogniowych jednego typu, a ugrupowanie B - n_{b0} środków drugiego typu.

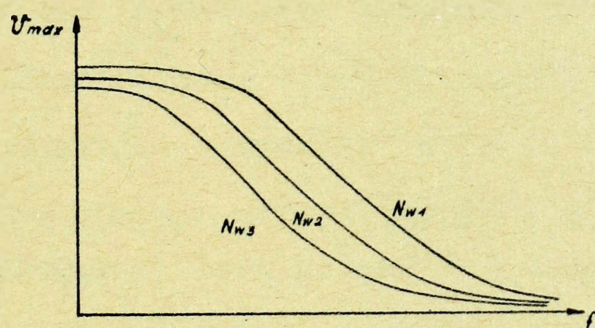


Rys. 3.1. Schemat rozmieszczenia środków ogniowych stron.

Założymy, że w chwili początkowej ugrupowania rozmieszczone są w liniowych szeregach bojowych, w odległości D jedno od drugiego /rys.3.1/. W toku walki, rozmieszczenie to może ulegać zmianie, według przyjętego z góry prawa, uwzględniającego w charakterze parametrów podstawowych, charakterystyki właściwości jezdnych przemieszczających się środków i przejezdności terenu. Przy formalizacji naturalnego procesu, w matematycznych modelach działań bojowych pododdziałów wojsk lądowych, teren odgrywa istotną rolę. Należy uwzględnić jego wpływ na prędkość przemieszczania, na

efektywność procesu wykrywania celów i strzelania, skuteczność, zależną w znacznej mierze od czasu, w toku którego ruchomy cel znajduje się w granicach bezpośredniej widoczności.

W naszym schemacie, przejezdność terenu charakteryzuje się jednym parametrem: współczynnikiem oporu ruchu f . Współczynnik ten ustala się w oparciu o wyniki doświadczeń poligonowych przy znanej mocy właściwej silnika N_w . Pozwala on określić prędkość pojedynczego środka ogniowego i całego ugrupowania. N_w , w wystarczający sposób charakteryzuje możliwości jezdne czołgów i innych środków samobieżnych. Dla większości z nich waha się w niewielkim przedziale, co ułatwia zobrazowanie zmian prędkości w formie tabe-



Rys. 3.2. Charakter zależności
 $U_{max} = U_{max}(f, N_w)$.

larycznej lub graficznej. Na rys. 3.2 pokazany jest charakter krzywych $v_{max} = v_{max}/f, N_w/$, gdzie v_{max} - oznacza maksymalną możliwą prędkość ruchu w danych warunkach terenowych, przy czym $N_{w1} > N_{w2} > N_{w3}$.

Z reguły, postać funkcji $v_{max}/f, N_w/$ określa się empirycznie, poprzez opracowanie danych statystycznych, związanych z wybraną klasą gruntów.

Drugi aspekt odtworzenia terenu w modelu, związany jest z uwzględnieniem jego wpływu na wykrycie celów. Założymy, że w chwili początkowej, przeciwnicy rozpoczynają poszukiwanie celów

i dopiero po ich wykryciu otwierają ogień. Przyjmujemy że wszystkie środki są wykrywane z prawdopodobieństwem P_{wykr} , które stanowi funkcję czasu obserwacji, typu i postaci celów, odległości obserwacji oraz charakterystyk właściwości optycznych środków obserwacji. W ogólnej postaci, teoria poszukiwania rozpracowana jest dla stosunkowo szerokiej klasy zadań /patrz, na przykład, [26]. W przypadku ogólnym prawdopodobieństwo wykrycia celu określa się jako prawdopodobieństwo warunkowe, uwzględniające prawdopodobieństwo rozmieszczenia celów w punkcie wykrywania oraz prawdopodobieństwo wykrywania ich środkami obserwacji pod warunkiem rozmieszczenia celów w tym miejscu. Założymy, że prawdopodobieństwo P_{wykr} zadane jest przy dowolnej odległości, dla badanej pary środków bojowych i zadanych warunków maskowania oraz pory roku, jako funkcji czasu poszukiwania. Pojęcie poszukiwania, w tej postaci, w jakiej zostało tutaj użyte, wymaga pewnego wyjaśnienia.

Jeśli wyobrazimy sobie czołg, którego załoga usiłuje wykryć cel, to jasnym jest, że przegląd terenu realizowany będzie przez członków załogi w ograniczonym sektorze i w trakcie określonego czasu, zależnego od warunków atmosferycznych, odległości do celu i jego charakteru oraz innych czynników. Weźmy funkcję, określającą rozmiary sektora w którym prowadzi się poszukiwanie celu i zależną od powyższych warunków. Sektor ten nazwiemy sektorem wykrywania. Założymy, że na jednorazowy przegląd terenu w tym sektorze załoga zużywa określoną ilość czasu τ . Będziemy uważać, że wielkość odzwierciedla wpływ odległości w przypadku bezpośredniej widoczności, stopień znajomości obrony przeciwnika, stopień przygotowania załogi oraz czas poprzedniej obserwacji. Jednorazowy przegląd terenu w sektorze wykrywania w okresie czasu τ nazywać będziemy poszukiwaniem. W ten sposób przyjmujemy że proces wykrywania celu zawiera się w systemie poszukiwań i charakteryzuje się prawdopodobieństwem wykrycia celu w trakcie poszukiwania, rozpoczętego w

chwili t :

$$P_{\text{wykr}} = P / t, \tilde{\tau}, D / .$$

Przy poczynionych założeniach, jeśli w sektorze wykrywania znajduje się m celów, to wartość oczekiwana /nadzieja matematyczna / liczby wykrytych celów w okresie poszukiwania, przy warunku niezależności zdarzenia wykrycia każdego z nich, może być obliczona ze wzoru

$$m_{\text{wykr}} = m P_{\text{wykr}}, \quad /3.1/$$

gdzie

$$m = m_{\Delta 1} \Delta l_a ;$$

$$m_{\Delta 1} = \frac{n_b}{n_{b0} \Delta D_b} \quad - \text{liczba celów na jednostkę szerokości frontu w chwili } t ;$$

$$\Delta l_a = 2D \operatorname{tg} \varphi_m \quad - \text{widoczna przez załogę część frontu ;}$$

D - odległość między przeciwnikami w chwili t ;

φ_m - połowa sektora wykrywania środków ugrupowania A ;

ΔD_p - przedział wzdłuż frontu, oznaczający odległość między środkami ugrupowania B , na początku walki ;

n_b - bieżąca liczebność ugrupowania B .

Założymy teraz, że załoga czołga rozpoczyna strzelanie w tym przypadku, kiedy $m_{\text{wykr}} \geq 1$, i prowadzi ostrzał celów aż do ich porażenia a następnie przystępuje do poszukiwania nowych celów. W sytuacji gdy $m_{\text{wykr}} \geq 1$ czas przewidziany na wykrycie celu jest równy $\tilde{\tau}$. Jeśli natomiast $m_{\text{wykr}} < 1$, to liczba poszukiwań, niezbędnych do tego, aby wartość oczekiwana liczby wykrytych celów równała się jedności, wynosi

$$\varepsilon = \frac{1}{m_{\text{wykr}}} .$$

Sredni czas, zużyty na wykrycie celu określimy z zależności

$$t_{\text{wykr}} = \tilde{\tau}_g \begin{cases} \varepsilon = 1 & \text{przy } m_{\text{wykr}} \geq 1, \\ \varepsilon = \frac{1}{m_{\text{wykr}}} & \text{przy } m_{\text{wykr}} < 1. \end{cases}$$

Po przeprowadzeniu przez załogę czołgu, poszukiwania i wykrycia pewnej liczby celów, następuje proces wyboru celu. W przypadku pominięcia, przy matematycznym opisie walki ugrupowań środków jednorodnych, odchylen od warunków średnich na skrzydłach, wówczas środki ogniowe każdego ugrupowania znajdować się będą w identycznych warunkach. Z tego punktu widzenia i z uwagi na charakter podstawowego celu stawianego w walce - zadania maksymalnych strat przeciwnikowi, najwygodniejszym będzie przyjęcie równomiernego rozkładu ognia własnych środków ogniowych, do wszystkich celów przeciwnika. W niniejszym paragrafie będziemy przyjmować, że w wyniku skutecznego poszukiwania dokonany został wybór celu; przy opisie dynamiki walki wrócimy jeszcze raz do tego zagadnienia

Wobec dokonania wyboru celu, znajdziemy teraz liczbę strzałów M , niezbędną dla jego rażenia. Przy ustalonych charakterystykach rozrzutu, ochrony celu i odległości celu od środków rażenia

$$M = P_1 + 2 P_2 / 1 - P_1 / + 3 P_3 / 1 - P_2 / / 1 - P_1 / + \dots \\ + i P_i / 1 - P_{i-1} / \dots / 1 - P_1 / + \dots , \quad /3.2/$$

gdzie P_i - prawdopodobieństwo rażenia celu w i -tym wystrzale:

$$P_i = P_{i-1} + \frac{P_{\text{max}} - P_1}{2^i - 1} ,$$

w przypadku wzrostu prawdopodobieństwa rażenia od i -tego do $i + 1$ -ego wystrzału, kosztem korektury wielkości

$$\frac{P_{\max} - P_i}{2},$$

gdzie

$$P_{\max} = P_{\max} / B_b, B_w, B_d, h_c, l_c, m_c / ;$$

$$P_1 = \omega P_1 / B_{bp}, B_{wp}, B_{dp}, h_c, l_c, m_c / ;$$

ω - prawdopodobieństwo rażenia celu przy warunku trafienia ;

$P_1 / B_{bp}, B_{wp}, B_{dp} /$ - prawdopodobieństwo trafienia w cel przy pierwszym strzale ;

B_{bp}, B_{wp}, B_{dp} - średnie odchylenie, przy czym $B_{wp} = B_{wp} / D /$,

$$B_{bp} = B_{bp} / D / , \quad B_{dp} = B_{dp} / D / ;$$

m_c, l_c, h_c - szerokość, długość i wysokość celu.

Liczba członów ξ we wzorze /3.2/ może być ograniczona, jeśli przyjmiemy następującą dokładność obliczeń :

$$E = P_i - P_{i-1} .$$

Wobec tego

$$\xi = 1 + \frac{\ln \frac{P_{\max} - P_1}{E}}{\ln 2}$$

i wzór /3.2/ przyjmie postać

$$M = \sum_{i=1}^{E[\xi]} i P_i \prod_{k=0}^{i-1} / 1 - P_k / ,$$

gdzie $E[\xi]$ - część całkowita wielkości ξ .

Przy $P_i = P_1$ dla dowolnego i t.j. przy strzelaniu bez poprawki, z /3.2/ otrzymamy

$$M = P_1 / 1 + 2q + 3q^2 + \dots + i q^{i-1} + \dots / =$$

$$= P_1 \frac{d}{dq} \frac{q}{1-q} = \frac{1}{P_1} ,$$

gdzie $q = 1 - P_1$.

Przy znanym M , średni czas, zużyty na rażenie celu przez jeden środek, będzie równy

$$t_r = \frac{M}{S} ,$$

gdzie S - szybkostrzelność bojowa środka rażącego.

Średni czas, zużyty na znalezienie i rażenie celu jednym środkiem z danego ugrupowania, znajdujemy jako sumę t_{wykr} i t_r :

$$t_y = \tilde{\tau}_g + \frac{M}{S} .$$

W charakterze podstawowej charakterystyki środków ogniowych przeciwników, będziemy wykorzystywać w modelu, wielkość odwrotną do czasu zużytego na poszukiwanie i rażenie jednego celu, t.j. liczbą celów przeciwnika, niszczonych w jednostce czasu jednym środkiem ogniowym strony A :

$$v_a / t / = \frac{S_a}{M_a + S_a \tilde{\tau}_a \varepsilon_a} ,$$

i jednym środkiem strony B :

$$v_b / t / = \frac{S_b}{M_b + S_b \tilde{\tau}_b \varepsilon_b} . \quad /3.3/$$

Odpowiednia postać wzorów związana jest z przyjęciem odpowiedniego schematu formalizacji rzeczywistego procesu. W zależności od wymaganej dokładności odtworzenia procesu walki, opis jego może być dokonany bardziej lub mniej szczegółowo, o czym

pisaliśmy już powyżej. Przedstawiany schemat formalizacji przydatny jest dla wstępnych ocen pewnych parametrów walki i uzbrojenia czołgów, a także dla wyjaśnienia podstawowej zasady budowy modeli.

Z przyjętego schematu formalizacji walki wynika, że środki każdego z walczących ugrupowań znajdują się w jednakowych warunkach i charakteryzują się parametrami v_a i v_b .

Dla opisu dynamiki takiej walki, musimy posiadać możliwość określania, w dowolnej zadanej chwili czasu t , prawdopodobieństwa zniszczenia środka bojowego w każdym ugrupowaniu.

W szeregu pracach, a w szczególności w [7], autorzy zakładali, że czas zniszczenia celu w walce t_y jest zmienną losową, posiadającą rozkład wykładniczy. Przyjęcie tego rozkładu zakłada pewne zniekształcenie właściwości rzeczywistego procesu. Wynika z niego na przykład, że czas t_y może być dowolnie małym, że przeniesienie ognia po zniszczeniu celu, odbywa się bez zużycia czasu itd. Jednakże pomijając to, uzyskiwane wyniki zupełnie dobrze odpowiadały rzeczywistemu procesowi. Przyjmijmy wobec tego następującą postać funkcji rozkładu zmiennej losowej t_y

$$F(t) = P\{t_y < t\} = 1 - e^{-\mu t}.$$

Wielkość μ znajdziemy ze wzoru na wartość oczekiwaną t_y :

$$M[t_y] = \mu \int_0^{\infty} u e^{-\mu u} du = \frac{1}{\mu}, \quad \mu = \frac{1}{M[t_y]},$$

t.j. μ jest średnią liczbą celów, niszczonych w jednostce czasu przy ostrzale jednym środkiem bojowym.

Jeśli w trakcie walki $n_b \neq n_a$, to liczba środków z , ostrzeliwujących cel będzie różna od jedności. Przy ostrzale celu wieloma środkami

$$P \{t_y > t\} = P \{t_{y1} > t ; t_{y2} > t ; \dots ; t_{yz} > t\} = \\ = \prod_{i=1}^z P \{t_{yi} > t\} = e^{-zvt}$$

i prawdopodobieństwo zniszczenia w czasie t , środka bojowego niewielkiego ugrupowania wyniesie

$$P \{t_y < t\} = 1 - e^{-zvt},$$

a przy z i v zależnych od t ,

$$P \{t_y < t\} = 1 - e^{-\int_0^t z/x/v/x dx} \quad /3.4/$$

Dla jednorodnych ugrupowań, celem określenia $z/t/$ przy $n_b > n_a$, można przyjąć stosunek bieżących liczebności

$$z/t/ = \frac{n_b}{n_a}.$$

Jednakże należy mieć na uwadze to, że w realnej walce, liczba środków ognicwych prowadzących ogień do jednego celu jest ograniczona. Dlatego też w tych przypadkach, kiedy bada się walkę, zmierzającą do całkowitego zniszczenia jednego z przeciwników, należy ograniczać ewentualne wartości zmiennej $z/t/$, wychodząc bądź z celów badań, bądź z zasad taktycznych.

Przy określaniu prawdopodobieństwa zniszczenia środka, znacznego liczebnie ugrupowania $/n_b > n_a/$, w którym ostrzeliwuje się tylko n_a środków, wychodząc z jednorodności ugrupowania, można przyjąć, że każdy środek ostrzeliwuje się z prawdopodobieństwem

$$P_{\text{ostrz}} /t/ = \frac{n_a}{n_b}.$$

Prawdopodobieństwo zniszczenia środka w czasie t , znacznego liczebnie ugrupowania, znajduje się ze wzoru

$$P \{t_y < t\} = \int_0^t P_{\text{ostrz}}/x/ \frac{\partial (1 - e^{-\int_0^x v/y/dy})}{\partial x} dx . \quad /3.5/$$

Dla ugrupowań A i B równania /3.4/ i /3.5/ przyjmują postać

$$P_a \{t_y < t\} = 1 - e^{-\int_0^t \frac{n_b/u/}{n_a/u/} v_b/u/ du}$$

$$P_b \{t_y < t\} = \int_0^t \frac{n_a/u/}{n_b/u/} v_a /u/ e^{-\int_0^u v_a/y/dy} du . \quad /3.6/$$

Całość równań /3.6/ , opisuje proces walki, uwzględniający wzajemne oddziaływanie ogniem przez każdego z przeciwników.

A zatem, w dowolnej chwili walki możemy określić prawdopodobieństwo, z jakim w każdym z ugrupowań , w danej chwili rażona jest odpowiednia ilość środków. Ze względu na jednorodność środków posługując się wzorami rozkładu dwumianowego, możemy znaleźć prawdopodobieństwo rażenia równo x środków w chwili t :

$$P_a \{x\} = C_{n_{a0}}^x P_a^x \{t_y < t\} [1 - P_a \{t_y < t\}]^{n_{a0}-x}, \quad 0 \leq x \leq n_{a0} ,$$

$$P_b \{x\} = C_{n_{b0}}^x P_b^x \{t_y < t\} [1 - P_b \{t_y < t\}]^{n_{b0}-x}, \quad 0 \leq x \leq n_{b0} .$$

/3.7/

Jednakże w szeregu sytuacji bojowych, działania bojowe nie mogą się przedłużać aż do pełnego zniszczenia jednej ze stron. Mając to na uwadze, celowym jest przyjęcie odpowiednich poziomów liczebności ugrupowań, osiągnięcie których powoduje, że w danej sytuacji taktycznej, ugrupowanie traci zdolność do walki.

Wykorzystując wzory /3.7/ , przy ustalonych wartościach poziomów liczebności n_{ka} i n_{kb} / $1 \leq n_{ka} \leq n_{a0}$, $1 \leq n_{kb} \leq n_{b0}$ / możemy obliczyć prawdopodobieństwa strat i zachowania zdolności ugrupowań bojowych w chwili t :

$$P_a \{n_a \leq n_{ka}\} = \sum_{x=0}^{n_{ka}} C_{n_{ao}}^x P_a^{n_{ao}-x} \{t_y < t\} \times$$

$$\times [1 - P_a \{t_y < t\}]^x = P_{n_a \leq n_{ka}} ,$$

$$P_b \{n_b \leq n_{kb}\} = \sum_{x=0}^{n_{kb}} C_{n_{bo}}^x P_b^{n_{bo}-x} \{t_y < t\} \times$$

$$\times [1 - P_b \{t_y < t\}]^x = P_{n_b \leq n_{kb}} ,$$

$$P_a \{n_a > n_{ka}\} = 1 - P_{n_a \leq n_{ka}} ,$$

$$P_b \{n_b > n_{kb}\} = 1 - P_{n_b \leq n_{kb}} . \quad /3.8/$$

Jeśli w chwili t przeciwnicy posiadają średnie liczebności, większe od ustalonych poziomów zdolności bojowej, to można uważać, że walka z tą chwilą przedłuża się z prawdopodobieństwem

$$P_{AB} = / 1 - P_{n_b \leq n_{kb}} / / 1 - P_{n_a \leq n_{ka}} / . \quad /3.9/$$

Przy zachowaniu zdolności bojowej jednego z ugrupowań i przy równoczesnym porażeniu w danej chwili przeciwnika, możemy wypisać odnośne prawdopodobieństwa, nazywając je prawdopodobieństwami zwycięstwa :

$$P_A = P_{n_b \leq n_{kb}} / 1 - P_{n_a \leq n_{ka}} / ,$$

$$P_B = P_{n_a \leq n_{ka}} / 1 - P_{n_b \leq n_{kb}} / . \quad /3.10/$$

Korzystając z rachunku prawdopodobieństwa prowadzi się ocenę walki według wzorów /3.8/, /3.9/, /3.10/. Ocena ta może być przeprowadzona zarówno w dowolnej chwili czasu, jak i w chwili zakończenia walki t_k . Przy czym jako chwilę zakończenia walki rozumiemy wartość oczekiwaną czasu osiągnięcia przez jedno z ugrupowań mniejszej liczebności, od ustalonego poziomu zdolności bojowej. Dla określenia wielkości t_k mamy obliczone już prawdopodobieństwa

$$P_{n_a \leq n_{ka}} \quad \text{i} \quad P_{n_b \leq n_{kb}} .$$

Ogół tych wartości, uzyskiwanych w toku całej walki, tworzy funkcje rozkładu dla obydwu stron, pozwalające obliczyć wartość oczekiwaną czasu zakończenia walki, według następującej zależności

$$M [t_k] = \min \left\{ \int_0^{\infty} t \frac{\partial P\{n_b \leq n_{kb}\}}{\partial t} dt ; \int_0^{\infty} t \frac{\partial P\{n_a \leq n_{ka}\}}{\partial t} dt \right\} , \quad /3.11/$$

ponieważ zdarzenie $n_b \leq n_{kb}$ / $n_a < n_{kb}$ / równoważne jest zdarzeniu $t_k \leq t$.

Całość uzyskanych zależności matematycznych, opisuje zmianę stanów wszystkich obiektów badanego procesu w czasie.

Tym sposobem, można uważać, że wzory /3.1/ - /3.11/ przedstawiają rozwiązanie zadania postawionego w tym paragrafie. Jednakże dla pełności formalizacji opisu procesu, należy przyjąć pewne założenia, dotyczące przemieszczania ruchomych środków bojowych. Niezależnie od tego, czy modeluje się bój spotkaniowy czołgów lub atak czołgów na broniącego się przeciwnika, najprostszym wydaje się ustalenie prędkości jako zmiennej losowej o stałych parametrach. Nie pretendując do wyczerpującego opisu manewr

rów taktycznych, można przeprowadzić szereg dopuszczeń, odnośnie charakteru zależności prędkości przemieszczenia nacierających ugrupowań. Rozpatrzmy jeden z możliwych wariantów, który zaspokaja dostatecznie szeroką klasę działań bojowych.

Założymy, że czołgi poruszają się w ataku z prędkości v , zawierającą się między prędkością minimalną v_{\min} , określaną w zależności od wielu czynników związanych ze względami taktycznymi lub ogniowym oddziaływaniem broniącego się przeciwnika a prędkością maksymalną v_{\max} . Prędkość może odzwierciedlać konieczność manewrowania i wykorzystywania fałd terenowych w zależności od składu broniącego się ugrupowania, od jego ogniowego oddziaływania lub od charakteru terenu utrudniającego prostoliniowy ruch czołgów. Jeśli założymy, że ogniowe oddziaływanie przeciwnika można będzie uwzględnić współczynnikiem przewagi q równym stosunkowi prawdopodobieństw zwycięstwa

$$q = \frac{P_A}{P_B},$$

to będziemy brać pod uwagę, że w początkowej chwili walki, prędkość atakujących czołgów równa się

$$v = v / q_0, \quad v_{\min}, \quad v_{\max} / ,$$

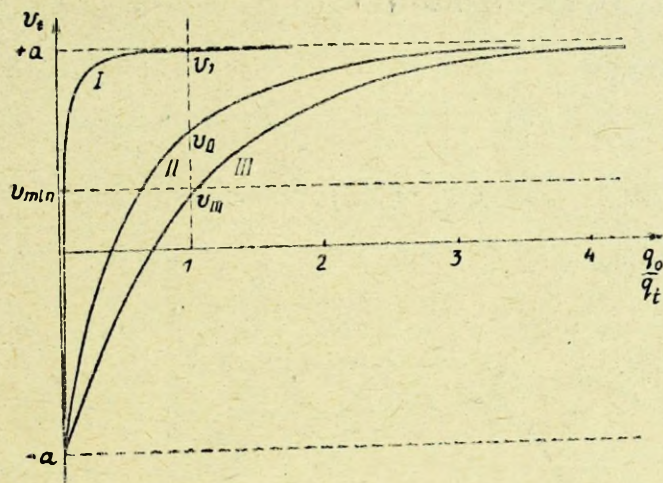
a przy zależności wykładniczej od q

$$v = e^{-q_0 \alpha} / v_{\max} - v_{\min} / + v_{\min} ,$$

gdzie α - współczynnik, przyjmowany z uwagi na najwyższy stopień zgodności z rzeczywistością.

Zmiana współczynnika q w trakcie walki, odzwierciedla charakter działań bojowych. Jeśli stosunek q_0/q_t rośnie, to oznacza, że zwiększa się prawdopodobieństwo zwycięstwa nacierających czołgów, w porównaniu z odpowiednim prawdopodobieństwem

dla ugrupowania przeciwnika. Można wówczas założyć, że pododdzia¹ będzie zwiększał swoją prędkość przybliżając się do granicy $+v_{\max}$. Jeśli natomiast wielkość q_0/q_t zmniejsza się, to świadczy to o tym, że atak jest skutecznie odpierany i naciera-
jący pododdział musi przejść do odwrotu a jego prędkość będzie



Rys. 3.3. Zależność prędkości ruchu czołgów od charakteru walki $v_{\max} = a /$.

spadać, zbliżając się do granicy równej $-v_{\max}$.

Na rys. 3.3 pokazane są krzywe, odpowiadające przytoczonym rozważaniom, w przypadku wykładniczej zmiany prędkości w zależności od stosunku q_0/q_t

$$v_t = 2 v_{\max} / 0,5 - e^{-\frac{q_0}{q_t}} \ln \frac{2 v_{\max}}{v_{\max} - v} / \quad /3.12/$$

Charakter krzywej określa się poprzez ustalenie prędkości

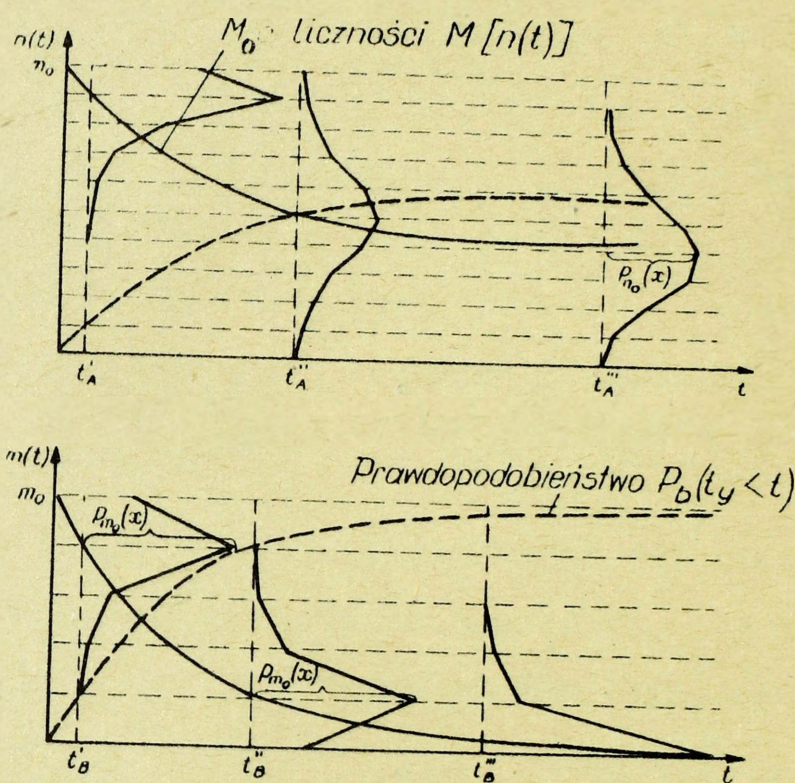
v .

W granicznych przypadkach może ona odpowiadać różnorodnym sytuacjom bojowym, poczynając od wyłączających odejście przy $v \approx v_{\max}$ /przypadek I / a kończąc na pośpiesznym odwrócie z uwagi na niepowodzenie, przy odpowiednim wyborze v_{\min} i $v \approx v_{\min}$ / przypadek III / .

Wzorem /3.12/ odzwierciedlającym przemieszczenie przeciw-

ników , kończy się budowę modelu walki ugrupowań środków jedno-
rodnych.

Na rys. 3.4 pokazano graficznie, podstawowe charakterystyki walki, przy $n_{a0} = 10$ i $n_{b0} = 5$. Oprócz wartości oczekiwanej liczebności każdego ugrupowania w chwili $t_A^I, t_A^{II}, t_A^{III}, t_B^I, t_B^{II}, t_B^{III}$, pokazano również na rysunkach, krzywe łamane rozkładu dwumianowego, określające prawdopodobieństwo wyrugowania w danej chwili dokładnie x środków.



Rys. 3.4. Rozkład liczebności stron w trakcie walki

Ponieważ przyjęto prowadzić ocenę wielkości parametrów uzbrojenia środków bojowych i sposobów ich wykorzystania, rozpatrując w charakterze podstawowego kryterium liczebność ugrupowania w trakcie walki, można uważać, że otrzymawszy główne charakterystyki tej wielkości jako zmiennej losowej uzyskaliśmy w zasadzie, pełną charakterystykę walki małych ugrupowań jednorodnych środków bojowych wojsk lądowych. Przy przejściu do bardziej

ogólnych i bardziej odpowiadających realnemu procesowi zadań modelowania działań bojowych, różnorodnego ugrupowania, można stosować szereg dróg badawczych. Nie mówiąc już o zastosowaniu uniwersalnych modeli stochastycznych, nie pozbawionych jednak pewnych niedostatków, można zbudować model analityczny, pozwalający uwzględniać wszystkie możliwe sytuacje bojowe z udziałem różnorodnych środków bojowych. Oczywiście model taki, będzie tym bardziej złożony, im większa będzie skala badanej walki. Zastosowanie takiego modelu będzie niewątpliwie ograniczone z uwagi na zbyt duże zużycie czasu oraz z uwagi na małą poglądowość otrzymywanych wyników. Drugą według nas metodą, jaką można przyjąć, jest metoda zamiany poszczególnych obiektów formalizowanego procesu, posiadających różne charakterystyki, jednym standardowym równoważnikiem.

Zagadnieniom powyższym, poświęcony jest następny paragraf.

3.2. Model walki niejednorodnych ugrupowań liniowych

W rozdz. 2 rozpatrywane były współczynniki współmierności /porównywalności / środków bojowych w oparciu o matematyczne modelowanie działań bojowych o charakterze pojedynku. Przechodząc do analizy grupowych działań bojowych, należy koniecznie pamiętać że przy zamianie niejednorodnych środków bojowych-jednorodnymi, winny być uwzględnione nie tylko indywidualne właściwości środków każdego typu, ale i właściwości występujące w trakcie łączenia ich w różne ugrupowania. Właściwości te, są uwarunkowane dodatkowymi możliwościami walki grupowej, w porównaniu z pojedynkiem, takimi jak możliwość ostrzału wieloma środkami jednego celu, wariantowanie sposobów ostrzału grupowego z uwzględnieniem podziału celów i stosunkowo niewielka zależność wyników działań bojo-

wych od pojedynczych strat środków bojowych.

W pierwszym przybliżeniu, wpływ tak zwanego „czynnika masowości” na współczynniki współmierności różnorodnych środków bojowych, może być ustalany przy pomocy modeli walki grupowej środków jednorodnych, rozpatrzonych w poprzednim paragrafie. Założymy, że rozpatruje się walkę ugrupowań przedstawioną w § 3.1. Będziemy przyjmować, że ugrupowania te są równoważne, jeśli w trakcie walki żadne z nich nie uzyskało przewagi. Oczywiście, możemy przy tym również założyć, że jednemu środkowi typu A równoważnych jest n_{bo}/n_{ao} środków typu B, gdzie n_{ao} - początkowa liczebność środków jednego typu w ugrupowaniu A, a n_{bo} - jak wyżej, tylko dla jednostek drugiego typu, w ugrupowaniu B. Stosunek ten, nazywany współczynnikiem współmierności i oznaczamy

$$\chi / A \rightarrow B / = \frac{n_{bo}}{n_{ao}} \cdot$$

Oczywiście zachodzi

$$\chi / B \rightarrow A / = \frac{1}{\chi / A \rightarrow B /} \quad /3.13/$$

Wyjaśnimy na przykładzie rolę współczynnika współmierności. Jeśli, na przykład, dla czołgów ciężkich i średnich, w boju spotkaniowym współczynnik ten wynosi $\chi = 1,4$, to oznacza to, że w boju spotkaniowym 14 - tu czołgów średnich i 10 -ciu ciężkich, średnio żaden z przeciwników nie uzyska przewagi. Oczywiście jest, że dokonując zamiany ugrupowania czołgów średnich, 10 ciężkimi lub ugrupowania ciężkich, 14 średnimi, otrzymamy analogiczny obraz.

W ten sposób, współczynnik χ pozwala na równoważną zamianę rozpatrywanych ugrupowań. Zamiana taka, była by w pełni prawomocna w trakcie walki, gdyby wartość χ miała charakter niezależ-

ny od warunków początkowych i toku walki. A przecież parametry taktyczno - techniczne zależą od wielu czynników, m.in. w pierwszej kolejności od odległości między przeciwnikami i warunków obserwacji, i dla różnych środków, zmieniają się w różny sposób. Na przykład, dla środków lufowych, funkcje $\chi / D /$ są z reguły monotoniczne, natomiast dla przeciwpancernych pocisków raketowych kierowanych /pprk/ mogą mieć maksima /minima/ odpowiadające najmniejszemu /największemu/ zasięgowi efektywności.

Po przeprowadzonych spostrzeżeniach, odnośnie pojęcia współmierności, przejdziemy do bardziej szczegółowego rozpatrzenia podstawowego sformułowania, określającego równowagę walczących ugrupowań i wyjaśnimy, co należy rozumieć pod słowami „ani jedna strona nie uzyskuje w toku walki przewagi”.

Przy przedstawieniu zadania § 3.1, przyjęto założenie, że przeciwnicy rozmieszczają się wzdłuż prostych równoległych i że obszar działania każdego środka bojowego ograniczony jest sektorem wykrycia. Następstwem tego założenia było zrezygnowanie z ewentualności nieograniczonego wzrostu odpowiedniej przewagi liczbowej, strony zwyciężającej. Przyjęto, że przewaga ta, w danej chwili czasu, zachowuje się jako stała w dowolnym punkcie zetknięcia się przeciwników i ograniczona pewnym zakresem.

Jeśli przewaga jest bliska jedności w dowolnej chwili walki, oznacza to, że wynikiem walki będzie wzajemne zniszczenie się przeciwników. W przypadku tym, należy słusznie zauważyć, że żaden z nich nie uzyska przewagi. Rozpatrując przy tym odpowiednie liczebności stron, możemy napisać :

$$\frac{d \left(\frac{n_a}{n_{a0}} \right)}{dt} / \frac{d \left(\frac{n_b}{n_{b0}} \right)}{dt} = 1 \quad /3.14/$$

Aby spełnić warunek /3.14/, nie zawsze udaje się dobrać

takie początkowe wartości liczebności ugrupowań, żeby można zastąpić stosunki odpowiedniego tempa strat, odchyleniami od jedności. Dlatego ustalimy granicę możliwego odchylenia od jedności ϵ stosunku /3.14/, w trakcie walki. Ustalimy także chwilę, od której winien być spełniony ten warunek. Chwilę tę określa się z tą myślą aby, nie patrząc na możliwość przyjmowania różnych poziomów zdolności do walki, brać pod uwagę, że w praktyce większość sytuacji bojowych, w których jedna ze stron została zniszczona w 50 - 60 %, nie posiada specjalnego znaczenia badawczego. W związku z tym można uważać, że jeśli do chwili zniszczenia połowy środków bojowych jednego z walczących ugrupowań, wartość stosunku /3.14/ nie odchyła się od jedności na więcej jak ϵ , to wzajemne oddziaływanie przeciwników jest jednakowe, a w związku z tym żaden z nich nie uzyskuje przewagi w toku walki. W tym przypadku wielkość

$$K'_{\epsilon, 50\%} = \frac{d\left(\frac{n_a}{n_{a0}}\right)}{dt} \bigg/ \frac{d\left(\frac{n_b}{n_{b0}}\right)}{dt} \approx 1 \quad /3.15/$$

nazywamy kryterium współmierności lub kryterium jednakowego tempa odnośnych strat. Odpowiednie współczynniki współmierności będziemy w pewnym czasie oznaczać χ' .

Przedstawione kryterium K' nie jest jedynym. W pewnych zadaniach można przyjmować, że przeciwnicy nie uzyskują przewagi w trakcie walki i przy innych warunkach. W oparciu o paragraf wprowadzający 3.1, prawdopodobieństwo zwycięstwa każdego z przeciwników można potraktować, w charakterze drugiego kryterium.

$$K''_{\epsilon, 50\%} = \frac{P_A/t/}{P_B/t/} \approx 1, \quad /3.16/$$

gdzie indeks „ $\epsilon, 50\%$ ” oznacza to samo, co w przypadkach kryterium K' , t.j. że przy zmianie odpowiednich liczebności

stron w granicach $1 - 0,50$, wielkość K'' nie odchyła się na więcej niż dowolnie małą wartość ϵ .

Kryterium / 3.16/ jest kryterium bardzo elastycznym, a współczynniki χ'' istnieją dla znacznie większej liczby typów środków bojowych i przy mniejszych ograniczeniach na ϵ .

Wyjaśnia się to tym, że kryterium K' zakłada równość prawdopodobieństw

$$P_a \{t_y < t\} = P_b \{t_y < t\}$$

przy $K' = 1$, podczas gdy kryterium K'' przy

$$\frac{P_{A/t}}{P_{B/t}} = \frac{P_{n_b \leq n_{kb}} / 1 - P_{n_a \leq n_{ka}}}{P_{n_a \leq n_{ka}} / 1 - P_{n_b \leq n_{kb}}} \approx 1$$

uwarunkowane jest równością

$$P_{n_a \leq n_{ka}} = P_{n_b \leq n_{kb}},$$

z której, wykorzystując wyrażenie /3.8/, przy $n_{ka} = n_{kb} = 0$,

otrzymujemy

$$P_a^{n_{ao}} \{t_y < t\} = P_b^{n_{bo}} \{t_y < t\}$$

i

$$\chi'' = \frac{n_{ao}}{n_{bo}} = \frac{\ln P_a \{t_y < t\}}{\ln P_b \{t_y < t\}}. \quad /3.17/$$

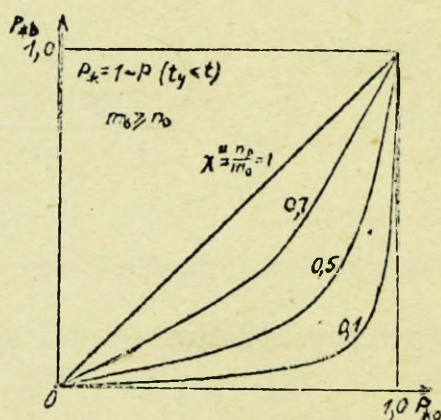
Przy różnych od zera poziomach zdolności bojowej kryterium

K'' oblicza się ze wzoru

$$K'' = \frac{\sum_{x=n_{ka}+1}^{n_{ao}} C_{n_{ao}}^x P_a^{n_{ao}-x} / 1 - P_b / x}{\sum_{x=n_{kb}+1}^{n_{bo}} C_{n_{bo}}^x P_b^{n_{bo}-x} / 1 - P_b / x}$$

$$\begin{aligned} & \times \sum_{x=0}^{n_{kb}} C_{n_{bo}}^x P_b^{n_{bo}-x} / 1 - P_b /^x \\ \longrightarrow & \\ & \times \sum_{x=0}^{n_{ka}} C_{n_{ao}}^x P_a^{n_{ao}-x} / 1 - P_a /^x \end{aligned}$$

Kryterium K'' pozwala obliczyć współczynniki współmierności przy znacznym zakresie warunków początkowych i dla większej liczby typów środków bojowych. Na rys. 3.5 pokazano zmianę funkcji K'' w zależności od prawdopodobieństwa $P_z = 1 - P\{t_y < t\}$ dla różnych wzajemnych stosunków liczebności początkowych. Kryterium K' odpowiada tutaj tylko krzywa $\chi'' = 1$, co stanowi dość ostre



Rys. 3.5. Zależność kryterium K'' od początkowego stosunku liczebności $\chi'' = \chi'' / P_{za}, P_{zb} /$.

ograniczenie, uwarunkowujące różnice kryteriów K' i K'' .

Obliczenia przeprowadzone w oparciu o przytoczone wzory pokazują, że w praktyce, dla najbardziej prawdopodobnych sytuacji bojowych wartości współczynników χ' i χ'' wykazują nieznaczne różnice między sobą, dlatego też w dalszej części nie będziemy dawać pierwszeństwa jednemu czy drugiemu kryterium, przy obliczaniu współczynników współmierności. Należy tylko mieć na uwadze, że kryterium K' obowiązkowo zakłada wzajemne oddziaływanie przeciw-

ników w trakcie walki nie istnieje dla tych przypadków, kiedy jeden z przeciwników znajduje się pod ogniem, ale sam nie może otworzyć ognia z uwagi na niskie charakterystyki taktyczno - techniczne, swojego uzbrojenia. W tym przypadku, dla danych typów środków i odległości wskazanym jest posługiwać się współczynnikiem χ'' , ponieważ w warunkach tych obowiązuje kryterium K'' :

Po rozpatrzeniu zasad budowy analitycznego modelu walki jednorodnych ugrupowań i określania podstawowych pojęć współmierności oddzielnych środków bojowych, oraz równoważności przeciwników, przejście do budowy modeli walki czołgów przy ugrupowaniu różnorodnym, nie przedstawia specjalnych trudności. Uzupełniając powyższe warunki, wskazanym jest przyjąć, po pierwsze, że jeden z przeciwników dysponuje N typami jednostek bojowych, przy czym środki każdego typu są równomiernie rozłożone wzdłuż frontu. Po drugie, dla każdego środka określone są na skali odległości współczynniki współmierności χ_{ib} i χ_{bi} :

$$\chi_{ib} = \chi / A_i \rightarrow B / ,$$

$$\chi_{bi} = \chi / B \rightarrow A_i / ,$$

$$i = 1, 2, \dots, N .$$

Po przeprowadzonych uogólnieniach, celem zastosowania metody, wykorzystującej zamianę różnorodnych środków bojowych ugrupowania przez równoważną z punktu widzenia wzajemnego oddziaływania ilość środków jednorodnych wskazanym jest zastanowić się nad racjonalnym wyborem, dla każdego ugrupowania środka ekwiwalentnego.

Rozwiązania tego zagadnienia można dokonać różnymi sposobami. Przede wszystkim, jako jednostkę sprowadzoną można przyjąć środek ustalony na całą walkę, który dzięki swoim parametrom,

średnio, najlepiej odpowiada temu celowi. Na przykład, można przyjąć środek o największej donośności i wówczas, badanie walki na większych odległościach nie spowoduje zbyt dużych rozbieżności w porównaniu z rzeczywistym procesem. Przy analizie walki na średnich odległościach, zamianę taką dopuszcza się tylko w przypadkach szczególnych.

Przyjęcie stałego równoważnika, zmniejsza objętość obliczeń i ułatwia skuteczne wykorzystywanie do wstępnych ocen. Przy bardziej dokładnych obliczeniach w charakterze następnego sposobu wyboru środka sprowadzonego, można zastosować odpowiedni algorytm, zgodnie z którym w każdym kroku obliczeń wybiera się ten środek z liczby środków znajdujących się w składzie ugrupowania, dla którego współczynnik współmierności ze środkami nacierającego przeciwnika - czołgami - przyjmuje wartości najmniejsze, różne od zera. Ponieważ charakterystyki wszystkich środków bojowych, uczestniczących w walce, są wcześniej znane, to wybór środka najbardziej efektywnego, nie sprawi specjalnych trudności. W rezultacie realizacji proponowanego algorytmu, rzeczywisty proces zostaje zamieniony na model walki jednorodnych ugrupowań./Bardzo trudne jest uogólnienie opisywanej metodyki, opartej na wykorzystaniu współczynników współmierności, na przypadek, kiedy obydwa walczące ugrupowania, składają się z niejednorodnych środków bojowych/.

Przy modelowaniu walki czołgów z różnorodną obroną przeciwpancerną / obroną ppanc / , możemy określić straty, wyrządzone im, środkami obrony ppanc określonego typu, a także określić ilości środków obrony ppanc każdego typu, które w tym samym przedziale czasu, spowodują czołgom, analogiczne straty. Przy określonych wymaganiach, dotyczących postaci funkcji $\chi /D/$, dla wszystkich uczestniczących w walce środków obrony ppanc w pierwszym przybliżeniu, można określać dopuszczalną zamianę środków obrony ppanc

jednego typu, środkami drugiego typu w ilości, niezbędnej dla powodowania równoważnych strat.

Przy modelowaniu walki, w której obydwa walczące ugrupowania składają się ze środków niejednorodnych, należało by z każdego z nich wybierać środek sprowadzony. Taka zamiana jest nieuzasadniona, bowiem wobec podanego wyżej określenia, współczynniki nie posiadają własności przechodniości.

Zatem, w chwili t , wymaga się zamiany pewnej ilości środków n_i ugrupowania A , równoważną ilością środków n_p , przy czym dla środków p -tego typu w danej chwili

$$\chi / A_p \rightarrow B / = \min_i \chi / A_i \rightarrow B / , \quad i = 1, 2, \dots, N .$$

Dokonując zamiany n_i środków bojowych należy zachować warunek, aby operacja ta nie naruszała wzajemnego oddziaływania ogniowego. Liczbę środków n_{pi} równoważną w tej sytuacji środkom bojowym i -tego typu, określimy następującym sposobem.

Niech n_{bi} - liczba środków strony B , równoważna n_i środkom i -tego typu. Jeśli B - nacierający czołg, i - czołg w obronie, a p -pprk, to oznacza to, że w walce z nacierającymi czołgami, n_i czołgów w obronie, można zamienić n_{bi} nieokopanymi czołgami :

$$n_{bi} = n_i \chi / A_i \rightarrow B / .$$

Z kolei czołgi te, mogą być zamienione na równoważną liczbę prrk :

$$n_{pi} = n_{bi} \chi / B \rightarrow A_p / = n_i \chi / B \rightarrow A_p / \cdot \chi / A_i \rightarrow B / ,$$

dla każdego ugrupowania A w chwili t , otrzymamy

$$n_{at} = \sum_{i=1}^N n_{pi} = \chi / B \rightarrow A_p / \sum_{i=1}^N n_i \chi / A_i \rightarrow B / , \quad /3.18/$$

gdzie n_p - środek bojowy ugrupowania A, wybrany w charakterze środka równoważnego, na danym etapie obliczeń.

W przedziale Δt , dla którego można przyjąć wartości stałe współczynników χ , obliczymy straty stron, korzystając ze wzorów /3.5/ i /3.6/. Dla liczebności ugrupowania A w chwili t otrzymamy wyrażenie

$$n_{at} = n_{ao} P_{ax} /t/ ,$$

gdzie $P_{az}/t/ = 1 - P_a \{t_y < t\}$ oznacza prawdopodobieństwo tego, że żaden ze środków strony A nie został w chwili t rażony.

W chwili $t + \Delta t$ dla strony A

$$n_{a,t+\Delta t} = n_{ao} P_{az} /t + \Delta t / = n_{at} \frac{P_{az} /t + \Delta t /}{P_{az} /t/}$$

i dla strony B

$$n_{b,t+\Delta t} = n_{bt} \frac{P_{bz} /t + \Delta t /}{P_{bz} /t/} .$$

Straty przeciwników w okresie Δt określa się z zależności

$$\Delta n_{a,t+\Delta t} = n_{at} \left[1 - \frac{P_{az} /t + \Delta t /}{P_{az} /t/} \right] ,$$

$$\Delta n_{b,t+\Delta t} = n_{bt} \left[1 - \frac{P_{bz} /t + \Delta t /}{P_{bz} /t/} \right] . \quad /3.19/$$

W tym celu, aby znaleźć straty środków każdego typu, ugrupowania A, założymy, że straty te są proporcjonalne do ogólnych strat ugrupowania. Wobec tego, jeśli współczynnik odpowiednich strat w czasie Δt równa się

$$\int_{At} = \frac{n_{a,t+\Delta t}}{n_{at}} \quad \text{i} \quad \int_{Bt} = \frac{n_{b,t+\Delta t}}{n_{bt}} ,$$

to będziemy liczyć, że w chwili $t + \Delta t$

$$\begin{aligned} n_i / t + \Delta t / &= n_i / t / \delta_{At}, \\ n_b / t + \Delta t / &= n_b / t / \delta_{Bt}. \end{aligned} \quad /3.20/$$

/Zauważmy, że przy zamianie środków jednego typu środkami innego typu w sytuacjach nierównoważnych t.j. takich w których określa się współczynniki χ , wymagane jest, w każdym konkretnym przypadku, dokonanie uzupełniającego potwierdzenia praktycznej dopuszczalności takiej zamiany. /

Z założenia, że wszystkie środki danego typu znajdują się w jednakowych warunkach, w oparciu o rozkład dwumianowy, możemy przeprowadzić probabilistyczną ocenę walki analogiczną do tej, jaką prowadziliśmy w § 3.1.

Uwzględniając, że

$$P_{iz}/t/ = \frac{n_i/t/}{n_i/0/} \quad \text{i} \quad P_{bz}/t/ = \frac{n_b}{n_{bo}},$$

Zamiast /3.8/ otrzymamy

$$\begin{aligned} P_i \{ n_i \leq n_{ki} \} &= \sum_{x=0}^{n_{ki}} C_{n_{oi}}^x P_{iz}^x /t/ \left[1 - P_{iz} /t/ \right]^{n_{oi}-x} = \\ &= P_{n_i \leq n_{ki}}, \end{aligned} \quad /3.21/$$

$$\begin{aligned} P_b \{ n_b \leq n_{kb} \} &= \sum_{x=0}^{n_{kb}} C_{n_{bo}}^x P_{zb}^x /t/ \left[1 - P_{zb} /t/ \right]^{n_{bo}-x} = \\ &= P_{n_b \leq n_{kb}}. \end{aligned}$$

Wyrażenia, określające prawdopodobieństwo $P_{n_a > n_{ka}}$,

$P_{n_b > n_{kb}}$ w ogólnym przypadku wyznacza się, biorąc pod uwagę konkretnie sformułowany problem badawczy. Jeśli, na przykład, przyjmąc, że ugrupowanie traci zdolność do walki, ponosząc straty w środkach i -tego typu, uwarunkowane nierównością $n_i \leq n_{ki}$, to

$$P_{n_a > n_{ka}} = \prod_{i=1}^N / 1 - P_{n_i \leq n_{ki}} / .$$

Prawdopodobieństwa przedłużenia walki, zwycięstwa i rażenia każdego z ugrupowań, określimy w tym przypadku, według analogicznego do /3.8/ wzoru :

$$P_{AB} = P_{n_a > n_{ka}} P_{n_b > n_{kb}} ,$$

$$P_A = P_{n_a > n_{ka}} / 1 - P_{n_b > n_{kb}} / ,$$

$$P_B = P_{n_b > n_{kb}} / 1 - P_{n_a > n_{ka}} / . \quad /3.22/$$

Zanim zakończymy ten paragraf i przejdziemy do przykładów zastosowania obydwóch modeli przy rozwiązywaniu pewnych zadań praktycznych, zwrócimy jeszcze uwagę na zagadnienie, dotyczące probabilistycznej oceny walki w zadanej chwili t , według wzorów /3.8/ i /3.22/. Spróbujemy znaleźć prostsze wyrażenia oceny probabilistycznej strony A : $P_a \{n_a \leq n_{ka}\}$, $P_a \{n_a > n_{ka}\}$ i analogicznie strony B .

Wykorzystując /3.7/, możemy napisać

$$\frac{P_a \{x\}}{P_a \{x-1\}} = \frac{/n_0 - x + 1/ P_a \{t_y < t\}}{x / 1 - P_a \{t_y < t\}} .$$

O ile natomiast, dla pewnego r , zachodzi nierówność

$$x \geq r + 1 ,$$

$$\frac{P_a \{x\}}{P_a \{x-1\}} < \frac{/n_0 - r/ P_a \{t_y < t\}}{/r + 1/ /1 - P_a \{t_y < t\}} . \quad /3.23/$$

Zakładając kolejno $x = r + 1, \dots, r + v$ i mnożąc v nierówności /3.23/, otrzymamy

$$\frac{P_a \{r + v\}}{P_a \{r\}} < \left\{ \frac{/n_0 - r/ P_a \{t_y < t\}}{/r + 1/ /1 - P_a \{t_y < t\}} \right\}^v = q^v . \quad /3.24/$$

Przy $r \geq n_0$ $P_a \{t_y < t\}$ z /3.24/ mamy

$$\sum_{v=0}^{n_0 - r} P_a \{r + v\} < P_a \{r\} \frac{1}{1 - q} =$$

$$= P_a \{r\} \frac{/r + 1/ /1 - P_a \{t_y < t\}}{r + 1 - /n_0 + 1/ P_a \{t_y < t\}} . \quad /3.25/$$

Przy $r \leq n_0$ $P_a \{t_y < t\}$

$$\sum_{v=0}^r P_a \{v\} < P_a \{r\} \quad \times$$

$$\times \frac{/n_0 - r + 1/ P_a \{t_y < t\}}{/n_0 + 1/ P_a \{t_y < t\} - r} . \quad /3.26/$$

Przy małych n_{ao} , kiedy nie można lekceważyć błędu, wynikającego z zamiany postępu skończonego, nieskończonym, zamiast /3.25/ i /3.26/ można posługiwać się wzorami

$$\sum_{v=0}^{n_0 - r} P_a \{r + v\} < \frac{1 - q^{n_0 - r + 1}}{1 - q} P_a \{r\} ,$$

$$q = \frac{/n_0 - r/ P_a \{t_y < t\}}{/r \mp 1/1 - P_a \{t_y < t\}} , \quad /3.25 a/$$

$$\sum_{v=0}^r P_a \{v\} < P_a \{r\} \frac{1 - q^{r+1}}{1 - q} ,$$

$$q = \frac{r / 1 - P_a \{t_y < t\}}{/n_0 - r + 1/ P_a \{t_y < t\}} . \quad /3.26 a /$$

Wzory /3.25/ - /3.26/ , proponowane przez autorów , i w szczególności [18] , zaleca się stosować w pewnych przypadkach, zamiast wzorów /3.8/ , w następującej postaci :

$$P_a \{n_a \leq n_{ka}\} = \sum_{v=0}^{n_{ka}} P_a \{v\} < P_a \{n_{ka}\} \times$$

$$\times \frac{/n_0 - n_{ka} + 1/ P_a \{t_y < t\}}{/n_0 + 1/ P_a \{t_y < t\} - n_{ka}} ,$$

przy $n_{ka} < n_{ao}$ $P_a \{t_y < t\}$,

$$P_a \{n_a > n_{ka}\} = \sum_{v=0}^{n_0 - n_{ka} + 1} P_a \{n_{ka} + 1 + v\} <$$

$$< P_a \{n_{ka} + 1\} \frac{/n_{ka} + 2/ /1 - P_a \{t_y < t\}}{n_{ka} + 2 - /n_0 + 1/ P_a \{t_y < t\}}$$

przy $n_{ka} \geq n_{ao}$ $P_a \{t_y < t\}$.

Wypada jednak zauważyć, że wzory /3.25 a/ i /3.26 a / przy $r = n_0$ $P_a \{t_y < t\}$ oceniają szukane prawdopodobieństwo

z błędem 60 - 70 % , co jest niedopuszczalne przy badaniu działań bojowych w rozpatrywanej skali. Dla uzyskania dokładniejszej przybliżonej oceny, można wykorzystywać sposób zastosowany przy wyprowadzeniu wzorów /3.25/ i / 3.26/, przekształcając go następująco.

Jeśli przypomnimy, że nierówność /3.25/ otrzymano z równości

$$\sum_{v=0}^{n-r} \frac{P\{r+v\}}{P\{r\}} = 1 + \frac{n-r}{r+1} \frac{P\{t_y < t\}}{Q\{t_y < t\}} +$$

$$+ \frac{n-r}{r+1} \frac{n-r-1}{r+2} \left(\frac{P\{t_y < t\}}{Q\{t_y < t\}} \right)^2 + \frac{n-r}{r+1} \frac{n-r-1}{r+2} \times$$

$$\times \frac{n-r-2}{r+3} \left(\frac{P\{t_y < t\}}{Q\{t_y < t\}} \right)^3 + \dots ,$$

gdzie $Q\{t_y < t\} = 1 - P\{t_y < t\}$,

drogą potęgowania czynników wszystkich składników szeregu do

$$\frac{n-r}{r+1} \frac{P\{t_y < t\}}{1 - P\{t_y < t\}} ,$$

to, wykorzystując i drugi składnik, możemy napisać

$$\sum_{v=0}^{n-r} \frac{P\{r+v\}}{P\{r\}} = 1 + \frac{n-r}{r+1} \frac{P\{t_y < t\}}{Q\{t_y < t\}} \times$$

$$\times \left(1 + \frac{n-r-1}{r+2} \frac{P\{t_y < t\}}{Q\{t_y < t\}} + \dots \right) .$$

Dokładniejszą ocenę dla prawej części rozkładu dwumianowego uzyskamy ze wzoru

$$\sum_{v=0}^{n-r} P / r + v / = P \{r\} \quad X$$

$$X \frac{/r + 1/ /r + 2/ - /r^2 + 3r - n + 1/ P \{t_y < t\}}{/r + 1/ /r + 2/ - /r + 1/ /n + 1/ P \{t_y < t\}} \quad /3.27/$$

Analogicznego rozumowania można użyć i przy ocenie lewej części.

W czasie badania walki różnorodnego, liniowego ugrupowania, w charakterze modeli, rozpatrywać będziemy wzory /3.1/ - /3.6/, /3.12/ odpowiednio do środków każdego typu i wzory /3.18/-/3.22

3.3. Wybrane przykłady

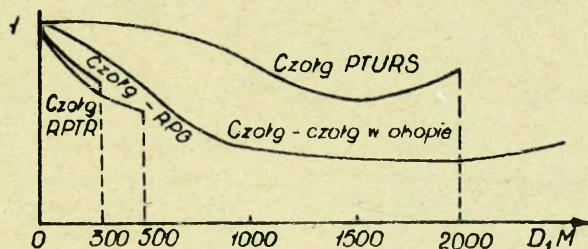
zastosowania modeli liniowych

Jako pierwszy przykład zastosowania modeli , rozpatrzemy przedstawione graficznie na rys. 3.6 zmiany współczynników współmierności. Współczynniki liczone są jako funkcje odległości początku ataku dla nacierającego ugrupowania, składającego się z 10 czołgów. Przy $D = 0$, wszystkie krzywe przyjmują wartość równą jedności. Wynika to z przyjętego założenia, że wszystkie środki będące w bezpośrednim sąsiedztwie mogą razić się wzajemnie z prawdopodobieństwem równym jedności. Dla rusznic przeciwpancernych, ręcznych granatów przeciwpancernych i przeciwpancernych pocisków kierowanych x/ przy $D > D_{max}$, gdzie D_{max} -

x/ Przytaczane tutaj i w dalszej części przykłady, dotyczące wyboru parametrów środków ogniowych, odnosząc się do konkretnych rodzajów uzbrojenia mogą wywołać sprzeciw specjalistów. Autorzy zdecydowali się na ich publikację, jedynie dla lepszego zademonstrowania możliwości modelowania matematycznego.

- Przep. autora . .

maksymalna odległość otwarcia ognia, wartość współczynnika współmierności równa się zero, ponieważ prawdopodobieństwo wykrycia tych środków, zamaskowanych na swoich stanowiskach i nie prowadzących ognia, praktycznie jest bliskie zero. Prawdopodobieństwo



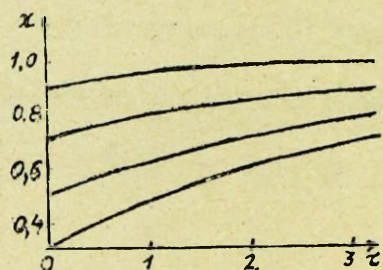
Rys. 3.6. Wartości współczynnika χ dla różnych środków.

wykrycia czołgów w obrobie na stanowiskach, istnieje i przy odległościach większych od D_{\max} ; dlatego też nieco wzrasta wartość współczynnika χ przy $D > D_{\max}$ do odległości, przy której P_{wykr} staje się równe zero.

Oprócz efektywności środka, współczynniki współmierności istotnie zależą od parametrów procesu wykrycia, a w pierwszej kolejności od wartości $\tilde{\tau}$. Przy $\tilde{\tau} = 0$, co odpowiada idealnym warunkom, przy których stan atmosfery, maskowanie i techniczna zdolność sprzętu obserwacyjnego umożliwiają widzialność celów na dowolnych odległościach z prawdopodobieństwem, równym jedności, w pełnej mierze uwidacznia się przewaga właściwości bojowych jednego środka nad innym. Współczynnik χ przyjmuje swoją wartość graniczną.

Przy $\tilde{\tau} \rightarrow \infty$, wszystkie środki znajdują się przez cały czas w systemie poszukiwania, zupełnie nie prowadzą ognia, a zatem

nie może się zaznaczyć przewaga jednego środka nad innym. Współczynnik χ przyjmuje w tym przypadku wartość równą jedności. Na rys. 3.7 pokazano wpływ wzrostu wartości stałej poszukiwania $\tilde{\tau}$ na współczynnik χ , przy równych pozostałych warunkach.



Rys. 3.7. Zależność współczynnika χ od warunków poszukiwania.

Wszystkie krzywe na rys. 3.6 i 3.7 obliczone zostały przy następujących danych początkowych.

Stała poszukiwania $\tilde{\tau}$ we wszystkich obliczeniach przyjmowana była równa 1,75. Wartość ta ustalona była dla średnich warunków obserwacji prowadzonej z czołgów i związana z prawdopodobieństwem wykrycia celów w średnio pofałdowanym terenie, latem, przy przejrzystości powietrza, umożliwiającej widoczność na odległość do 2,5 km.

Wartości pozostałych parametrów, wybrane były dowolnie, dla każdego typu środka bojowego :

- prędkość ruchu czołgów w natarciu $v = 15$ km/godz ;
- moc jednostkowa silnika czołgu $N_{\text{jedn.}} = 15$ KM
- współczynnik oporu ruchu $M [f] = 0,4$; $\delta_f = 0,16$;
- rozmiary porażanej części czołgu w okopie :
długość $l = 3,0$ m , szerokość $m = 2,0$ m , wysokość $h = 0,9$ m ;

- rozmiary czołgu w natarciu : długość $l = 6,00$, szerokości $m = 2,5$ m , wysokość $h = 2,5$ m ;
- zmiana charakterystyki rozrzutu przy strzelaniu z czołgów — liniowa, w granicach zależnych od odległości i sposobów strzelania :
 - a/ przy strzelaniu z miejsca w przedziale odległości 500-2500 m
$$U_{wo} = 0,10 \div 0,70 , \quad U_{wn} = 0,20 \div 2,0 ;$$
$$U_{so} = 0,10 \div 0,50 , \quad U_{sn} = 0,25 \div 0,9 ;$$
 - b/ przy strzelaniu z ruchu w przedziale odległości 500 - 1500m
$$U_{wo} = 0,40 \div 1,2 , \quad U_{wn} = 0,45 \div 1,3 ;$$
$$U_{so} = 0,80 \div 2,5 , \quad U_{sn} = 0,85 \div 2,8 ;$$
- średnia liczba trafień w czołg, konieczna dla jego rażenia 1,4 - 2,0 ;
- bojowa szybkostrzelność czołgu : z miejsca cztery strzały na minutę, w ruchu trzy strzały na minutę ;
- rozmiary pprk , rusznic ppanc i granatników ppanc : płaszczyzna pionowa o szerokości $m = 1,0$ m i wysokości $h = 0,5$ m, płaszczyzna rażenia odłamkami o długości $l = 20$ m i szerokości $m = 10$ m ;
- prawdopodobieństwo trafienia w czołg P_1 dla pprk : przy odległości 500 m 0,4 ,
odległości 1500 m 0,6 ,
odległości 3000m 0,4 ;
- rozrzut przy strzelaniu z granatnika $U_{wo} = U_{so} = 0,001$ D ;
- prawdopodobieństwo trafienia w czołg z rusznicy ppanc :
przy 1-ym strzale $P_1 = 0,5$,
przy 5 -ym strzale $P_5 = 0,8$;
- prawdopodobieństwo rażenia czołgu przy trafieniu z :
pprk $\omega = 0,8$,

rusznicy ppanc $\omega = 0,7$,

granatnika ppanc $\omega = 0,6$;

- sektor wykrycia od 20° na odległościach około 3000 m do 360° przy wdarciu się nacierających czołgów w głąb obrony przeciwnika na głębokość większą od 1000 m ;

- prawdopodobieństwo wykrycia z czołgu :

na odległościach 500 - 3000 m :

czołgu w okopie, nie prowadzącego ognia $P_{\text{wykr}} = 0,9 \div 0,3$,

czołgu w okopie po 4 i więcej strzałach $P_{\text{wykr}} = 0,99 \div 0,7$;

na odległościach 500 - 2000 m :

pprk, rusznice ppanc, granatniki ppanc niestrzelające

$P_{\text{wykr}} = 0,3 \div 0,0$, strzelające $P_{\text{wykr}} = 0,8 \div 0,6$;

- odległości otwarcia ognia D_{max} :

czołgu w obronie $D_{\text{max}} = 2000$ m ,

czołgu w natarciu $D_{\text{max}} = 2500$ m ,

pprk $D_{\text{max}} = 2000$ m ,

rusznice ppanc $D_{\text{max}} = 500$ m ,

granatniki ppanc $D_{\text{max}} = 300$ m .

Rozpatrzone współczynniki współmierności liczone przy kryterium $K_{0,05; 50\%}$. W pewnych przypadkach, zaleca się stosowanie funkcji χ' , obliczonych przy innych wartościach poziomów zdolności do prowadzenia walki. Na przykład, przy obliczeniach w oparciu o model § 3.3, specjalnych badań wymaga zagadnienie , dotyczące posługiwania się współczynnikami χ , obliczonymi przy różnych wartościach poziomów zdolności do prowadzenia walki.

W charakterze drugiego przykładu, rozpatrzmy zadanie określenia prawdopodobieństwa zdarzenia, polegającego na uzyskaniu w końcu walki, liczebności nie mniejszej od zadanej. Założymy, że

pododdział czołgów / kompania/ winien przerwać obronę, składającą się ze znanej ilości środków przeciwpancernych i wyjść na określoną rubież, mając w swoim składzie, nie mniej niż połowę sprawnych czołgów. Przy jednorodnym składzie obrony i znanej odległości początku ataku, w oparciu o wzory / 3.5/, /3.6/ i /3.8/ , dla przytoczonych powyżej parametrów walki i walczących środków, zestawiono wyniki w tablicy 3.1. Podane w niej prawdopodobieństwa , można rozpatrywać jako prawdopodobieństwo wykonania zadania

TABLICA 3.1

Prawdopodobieństwa wykonania zadań bojowych

Numer wariantu	Ilość środków w obronie	Typ środków w obronie	Odległość początku ataku				
			500m	1000m	1500m	2000m	2500m
1	1	Czołg w okopie	0,9965	0,9976	0,9811	0,9729	0,9771
2	2	" " " "	0,9945	0,8575	0,6440	0,5462	0,5602
3	3	" " " "	0,9811	0,7719	0,0202	0,0018	0,0018
4	4	pprh	0,9948	0,9939	0,9606	0,9405	
5	5	pprh	0,9942	0,9729	0,8456	0,7706	
6	6	pprh	0,9840	0,8932	0,4438	0,2587	
7	4	rusznice ppanc	0,7495				
8	5	" " " "	0,3019				
9	6	" " " "	0,0000				

bliższego i zadania następnego, przez kompanię czołgów.

Rozpatrzmy pewne wartości prawdopodobieństw z tablicy 3.1. Przede wszystkim zastanowimy się nad prawdopodobieństwem sukcesu /t.j. prawdopodobieństwem wykonania zadania bliższego i zadania następnego/ przy ataku z odległości 500 m na okopane czołgi. We wszystkich przypadkach, prawdopodobieństwa są dość znaczne, i wartości ich mało różnią się między sobą. Wynika to z tego, że przy małych odległościach, prawdopodobieństwo zniszczenia czołgu prowadzącego ogień w obronie jest wysokie, podobnie jak i prawdopodobieństwo dla czołgu nacierającego. W rezultacie, wartość

oczekiwana strat poniesionych przez kompanię czołgów, wynosi w przybliżeniu 3 czołgi. Prawdopodobieństwo strat większej ilości czołgów niż 5, jest niewielka i nie przewyższa 0,0189.

Następnie, z analizy prawdopodobieństw sukcesu w przypadku ataku na rusznice ppanc i na okopane czołgi, można wyprowadzić wniosek, że na odległości 500 m rusznice ppanc są bardziej efektywne niż czołg w okopie. Wniosek ten, w pełni uzasadnia bardzo niskie prawdopodobieństwo wykrycia zamaskowanych rusznic, które średnio są bardziej skuteczne, aniżeli jeden strzał rażący.

Dla rozwiązywania podobnych zadań wygodnie jest mieć stabilizowane lub w formie wykresów, uśrednione wyniki typowych sytuacji bojowych. Na rys. 3.8 przedstawiony jest w postaci pogłądowej, jeden z możliwych wariantów zestawienia takich wyników. Na rys. tym pokazana jest krzywa wartości oczekiwanej liczby ocalałych nacierających, czołgów do chwili zniszczenia przeciwnika. Krzywe, liczone były dla walki kompanii czołgów, atakującej przeciwnika z różnych odległości, w którego ugrupowaniu znajdują się środki jednego typu: okopane czołgi. Na osi odciętych odłożono początkowe ilości czołgów broniącego się przeciwnika, a na osi rzędnych - wartość oczekiwaną liczbę czołgów, sprawnych w końcu walki, nacierającej kompanii.

Przedstawienie rezultatów^w przytoczonej postaci, pozwala stosunkowo prosto przejść do probabilistycznej oceny wyniku walki. Wobec tego, jeśli w walce z trzema czołgami w obronie, rozpoczynającej się z odległości 1000 m, $M[n] = 5$, to prawdopodobieństwo $P_a \{t_y < t\} \approx 0,5$ a prawdopodobieństwo otrzymania w końcu walki $x / x = 1, 2, \dots, 10$ / czołgów, określa się według wzoru /3.7/ /patrz tablica 3.2/.

TABLICA 3.2.

Prawdopodobieństwo zakończenia walki z liczebnością

$$n_a \geq n_{ka}$$

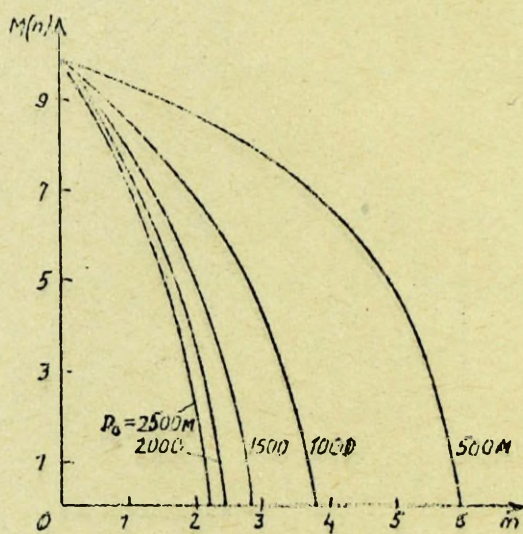
n_{ka}	0	1	2	3	4	5
$P_{10}\{n_{ka}\}$	0,00098	0,00977	0,04395	0,11718	0,20507	0,24609
$P_a\{n_a > n_{ka}\} =$ $= \sum_{v=n_{ka}+1}^{10} P_{10}\{v\}$	0,99901	0,98924	0,94529	0,82811	0,62304	0,37695

n_{ka}	6	7	8	9	10
$P_{10}\{n_{ka}\}$	0,20507	0,11718	0,04395	1,00977	0,00098
$P_a\{n_a > n_{ka}\} =$ $= \sum_{v=n_{ka}+1}^{10} P_{10}\{v\}$	0,17188	0,05470	0,01075	0,00098	

Oprócz swojego głównego przeznaczenia, rys.3.8 pozwala w sposób przybliżony, ocenić wartość współczynnika χ' , przy zerowych poziomach zdolności do walki. Ponieważ punkty przecięcia krzywych z osią odciętych, odpowiadają przypadkowi wzajemnego zniszczenia przeciwników. Jednakowoż wartości χ nie wyznaczają dokładnie χ' , o ile tempo strat w czasie walki jest różne dla stron walczących.

W trzecim przykładzie, rozpatruje się zastosowanie modelu § 3.3 dla trochę niezwykłej sytuacji bojowej, kiedy prawdopodobieństwo trafienia, przy prowadzeniu ognia przez środki broniące się, na przykład czołgi, równa się zero, niezależnie od odległości. Wyobrażając sobie rzeczywistą walkę, odpowiadającą temu przypadkowi

można ją interpretować w następujący sposób. Niech broniąca się strona, ma w swoim składzie stanowiska przeciwpancernych pocisków raketowych kierowanych w ilości, niedostatecznej do odparcia ataku czołgów. Niech dalej strona ta, celem obniżenia efektywności działań nacierającego pododdziału, ustawia na odpowiednich stanowiskach makiety / cele pozorne /, imitujące działania



Rys.3.8. Zależność $M[n]$ w końcu walki od liczebności początkowej przeciwnika m .

czołgów w okopach, jako najbardziej efektywnych środków przeciwpancernych, wyrządzających największe straty nacierającemu pododdziałowi. Wypada założyć, że część maszyn bojowych, nacierającego ugrupowania, będzie w pierwszym rzędzie prowadzić ogień do tych celów, zmniejszając tym samym, oddziaływanie na rzeczywiste środki obrony przeciwpancernej, w szczególności na pozycje przeciwpancernych pocisków raketowych kierowanych.

Celem zbadania takiej sytuacji na modelu § 3.3, w każdym kroku obliczeń, należy mieć dwie wartości liczebności równoważnej

broniącego się ugrupowania :

$$n_{1t} = \chi / B \rightarrow A_p / \chi / A_1 \rightarrow B / n_1$$

i

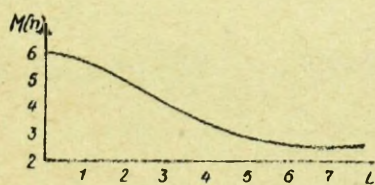
$$n_{2t} = \chi / B \rightarrow A_p / [n_1 \chi / A_1 \rightarrow B / + n_2 \chi / A_2 \rightarrow B /] ,$$

gdzie pierwsza, odpowiada stanowiskom przeciwpancernych pocisków raketowych kierowanych, a druga - czołgom w okopach. Jeśli w charakterze sprowadzonego środka przyjąć, czołg w okopie, to można napisać

$$n_{1t} = \chi / B \rightarrow A_2 / \chi / A_1 \rightarrow B / n_1 ,$$

$$n_{2t} = \chi / B \rightarrow A_2 / \chi / A_1 \rightarrow B / n_1 + n_2 .$$

Przy określaniu prawdopodobieństwa zniszczenia nacierających czołgów, stosuje się pierwszą wartość liczebności równoważnej



Rys. 3.9. Wykres zależności liczebności nacierających czołgów w końcu walki od ilości celów pozornych w obronie

uwzględniając tylko realne możliwości broniących się, a w analogicznym przypadku dla prawdopodobieństwa zniszczenia środków w obronie - drugą wartość n_{2t} , która odzwierciedla w modelu proces ostrzału celów pozornych.

Na rys. 3.9 pokazano wpływ stosowania celów pozornych na wynik walki. Jak należało oczekiwać, ugrupowanie broniące się zwiększa swoją efektywność, którą można już teraz oceniać, nie tylko w sposób jakościowy. Krzywa na rys. 3.9 odpowiada walce kompanii czołgów z pięcioma stanowiskami przeciwpancernych pocisków raketowych kierowanych, przy równoczesnym stosowaniu przez stronę broniącą się różnych ilości celów pozornych L . Odległość początku ataku, przyjmowano równą 1500 m. Z wykresu wynika, że stosowanie celów pozornych w obronie, w określonych przypadkach, może zasadniczo zmienić wynik walki, zapewniając zwycięstwo tam, gdzie dla osiągnięcia go, nawet z małym prawdopodobieństwem, brak jest odpowiedniej ilości środków.

Rozpatrzone przykłady, ilustrują szczególne zastosowania modeli, przedstawionych w tym rozdziale. Do zadań typowych, których rozwiązanie może być wykonane przy pomocy tych modeli, należy zaliczyć :

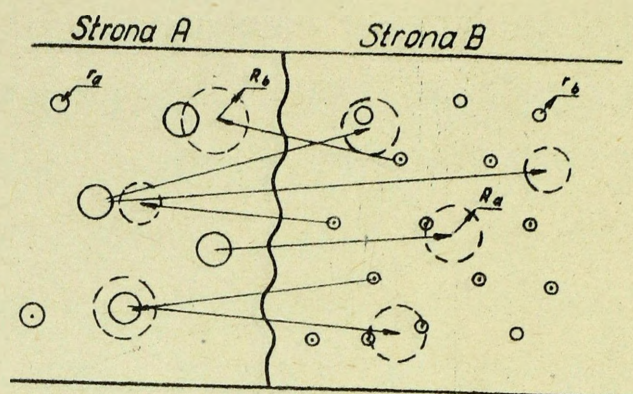
- badanie wpływu odległości otwarcia ognia na wynik walki i wybór optymalnej odległości ;
- badanie wpływu odległości między środkami bojowymi wzdłuż frontu ;
- badanie wpływu sposobów strzelania / w ruchu, z krótkich zatrzymań / ;
- badanie wpływu stałej poszukiwania oraz warunków meteorologicznych na wynik walki oraz szereg innych zagadnień.

3.4. Uproszczony model analityczny działań typu walki grupowej przy równomiernej gęstości szyków bojowych

Przypuśćmy, że należy zbudować model działań bojowych, który pozwoliłby , przy możliwie słabych ograniczeniach, określić

wpływ liczebności i jakości środków bojowych na wynik działań bojowych oraz znaleźć warunki zwycięstwa dla stron walczących. Będziemy przy tym uważać, że systemy rozpoznania i dowodzenia obydwóch stron, pracują idealnie. Oznacza to, istnienie pełnej informacji o celach i możliwości bezzwłocznego jej przekazywania razem z informacjami wykonawczymi t.j. w dalszym przypadku z biegiem czasu, który jest niewielki w porównaniu z czasem wykonawstwa / $t_w \gg t_0$ /. Oprócz tego nie będziemy uwzględniać wpływu wprowadzania do walki rezerw i odpowiedniego przegrupowywania się walczących stron w terenie. Nie będziemy również rozpatrywać wpływu terenu na bieg działań bojowych. Biorąc pod uwagę, iż znane są rozmiary celów, przyjmiemy hipotezę, że rozmieszczone są one równomiernie na pewnej płaszczyźnie i przedstawimy mechanizm walki zbrojnej w postaci wzajemnego oddziaływania ogniowego stron, opierając się na schemacie, jak rys. 3.10, Będziemy przy tym uwzględniać tylko aktywne środki bojowe, oddziałujące bezpośrednio na przeciwnika. Nie będziemy uwzględniać środków pomocniczych /pasywnych/ i organów tyłowych.

Odpowiednio do schematu na rys. 3.10, dowolny środek bojowy jednej strony, może oddziaływać na dowolny obiekt drugiej strony, przy czym będziemy traktować jako jednorodne zarówno środki bojowe, jak i obiekty każdej ze stron. Ponadto nie będziemy również uwzględniać wpływu różnych sposobów podziału środków bojowych w odniesieniu do obiektów przeciwnika. Wprowadzone ograniczenia mogą być odrzucane lub nieco łagodzone przy przejściu do bardziej precyzyjnych badań na modelach o większej dokładności. Według schematu na rys. 3.10, można w uproszczonym ujęciu prowadzić formalizację wzajemnego oddziaływania ogniowego czołgów, samolotów okrętów i środków naziemnych, włączając również artyleryjskie i uderzenia raketowo-jądrowe.



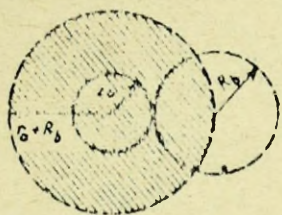
Rys. 3.10. Schemat ognioowego oddziaływania stron :

r_a - promień ochrony jednostki bojowej strony A ;

r_b - tak samo dla strony B ; R_a - promień rażenia środka bojowego strony A ; R_b - tak samo, dla strony B .

Każdy środek bojowy charakteryzuje ją następującymi podstawowymi parametrami : mocą uderzenia, szybkostrzelnością, dokładnością działania i stopniem ochronności. Dla amunicji o działaniu ogólnym, moc określa się promieniem rażenia $R \approx \sqrt{Q}$, gdzie Q - równoważnik trotylowy naboju. W szczególnym przypadku dla amunicji o działaniu uderzeniowym / na przykład, przeciwpancernych/, promień rażenia równy jest promieniowi pocisku. Szybkostrzelność s mierzy się liczbą strzałów na jednostkę czasu. Dokładność działania można uwzględnić albo przy pomocy charakterystyk rozrzutu lub przy pomocy całkowitego współczynnika skuteczności strzelania α , ustalającego odpowiednią liczbę pocisków osiagających cel i trafiających na jego powierzchnię. Stopień

ochrony obiektów można oceniać różnymi wielkościami. W danym przypadku, wygodnie posłużyć się sprowadzonym promieniem ochrony r ,



3.11.

Rys. 3.11 . Określenie krytycznej powierzchni trafienia, dla rażenia obiektu, pojedynczym uderzeniem po stronie A .

określającym koło, którego powierzchnia równa się powierzchni celu . Trafienie w tę powierzchnię, powoduje określone uszkodzenie celu, a liczba trafień k , niezbędna dla wyprowadzenia celu z walki, może być miarą uszkodzenia. Oznaczając bieżącą liczebność stron przez n , liczebność początkową - przez n_0 przeanalizujemy wynik działania strony B na stronę A. Parametry odnoszące się do środków odpowiedniej strony będziemy wyróżniać indeksami a lub b .

Strona B w okresie Δt odda na stronę A strzałów

$$\alpha_b C_b n_b \Delta t .$$

Wartość oczekiwana Δn_a liczby środków bojowych strony A, rażonych tymi strzałami /rys.3.11/, wyniesie

$$\Delta n_a = \frac{\pi (r_a + R_b)^2 n_a \alpha_b C_b n_b}{k_a F_a} \Delta t ,$$

gdzie F_a - powierzchnia, na której rozmieszczone są środki bojowe strony A.

Obliczając w analogiczny sposób wartość oczekiwaną Δn_b strat strony B w okresie Δt i przyjmując że $\Delta t \rightarrow 0$, otrzymamy

$$\frac{d n_a}{dt} = - \beta_a n_a n_b$$

$$\frac{d n_b}{dt} = \beta_b n_a n_b, \quad /3.28/$$

gdzie

$$\beta_a = \frac{\prod \alpha_b c_b}{k_a F_a} / r_a + R_b / 2,$$

$$\beta_b = \frac{\prod \alpha_a c_a}{k_b F_b} / r_b + R_a / 2. \quad /3.29/$$

Przechodząc do odpowiedniej bieżącej liczebności stron

$$\varphi_a = \frac{n_a}{n_{a0}} \quad \text{i} \quad \varphi_b = \frac{n_b}{n_{b0}},$$

otrzymamy

$$\begin{aligned} \dot{\varphi}_a &= - \beta_a n_{b0} \varphi_a \varphi_b, \\ \dot{\varphi}_b &= - \beta_b n_{a0} \varphi_a \varphi_b. \end{aligned} \quad /3.30/$$

W początkowej chwili czasu $t = 0$, $\varphi_a = 1$ i $\varphi_b = 1$,
Dlatego też po wyłączeniu z /3.30/ iloczynu $\varphi_a \varphi_b$ i scałkowaniu, będziemy mieli

$$\varphi_a = 1 - \frac{\beta_a n_{b0}}{\beta_b n_{a0}} / 1 - \varphi_b / . \quad /3.31/$$

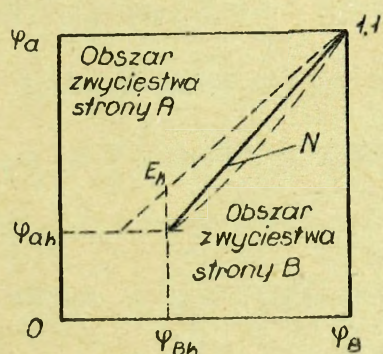
Wprowadzimy w dalszym ciągu, współczynnik strat zdolności stron do prowadzenia walki

$$\varphi_{ak} = \frac{n_{ak}}{n_{a0}} \quad \text{i} \quad \varphi_{bk} = \frac{n_{bk}}{n_{b0}},$$

gdzie n_{ak} i n_{bk} - ostateczne liczebności odpowiednich stron przy których następuje utrata ich zdolności do dalszego prowadzenia działań bojowych. Wielkości współczynników φ_{ak} i φ_{bk}

zależą od wielu czynników, a przede wszystkim od ducha bojowego wojsk, ich wytrwałości, dyscypliny, jakości kadry dowódczej, istnienia środków dowodzenia itp. Czynniki te mają w zasadzie charakter jakościowy i jak dotychczas nie istnieje możliwość uwzględniania ich w ujęciu ilościowym. Sumaryczny wpływ tych czynników na wynik działań bojowych, można w pierwszym przybliżeniu oceniać przy pomocy uogólnionych współczynników strat zdolności bojowej, określanymi metodami statystycznymi. Średnio, dla moralnie stabilnych wojsk, można przyjąć $\varphi_k = 0,4 \div 0,5$, dla moralnie nie stabilnych wojsk $\varphi_k = 0,7 \div 0,8$.

Jeśli obydwie strony, jednocześnie osiągają krytyczny stan utraty zdolności do prowadzenia walki, to oznacza to dynamiczną równowagę ich możliwości bojowych, przy której obydwie strony winny przerwać walkę lub ogłosić rozejm.



Rys. 3.12. Obszary zwycięstwa walczących stron :

N - linia równowagi dynamicznej

E_k - krytyczny punkt dla strony B

$$\varphi_b = \varphi_{bk}; \varphi_a \neq \varphi_{ak}$$

Warunek równowagi dynamicznej uzyskuje się z /3.31/ w postaci

$$k = \frac{n_{ao} \beta_b / 1 - \varphi_{ak}}{n_{bo} \beta_a / 1 - \varphi_{bk}} = 1. \quad /3.32/$$

Jeśli obydwie strony, mają jednakowe uzbrojenie ($\beta_a = \beta_b$) i charakteryzują się jednakowymi stanami moralnymi ($\varphi_{ak} = \varphi_{bk}$), to dla osiągnięcia równowagi dynamicznej wystarcza normalna rów-

ność liczebności początkowej stron.

Z analizy zależności $\varphi_a = F / \varphi_b$ w postaci /3.31/ wynika, że przy $k > 1$ zwycięża strona A, a przy $k < 1$ - strona B.

W ten sposób, wyrażenie

$$k = \frac{n_{ao} \beta_b / 1 - \varphi_{ak}}{n_{bo} \beta_a / 1 - \varphi_{bk}} \quad /3.32a/$$

można traktować jako warunek zwycięstwa stron uczestniczących w starciu. Przy pomocy kryterium k , można ocenić wpływ na wynik działań bojowych /przy przyjętych ograniczeniach/ ilości i jakości uzbrojenia i jego przydatności bojowej. Obszary zwycięstwa stron, pokazano na rys. 3.12, na którym E_k - punkt krytyczny, po osiągnięciu którego, strona B wychodzi z walki. Obszary zwycięstwa stron walczących istnieją i przy innych, bardziej złożonych zależnościach $\varphi_a = F / \varphi_b$ w porównaniu z zależnością /3.31/.

Granica obszarów, przy jednej z możliwych zależności F dla stałych wartości φ_{ak} i φ_{bk} , pokazana jest na rys. 3.12 linią przerywaną z kropkami. Oczywiście, że przy dowolnym charakterze zależności $\varphi_a = F / \varphi_b$, może być określony warunek k , ustalający wpływ na wynik działań bojowych, parametrów $n_{ao}, n_{bo}, \beta_a, \beta_b, \varphi_{ak}, \varphi_{bk}$.

Jednakże, dla analizy toku działań bojowych, istnienie tylko jednego warunku /3.32a/ jest niewystarczające. Ważne znaczenie ma przedłużalność walki, określana okresem czasu t_k od początku działań bojowych do chwili, kiedy jedna ze stron wstrzymuje opór.

Zależność odpowiednich liczebności stron od czasu, uzyskana z /3.30/, ma postać

$$\varphi_a = \frac{\beta_a n_{bo} - \beta_b n_{ao}}{\beta_a n_{bo} e^t (\beta_a n_{bo} - \beta_b n_{ao}) - \beta_b n_{ao}},$$

$$\varphi_b = \frac{1}{\beta_b n_{ao} e^{t/\beta_b n_{ao}} - \beta_a n_{bo} - \beta_a n_{ho}} \quad /3.33/$$

Jeśli $\beta_a n_{bo} = \beta_b n_{ao}$, to z /3.30/ wynika, że

$$\varphi_a = \varphi_b = \frac{1}{1 + \beta_b n_{ao} t} \quad /3.34/$$

Działania bojowe kończą się wówczas, kiedy odpowiednia liczebność jednej ze stron osiąga wartość krytyczną, t.j. kiedy

$$\varphi_a = \varphi_{ak} \quad \text{lub} \quad \varphi_b = \varphi_{bk}.$$

W przypadku zwycięstwa strony A $/k > 1$ i $\varphi_b = \varphi_{bk}$, czas zakończenia działań bojowych, określa się z wyrażenia

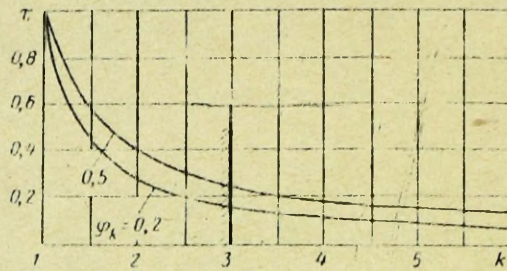
$$t_k = \frac{\ln \left/ \frac{1}{\varphi_{bk}} - \frac{1 - \varphi_{ak}}{k \varphi_{bk}} \right/}{\beta_a n_{bo} \left/ \frac{1 - \varphi_{bk}}{1 - \varphi_{ak}} k - 1 \right/}} \quad /3.25/$$

Jeśli zwycięża strona B $/k < 1$ i $\varphi_a = \varphi_{ak}$, to

$$t_k = \frac{\ln \left/ \frac{1}{\varphi_{ak}} - k \frac{1 - \varphi_{bk}}{1 - \varphi_{ak}} \right/}{\beta_a n_{bo} \left/ 1 - \frac{1 - \varphi_{bk}}{1 - \varphi_{ak}} k \right/}} \quad /3.36/$$

Przy $k = 1$, wyrażenia /3.35/ i /3.36/ tracą sens, ponieważ prowadzą do wartości $t_k < 0$. W tym przypadku, na przykład dla

zwycięstwa strony A / $\varphi_{bk} > \varphi_{ak}$ / , z /3.34/ otrzymujemy



Rys. 3.13. Wykres zależności $\tilde{\tau} = \tau/k$.

wielkość maksymalnej przedłużalności działań bojowych w postaci

$$t_k \text{ max} = \frac{1 - \varphi_{bk}}{\varphi_{bk} \beta_a n_{bo}} . \quad /3.37/$$

W zależności od wartości parametru $k > 1$, odpowiednia przedłużalność działań bojowych wyniesie :

$$\tilde{\tau} = \frac{t_k}{t_k \text{ max}} = \frac{\varphi_{bk} \ln / \frac{1}{\varphi_{bk}} \frac{1 - \varphi_{ak}}{k \varphi_{bk}}}{/ 1 - \varphi_{bk} // \frac{1 - \varphi_{bk}}{1 - \varphi_{ak}} k - 1 /} . \quad /3.38/$$

Wykresy zależności $\tilde{\tau} = \tau/k$, zgodnie z /3.38/ , przy pewnych wartościach $\varphi_{ak} = \varphi_{bk}$, przedstawione są na rys. 3.13.

Z wykresów widać, że przy $k > 3$ nie osiąga się żadnego widocznego skrócenia trwania działań bojowych. Dlatego też, dla osiągnięcia zwycięstwa nad przeciwnikiem w stosunkowo krótkim czasie, wystarcza trzykrotna przewaga w wartości kryterium k . Na przykład, jeśli przy $\varphi_k = 0,5$ zwiększenie wartości k od 1 do 2 prowadzi do zmniejszenia czasu walki do 60% , to dalsze podwyższanie wielkości k do wartości $k = 3$, daje wygraną na

czasie tylko w wysokości 15%. W ten sposób ustalona została górna i dolna granica wielkości k . Dla osiągnięcia zwycięstwa strony A w możliwym do przyjęcia czasie, winien być spełniony warunek

$$2 < k < 3.$$

Warunek zwycięstwa k , i wchodzące w jego skład parametry pozwalają w granicach dopuszczalnych t.j. z dowolnym przybliżeniem, otrzymać ocenę procesu działań bojowych oraz przewidzieć możliwy czas ich zakończenia. Wielkość k nie uwzględnia jednak wpływu systemu dowodzenia na proces działań bojowych, a przecież fakt, że wpływ taki ma miejsce i może być dość istotny, nie wymaga oddzielnych uzasadnień. System kierowania wpływa na wyniki działań bojowych, po pierwsze poprzez straty czasu, konieczne dla uzyskania danych wyjściowych, po drugie poprzez opóźnienia w przyjęciu rozwiązań w odniesieniu do faktycznego stanu stron i po trzecie poprzez właściwie przyjmowane rozwiązania i ich wykonywanie. **Proces dowodzenia**, zgodnie z zasadami składa się z następujących podstawowych etapów: poszukiwanie i wykrycie celów, przekazanie informacji, przetworzenie danych i przyjęcie rozwiązania, przekazanie rozkazów lub zarządzeń i ich wykonanie. W ten sposób, odpowiednio do § 1,3 można przyjmować, że przedłużalność procesu dowodzenia t_y określa się czasem organizacji wykonania t_0 i czasem t_i , bezpośrednio zużywanym na wykonanie przyjętych rozwiązań t.j.

$$t_y = t_0 + t_i.$$

Ilość cykli dowodzenia w jednostce czasu / na przykład w godzinie, w czasie doby / wyniesie

$$S_d = \frac{1}{t_y} = \frac{1}{t_0 + t_i} = \frac{1}{t_i} \cdot \frac{1}{1 + \frac{t_0}{t_i}} = \frac{s}{1 + \frac{t_0}{t_i}},$$

gdzie s - techniczna szybkostrzelność broni lub w przypadku bardziej ogólnym, średnia szybkość wykonywania rozkazów przez wojska.

Wielkość s z indeksem a i b , odpowiednio dla każdej z walczących stron ujęta jest w wyrażeniach /3.29/, określających parametry β_a i β_b . Nie wykluczona jest możliwość tego, że część procesów organizacji dowodzenia będzie połączona z procesami wykonania. Tak na przykład mogą łączyć się procesy poszukiwania celów i ruch czołgów, wypracowanie decyzji i przygotowanie rakiet do odpalenia itd.

Dlatego w ogólnym przypadku

$$s_d = \frac{s}{1 + \alpha_p \frac{t_0}{t_i}}, \quad /3.39/$$

gdzie α_p - współczynnik połączenia procesów dowodzenia i wykonania w trakcie działań bojowych.

Jeśli $\alpha_p = 0$, to procesy są w pełni połączone, a więc nie występują żadne straty w tempie prowadzenia działań bojowych. Przy $\alpha_p = 1$, zupełny brak połączenia procesów.

Przy $t_0 \gg t_i$, występuje nieefektywne wykorzystanie broni, ze względu na niedokładność systemu dowodzenia, co może prowadzić do zniszczeń w przypadku identyczności pozostałych warunków. W ten sposób, kryterium zwycięstwa w postaci /3.32/, uzupełnione wprowadzeniem współczynnika efektywności s_d /3.39/, pozwala uwzględnić wpływ systemu dowodzenia na wyniki działań bojowych. Jednakże nie uwzględnia się przy tym opóźnień danych o faktycznym stanie stron, wynikających z uwagi na pracę systemu dowodzenia. Rzeczywiście, uderzenia na każdą ze stron, będą występować w chwili $t + t_z$, gdzie $t_z = \alpha_p t_0$ - czas opóźnie-

nia w wystąpieniu uderzenia z uwagi na niesprawności procesów dowodzenia i wykonywania.

Po uwzględnieniu opóźnień, równania /3.28/ przyjmują postać

$$\begin{aligned} \dot{n}_a &= - \beta_a n_a / t + t_b / n_b / t / , \\ \dot{n}_b &= - \beta_b n_b / t + t_a / n_a / t / , \end{aligned} \quad /3.40/$$

gdzie $n_a / t + t_b /$ i $n_b / t + t_a /$ - funkcje liczebności o argumentach dotyczących opóźnień. Czasy opóźnienia określa się w oparciu o analizę pracy systemu dowodzenia stron, przy czym

$$\begin{aligned} t_a &= \alpha_{pa} t_{o_a} , \\ t_b &= \alpha_{pb} t_{o_b} , \end{aligned}$$

Dla rozwiązania układu /3.40/ należy przyjąć hipotezę dotyczącą postaci funkcji n_a i n_b o argumentach związanych z opóźnieniami.

W teorii takich układów, szuka się zwykle rozwiązania w postaci funkcji od $e^{/t+t_z/}$, tak dobierając postać funkcji, aby spełniała równania wyjściowe /3.40/. Z dostatecznym przybliżeniem można przedstawić funkcję $n / t + t_z /$ w postaci szeregu i ograniczyć składnikami rozwinięcia rzędu pierwszego.

Wówczas

$$\begin{aligned} n_a / t + t_b / &= n_a / t / + t_b n_a / t / , \\ n_b / t + t_a / &= n_b / t / + t_a n_b / t / . \end{aligned}$$

Układ /3.40/ przyjmuje przy tym postać

$$\dot{n}_a = - \frac{\beta_a n_a n_b}{1 + \beta_a t_b n_b} ,$$

$$\dot{n}_b = - \frac{\beta_b n_a n_b}{1 + \beta_b t_a n_a} \quad /3.41/$$

Przy $t_a = t_b = 0$, układ /3.41/ przekształca się w układ 3.28. Przechodząc do odpowiednich wielkości otrzymujemy

$$\dot{\varphi}_a = - \frac{\beta_a n_{b0} \varphi_a \varphi_b}{1 + \beta_a n_{b0} t_b \varphi_b},$$

$$\dot{\varphi}_b = - \frac{\beta_b n_{a0} \varphi_a \varphi_b}{1 + \beta_b t_a n_{a0} \varphi_a} \quad /3.42/$$

Rozwiązanie układu /3.42/ przy warunkach początkowych $t = 0$, $\varphi_a = 1$, $\varphi_b = 1$, ma postać

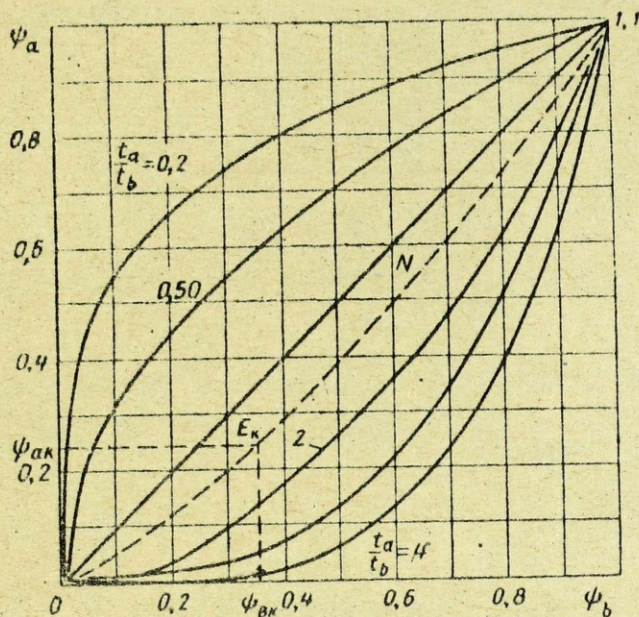
$$\psi_a = \psi_b^{\frac{t_a}{t_b}},$$

gdzie

$$\psi_a = \frac{1 + \beta_b n_{a0} t_a \varphi_a}{1 + \beta_b n_{a0} t_a} \quad ; \quad \psi_b = \frac{1 + \beta_a n_{b0} t_b \varphi_b}{1 + \beta_a n_{b0} t_b} \quad /3.43/$$

Wykres zależności $\psi_a = F / \psi_b, t_a, t_b /$ pokazany jest na rys. 3.14. Zmienne ψ_a i ψ_b są funkcjami liniowymi odpowiednio φ_a i φ_b , przy czym, przy $\varphi_a = \varphi_b$ będzie $\psi_a = \psi_b = 1$.

Na rys. 3.14, krzywa $\psi_a = F / \psi_b, t_a, t_b /$, przechodząca przez punkt krytyczny $E_k / \psi_a = \psi_{ak}, \psi_b = \psi_{bk} /$ będzie odpowiadać warunkom równowagi dynamicznej. W punkcie tym, parametry φ_a i φ_b jednocześnie osiągną wartość krytyczną. Krzywe przechodzące powyżej punktu E_k , odpowiadają warunkom zwycięstwa strony A, ponieważ punkt bieżący na tych krzywych



Rys. 3.14. Wykres zależności $\psi_a = F / \psi_b$, $t_a, t_b /$:

E_k - punkt krytyczny ; N - linia równowagi dynamicznej.

/ charakteryzujący stan stron / przy przejściu ze stanu /1,1/ w stan /0,0/ wcześniej przecina rzędne $\psi_b = \psi_{bk}$, a zatem odcięta $\psi_a = \psi_{bk}$. Wówczas parametr ψ_b , wcześniej aniżeli parametr ψ_a , osiąga wartość krytyczną $\psi_b = \psi_{bk}$, przy której strona B zmuszona będzie wstrzymać działania bojowe.

Następnie, warunek zwycięstwa strony A może być zapisany w postaci

$$\frac{t_a}{t_b} < \left(\frac{t_a}{t_b} \right)_k = \frac{\ln \psi_{ak}}{\ln \psi_{bk}} \quad /3.44/$$

lub

$$\frac{t_b}{t_a} \frac{\ln \psi_{ak}}{\ln \psi_{bk}} > 1.$$

Ponieważ wielkości $\beta_a n_{bo}$ i $\beta_b n_{ao}$, określające tempo strat początkowych odpowiednich stron, są zwykle mniejsze od jed-

ności, a czas t_a i t_b jest znacznie mniejszy od czasu zakończenia działań bojowych, to w przybliżeniu, warunek /3.44/ z uwzględnieniem /3.43/, można zapisać w następujący sposób :

$$\frac{\beta_b n_{ao} / 1 - \varphi_{ak}'}{\beta_a n_{bo} / 1 - \varphi_{bk}'} \cdot \frac{1 + \beta_a n_{bo} t_b}{1 + \beta_b n_{ao} t_a} > 1. \quad /3.45/$$

Posługując się wyrażeniem /3.32a/, przedstawimy warunki zwycięstwa strony A w postaci

$$k k_y > 1, \quad /3.46/$$

gdzie

$$k_y = \frac{1 + \beta_a n_{bo} t_b}{1 + \beta_b n_{ao} t_a}.$$

Wielkość k uwzględnia wpływ ilości i jakości uzbrojenia na wynik działań bojowych, a wielkość k_y - jakość systemu dowodzenia.

Z /3.46/ widać, że uwzględniając system dowodzenia / $t_a < t_b$ / , można uzyskać pewną przewagę nad przeciwnikiem, nawet przy niekorzystnym stosunku ilości i jakości uzbrojenia. Należy jednak mieć na uwadze to, że możliwości systemu dowodzenia są w pewnym stopniu ograniczone. Jeśli $k \ll 1$, a $k_y \approx 1$, to jaki by nie był doskonały system dowodzenia , nie jest możliwe osiągnięcie zwycięstwa.

Przy idealnym systemie dowodzenia obydwóch stron, $k_y = 1$, nierówność /3.46/ przekształca się w rozpatrzoną wcześniej nierówność $k > 1$. Przy wyjątkowo wysokich wskaźnikach broni

/ $\beta_a n_{bo}$, $\beta_b n_{ao} \gg 1$ / , wpływ systemu dowodzenia na wyniki działań bojowych, staje się niezwykle istotny. W przypadku tym z

/ 3.44/ z uwzględnieniem /3.43/ , otrzymujemy

$$\frac{t_b}{t_a} \frac{\ln \varphi_{ak}}{\ln \varphi_{bk}} > 1 . \quad /3.47/$$

A więc w przypadku granicznym, wynik działań bojowych będzie zależał tylko od jakości systemu dowodzenia i moralnego ducha wojsk.

Wyrażenie /3.47/, w odróżnieniu od ogólnie znanego /jakościowego/ stwierdzenia, że doskonały system uzbrojenia wymaga i doskonałego systemu dowodzenia, pozwala określić niezbędne ilościowe wskaźniki systemu dowodzenia. Analogicznie do tego, jak przeprowadzono ocenę górnej i dolnej granicy warunku k , można pokazać, że dla osiągnięcia pracy stabilnej w przyjmowanym czasie z uwzględnieniem wpływu systemu dowodzenia, winno być

$$2 < k < 3 .$$

Dopuszczalne granice zmian iloczynu parametrów, określa się w oparciu o całkowanie układu /3.42/ przy argumentie t i obliczenie czasu zakończenia działań bojowych.

Uzyskane zależności, pozwalają w pierwszym przybliżeniu, powiązać ze sobą charakterystyki systemu dowodzenia z wynikami działań bojowych i pokazują, że średnia przedłużalność cyklu dowodzenia, wykazuje istotny wpływ na dynamikę starcia zbrojnego i musi być brana pod uwagę, przy ocenie jakości systemu.

Ocena systemu uzbrojenia i systemu dowodzenia w całości może być przeprowadzona w oparciu o różne kryteria efektywności , pozwalające ustalić optymalne wartości podstawowych parametrów, charakteryzujących te systemy,

Jako główne można rozpatrywać łącznie następujące kryteria:

- a/ efektywności operacyjnej E_o ,
- b/ efektywności technicznej E_t ,
- c/ efektywności ekonomicznej E_e .

Kryterium E_o , charakteryzuje się wartością oczekiwaną / m_w / wyników wykonania zadania bojowego, określając tym sposobem, efektywność bojową całego systemu z uwzględnieniem dowodzenia i środków uzbrojenia. Do liczby typowych zadań bojowych , których rozwiązanie winien zabezpieczyć system dowodzenia wojskami, zaliczyć należy : przegrupowanie, natarcie, obezwładnienie, zniszczenie, obrona i odwrót. Każde z tych zadań może być scharakteryzowane odpowiednią miarą liczbową wartości, która wskazuje na jakość wykonania zadania ; na przykład : przegrupowanie charakteryzuje się średnim tempem przesunięcia , natarcie - wielkością zagarniętego obszaru, lub ilością zdobytych obiektów wartościowych, obezwładnienie lub zniszczenie - średnią liczbą obezwładnionych lub zniszczonych celów, obrona - średnim czasem utrzymania bronionej rubieży / rejonu/ lub stratami zadanyimi przeciwnikowi.

Wykonanie zadania bojowego , może być osiągnięte, różnymi środkami przy różnych średnich stratach / m_s / ze strony wojsk własnych. Dlatego też można przyjąć

$$E_o = \frac{m_w}{m_{str}} ,$$

przy czym wartość oczekiwana wyników / m_w / i strat / m_{str} / , może mieć charakter absolutny lub względny t.zn. odniesiony do jednostki powierzchni, początkowej liczebności it.p. W niektórych pracach amerykańskich [30] , proponuje się stosowanie do określania efektywności bojowej, stosunku wartości wyników s_w do wartości strat s_{str} t.j. przyjmować

$$E_o = \frac{s_w}{s_{str}} \left[\frac{\text{dol.}}{\text{dol.}} \right] .$$

Jednakże takie podejście , nie zasługuje chyba na pełne uznanie, ponieważ w systemach bojowych nie wszystko daje się wycenić w gotówce, a przede wszystkim nie podlega wycenie finansowej, wartość życia ludzkiego, Zresztą nie krępując się tą okolicznością Amerykanie oceniają wartość każdego żołnierza na 10 000 dolarów tj. równą wartości polisy ubezpieczeniowej.

Z punktu widzenia efektywności operacyjnej, ten system dowodzenia będzie najlepszy, który zapewni wykonanie zadania bojowego w najkrótszym czasie. Oczywiście czas ten nie może przekraczać czasu, wynikającego z potrzeb operacyjnych . Jak więc widzimy, bez uwzględnienia czasu wykonania zadania bojowego nie można dokonać pełnej oceny systemu. Czas wykonania zadania bojowego, określa się objętością wykonywanych prac fizycznych, informacyjnych i zależy od liczby środków technicznych i składu osobowego, kwalifikacji i wyszkolenia personelu obsługującego, niezawodności aparatury i od szeregu innych czynników. Wpływ wszystkich tych czynników, najpełniej może być uwzględniony przez wartość oczekiwaną czasu wykonania zadania bojowego, $m_t = m / t_y /$.

Niekiedy można przyjmować , że m_t stanowi sumę wartości oczekiwanych czasów realizacji oddzielnych procesów, które wchodzi w skład ogólnego procesu, funkcjonowania systemu. W tym przypadku , kryterium E_t może być scharakteryzowane wielkością $m_t = m/t_s/ + m / t_o /$, w oparciu o którą można przeprowadzić ocenę technicznej wydajności systemu.

Dla oceny ekonomicznej efektywności systemu można zastosować szereg kryteriów. Może być ona charakteryzowana średnim czasem

opłacalności systemu, kosztem racjonalnej gospodarki środkami materiałowymi, przyrostem wyników bojowych systemu na jednostkę zużywanych środków, wielkościami rozchodów eksploatacyjnych w systemie itd.

Wszystkie te kryteria mają charakter szczególny i mogą być stosowane do analizy oddzielnych wskaźników ekonomicznych systemu. Najogólniejszym ekonomicznym wskaźnikiem systemu jest wartość oczekiwana głównych kosztów na budowę systemu $m/s/$, które składają się z kosztów na system uzbrojenia $/s_n/$ i na system dowodzenia $/s_d/$

Wskaźnik ten określa się jako sumę

$$m_s = m/s/ = m/s_n/ + m/s_d/ .$$

W szeregu przypadków można przyjmować $E_e \approx m_s$.

W oparciu o rozpatrzone kryteria szczególne, można wyprowadzić uogólnione kryterium efektywności systemu w postaci

$$E = \frac{m_w}{m_{str} m_t m_s} .$$

Kryterium to, w sposób najbardziej ogólny charakteryzuje jakość systemu. Biorąc pod uwagę wszystkie możliwe warianty budowy systemu, pozwala ono na wybranie takiego optymalnego wariantu, który zapewnia osiągnięcie największych wyników przy określonych kosztach i w określonym czasie. Ponieważ wszystkie wielkości wchodzące w skład wyrażenia na E , zależą nie tylko od systemu uzbrojenia, ale i od systemu dowodzenia, kryterium E pozwala ustalić właściwą proporcję między środkami uzbrojenia a środkami dowodzenia, czego nie da się uzyskać przy pomocy kryteriów szczególnych. Po to, aby można było posługiwać się kryterium E , należy ustalić zależności między wielkościami m_w, m_{str}, m_t i m_s .

Zależności takie można otrzymać w oparciu o analityczne lub stochastyczne modelowanie procesów funkcjonowania systemów z uwzględnieniem ich struktury, sprzężeń wewnętrznych i charakteru obciążenia.

Przy stosowaniu uogólnionego kryterium E , należy mieć na uwadze jego przydatność tylko dla ocen porównawczych systemów i nie usiłować optymalizowania systemu drogą nieograniczonego zmniejszania wielkości w mianowniku. Wszystkie te wielkości są ograniczone z dołu i nie mogą być dowolnie zmniejszane.

3.5. Przykłady zastosowania modeli uproszczonych

Przy pomocy modelu matematycznego, rozpatrzonego w § 3.4, przy odpowiednich założeniach i ograniczeniach można rozwiązywać rzeczywiste, typowe zadania, charakterystyczne również i dla wyższych klas modeli matematycznych. W charakterze przykładu, przytoczymy rozwiązanie pewnych zadań, opartych na zastosowaniu uogólnionego kryterium efektywności E .

O k r e ś l e n i e o p t y m a l n e g o s t o s u n k u s i ł i ś r o d k ó w p o s z c z e g ó l n y c h s t r o n n i e z b ę d n y c h d l a w y k o n a n i a p o s t a w i o n e g o z a d a n i a b o j o w e g o. W poprzednim paragrafie pokazaliśmy, że stosunek sił i środków stron, określany wielkością k , winien zawierać się w granicach $2 < k < 3$.

Oczywiście, im jest więcej sił, tym mniej czasu, potrzeba dla wykonania zadania bojowego, ale tym większych strat należy oczekiwać z uwagi na większą gęstość wojsk, przy równości pozostałych warunków. Z drugiej strony, przy zmniejszaniu gęstości ugrupowań bojowych, tempo strat zmniejsza się, ale wzrasta czas wykonania

zadania bojowego, co znów prowadzi do zwiększenia ogólnych strat. Intuicyjnie można założyć, że istnieje optymalny stosunek sił i środków k , dzięki któremu, wykonanie zadania bojowego osiąga się przy najmniejszych stratach i w niedługim czasie. Aby znaleźć ten stosunek, posłużymy się kryterium efektywności w postaci

$$E_1 = \frac{m_w}{m_{str} m_t},$$

gdzie $m_{str} = n_{ao} / (1 - \varphi_a)$ i $m_t = t_k = \tilde{\tau} t_{kmax}$, przy czym φ i $\tilde{\tau}$ określa się odpowiednio według wzorów /3.31/ i /3.38/, stanowiących szczególne przypadki wyrażeń /3.44/, dla warunku $t_a = t_b = 0$ /idealny system dowodzenia/.

Celem udogodnienia obliczeń, aproksymujemy zależność /3.38/ funkcją postaci

$$t = t_{kmax} e^{-\alpha/k-1/}$$

gdzie α znajduje się z warunku min. funkcji

$$\varphi(\alpha) = \int_{k=1}^{k=6} (t - t_k)^2 dk$$

a t_{kmax} oblicza się ze wzoru /3.37/.

Przedstawiając $\varphi(\alpha)$ w postaci

$$\begin{aligned} \varphi(\alpha) &= \int_{k=1}^{k=6} t_{kmax}^2 e^{-2\alpha/k-1/} dk - \\ &- 2 \int_{k=1}^{k=6} t_k t_{kmax} e^{-\alpha/k-1/} dk + \int_{k=1}^{k=6} t_k^2 dk \end{aligned}$$

i posługując się wykresem na rys. 3.13, znajdujemy, że warunek

$\varphi(\alpha) = \min$ dla $\varphi_{ak} = \varphi_{bk} = 0,5$ jest spełniony przy $\alpha = 0,43$.

Następnie, można przyjąć

$$E_1 = \frac{1 - \varphi_{bk} n_{bo}}{n_{ao} (1 - \varphi_{ak} / t_{k \max}) e^{-\alpha/k-1/}} = E_{10} k^{-1} e^{\alpha/k-1/},$$

gdzie

$$E_{10} = \frac{\beta_b}{\beta_a t_{k \max}}.$$

Z warunku $\frac{\partial E_1}{\partial k} = 0$, otrzymamy

$$e^{-\alpha/k-1/} - \alpha^{k_{opt}} e^{-\alpha/k-1/} = 0.$$

$$k_{opt} = \frac{1}{\alpha}.$$

W danym przypadku $\alpha = 0,43$ i optymalna wartość k , przy której zadanie bojowe wykonywane jest w minimalnym czasie i z najmniejszymi stratami, wynosi $k = 2,3$.

Określenie kalibru amunicji, przy którym występują minimalne ekonomiczne koszty wykonania zadania bojowego. Uwzględniając /3.32a/ i /3.29/ wyrażenie na k można przedstawić w postaci

$$k = \mathcal{H} n_{ao} / r_b + R_a / 2, \quad /3.48/$$

gdzie \mathcal{H} - współczynnik uwzględniający parametry, niezależne od n_{ao} , R_a , i $k = k_{opt} = \text{const}$.

Z wyrażenia /3.48/ widać, że optymalną wartość k_{opt} można otrzymać przy różnych wartościach liczebności początkowej $/n_{ao}/$ i kalibru amunicji $/R_a/$.

Oczywiście, im większy kaliber, tym mniej amunicji potrzeba

do wykonania zadania bojowego, ale zwiększy się wartość każdego naboju, co dalej odbije się na ich ogólnej wartości. Z drugiej strony im mniejsza moc naboju tym jest tańszy, ale zwiększa się z kolei ich wydatek do wykonania tego samego zadania bojowego, co prowadzi do wzrostu ogólnych kosztów ekonomicznych. Można założyć, że istnieje taki kaliber amunicji $R_{a \text{ opt}}$, przy którym osiągnięcie zadania bojowego, osiągnięcie jest najmniejszymi kosztami ekonomicznymi.

Aby znaleźć $R_{a \text{ opt}}$, przyjmiemy, że wartość oddzielnego naboju, związana z jego mocą /kalibrem/ wyraża się zależnością

$$S_1 = \mu Q^n,$$

gdzie Q - równoważnik trotylowy, μ - współczynnik proporcjonalności, **określamy statystycznie.**

Z drugiej strony

$$R_a = v \sqrt[3]{Q},$$

gdzie v - współczynnik proporcjonalności

A więc

$$S_1 = \varepsilon R_a^{3n}, \quad /3.49/$$

gdzie

$$\varepsilon = \frac{\mu}{v^3} \dots$$

Sumaryczny koszt wykonania zadania bojowego

$$S = S_1 N,$$

gdzie N - ogólne zużycie amunicji

Z kolei

$$N = \int_0^{t_k} s n_a dt = s n_{ao} \int_0^{t_k} \varphi_a dt.$$

Posługując się wyrażeniem /1.6/ otrzymamy

$$N = s n_{ao} \int_0^{t_k} \frac{(\beta_a n_{bo} - \beta_b n_{ao}) dt}{\beta_a n_{bo} e^{(\beta_a n_{bo} - \beta_b n_{ao})t} - \beta_b n_{ao}} \approx$$

$$\approx - \frac{s n_{ao}}{\beta_a n_{bo}} e^{-(\beta_a n_{bo} - \beta_b n_{ao})t} \Big|_0^{t_k} =$$

$$= \frac{s n_{ao}}{\beta_a n_{bo}} \left[1 - e^{-(\beta_a n_{bo} - \beta_b n_{ao})t_k} \right].$$

Podstawiając wartość t_k z / 3.25/ i przyjmując $\varphi_{ak} = \varphi_{bk}$ po oczywistych przekształceniach otrzymamy

$$N = \frac{s n_{ao}}{\beta_a n_{bo}} \left[1 - \frac{k \varphi_{bz}}{k - \frac{1}{1 - \rho_{bz}}} \right] = n_{ao} F/k/, \quad /3.50/$$

gdzie $F/k/$ nie zależy od iloczynu $n_{ao} / r_b + R_a / 2$.

Biorąc pod uwagę /3.48/ - /3.50/, sumaryczny koszt wykonania zadania bojowego można przedstawić w postaci

$$S = \frac{\varepsilon k F /k/}{\alpha} \frac{R_a^{3n}}{/r_b + R_a / 2}.$$

Zauważmy, że przy $k = k_{opt} = \text{const.}$ wielkość S zależy tylko od charakteru celów $/r_b/$ i od mocy amunicji, określanej w danym przypadku promieniem rażenia R_a . Jeśli $n > \frac{2}{3}$, to S jest funkcją R_a , monotonicznie rosnącą, co oznacza w interpretacji ekonomicznej, celowość stosowania amunicji o małych kalibrach. Posiadając udoskonaloną technologię przygotowywania amunicji i zmniejszając jej koszt $/ n < \frac{2}{3} /$ wygodniej jest stosować większe kalibry. Optymalny kaliber /promień rażenia/ $R_{a \text{ opt}}$, zapewnia-

jący wykonanie zadania bojowego przy najmniejszych kosztach ekonomicznych znajduje się z warunku

$$\frac{\partial S}{\partial R_a} = 0 \quad \text{lub}$$

$$3 n R_a^{3n-1} / r_b + R_a / 2 - 2 / r_b + R_a / R_a^{3n} = 0 .$$

Stąd wynika, że

$$R_{a \text{ opt}} = \frac{r_b}{\frac{2}{3n} - 1} .$$

Przy $n = \frac{1}{2}$ otrzymamy $R_{a \text{ opt}} = 3 r_b .$

Określenie optymalnego stosunku między kosztami systemu uzbrojenia i systemu dowodzenia . Celem przybliżonego rozwiązania tego zadania, posłużmy się wzorem /3.44/, który można przedstawić w postaci

$$k_{\text{opt}} = k \frac{1 + \beta_a n_{bo} t_b}{1 + \beta_b n_{ao} t_a} ,$$

gdzie k określone jest przez wyrażenie /3.32a/ ; k_{opt} winno się zawierać w granicach $2 < k_{\text{opt}} < 3$. Zwiększenie k i zmniejszenie t_a związane jest z kosztami ekonomicznymi, dlatego też można założyć, że między tymi kosztami istnieje najwygodniejsza odpowiedniość, umożliwiająca otrzymanie szukanej wielkości

k_{opt} .

Oznaczmy :

S_u - koszt środków uzbrojenia,

S_d - koszt środków dowodzenia ,

$$\omega = \frac{S_d}{S_u} \text{ -- stosunek kosztów ,}$$

i sformułujemy zadanie w następujący sposób : przy znanych wartościach t_u , β_a i n_{bo} znaleźć taką wartość ω dla której k_{opt} osiąga wartość maksymalną przy zadanych warunkach wykonania zadania bojowego, na przykład dla zadania całkowitego zniszczenia przeciwnika / $\varphi_{bz} = 0$ / .

Oczywiście, dla rozwiązania takiego zadania należy ustalić, zależność między wielkościami k , t_a , i ω .

Z wyrażenia /3.50/ dla warunków $\varphi_{bz} = 0$ i $F/k/ = 1$, otrzymamy koszt amunicji S , niezbędnej dla wykonania postawionego zadania bojowego :

$$S = N S_1 \frac{C n_{ao}}{\beta_a n_{bo}} \quad S_1 = \frac{C}{\beta_b} S_1 k .$$

Koszt środków uzbrojenia można przedstawić w postaci

$$S_u = \delta S = \frac{\delta C S_1}{\beta_b} k ,$$

gdzie δ - współczynnik proporcjonalności.

Koszt środków dowodzenia można przedstawić w postaci

$$S_d = S_{do} / \frac{t_{ao}}{t_a} /^m ,$$

gdzie S_{do} - koszt środków dowodzenia, zabezpieczających określoną wartość czasu t_{ao} ; m - wielkość określana empirycznie :

Oznaczając $S_o = S_u + S_d$ i podstawiając wartości

$$k = \frac{\beta_b}{\delta C S_1} S_u \quad \text{i} \quad t_a = / \frac{S_d}{S_u} / \frac{1}{m} t_{ao}$$

do wyrażenia na k_{opt} , otrzymamy

$$k_{opt} = / \frac{1}{\beta_a n_{bo}} + t_b / \quad \times$$

$$X \frac{S_0}{S_1^* / 1 + \omega / + t_{ao} S^{1 - \frac{1}{m}} S_{yo}^{\frac{1}{m}} / \frac{1 + \omega}{\omega} / \frac{1}{m}}$$

gdzie

$$S_1^* = \frac{\int c S_1}{\beta_b \beta_a n_{bo}}$$

Ponieważ przy $\omega = 0$ i ∞ mamy $k_{opt} = 0$, to winna istnieć taka wartość $\omega = \omega_{opt}$ przy której $k_{opt} = \max$.

Z warunku $\frac{\partial k_{opt}}{\partial \omega} = 0$ otrzymamy

$$\frac{S_1^*}{t_{ao} S_0} / \frac{S_0}{S_{yo}} / \frac{1}{m} \omega_{opt}^2 = \frac{1}{m} / 1 + \frac{1}{\omega_{opt}} / \frac{1}{m} - 1$$

Zauważmy, że ω_{opt} zależy od $m, S_0, S_{do}, t_{ao}, S_1^*$ przy

czym ω_{opt} można znaleźć z równania

$$\alpha \omega_{opt}^2 = \frac{1}{m} / 1 + \frac{1}{\omega_{opt}} / \frac{1}{m} - 1, \quad /3.51/$$

gdzie

$$\alpha_0 = \frac{S_1^*}{t_{ao} S_0} / \frac{S_0}{S_{yo}} / \frac{1}{m}$$

Jeśli znane są ogólne sumaryczne koszty początkowe $S_{oo} = S_{bo} + S_{do}$ / i odpowiadający im stosunek ω_0 / , zabezpieczające pewien stopień przewagi nad przeciwnikiem k_0 i czas zatrzymania t_{ao} , to

$$\alpha_0 = \frac{1}{k_0 \beta_a n_{bo} t_{ao}} \frac{1}{\omega_0} / 1 + \frac{1}{\omega_0} / \frac{1}{m} - 1 / \frac{S_{oo}}{S_0} / \frac{1}{m}$$

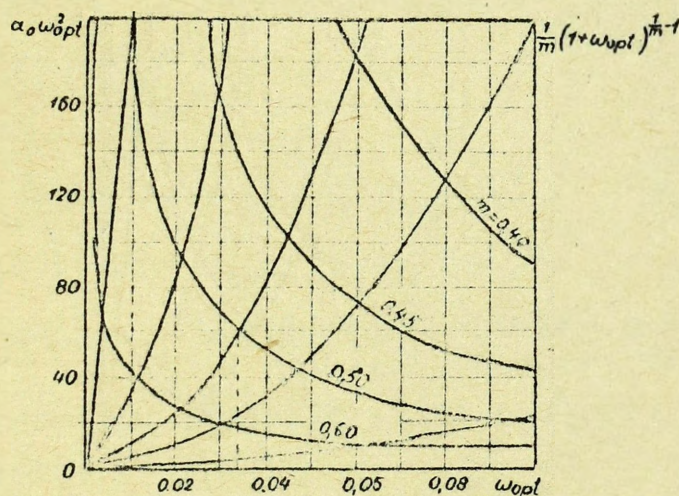
W przypadku kiedy ω_0 jest stosunkiem optymalnym, równanie

/3.51/ winno się spełniać dla warunku $S_o = S_{oo}$,

W ślad za czym

$$\omega_o = \frac{k_o \beta_a n_{bo} t_{ao}}{m}$$

Jeśli $\omega = 0,01$, tj. jeśli koszty na system dowodzenia stanowią 1% kosztów na system uzbrojenia, i $m = 0,5$, to



Rys. 3.15m Nomogram dla określenia ω_{opt}

$\alpha_o = 2 \cdot 10^6$. Przy $m = 1$, część kosztów na system dowodzenia nie zależy od ogólnej sumy kosztów S_o . Dla $m < 1$, ze zwiększeniem ogólnych kosztów S_o , winna zmniejszać się część kosztów ω na system dowodzenia. Na rys. 3.15 przedstawiony jest nomogram dla określenia $\omega_{opt} = \omega_{opt} / \alpha_o, m /$.

Posłużymy się rys. 3,15 dla rozwiązania przykładu kontrolnego. Załóżmy, że należy określić ω_{opt} przy trzykrotnym zwiększeniu ogólnych kosztów na środki uzbrojenia i dowodzenia.

/ $S_o : S_{oo} = 3$ / dla warunków $k_o = 2,0$, $\beta_a n_{bo} = 0,01$ /godz
 /tempo strat przeciwnika / , to $t_{ao} = 1$ godz i $m = 0,5$.

Dla tych warunków

$$\omega_o = \frac{k_o \beta_a n_{bo} t_{ao}}{m} = \frac{2 \cdot 0,01 \cdot 1}{0,5} = 0,04$$

$$\alpha_o = \frac{1}{\omega_o^2} / 1 - \frac{1}{\omega_o} / / \frac{S_{oo}}{S_o} /^{-1} =$$

$$= \frac{1}{4^2 \cdot 10^{-4}} / 1 + \frac{1}{0,04} / / \frac{1}{3} /^{-1} = 5 \cdot 10^4$$

Znajdując na wykresie /rys.3.15/ , punkt przecięcia linii z parametrami $m = 0,5$ i $\alpha_o = 5 \cdot 10^4$ otrzymamy $\omega_{opt} =$
 $= 0,34 = 3,4\%$. Oznacza to, że przy **trzykrotnym** zwiększeniu ogólnego wydatku bezwzględny wydatek na środki dowodzenia również winien wzrosnąć, ale pewna część tego wydatku odpowiednio się zmniejszy i zostanie 3,4% zamiast 4%. Wynik taki jest słuszny dla przypadku, kiedy odpowiednie koszty początkowe na środki dowodzenia / $\omega_o = 4\%$ / zostały określone w sposób optymalny. Jeśli początkowy stosunek kosztów nie był optymalny / na przykład, $\omega_o < 0,04$ / , to jednocześnie ze zwiększeniem absolutnych kosztów na środki dowodzenia, zwiększają się i koszty względne.

NIEKTÓRE PROBLEMY ZASTOSOWANIA TEORII MASOWEJ OBSŁUGI
PRZY ANALITYCZNYM MODELOWANIU DZIAŁAŃ BOJOWYCH

Teoria masowej obsługi jest jedną z metod analitycznego modelowania działań bojowych posiadającą największe perspektywy wykorzystania. Możliwość opracowania matematycznych modeli opartych na tej teorii jest uwarunkowana tym, że wiele problemów dynamiki działań bojowych wojsk można sformułować, przy pewnych ogólnych ograniczeniach, jako typowe problemy teorii masowej obsługi.

Dalsze rozważania w tym rozdziale zakładają u Czytelnika znajomość podstawowych pojęć teorii masowej obsługi [7,10].

4.1. Sformułowanie działań pododdziałów
czołgów w postaci zadania teorii
masowej obsługi

Rozpatrzmy sformułowanie jednego z zadań teorii masowej obsługi.

Mamy r jednorodnych aparatów przeznaczonych do obsługi strumienia zgłoszeń. Abstrahując od fizycznej interpretacji procesu obsługi, można przyjąć, że czas obsługi każdego zgłoszenia jest zmienną losową o rozkładzie $G/t/ = 1 - e^{-\mu t}$, gdzie μ - średni czas obsługi jednego zgłoszenia.

Zgłoszenia nadchodzą losowo, z intensywnością λ , charakteryzującą wartość oczekiwaną liczby zgłoszeń nadchodzących do systemu w jednostce czasu. Jeżeli w systemie jest wolny co najmniej jeden aparat obsługi, to zgłoszenie natychmiast podlega obsłudze, jeżeli natomiast zajęte są wszystkie aparaty, to zgłoszenie kieruje się do kolejki w oczekiwaniu na obsługę.

Czas oczekiwania na obsługę jest także zmienną losową o rozkładzie $\Psi /t/ = 1 - e^{-\nu t}$, gdzie ν - średni czas oczekiwania.

Aparaty obsługi mogą z różnych przyczyn przerywać pracę. Długotrwałość niezawodnej pracy każdego z aparatów również jest zmienną losową o rozkładzie $F/t/ = 1 - e^{-\alpha t}$, gdzie α - średni okres niezawodnej pracy aparatu. Aparat, który przerwał obsługę może być ponownie włączony do procesu, przy czym czas usuwania przyczyny przerwy jest zmienną losową o rozkładzie $H/t/ = 1 - e^{-\beta t}$, gdzie β - wartość oczekiwana czasu usunięcia przyczyny przerwy. Przy tych warunkach należy określić efektywność systemu obsługi charakteryzowaną zwykle wartością oczekiwaną liczby zgłoszeń obsługiwanych w jednostce czasu, lub w zadanym czasie T.

Jeżeli teraz założymy, że zgłoszeniami przybywającymi do systemu obsługi są nacierające czołgi, a aparatami obsługi - środki obrony przeciwpancernej /OPpanc/, to bez wysiłku zauważymy, że sformalizowany opis takiej walki może być dany przy pomocy matematycznej aparatury teorii masowej obsługi.

Rzeczywiście, istotna różnica pomiędzy walką środków oppanc z czołgami, a sytuacją rozpatrywaną w teorii masowej obsługi, polega na tym, że zadania teorii masowej obsługi w ich głównym sformułowaniu można rozpatrywać jako pewne procesy fizyczne przebiegające tylko w czasie, natomiast wszelka walka tocząca się między środkami OPpanc a czołgami jest procesem fizycznym przebiegającym zarówno w czasie, jak i w przestrzeni. Zmiany procesu walki w przestrzeni można wyrazić jako zmiany czasu obsługi związane ze zmianami położenia celów /zgłoszeń - przyp. tłum./ w stosunku do aparatów obsługi. Oczywiście, w każdym konkretnym przypadku procesu walki, dla dowolnej chwili $t_i / i = 1, 2, \dots /$

można wskazać na osi czasu maksymalny przedział

$\Delta t_i = t_{i+1} - t_i$, w którym można przyjąć, że czas obsługi celu przez aparat obsługi jest niezależny od położenia celu na polu walki. Zatem, zamiast ciągłego procesu walki, można rozpatrywać proces dyskretny, będący sumą elementarnych procesów przebiegających w przedziałach $\Delta t_1, \Delta t_2, \dots, \Delta t_i, \dots$, w każdym z których czas obsługi celu przez aparat obsługi jest niezależny od położenia celu na polu walki.

Rozpatrzmy następujące zadanie: istnieje rubież obrony lub pewien ważny obiekt broniony przed atakującymi czołgami przy pomocy jednorodnych środków OPPanc. Atakujące czołgi także prowadzą ogień przeciwko środkom OPPanc. Zakładając, że znamy rozkład prawdopodobieństwa strumienia czołgów, ich ilość oraz intensywność strumienia, a także parametry opisujące realne warunki walki, należy określić wynik walki. W celu sformułowania tego zadania przy pomocy aparatury teorii masowej obsługi konieczne jest pas natarcia czołgów podzielić na ciąg stref w ten sposób, aby w każdej z nich czas niezbędny do zniszczenia czołgu /czas obsługi/ środkami OPPanc nie zależał od odległości czołgu w stosunku do środka OPPanc. Zakłada się także, że szerokość pasa natarcia czołgów jest taka, iż nie wpływa w istotnym stopniu na proces obsługi.

Strefę, w której ostrzał czołgów przez środki OPPanc jest prowadzony w przedziale czasu $[t_{i+1}, t_i]$ nazwiemy i - tą strefą obsługi, a system obsługi złożony z ciągu kolejnych stref - *aproxymującym systemem obsługi*. Ponieważ przyjęliśmy, że w granicach jednej strefy obsługi, czas obsługi czołgów przez środki OPPanc nie zależy od odległości czołgów od środków OPPanc, zatem

walka przebiegająca w przedziale czasu $/t_{i+1}, t_i/$ pomiędzy środkami OPPanc i nacierającymi czołgami może być formalizowana jako odpowiednie zadanie teorii masowej obsługi, w którym rolę strumienia zgłoszeń przybywających do systemu obsługi gra strumień wykrytych czołgów - celów.^{1/} Należy tu wyraźnie podkreślić, że za zgłoszenia będziemy przyjmować jedynie czołgi wykryte przez stronę broniącą się, nie zaś wszystkie czołgi wchodzące w strefę obsługi. Inaczej mówiąc cel staje się zgłoszeniem na obsługę /na rażenie/ tylko z chwilą jego wykrycia przez środki OPPanc. Takie rozumienie strumienia celów przybywających do systemu obsługi pozwoli na wykorzystanie teorii masowej obsługi również w tych przypadkach, gdy zarówno cele, jak i aparaty obsługi są nieruchome, tzn. wówczas, kiedy nie można by było mówić o istnieniu jakiegokolwiek strumienia zgłoszeń. Istotnie, ponieważ przyjmujemy, że cel staje się zgłoszeniem tylko w procesie poszukiwania, który jak każdy proces fizyczny przebiega w czasie, ciąg wykrytych przez środki OPPanc celów stanowi strumień zmienny w czasie. W stosunku do tego strumienia czyni się założenie, że posiada on własności strumienia najprostszego.^{2/}

Jeżeli czołgi przechodzą kolejno przez kilka stref obrony /stref obsługi/, to strumień celów będą miały coraz mniejszą intensywność i wówczas nie można im przypisywać własności strumienia najprostszego. Przy rozwiązywaniu zadania kolejnej strefowej obsługi strumienia zgłoszeń o malejącej intensywności należy wziąć pod uwagę własności takich strumieni opisane w dodatku 2.

1/ tzn. stanowiących cel dla środków OPPanc. - Przyp. tłum.

2/ tzn. stacjonarnego, zwykłego i bez następstw. Przyp. tłum.

4.2. Wyznaczenie prawdopodobieństwa odmowy obsługi w strefach

Przede wszystkim wyznaczmy prawdopodobieństwo odmowy obsługi dla najprostszego strumienia zgłoszeń przybywających do strefy obsługi, w której wszystkie aparaty obsługi są jednorodne.

W tym celu rozpatrzmy system obsługi składający się z r jednorodnych aparatów. Każdy aparat obsługi, niezależnie od pozostałych może w losowych chwilach przerywać pracę. Przyjmijmy, że okres niezawodnej pracy liczony od początku obsługi zgłoszenia do chwili przerywania pracy jest zmienną losową o wykładniczym rozkładzie prawdopodobieństwa $F(t)$ z parametrem α :

$$F(t) = 1 - e^{-\alpha t} \quad /4.1/$$

Założmy następnie, że długotrwałość obsługi jest zmienną losową o rozkładzie:

$$G(t) = 1 - e^{-\mu t} \quad /4.2/$$

Jeżeli aparat przerwał pracę, to będziemy przyjmować, że czas usunięcia przyczyny przerwy^{1/} jest zmienną losową o rozkładzie:

$$H(t) = 1 - e^{-\beta t} \quad /4.3/$$

Jeżeli w chwili przybycia zgłoszenia do systemu wszystkie sprawne aparaty obsługi są zajęte, to przybywające zgłoszenie ustawia się w kolejce i oczekuje w ciągu czasu ξ / ξ jest zmienną losową o wykładniczym rozkładzie prawdopodobieństwa $\psi(t)$

1/ Przy wyprowadzaniu wzoru na prawdopodobieństwo odmowy obsługi rozpatrzono również przypadek, w którym $\alpha \neq 0$ a $\beta \equiv 0$.
Przypadek autora.

i parametrze ν /, zaś po upływie czasu ξ opuszcza system obsługi.

Jeżeli aparat przerwał pracę w chwili, gdy znajdowało się w nim obsługiwane zgłoszenie, to pozostaje ono w systemie obsługi.

Rozpatrywany system obsługi można przyjąć za matematyczny model walki czołgów ze środkami OPPanc w strefie obsługi, w której strumień wykrytych przez środki OPPanc czołgów ma własności strumienia najprostszego, a czas oczekiwania wykrytego czołgu na otwarcie do niego ognia przez środki OPPanc ma rozkład wykładniczy.

Dla j - ej strefy / $j = 1, 2, \dots$ / będziemy mieli:

- λ - średnia ilość wykrytych przez środki OPPanc czołgów w ciągu jednostki czasu;
- μ - średnia ilość czołgów rażonych przez jeden środek OPPanc w ciągu jednostki czasu;
- α - średnia ilość środków OPPanc rażonych przez czołgi w ciągu jednostki czasu;
- ν - średnia ilość czołgów nie rażonych spośród czołgów wykrytych, opuszczających strefę obsługi.

Zgodnie z danymi opublikowanymi w pracy [13], ponieważ w każdej j -ej strefie liczba strzałów potrzebnych do uzyskania jednego trafienia jest zmienną losową o rozkładzie wykładniczym, czas niezbędny dla rażenia celu w j -ej strefie przez każdy środek będzie także zmienną losową o rozkładzie wykładniczym z parametrem μ przy rażeniu czołgów i z parametrem α przy rażeniu środków OPPanc. Oznacza to, że procesy rażenia czołgów i rażenia środków OPPanc w strefie j będą identyczne odpowiednio z procesami obsługi zgłoszeń i przerywania pracy aparatów obsługi w rozpatrywanej strefie obsługi.

Zatem, w celu rozwiązania naszego zadania wystarczy wyznaczyć prawdopodobieństwo odmowy obsługi w rozpatrywanym systemie masowej obsługi. Rozwiązanie to będzie możliwe, gdy rozpatrzemy jednorodny proces Markowa z przeliczalną ilością stanów, w którym każdy stan odpowiada określonemu stanowi interesującego nas systemu obsługi.

Oznaczmy przez E_{ij} taki stan jednorodnego procesu Markowa, który odpowiada takiemu stanowi systemu obsługi, kiedy znajduje się w nim i zgłoszeń, a j / $j = 1, 2, \dots, r$ / aparatów obsługi przerwało pracę.

Niech h oznacza nieskończenie mały przedział czasu. Wówczas w przedziale czasu $/t, t + h/$ w naszym procesie Markowa z prawdopodobieństwami większymi niż $O(h)^{1/}$ mogą nastąpić przejścia /przejście z jednego stanu w drugi będziemy oznaczać symbolem $\longrightarrow /$:

$$1/ \text{ z } E_{0,0}: \text{ albo } \longrightarrow E_{0,0}, \text{ albo } \longrightarrow E_{1,0}, \text{ albo } \longrightarrow E_{0,1} ;$$

$$2/ \text{ z } E_{0,j}: \text{ albo } \longrightarrow E_{0,j}, \text{ albo } \longrightarrow E_{1,j}, \text{ albo } \longrightarrow E_{0,j-1}, \\ \text{ albo } \longrightarrow E_{0,j+1} \quad /0 < j < r /;$$

$$3/ \text{ z } E_{0,r}: \text{ albo } \longrightarrow E_{0,r}, \text{ albo } \longrightarrow E_{1,r}, \text{ albo } \longrightarrow E_{0,r-1};$$

$$4/ \text{ z } E_{ij}: \text{ albo } \longrightarrow E_{ij}, \text{ albo } \longrightarrow E_{i-1,j}, \text{ albo } \longrightarrow E_{i+1,j}, \\ \text{ albo } \longrightarrow E_{i,j-1}, \text{ albo } \longrightarrow E_{i,j+1} \quad /0 < j < r, 0 < i < r-j/;$$

$$5/ \text{ z } E_{r-j+s,j}: \text{ albo } \longrightarrow E_{r-j+s,j}, \text{ albo } \longrightarrow E_{r-j+s-1,j}, \\ \text{ albo } \longrightarrow E_{r-j+s+1,j}, \text{ albo } \longrightarrow E_{r-j+s,j-1}, \\ \text{ albo } \longrightarrow E_{r-j+s,j+1} \quad /s = 1, 2, \dots; 0 < j < r/;$$

$$6/ \text{ z } E_{s,r}: \text{ albo } \longrightarrow E_{s,r}, \text{ albo } \longrightarrow E_{s-1,r}, \text{ albo } \longrightarrow E_{s+1,r}, \\ \text{ albo } \longrightarrow E_{s,r-1} \quad /s = 1, 2, \dots/;$$

1/ $O(h)$ - nieskończenie mała wyższego rzędu niż h - Przyp. autora

- 7/ z $E_{i,0}$: albo $\rightarrow E_{i,0}$, albo $\rightarrow E_{i,1}$, albo $\rightarrow E_{i+1,0}$,
 albo $\rightarrow E_{i-1,0}$ / $0 < i < r$;
- 8/ z $E_{r+s,0}$: albo $\rightarrow E_{r+s,0}$, albo $\rightarrow E_{r+s,1}$, albo $\rightarrow E_{r+s+1,0}$,
 albo $\rightarrow E_{r+s-1,0}$ / $s = 1, 2, \dots$;
- 9/ z $E_{r,0}$: albo $\rightarrow E_{r,0}$, albo $\rightarrow E_{r,1}$, albo $\rightarrow E_{r+1,0}$,
 albo $\rightarrow E_{r-1,0}$

TABLICA 4.1

Zmiana stanu	Przedziały zmiennosci	Prawdopodobierstwo przejścia
$E_{i,j} \rightarrow E_{i,j}$	$0 \leq i \leq r-j$; $0 \leq j < r$	$1 - \lambda h - (r-j) \alpha h - j \beta h - i \mu h$
$E_{i,j} \rightarrow E_{i,j}$	$i > r-j$; $0 \leq j \leq r$	$1 - \lambda h - (r-j) \mu h -$ $-(r-j) \alpha h - j \beta h - (i-r+j) \nu h$
$E_{i,j} \rightarrow E_{i+1,j}$	$i \geq 0$; $0 \leq j < r$	λh
$E_{i,j} \rightarrow E_{i-1,j}$	$0 < i \leq r-j$; $0 \leq j < r$	$i \mu h$
$E_{i,j} \rightarrow E_{i-1,j}$	$i > r-j$; $0 \leq j \leq r$	$(r-j) \mu h + (i-r+j) \nu h$
$E_{i,j} \rightarrow E_{i,j+1}$	$i \geq 0$; $0 \leq j < r$	$(r-j) \alpha h$
$E_{i,j} \rightarrow E_{i,j-1}$	$i \geq 0$; $0 < j \leq r$	$j \beta h$
$E_{i,r} \rightarrow E_{i,r}$	$i \geq 0$	$1 - \lambda h - r \beta h - i \nu h$

Tablica prawdopodobnych zmian stanów walki

Ponieważ $F/t/$, $G/t/$, $H/t/$ i $\Psi/t/$ są rozkładami wykładniczymi, a strumień zgłoszeń przybywających do systemu - strumieniem najprostszym, prawdopodobieństwo przejścia z jednego stanu rozpatrywanego procesu Markowa do drugiego stanu można zapisać tak, jak to pokazano w tabelicy 4.1.

Oznaczmy przez $P_{ij}/t/$ prawdopodobieństwo tego, że w chwili t w systemie obsługi znajduje się i zgłoszeń, a j aparatów przerwało pracę. Niech $0 < j < r$, $i < r - j$ oraz $s = 1, 2, \dots$. Wówczas dla rozpatrywanego systemu można napisać następujący układ równań różniczkowych:

1. $p_{0,0}(t+h) = p_{0,0}(t) (1 - \lambda h - r\alpha h) + p_{1,0}(t) \mu h + p_{0,1}(t) \beta h + O(h),$
2. $p_{0,j}(t+h) = p_{0,j}(t) [1 - \lambda h - (r-j)\alpha h - j\beta h] + p_{1,j}(t) \mu h + p_{0,j-1}(t) (r-j+1)\alpha h + p_{0,j+1}(t) (j+1)\beta h + O(h),$
3. $p_{0,r}(t+h) = p_{0,r}(t) (1 - \lambda h - r\beta h) + p_{1,r}(t) \nu h + p_{0,r-1}(t) \alpha h + O(h),$
4. $p_{i,j}(t+h) = p_{i,j}(t) [1 - \lambda h - i\mu h - (r-j)\alpha h - j\beta h] + p_{i-1,j}(t) \lambda h + p_{i+1,j}(t) (i+1)\mu h + p_{i,j-1}(t) (r-j+1)\alpha h + p_{i,j+1}(t) (j+1)\beta h + O(h),$
5. $p_{r-j+s,j}(t+h) = p_{r-j+s,j}(t) [1 - \lambda h - (r-j)\mu h - (r-j)\alpha h - j\beta h - s\nu h] + p_{r-j+s,j+1}(t) (r-j+1)\alpha h + p_{r-j+s,j-1}(t) (j+1)\beta h + p_{r-j+s-1,j}(t) \lambda h + p_{r-j+s+1,j}(t) [(r-j)\mu h + (s-1)\nu h] + O(h),$
6. $p_{s,r}(t+h) = p_{s,r}(t) (1 - \lambda h - r\beta h - s\nu h) + \tilde{p}_{s-1,r}(t) \lambda h + p_{s+1,r}(t) (s+1)\nu h + p_{s,r-1}(t) \alpha h + O(h),$
7. $p_{i,0}(t+h) = p_{i,0}(t) (1 - \lambda h - i\mu h - r\alpha h) + p_{i,1}(t) \beta h + p_{i+1,0}(t) (i+1)\mu h + p_{i-1,0}(t) \lambda h + O(h),$
8. $p_{r+s,0}(t+h) = p_{r+s,0}(t) (1 - \lambda h - s\nu h - r\mu h - r\alpha h) + p_{r+s+1,0}(t) [(s+1)\nu h + r\mu h] + p_{r+s-1,0}(t) \lambda h + p_{r+s,1}(t) \beta h + O(h),$
9. $p_{r,0}(t+h) = p_{r,0}(t) (1 - \lambda h - r\mu h - r\alpha h) + p_{r+1,0}(t) (\nu h + r\mu h) + p_{r,1}(t) \beta h + p_{r-1,0}(t) \lambda h + O(h).$

Dzieląc prawą i lewą stronę każdego z tych równań różniczkowych przez h przy h dążącym do zera otrzymujemy następujący układ równań różniczkowych:

1. $p'_{0,0}(t) = -p_{0,0}(t)(\lambda + r\alpha) + p_{1,0}(t)\mu + p_{0,1}(t)\beta,$
2. $p'_{0,j}(t) = -p_{0,j}(t)[\lambda + (r-j)\alpha + j\beta] + p_{1,j}(t)\mu +$
 $+ p_{0,j-1}(t)(r-j+1)\alpha + p_{0,j+1}(t)(j+1)\beta,$
3. $p'_{0,r}(t) = -p_{0,r}(t)(\lambda + r\beta) + p_{1,r}(t)v + p_{0,r-1}(t)\alpha,$
4. $p'_{i,j}(t) = -p_{i,j}(t)[\lambda + i\mu + (r-j)\alpha + j\beta] + p_{i-1,j}(t)\lambda +$
 $+ p_{i+1,j}(t)(i+1)\mu + p_{i,j-1}(t)(r-j+1)\alpha +$
 $+ p_{i,j+1}(t)(j+1)\beta,$
5. $p'_{r-j+s,j}(t) = -p_{r-j+s,j}(t)[\lambda + (r-j)\mu + (r-j)\alpha +$
 $+ j\beta + sv] + p_{r-j+s-1,j}(t)\lambda + p_{r-j+s+1,j}(t)[(r-j)\mu +$
 $+ (s+1)v] + p_{r-j+s,j+1}(t)(j+1)\beta +$
 $+ p_{r-j+s,j-1}(t)(r-j+1)\alpha,$
6. $p'_{s,r}(t) = -p_{s,r}(t)(\lambda + r\beta + sv) + p_{s-1,r}(t)\lambda +$
 $+ p_{s+1,r}(t)(s+1)v + p_{s,r-1}(t)\alpha,$
7. $p'_{i,0}(t) = -p_{i,0}(t)(\lambda + i\mu + r\alpha) + p_{i,1}(t)\beta +$
 $+ p_{i+1,0}(t)(i+1)\mu + p_{i-1,0}(t)\lambda,$
8. $p'_{r+s,0}(t) = -p_{r+s,0}(t)(\lambda + sv + r\mu + r\alpha) +$
 $+ p_{r+s,1}(t)\beta + p_{r+s+1,0}(t)[(s+1)v + r\mu] + p_{r+s-1,0}(t)\lambda,$
9. $p'_{r,0}(t) = -p_{r,0}(t)(\lambda + r\mu + r\alpha) + p_{r,1}(t)\beta +$
 $+ p_{r+1,0}(t)(v + r\mu) + p_{r-1,0}(t)\lambda.$

Wprowadzimy oznaczenie:

$$P_{ij} = \lim_{t \rightarrow \infty} p_{ij}(t) / i > 0, 0 \leq j \leq r / \quad /4.4/$$

Tak więc, dla ustalonego stanu procesu obsługi w rozpatrywanym systemie możemy układ równań różniczkowych zastąpić następującym układem liniowych równań algebraicznych:

1. $-p_{0,0}(\lambda + r\alpha) + p_{1,0}\mu + p_{0,1}\beta = 0,$
2. $-p_{0,j}[\lambda + (r-j)\alpha + j\beta] + p_{1,j}\mu + p_{0,j-1}(r-j+1)\alpha +$
 $+ p_{0,j+1}(j+1)\beta = 0,$
3. $-p_{0,r}(\lambda + r\beta) + p_{1,r}v + p_{0,r-1}\alpha = 0,$

4. $- p_{i,j}[\lambda + i\mu + (r-j)\alpha + j\beta] + p_{i-1,j}\lambda + p_{i+1,j}(i+1)\mu + p_{i,j-1}(r-j+1)\alpha + p_{i,j+1}(j+1)\beta = 0,$
5. $- p_{r-j+s,j}[\lambda + (r-j)\mu + (r-j)\alpha + j\beta + s\nu] + p_{r-j+s-1,j}\lambda + p_{r-j+s+1,j}[(r-j)\mu + (s+1)\nu] + p_{r-j+s,j-1}(r-j+1)\alpha + p_{r-j+s,j+1}(j+1)\beta = 0,$
6. $- p_{s,r}(\lambda + r\beta + s\nu) + p_{s-1,r}\lambda + p_{s+1,r}(s+1)\nu + p_{s,r-1}\alpha = 0,$
7. $- p_{i,0}(\lambda + i\mu + r\alpha) + p_{i,1}\beta + p_{i+1,0}(i+1)\mu + p_{i-1,0}\lambda = 0,$
8. $- p_{r+s,0}(\lambda + s\nu + r\mu + r\alpha) + p_{r+s,1}\beta + p_{r+s+1,0}[(s+1)\nu + r\mu] + p_{r+s-1,0}\lambda = 0,$
9. $- p_{r,0}(\lambda + r\mu + r\alpha) + p_{r,1}\beta + p_{r+1,0}(\nu + r\mu) + p_{r-1,0}\lambda = 0.$

Rozwiązując oddzielnie otrzymane układy równań różniczkowych i algebraicznych łącznie z odpowiadającymi im oczywistymi warunkami

$$\sum_{i=0}^{\infty} \sum_{j=0}^r p_{ij}/t/ = 1 \quad \text{i} \quad \sum_{i=0}^{\infty} \sum_{j=0}^r p_{ij} = 1 \quad /4.5/$$

można wyznaczyć prawdopodobieństwa $p_{ij}/t/$ i p_{ij} dla wszystkich wartości $j = 0, 1, \dots, r$ oraz $i = 0, 1, \dots$

Otrzymane układy zawierają nieskończoną ilość równań; można z nich jednak wydzielić takie podukłady zawierające minimalną ilość równań, których rozwiązanie z żadaną dokładnością będzie pokrywać się z rozwiązaniem odpowiadających im układów.

Osiągnięcie np. dokładności rozwiązania 0,05 przy $r = 10$ średnio wymaga rozwiązania podukładu składającego się z 200-250 równań.

Rozwiązanie tak wielkiej liczby równań zużywa dużo czasu maszynowego, dlatego też możliwość zastosowania takiej metody "wyjmowania równań" w praktyce nie zawsze będzie racjonalnie uzasadniona.

Dla naszych potrzeb ważnym jest znalezienie rozwiązania układu równań dla ustalonego stanu procesu obsługi, tzn. wyznaczyć prawdopodobieństwa p_{ij} / $i = 0, 1, 2, \dots$; $j = 0, 1, 2, \dots, r$ /
Przyjmijmy, że:

$$p_{ij} = p_i \prod_j \quad /4,6/$$

Oznacza to, że dla ustalonego stanu procesu obsługi dwa zdarzenia: 1 - znajdowanie się w systemie obsługi i zgłoszeń, 2 - występowanie wśród r aparatów obsługi j aparatów, które przerwały pracę, są zdarzeniami niezależnymi.

Zauważmy, że to założenie dodatkowe w ogólnym przypadku nie jest ściśle spełnione. W dalszym ciągu wykazemy, w jakim stopniu wpływa ono na wyznaczenie prawdopodobieństw

$$p_i = \sum_{j=1}^r p_{ij}$$

Uwzględniając przyjęte założenie, układ równań algebraicznych zapiszemy w postaci następującego układu:

$$\begin{aligned} 1. \quad & -\lambda p_0 + (p_1 - p_r)\mu + p_1\nu = 0, \\ 2. \quad & -\lambda p_i - i\mu p_i \sum_{j=0}^{r-i} \pi_j - \nu p_i \sum_{j=r-i+1}^r (r-j)\pi_j - \\ & - \nu p_i \sum_{j=r-i+1}^r (j-r+i)\pi_j + \lambda p_{i-1} + \mu(i+1)p_{i+1} \sum_{j=0}^{r-i-1} \pi_j + \\ & + \nu p_{i+1} \sum_{j=r-i}^r \pi_j (r-j) + \nu p_{i+1} \sum_{j=r-i}^r \pi_j (j-r+i+1) = 0, \\ 3. \quad & -\lambda p_{r+s} - \mu p_{r+s} \sum_{j=0}^r (r-j)\pi_j - \nu p_{r+s} \sum_{j=0}^r (s+j)\pi_j + \\ & + \lambda p_{r+s-1} + \mu p_{r+s+1} \sum_{j=0}^r (r-j)\pi_j + \nu p_{r+s+1} \sum_{j=0}^r (j+s+1)\pi_j = 0. \end{aligned}$$

Wprowadzimy następujące oznaczenia:

$$i = 1, 2, \dots, r$$

$$z_i = \lambda p_{i-1} - i\mu p_i \sum_{j=0}^{r-i} \pi_j - \nu p_i \sum_{j=r-i+1}^r (r-j) \pi_j - \\ - \nu p_i \sum_{j=r-i+1}^r \pi_j (j-r+i);$$

dla $s = 1, 2, \dots$

$$z_{r+s} = \lambda p_{r+s-1} - \mu p_{r+s} \sum_{j=0}^r \pi_j (r-j) - \nu p_{r+s} \sum_{j=0}^r (j+s) \pi_j.$$

Przyjęte oznaczenia pozwolą zapisać ostatni układ równań algebraicznych następująco:

1. $z_1 = 0,$
2. $z_i - z_{i+1} = 0,$
3. $z_{r+s} - z_{r+s+1} = 0.$

skąd wynika

$$p_i = \frac{\lambda p_{i-1}}{i\mu \sum_{j=0}^{r-i} \pi_j + \mu \sum_{j=r-i+1}^r \pi_j (r-j) + \nu \sum_{j=r-i+1}^r \pi_j (j-r+i)} \quad (4.7)$$

$$p_{r+s} = \frac{\lambda p_{r+s-1}}{\mu \sum_{j=0}^r \pi_j (r-j) + \nu \sum_{j=0}^r \pi_j (s+j)}$$

lub

$$p_i = \frac{\lambda^i p_0}{\prod_{k=1}^i \left\{ k\mu \sum_{j=0}^{r-k} \pi_j + \mu \sum_{j=r-k+1}^r \pi_j (r-j) + \nu \sum_{j=r-k+1}^r \pi_j (k+j-r) \right\}} \quad (4.8)$$

$$p_{r+s} = \frac{p_r \lambda^s}{\prod_{\xi=1}^s \left\{ \mu \sum_{j=0}^r \pi_j (r-j) + \nu \sum_{j=0}^r \pi_j (\xi+j) \right\}}$$

Wyznaczając prawdopodobieństwa p_0 można posłużyć się następującym, oczywistym równaniem:

$$\sum_{i=1}^{\infty} p_i = 1.$$

Zatem

$$p_0 = \frac{1}{1 + \sum_{i=1}^r \varphi_i + \varphi_r \sum_{s=1}^{\infty} \psi_s},$$

(4.9)

gdzie

$$\varphi_i = \frac{\lambda^i}{\prod_{k=1}^i \left\{ k\mu \sum_{j=0}^{r-k} \pi_j + \mu \sum_{j=r-k+1}^r \pi_j (r-j) + \nu \sum_{j=r-k+1}^r \pi_j (k+j-r) \right\}}$$

$$\psi_s = \frac{\lambda^s}{\prod_{\xi=1}^s \left\{ \mu \sum_{j=0}^r \pi_j (r-j) + \nu \sum_{j=0}^r \pi_j (\xi+j) \right\}}.$$

Prawdopodobieństwo $\bar{\pi}_j$ / $j = 1, 2, \dots, r$ / oznacza prawdopodobieństwo tego, że j spośród r aparatów obsługi nie będzie czynne. W przypadku, gdy możliwe jest ponowne włączenie do pracy nieczynnych aparatów i znana jest wartość parametru β , w celu wyznaczenia prawdopodobieństw $\bar{\pi}_j$ można wykorzystać wzór podany w pracy [7], odpowiednio do którego

$$\bar{\pi}_j = \frac{\left(\frac{\alpha}{\beta}\right)^j}{(r-j)! \sum_{h=0}^r \frac{1}{(r-h)!} \left(\frac{\alpha}{\beta}\right)^h}$$

Ogólnie można powiedzieć, że w czasie walki sprzęt bojowy nie podlega remontowi i wymianie na nowy, tzn. $\beta = 0$. Przy $\beta = 0$ i $\alpha = 0$ rozpatrywany system /a dokładniej mówiąc, odpowiadający mu proces Markowa/ nie będzie stacjonarny i wówczas wartości p_i / $i = 0, 1, \dots$ /, uzyskane dla ustalonego stanu procesu obsługi będą nieprawdziwe. W celu uniknięcia naruszenia

stacjonarności systemu obsługi przy $\beta = 0$, za prawdopodobieństwo π_j będziemy przyjmować średnią wartość $\bar{\pi}_j/t/$ prawdopodobieństwa tego, że przy $\beta = 0$ i $C \neq 0$ w chwili t j aparatów przerwało pracę. Jeżeli przez T oznaczymy okres walki, to

$$\bar{\pi}_j = \frac{1}{T} \int_0^T \pi_j/t/ dt. \quad /4.10/$$

Prawdopodobieństwo $\pi_j/t/$ wyznacza się z następującego układu równań różniczkowych:

1. $\pi_0'/t/ = -r\alpha\pi_0/t/$,
2. $\pi_j'/t/ = -/r-j/\alpha\pi_j/t/ + /r-j+1/\alpha\pi_{j-1}/t/$
 $/0 < j \leq r/$,

których wyprowadzenie ze względu na widoczną ich prostotę tutaj opuszczamy.

Rozwiązując ten układ równań różniczkowych znajdujemy

$$\pi_j/t/ = c_r^j e^{-/r-j/\alpha t} /1 - e^{-\alpha t/j}$$

Wstawiając otrzymane wyrażenie na prawdopodobieństwo $\pi_j/t/$ do wzoru /4.10/ i całkując otrzymujemy ostatecznie

$$\bar{\pi}_j = \frac{1}{\alpha T} c_r^j \sum_{k=0}^j \frac{(-1)^k}{r-j+k} c_j^k \left(1 - e^{-\alpha(r-j+k)T} \right) \quad /4.11/$$

Obecnie dysponujemy wszystkimi danymi niezbędnymi do wyznaczenia prawdopodobieństwa odmowy obsługi.

Wprowadzimy następujące oznaczenia:

P_{0m} - prawdopodobieństwo odmowy obsługi w rozpatrywanym systemie obsługi;

$M/s/$ - średnia liczba zgłoszeń znajdujących się w systemie powyżej r zgłoszeń;

$M/k/$ - średnia długość kolejki, gdy w systemie znajduje się $k = 0, 1, \dots, r$ zgłoszeń i $j = 0, 1, \dots, r$ aparatów obsługi przerwało pracę.

Wartości $M/s/$ i $M/k/$ znajduje się z oczywistych równości:

$$M/s/ = \sum_{s=1}^{\infty} s p_{r+s}$$

$$M/k/ = \sum_{k=1}^r p_k \sum_{j=r-k+1}^r (k+j-r) \prod_j$$

Z określenia prawdopodobieństwa odmowy obsługi wynika, że

$$Podm = \frac{\nu [M/s/ + m(k)]}{\lambda} \quad /4.12/$$

Podstawiając wartości $M/s/$ i $M/k/$ do wzoru /4.12/ ostatecznie znajdujemy

$$Podm = \frac{\left[\sum_{s=1}^{\infty} s p_{r+s} + \sum_{k=1}^r p_k \sum_{j=r-k+1}^r (k+j-r) \prod_j \right]}{\lambda} \quad /4.13/$$

Wyznaczając prawdopodobieństwa $p_k \leq r$ i P_{r+s} założyliśmy, że $p_{ij} = p_i \prod_j$ /4,6/. Oczywistym jest, że w ogólnym przypadku założenie to nie będzie ściśle spełnione.

W celu zbadania jego wpływu na dokładność wyznaczenia prawdopodobieństw p_k i P_{r+s} , dla $r = 1, 2$ i wszystkich możliwych wartości parametrów $\lambda, \mu, \nu, \alpha$ i β występujących w matematycznym modelu walki czołgów ze środkami OPFanc obliczono wartości p_k

i p_{r+s} przy pomocy metody "wyjmowania równań" i wzorów /4.7/ oraz /4.8/. Porównanie odpowiednich wartości p_k i p_{r+s} obliczonych obydwoma sposobami wykazało, że bezwzględna różnica nie przekracza 0,0001. Oznacza to więc, że wzory /4.7/ i /4.8/ mogą być uznane za praktycznie ściśle przy wykorzystaniu ich w matematycznym modelu walki czołgów.

Obecnie przystąpimy do wyznaczenia prawdopodobieństwa odmowy obsługi dla strumieni Palma^{1/} wchodzących do rozpatrywanego wyżej systemu obsługi.

Wprowadzimy następujące oznaczenia:

- Q_i - prawdopodobieństwo odmowy obsługi w i -tej strefie obsługi;
- $P_i \text{ odm}$ - prawdopodobieństwo odmowy obsługi w i -tej strefie obsługi przy założeniu, że do tej strefy wchodzi najprostszy strumień zgłoszeń z intensywnością równą intensywności strumienia Palma wchodzącego do tejże strefy;
- $\Pi_j/h/$ - prawdopodobieństwo odmowy obsługi przez j - ty aparat obsługi w zadaniu Palma, jeżeli do tego aparatu wchodzi strumień zgłoszeń z intensywnością h .

Niech na j -ty aparat obsługi w zadaniu Palma i do i -tej strefy przybliżającego systemu obsługi wchodzi strumienie posiadające jednakową intensywność λ_i . Z dodatku 2 wynika, że przy obsługiwaniu strumieni Palma średni czas przestoju aparatów obsługi będzie tym większy, im więcej jest przerw w strumieniu wchodzącym i im są one dłuższe. Stąd wynika, że

$$Q_i \leq P_i \text{ odm} + \Pi_{j+r_i-1} /h_i/ - \Pi_{r_i} /h_i/ \quad /4.14/$$

gdzie $h_i = \lambda_i \mu$ r_i - liczba aparatów obsługi w strefie obsługi o numerze i .

1/ Patrz dodatek 2. - Przyp. tkum.

Rzeczywiście. Według naszych założeń, strumienie wchodzące do strefy i oraz aparatu j w zadaniu Palma mają jednakową intensywność i w konsekwencji jednakową liczbę przerw i ich rozmiary. Ponieważ jednak przybliżający system obsługi jest systemem z oczekiwaniem, zaś w zadaniu Palma - ze stratami, zatem słuszność nierówności /4.14/ jest widoczna.

Prawą stronę nierówności /4.14/ można przyjąć za oszacowanie Θ_i z nadmiarem. Za oszacowanie Θ_i z niedomiarem można przyjąć prawdopodobieństwo p_i odm. W matematycznych modelach procesów walki, a w szczególności w matematycznych modelach walki czołgów, zależnie od celu badań, można stosować bądź górne, bądź dolne oszacowanie. I tak na przykład, gdy model jest wykorzystywany w celu oceny efektywności obrony przeciwpancernej, wówczas można przyjąć górne oszacowanie wartości Θ_i . Jeżeli natomiast zadanie dotyczy ustalenia ilości czołgów koniecznej do pokonania określonej obrony przeciwpancernej lub polega na określeniu efektywności czołgów w stosunku do aparatów obsługi /środków OPPanc - przyp.tłum./, to zamiast wartości Θ_i można przyjąć jej oszacowanie z dołu.

4.3. Metody wyznaczania podstawowych parametrów procesu walki.

Dokładność modelowania procesu walki zależy w istotnym stopniu od prawidłowego wyboru metody wyznaczania każdego z podstawowych parametrów tego procesu. Im dokładniej będą wyznaczone podstawowe parametry procesu walki, tym bardziej adekwatny będzie model w stosunku do opisywanego procesu.

Rozpatrzmy metody wyznaczania podstawowych parametrów modelowanej walki środków OPPanc z czołgami.

Intensywność strumienia wykrytych celów λ . Dla strumienia najprostszego i strumieni typu Palma intensywność wyznacza się jako granicę:

$$\lambda = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{F/t}{t}, \quad /4.15/$$

gdzie F/t - prawdopodobieństwo przybycia do systemu /do strefy/ obsługi co najmniej jednego zgłoszenia w czasie t .

Rozpatrując formalizację procesów walki w postaci zadań teorii masowej obsługi konieczne jest prawidłowe ujęcie procesu wykrywania celów przez aparaty obsługi. Istotnie, niezależnie od położenia i odległości celu w stosunku do obsługującego go aparatu, dotąd nie można mówić o pojawieniu się zgłoszenia, dopóki cel nie został wykryty. Wynika z tego, że we wzorze /4.15/ zamiast prawdopodobieństwa przybycia do strefy obsługi w czasie t co najmniej jednego celu można przyjmować prawdopodobieństwo wykrycia w tej strefie w ciągu czasu t co najmniej jednego celu.

Zdarzenie wykrycia celu na zadanym obszarze /zadanej rubieży/ jest zdarzeniem złożonym. Składa się ono z kolejnych zdarzeń wykrycia miejsca znajdowania się celu w zadanym obszarze w warunkach bezpośredniej widoczności między środkiem wykrywającym a celem oraz wykrycia celu pod warunkiem znajdowania się w tym miejscu co

najmniej jednego celu.

Oznaczmy przez φ_i prawdopodobieństwo pierwszego z tych zdarzeń dla środka wykrywającego o numerze i , przez f_i/t - prawdopodobieństwo drugiego zdarzenia, a przez ψ_i - prawdopodobieństwo wystąpienia bezpośredniej, widoczności pomiędzy środkami wykrywającymi a celami.

Jeżeli wiadomo, że jest N celów równomiernie rozłożonych na obszarze poszukiwania, to oczywiście:

$$\varphi_i = 1 - \left(1 - \frac{1}{N}\right)^N$$

Możliwy jest przypadek, gdy dokładna liczba celów na całym obszarze poszukiwania nie jest znana, jednak znana jest ich średnia ilość przypadająca na jednostkę powierzchni tego obszaru. W tym przypadku, na podstawie rozważań zawartych w paragrafie 4.1 można przyjąć, że rozkład celów na obszarze poszukiwania będzie rozkładem Poisson'a. Zatem

$$\varphi_i = 1 - e^{-\omega s}$$

gdzie ω - gęstość celów na obszarze poszukiwania, s - całkowita powierzchnia tego obszaru.

Prawdopodobieństwo f_i/t zależy od takich czynników, jak rodzaj środka wykrywającego, rodzaj celu, jego rozmiary i stan, w którym się on znajduje w czasie prowadzenia poszukiwania, rodzaj terenu, warunki meteorologiczne i inne. Dlatego też prawdopodobieństwo f_i/t może być wyznaczone jedynie empirycznie w warunkach poligonowych.

Prawdopodobieństwo ψ_i zależy od rzeźby terenu w rejonie działań bojowych.

Niech $F_r/t/$ oznacza prawdopodobieństwo wykrycia celu na zadanym obszarze w czasie t przy pomocy r środków wykrywających.

Wówczas

$$F_r/t/ = 1 - \prod_{i=1}^r \left[1 - \psi_i \varphi_i f_i/t/ \right]$$

oraz

$$\lambda = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{F_r/t/}{t} = \left. \frac{dF_r/t/}{dt} \right|_{t=0} \quad /4.16/$$

W przypadku, gdy środki wykrywania są jednorodne i jednakowo oddalone od celów, wówczas $\psi_i = \psi$; $\varphi_i = \varphi$ oraz $f_i/t/ = f/t/$.

Zatem

$$F_r/t/ = 1 - \left[1 - \psi \varphi f/t/ \right]^r$$

$$\lambda = r \left[1 - \psi \varphi f/t/ \right]^{r-1} \psi \varphi f'/t/ \Big|_{t=0}$$

Intensywność obsługi wykrytych celów μ ^{1/}. Wprowadzimy

następujące oznaczenia:

n_1 - wartość oczekiwana liczby strzałów z jednego środka ogniowego koniecznych do uzyskania jednego trafienia;

n_2 - wartość oczekiwana liczby trafień niezbędnych do rażenia jednego celu;

Δ - szybkostrzelność środków ogniowych strzałów/min.

Stosując je, intensywność obsługi możemy zapisać w następującej postaci

$$\mu = \frac{\Delta}{n_1 n_2} \quad /4.17/$$

Zakłada się, że dla każdego środka ogniowego wartość Δ jest znana. Jako wartość n_1 można przyjąć wielkość $n + n_0$ / $0 \leq n_0 < 1$;

$n = 0, 1, \dots$ /, spełniającą następujące równanie:

1/ W oryginale: Parametr obsłużiwania obnażonych celej.
Przyp.tłum.

$$\max_{n=0,1,\dots} \sum_{j=0}^n p_j/D/ + n_0 p_{n+1}/D/ = 1$$

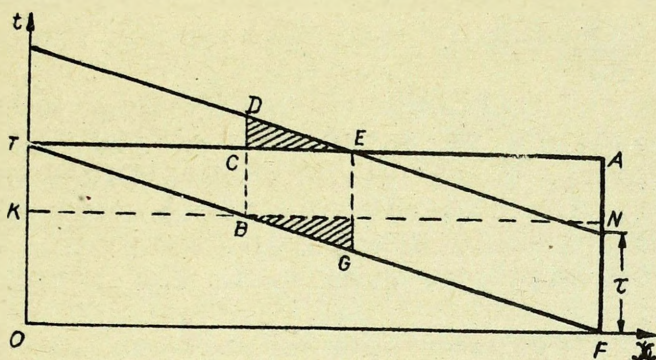
gdzie $p_j/D/$ / $j = 0, 1, \dots, n + 1$ / oznacza prawdopodobieństwo trafienia w cel strzałem j na odległość D .

Wielkość n_2 wyznacza się dla każdego środka ogniowego w zależności od rodzaju celu i kierunku jego ruchu.

Parametr oczekiwania na obsługę ν . Jako podstawę metody wyznaczania parametru ν dla każdej strefy i przyjmujemy następujący warunek: średni wynik obsługiwanie czołgów w strefie i przybliżającego systemu obsługi powinien być równy rzeczywistemu wynikowi rażenia czołgów w przedziale czasu $[t_{i+1}, t_i]$. Będziemy zakładać, iż w rzeczywistym procesie obsługi, prawdopodobieństwo przyjęcia do obsługi jest jednakowe dla dowolnego, wykrytego czołgu, niezależnie od jego położenia w strefie. Nie trudno wykazać, że założenie to nie jest silne - i na ogół w praktyce będzie spełnione.

Na rys. 4.1. strefę obsługi przedstawiono w układzie współrzędnych tOx w postaci prostokąta $OTAF$, gdzie T oznacza czas przebywania czołgów w tej strefie.

Ponieważ zgodnie z założeniem strumień wykrytych czołgów posiada cechy stacjonarności, dlatego rzuty chwil przyjęcia do obsługi wykrytych czołgów znajdujących się w strefie obsługi na przekątną TF odzwierciedla zbiór punktów rozłożonych wzdłuż całej długości TF przeciętnie z jednakową gęstością.



Rys.4.1. Schemat obsługi czołgów na rubieży obrony

Niech prosta KM, równoległa do osi Ox, obrazuje rubież opuszczania strefy obsługi przez czołgi, które nie były wcześniej przyjęte do obsługi. Rozpatrzmy trójkąty TBC i DCE. Na podstawie wcześniejszych rozważań powierzchnię pierwszego trójkąta można przyjąć jako wielkość proporcjonalną do łącznego czasu obsługi w strefie OTAF czołgów, których rzuty na przekątną TF są punktami odcinka TB, a powierzchnię drugiego trójkąta - jako wielkość proporcjonalną /przy tym samym współczynniku proporcjonalności/ do łącznego czasu brakującego do zakończenia obsługi czołgów w strefie OTAF, których rzuty na przekątną TF są punktami odcinka BG.

Następnie, zależność czasu oczekiwania $t_{ocz} = \frac{1}{\gamma}$ można zapisać w postaci następującego równania:

$$S/TBC/ - S/CAD/ = 0, \quad /4.18/$$

gdzie S/x/ oznacza powierzchnię figury x.

Wprowadzimy następujące oznaczenia:

z - odległość BC;

τ - odległość FN / $\tau = \frac{1}{\mu}$ /;

TC/CE/ - odległość TC/CE/.

Przy pomocy tych oznaczeń równość /4.18/ można zapisać następująco:

$$z \cdot \overline{TC} = / \tau - z / CE.$$

Stąd, wykorzystując podobieństwo odpowiednich trójkątów znajdujemy

$$t_{ocz} = T - \frac{1}{2\mu} \quad /4.19/$$

Wartość t_{ocz} obliczona ze wzoru /4.19/ jest słuszna jedynie dla tych stref obsługi, dla których spełniona jest nierówność $T \geq \tau$. Widać to bezpośrednio na rys. 4.1. Dla stref obsługi, dla których $T < \tau$, w analogiczny sposób otrzymujemy wartość t_{ocz} równą wyrażeniu

$$t_{ocz} = \frac{T^2 \mu}{2} \quad /4.20/$$

W ten sposób

$$\nu = \begin{cases} \frac{2\mu}{2T\mu - 1}, & \text{jeżeli } T \geq \frac{1}{\mu}, \\ \frac{2}{T^2 \mu}, & \text{jeżeli } T \leq \frac{1}{\mu}. \end{cases} \quad /4.21/$$

Zauważmy, że w każdej strefie obsługi za T przyjmuje się czas trwania całej walki w tej strefie, a nie tylko czas niezbędny do wykrycia wszystkich celów.

Srednia ilość środków OPPanc rażonych przez czołgi w ciągu jednostki czasu. Oznaczmy przez a_i przeciętną ilość środków OPPanc rażonych przez czołgi w jednostce czasu w przedziale czasu $/t_{i+1}, t_i/$, tzn. w strefie obsługi o numerze i . Wartość a_i $/i = 1, 2, \dots/$ może być wyznaczona w oparciu o prawdopodobieństwa rażenia środków OPPanc przez czołgi według wzoru identycznego do /4.17/:

$$a_i = \frac{\widetilde{\Delta}_i}{\widetilde{n}_{1i} \widetilde{n}_{2i}} \quad /4.22/$$

w którym $\widetilde{\Delta}_i$ - oznacza szybkostrzelność czołgów w przedziale czasu $/t_{i+1}, t_i/$;

\tilde{n}_{1i} - wartość oczekiwaną liczby strzałów z czołgów do środków OPPanc niezbędnej do uzyskania jednego trafienia w przedziale czasu $/t_{i+1}, t_i/$;

\tilde{n}_{2i} - wartość oczekiwaną liczby strafeń z czołgów do środków OPPanc niezbędnej do ich rażenia.

Jednak w praktyce, w celu wyznaczenia wartości a_i $/i \geq 2/$ częściej wykorzystuje się wyniki walki w $/i - 1/$ strefie, tzn. w przedziale czasu $/t_i, t_{i-1}/$.

Niech r_i oznacza liczbę będących w dyspozycji środków OPPanc do chwili rozpoczęcia obsługi czołgów w strefie i .

Wówczas

$$a_i = \frac{r_{i-1} - r_i}{t_i - t_{i-1}} \quad /4.23/$$

Liczba obsłużonych /rażonych/ czołgów w jednej strefie obsługi. Wprowadzimy następujące oznaczenia:

N_i - liczba czołgów znajdujących się w strefie i do chwili rozpoczęcia ich obsługi;

λ_i - średnia ilość czołgów wykrywanych w strefie i w ciągu jednostki czasu.

Wartość λ_i znajduje się ze wzoru /4.16/. W strefie obsługi i w czasie $T_i = t_{i+1} - t_i$ przeciętnie wykryje się

$$\lambda_i^* = \min \{ \lambda_i T_i, N_i \}$$

czołgów. Liczbę czołgów rażonych w strefie obsługi o numerze i znajduje się z następującego wyrażenia:

$$N_i - N_{i+1} = N_i - \lambda_i^* P_{odm}, \quad /4.24/$$

w którym P_{odm} oznacza prawdopodobieństwo odmowy obsługi w strefie i . Wartość tę wyznacza się ze wzoru /4.13/, gdy strumień czołgów wykrytych w tej strefie jest strumieniem najprostszym, lub też ze wzoru /4.14/ - gdy strumień wykrytych czołgów jest strumieniem Palma.

Przeciętna ilość aparatów obsługi /środków OPPanc/ rażonych przez czołgi w strefie i . Przeciętna ilość środków OPPanc rażonych przez czołgi w strefie i równa jest $r_i - r_{i+1}$.

W celu jej wyznaczenia można posłużyć się następującą proporcją nie wymagającą komentarza:

$$\frac{r_i - r_{i+1}}{\bar{\lambda}_i^* N_i \mu_i} = \frac{N_i - N_{i+1}}{\lambda_i^* r_i \mu_i} \quad /4.25/$$

w której $\bar{\lambda}_i^*$ - przeciętna liczba wykrytych przez czołgi środków OPPanc w czasie $T_i = t_{i+1} - t_i$.

Wartość $\bar{\lambda}_i^*$ wyznacza się tą samą metodą, którą wyznaczaliśmy wartość $\bar{\lambda}_i^*$; $\bar{\mu}_i / \mu_i$ - oznacza przeciętną liczbę środków OPPanc /czołgów/ rażonych przez jeden czołg /jeden środek OPPanc/ w przedziale czasu $[t_{i+1}, t_i]$. Wartości te znajduje się ze wzorów /4.22/ i /4.17/.

Z proporcji /4.25/ otrzymujemy:

$$r_i - r_{i+1} = \frac{\bar{\lambda}_i^*}{\lambda_i^*} \frac{N_i \mu_i}{r_i \mu_i} /N_i - N_{i+1}/ \quad /4.26/$$

Wyłożoną w tym rozdziale metodę obsługiwaną jednorodnego strumienia celów przez jednorodne środki rażenia można również wykorzystać do obsługi strumieni niejednorodnych, w których zgłoszenia będą stanowiły cele różnego rodzaju. W tym przypadku wystarczy, aby strumień wykrytych celów każdego rodzaju był także bądź

strumieniem najprostszym, bądź też typu Palma. Jeżeli ten warunek zostanie spełniony, to obsługę strumienia składającego się z celów różnego rodzaju prowadzi się następująco:

1. Wszystkie środki rażenia będące w dyspozycji do chwili rozpoczęcia obsługi w strefie i rozdziela się na strumienie składowe^{1/} w ten sposób, aby według przyjętego kryterium maksymizować efektywność ich użycia. Mogą przy tym być przyjęte następujące kryteria:

- a/ uzyskanie maksymalnej liczby rażonych czołgów dowolnie wybranego, jednego typu;
- b/ maksymalizacja liczby rażonych czołgów niezależnie od ich typu;
- c/ maksymalizacja liczby rażonych czołgów typu najgroźniejszego dla środków OPPanc, lub innych.

2. Rozgrywa się walkę między czołgami a środkami OPPanc oddzielnie dla każdego strumienia składowego i wydzielonych do jego obsługi środków rażenia.

1/ - tzn. strumienie poszczególnych rodzajów celów - Przyp.tłum.

MODELE STOCHASTYCZNE DZIAŁAŃ BOJOWYCH

Sens dowolnego modelu stochastycznego polega na tym, że badane przypadkowe zjawisko formalizuje się w postaci pewnego procesu matematycznego, który ogólnie ma charakter losowy.

Posługując się specjalnie opracowanymi algorytmami, najczęściej korzystając z elektronicznych maszyn cyfrowych, prowadzi się oddzielne realizacje tego losowego procesu.

Badając interesujący nas proces możemy wprowadzać wystarczająco dużą ilość czynników losowych. Możliwość ta wynika z tego, że każdorazowo, posługując się metodą statystycznego eksperymentu, stosując znany rozkład prawdopodobieństwa uzyskujemy konkretną realizację zdarzenia losowego. Nie zachodzi przy tym konieczność podania *explicite* ogólnego, sumarycznego rozkładu prawdopodobieństwa rządzącego ostatecznym wynikiem procesu, co przy występowaniu wielu czynników losowych praktycznie nie byłoby możliwe. Właśnie ta okoliczność decyduje o tym, że modele stochastyczne zajęły tak ważne miejsce w badaniu działań bojowych.

Modele stochastyczne, pozwalając w dostatecznie prosty sposób uzyskiwać oddzielne realizacje, praktycznie rzecz biorąc, dowolnych procesów losowych, jednocześnie wymagają poświęcenia dużej ilości czasu do wykonania pracochłonnych czynności związanych ze statystycznym opracowaniem wielkiej liczby realizacji badanego procesu w celu uzyskania niezbędnych przesłanek i wniosków. Biorąc pod rozwagę fakt, że dla złożonych procesów otrzymuje się skomplikowane modele wymagające znacznych nakładów pracy i czasu dla uzyskania dostatecznie dokładnych wyników, zarysowują się dwa podstawowe przypadki zastosowania tych modeli.

W pierwszym przypadku, modele stochastyczne stosuje się wówczas, gdy metoda statystycznego eksperymentu pozwala na uzyskanie wyników końcowych w sposób wyraźnie prostszy niż metody analityczne. W przypadku drugim, modele stochastyczne stosuje się wtedy, kiedy metody analityczne nie pozwalają na osiągnięcie celu badań.^{1/}

W dalszym ciągu będziemy rozpatrywać takie sytuacje i związane z nimi problemy matematyczne, które z reguły można traktować jako drugi z omówionych przypadków zastosowania modeli stochastycznych.

5.1. Sformułowanie problemu i formalizacja procesu bojowego

Formalnie rzecz biorąc, dowolna walka jest realnym procesem przebiegającym w czasie i w przestrzeni, charakteryzującym się występowaniem dwóch stron, których skład i liczebność zmieniają się wskutek ich wzajemnego oddziaływania na siebie.

Każda ze stron stara się zrealizować postawione przed nią zadanie, najczęściej przez zadanie przeciwnikowi odpowiednio dużych strat, przy możliwie małych stratach własnych. W skład każdej ze stron wchodzi szereg elementów - uczestników walki. W zależności od szczebla, na którym toczy się walka, jej elementami mogą być pojedynczy strzelcy, uzbrojenie strzeleckie, moździerze, czołgi i samoloty w jednych walkach, w innych zaś całe pododdziały lub oddziały.

Każdy taki element charakteryzuje się pewnym zbiorem zmiennych wielkości będących funkcjami czasu i określającymi charakter jego działania i położenie w przestrzeni. Konkretną wartość tych wielkości w pewnej chwili nazywamy stanem elementu w tej chwili.

^{1/} W ostatecznym przypadku, gdy celów nie można osiągnąć w czasie przeznaczonym na te badania. Przyp. autora.

Zmiany stanów elementów w czasie, zachodzące zgodnie z konkretnymi prawidłowościami walki, przedstawiają sobą istotę tej walki.

Walka jest procesem skończonym, charakteryzującym się określonym wynikiem. Z formalnego punktu widzenia, wynik walki można traktować jako zbiór stanów wszystkich elementów walki w pewnej chwili, po której nie zachodzą już zmiany stanów elementów.

Wychodząc z tych intuicyjnych rozważań można dać następujący matematyczny opis walki.

Dane są dwa skończone zbiory Q i U , gdzie

$$Q = \{q_1, q_2, \dots, q_n\} = \{q_i \quad /i = 1, 2, \dots, n/\};$$

$$U = \{U_1, U_2, \dots, U_m\} = \{U_j \quad /j = 1, 2, \dots, m/\};$$

określające skład jakościowy i ilościowy walczących stron.

Dla każdego elementu $q_i \in Q \quad /i = 1, 2, \dots, n/$ istnieje wielowymiarowa funkcja losowa

$$\xi_i /t/ = \xi [\xi_{i1} /t/; \xi_{i2} /t/; \dots; \xi_{ir/i} /t/]$$

dla $T_0 \leq t \leq T_1$, gdzie T_0 i T_1 odpowiednio oznaczają chwile rozpoczęcia i zakończenia walki. Losowe funkcje $\xi_{i1} /t/; \xi_{i2} /t/; \dots; \xi_{ir/i} /t/$ nazywają się parametrami elementu q_i ,

l - realizacją funkcji losowej $\xi \quad /t/$ określoną przez

$$\xi_i^l /t/ = \xi_i \left[\xi_{i1}^l /t/; \xi_{i2}^l /t/; \dots; \xi_{ir/i}^l /t/ \right]$$

Przekrój funkcji losowej $\xi_i /t/$ w pewnej, zadanej chwili $T_0 \leq t_z \leq T_1$ nazywamy stanem elementu q_i w chwili t_z i oznaczamy przez $C_i /t_z/$. Zdeterminowany wektor

$$\xi_i^l /t_z/ = \left[\xi_{i1}^l /t_z/; \xi_{i2}^l /t_z/; \dots; \xi_{ir/i}^l /t_z/ \right]$$

nazywamy stanem elementu q_i w chwili t_z dla realizacji l i oznaczamy go przez $C_i^l /t_z/$. Zbiór $\{C_i^l /T_0/\}$ dla wszystkich

$i = 1, 2, \dots, n$ nazywamy początkowym stanem strony Q dla realizacji l . Analogicznie opisuje się elementy U_j / $j = 1, 2, \dots, m$ / strony U i wprowadza się odpowiednie oznaczenia i pojęcia:

$$\zeta_{j/t/} = \zeta_j [\zeta_{j1/t/}; \zeta_{j2/t/}; \dots; \zeta_{jr/j/t/}]$$

$$\zeta_{j^1/t/} = \zeta_j [\zeta_{j1^1/t/}; \zeta_{j2^1/t/}; \dots, \zeta_{jr/j^1/t/}]$$

$$D_j^1/t_z/ = \zeta_{j^1/t_z/} = [\zeta_{j1^1/t_z/}; \zeta_{j2^1/t_z/}; \dots; \zeta_{jr/j^1/t_z/}]$$

$$D_j/t_z/ = \zeta_{j/t_z/} = [\zeta_{j1/t_z/}; \zeta_{j2/t_z/}; \dots; \zeta_{jr/j/t_z/}]$$

Zbiór $\{D_j^1/T_0/\}$ dla $j = 1, 2, \dots, m$ nazywamy początkowym stanem strony U dla realizacji l , a zbiór $\{D_j^1/T_1/\}$ - obiektywnym wynikiem walki strony U dla realizacji l .

Naturalnie $\{C_i^1/T_1/\}$ i $\{D_j^1/T_1/\}$ odpowiednio nazywamy obiektywnym wynikiem walki w realizacji l , a $\{C_i^1/T_0/\}$ i $\{D_j^1/T_0/\}$ - początkowym stanem walki w realizacji l .

Jeżeli jest określone kryterium oceny wyniku walki w postaci pewnych funkcjonalów f_1 $[\{C_i^1/T_1/\}; \{D_j^1/T_1/\}]$
 f_2 $[\{C_i^1/T_1/\}; \{D_j^1/T_1/\}]$ itd., to wartości tych funkcji dla konkretnych wartości argumentów nazywamy wynikiem walki przy odpowiednim kryterium.

Konkretne wartości n i m , konkretne własności funkcji losowych ξ_i oraz ζ_j będą odróżniać od siebie walki w zależności od ich szczebla, fizycznego sensu oraz prawidłowości rozwoju w czasie.

Gdyby dla każdej walki można było wybrać wszystkie te elementy, których zmiana parametrów w czasie określałaby rozwój

walki, a także znaleźć odpowiadające tym elementom funkcje losowe ξ i ζ , to byłby dany pełen opis matematyczny walki. Taką walkę można by było badać metodami teorii funkcji losowych. Jednak praktycznie, ustalenie wszystkich elementów walki, w związku z ich dużą liczebnością i złożoną wzajemną zależnością nie jest osiągalne. Dlatego też należy uwzględniać tylko elementy w najbardziej istotny sposób wpływające na rozwój walki, ograniczając ich ilość do minimum, przy czym często korzystne jest łączenie kilku elementów w grupy i traktowanie tych grup jako pojedynczych elementów.

Należy pamiętać o tym, że dla wszystkich wybranych parametrów, charakteryzujące je funkcje losowe będą tylko pewnymi przybliżeniami dokładnych wartości, ponieważ będą one dane przy pomocy pewnej, skończonej ilości charakterystyk /w praktyce, najczęściej będziemy się ograniczać do wartości oczekiwanej i współczynnika korelacji/.

W rozdziale tym opisujemy modelowanie walk czołgów na skalę taktyczną. Skala ta pozwala jako elementy walki traktować pojedyncze środki bojowe: czołg, działo pancerne, środki przeciwpancerne. Wybrane parametry elementów opisują rozkład przestrzenny elementów, ich przesunięcia, charakter działań i wynik tych działań. Zmiany tych parametrów w czasie określa się przy pomocy losowych funkcji czasu, to znaczy przy pomocy pewnych procesów losowych.

Jako parametry opisujące wybrane elementy walki przyjmuje się następujące funkcje losowe, w których argumentem jest rzeczywisty czas t :

$\eta_1/t/$ - funkcja gotowości bojowej;

$\eta_2/t/$ - funkcja położenia w przestrzeni;

$\eta_3/t/$ - funkcja prędkości;

$\eta_{4/t}$ - funkcja charakteru działań;

$\eta_{5/t}$ - funkcja posiadanej ilości amunicji.

Tworzony model powinien umożliwić otrzymanie w sposób algorytmiczny przybliżonych realizacji tych funkcji, a następnie, uzyskanie przybliżonych charakterystyk tych funkcji w celu ich wykorzystania praktycznego. Realizacje te dają nam następujące trzy grupy modeli:

- przesunięcia elementów;
- wykrycia elementów /celów/;
- prowadzenie ognia.

Metodyka budowy tych podstawowych modeli jest przedmiotem rozważań następnego paragrafu.

5.2. Metodyka modelowania podstawowych procesów działań bojowych

Modelowanie przesunięcia. W modelu przesunięcia realizuje się $\eta_{2/t}$ - funkcja położenia w przestrzeni i $\eta_{3/t}$ - funkcja prędkości. Cechą charakterystyczną wszelkich walk prowadzonych na lądzie jest istotny wpływ konkretnego terenu na ich przebieg. W dowolnym modelu stochastycznym wpływ rzeczywistego terenu można wyrazić dwojako [6] .

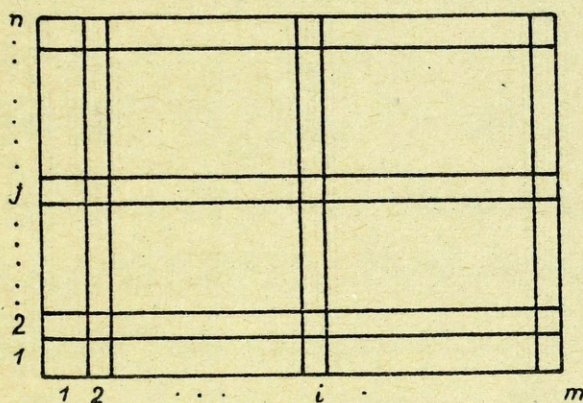
1/ informacja o własnościach terenu jest zdeterminowana i stanowi część danych wejściowych przy realizacji maszynowej na EMC;

2/ informacja o własnościach terenu ma charakter losowy, a konkretne wartości tych parametrów wykorzystywane przy realizacji modelu uzyskuje się w wyniku eksperymentu statystycznego.

Wybór jednej z tych możliwości przy bezpośrednim modelowaniu zależy od celu badania i wyjściowego zbioru informacji.

Otrzymanie stałej informacji o dowolnym rzeczywistym terenie nie przedstawia trudności, często można uzyskać te informacje bezpośrednio z mapy. Jednak wnioski wypływające z realizacji modeli opartych o taką informację o terenie mają wąski zakres przydatności /tylko do rejonów bardzo podobnych do siebie/. Drugi sposób podejścia do opisu terenu rozszerza wprawdzie znacznie ten zakres, jednak nastrocza poważne trudności związane z doborem rozkładów prawdopodobieństw parametrów topograficznych. Ciągłe odwzorowanie terenu nie jest możliwe w modelu stochastycznym, ponieważ i na mapach informacja jest uśredniona, a nie odnosi się do wszystkich punktów. Oczywiście nie dotyczy to współrzędnych geograficznych. Dlatego też często pole walki dzieli się na elementarne części w ten sposób, że każdy punkt elementarnej części jest jednakowo opisany.

Przyjęto następującą zasadę podziału rejonu na części elementarne [29]. Pole walki dzieli się na jednakowe kwadraty o boku a_0 . Przyjmuje się, że opis każdego punktu kwadratu elementarnego jest identyczny z opisem środka tego kwadratu. Zasada podziału rejonu działkań na kwadraty elementarne podana jest na rys. 5.1.



Rys.5.1. Porządek numeracji kwadratów elementarnych

Jeżeli rzeczywisty rejon działań ma kształt nieregularny, to dopełnia się go do prostokąta. Zbiór kwadratów elementarnych jest zbiorem uporządkowanym, to znaczy, że każdemu kwadratowi odpowiada indeks $/ij/$, w którym i - jest numerem kolumny, a j - wiersza /patrz rys.5.1/. Między systemem tych indeksów a współrzędnymi geograficznymi można ustalić wzajemnie jednoznaczność pozwalającą na znalezienie na mapie kwadratów odpowiadających indeksom. Każdemu kwadratowi z indeksem $/ij/$ przypisuje się niezbędną w danym modelu informację charakteryzującą ten kwadrat jako element rejonu działań: rodzaj rzeźby, charakter pokrycia terenowego naturalnego i sztucznego, przejezdność itp. Liczba tych czynników zależy od rodzaju i charakteru rozwiązywanego zadania. Należy więc określić zbiór funkcji argumentu $/ij/$, których zbiór wartości będzie ilościowym opisem cech topograficznych dla

każdego kwadratu. W ten sposób informacja o terenie w każdym kwadracie będzie określona pewną ilością parametrów.

$$\varphi_1/ij/, \varphi_2/ij/, \dots, \varphi_k/ij/$$

gdzie $\varphi_1, \varphi_2, \dots, \varphi_k$ oznaczają wartości funkcji.

Dla pierwszego sposobu podejścia funkcje te są zdeterminowane i z reguły zadawane w postaci tablic /macierzy - przyp.tłum./, w drugim przypadku są to funkcje losowe, zadawane w postaci rozkładów prawdopodobieństwa.

Wiadomo, że osiągnąć przybliżoną realizację pewnej funkcji losowej $\eta/t/$ znaczy tyle, co uzyskać jej wartości na pewnym zbiorze $\{t_\nu\}_1^N$ wartości przedziału czasu walki $[T_0, T_1]$, gdzie

$$t_1 < t_2 < \dots < t_N \text{ oraz } t_1 = T_0, t_N = T_1$$

Terren w modelu jest przedstawiony zbiorem indeksów $\{i, j\}$, dlatego uzyskać realizację funkcji $\eta_2/t/$ dla pewnego elementu biorącego udział w walce znaczy tyle, co dla każdego t_ν wskazać indeks $/ij/$ tego kwadratu elementarnego, w którym interesujący nas element znajduje się w chwili t_ν . Przekrój funkcji losowej $\eta_2/t/$ dla wszystkich t_ν będzie zmienną losową przyjmującą wartości ze zbioru $\{1\}_1^Z$. Zbiór wartości $\{1\}_1^Z$ otrzymuje się przy pomocy operatora odpowiedniości na zbiorze $\{i, j\}$, na przykład:

$$i = 1, 2, \dots, m,$$

$$l = /j - 1/ m + i$$

$$j = 1, 2, \dots, n.$$

W tym przypadku operator przenumerowuje wszystkie kwadraty elementarne kolejno od lewej do prawej i od dołu w górę.

Łatwo zauważyć przy tym, że istnieje również przekształcenie odwrotne $\left[-\frac{1}{m}\right] + 1 = j$, wówczas $i = 1 - |j-1|/m$, gdzie $[A]$ oznacza całkowitą część dowolnej liczby A .

Przekształcenie to nie ma zasadniczego znaczenia w rozpatrywanym modelu, przytaczamy je tu jedynie w celu pokazania technicznych trudności występujących przy modelowaniu.

Oczywiście, przesunięcie dowolnego elementu w czasie $\Delta t_y = t_y - t_{y-1}$ można opisać przez podanie kierunku ruchu i średniej prędkości ruchu w czasie Δt_y ^{1/}. W chwili t_{y-1} dowolny element znajduje się w pewnym kwadracie elementarnym $/i_{y-1}, j_{y-1}/$ /z reguły przyjmuje się, że element znajduje się w środku kwadratu; założenie to nie ma istotnego znaczenia, jednak znakomicie upraszcza modelowanie nie wpływając na wyniki końcowe/.

Określić kierunek ruchu, to znaczy określić indeks tego z ośmiu kwadratów sąsiednich [jeżeli kwadrat z indeksem $/i_{y-1}, j_{y-1}/$ leży na brzegu badanego obszaru, to liczba ta może zmniejszyć się do 3], do którego element powinien się przesunąć^{2/}. Wybór indeksu kwadratu docelowego zależy od właściwości rzeczywistego terenu i może dokonywać się w sposób zdeterminowany, bądź też losowo. W pierwszym przypadku określony on jest pewnymi apriorycznymi prawidłowościami, np. równaniem pewnej krzywej, lub zbiorem takich krzywych, które kolejno zmieniają się w czasie.

W przypadku drugim wybór kwadratu jest zdarzeniem losowym i zależy od następujących wyrażonych ilościowo czynników: wartości funkcji $\varphi_1 /i, j/, \dots, \varphi_k /i, j/$ w wybieranych kwadratach, systemu

1/ - Elementy, które w ciągu całego czasu walki nie przemieszczają się posiadają stały numer kwadratu /indeks/ i prędkość zerową, - Przyp. autora.

2/ Widocznie autor przyjął milcząco założenie, że jest spełniona nierówność $\eta_3 (\Delta t_y) \leq a_0$. Gdyby nierówność ta nie była spełniona, to liczba kwadratów, do których może nastąpić przesunięcie elementów, byłaby większa od 8. - Przyp. tłum.

dowodzenia daną walką, kierunku i głębokości natarcia, ugrupowania bojowego i in.

Wartości liczbowe tych czynników wyznacza się przy pomocy pewnego zbioru funkcji zależnych od pary indeksów - indeksu kwadratu wyjściowego i indeksu kwadratu docelowego:

$$\psi_1 / i_1, j_1; i_2, j_2 /; \dots, \psi_p / i_1, j_1; i_2, j_2 /.$$

Założmy na przykład, że istota walki wymaga uwzględnienia warunku ograniczającego maksymalną odległość d między dwoma elementami. Wówczas można wprowadzić pewną funkcję $\psi_{21} / i_1, j_1; i_2, j_2 /$ przyjmującą wartość 1, gdy przy przesunięciu elementu z kwadratu $/i_1, j_1 /$ do kwadratu $/i_2, j_2 /$ odległość między nim a sąsiednim nie przekracza d oraz wartość 0 w przypadku przeciwnym. Spełnienie warunku o dopuszczalnej odległości można osiągnąć przez niedopuszczenie do wyboru kwadratów, dla których funkcja $\psi_{21} = 0$.

Można sformułować następującą ogólną zasadę wykorzystania omówionych wyżej funkcji. Wprowadza się pewną funkcję wagową.

$$\frac{1}{\psi_1 / i_2, j_2 /; \dots; \psi_k / i_2, j_2 /; \psi_1 / i_1, j_1; i_2, j_2 /; \dots; \psi_p / i_1, j_1; i_2, j_2 /}$$

określoną dla wszystkich kwadratów i obdarzoną następującą własnością: im bardziej dogodny jest kwadrat $/i_2, j_2 /$ jako kwadrat docelowy dla danego elementu, tym większą przyjmujemy wartość funkcji wagowej dla kwadratu $/i_2, j_2 /$ w porównaniu z pozostałymi kwadratami sąsiednimi.

Niech pewien element znajduje się w kwadracie $/i_1, j_1 /$. Wprowadzimy zmienną losową X przyjmującą jedną z ośmiu wartości $/1, 2, \dots, 8 /$ odpowiadających indeksom sąsiednich kwadratów

$/i_1-1, j_1/, /i_1+1, j_1/, /i_1-1, j_1-1/, /i_1-1, j_1+1/, /i_1+1, j_1-1/, /i_1+1, j_1+1/, /i_1, j_1-1/, /i_1, j_1+1/$ z odpowiednimi prawdopodobieństwami p_1, p_2, \dots, p_8 . Oczywiście spełnione jest

$$\sum_{r=1}^8 p_r = 1$$

Dokonując wyboru prawdopodobieństw p_r należy postępować w ten sposób, aby większej preferencji wyboru kwadratu odpowiadało większe prawdopodobieństwo.

Jeżeli oznaczymy $p_r = \frac{w_r}{\sum_{r=1}^8 w_r}$ to warunek ten

zostanie spełniony na mocy własności wagowej funkcji w :

$$\sum_{r=1}^8 p_r = \sum_{r=1}^8 \frac{w_r}{\sum_{r=1}^8 w_r} = \frac{1}{\sum_{r=1}^8 w_r} \sum_{r=1}^8 w_r = 1$$

ponieważ można przyjąć, że normalizowane wagi kwadratów odpowiadają prawdopodobieństwu wyboru, a wybór indeksu kwadratu można oprzeć o metodę eksperymentu statystycznego.

Konkretny wybór funkcji wagowej w zależy od rodzaju modelowanego zadania, które nakłada warunki na charakter przesunięć. W dalszym ciągu, opisując model walki pododdziału czołgów damy przykład wyboru takiej funkcji wagowej. Po wyborze kierunku przesunięcia należy określić jego prędkość, to znaczy uzyskać realizację funkcji losowej $\eta_3/t/$. Przekrój funkcji $\eta_3/t/$ dla pewnego czasu $t_{v-1} \leq t \leq t_v$ przedstawia sobą zmienną losową przyjmującą wartości z pewnego ograniczonego przedziału prędkości z zadaniem rozkładem prawdopodobieństwa, którego dystrybuantę oznaczmy $F/v/$.

Konkretne wartości v dla jednej i tej samej realizacji funkcji $\eta_3/t/$ z reguły przyjmuje się jako jednakowe dla wszystkich $t_{\nu-1} \leq t \leq t_{\nu}$. Przedział prędkości przedstawia sobą odcinek osi liczbowej, którego końce odpowiadają prędkościom minimalnej i maksymalnej. Oczywiście, minimalną prędkością jest prędkość zerowa /element nie porusza się/. Maksymalna prędkość elementu jest określona przez jego techniczne charakterystyki, warunki przejezdności terenu i kąt nachylenia kierunku ruchu.

Zatem przesunięcia każdego elementu, dla którego $v \neq 0$, modeluje się następująco. Dla każdej chwili t_{ν} określa się indeks kwadratu, w którym znajduje się dany element. Następnie, korzystając z metody eksperymentu statystycznego przy założonym rozkładzie prawdopodobieństwa wyznacza się konkretną wartość funkcji

$\eta_3/t/$. Po określeniu drogi przebytej przez dany element w czasie $t_{\nu+1} - t_{\nu}$ znajdujemy indeks kwadratu docelowego, w którym ten element znajdzie się w chwili $t_{\nu+1}$. Procedurę tę stosujemy do wszystkich ruchomych elementów i kolejno dla wszystkich chwil t_1, t_2, \dots, t_N .

Jeżeli wybór kierunku ruchu oparty jest o ustalone wcześniej krzywe, to indeksy kwadratów, przez które będzie się przesuwiał dany element wyznaczamy z równań tych krzywych. Prędkość w poszczególnych przedziałach czasu $[t_{\nu}, t_{\nu+1}]$ wyznacza się tak, jak poprzednio.

Modelowanie wykrycia celów. Z reguły, modelując walkę pododdziałów wojsk lądowych zakłada się, że każdy element w procesie walki prowadzi obserwację elementów przeciwnego koloru^{1/} traktując

1/ Dla wygody dalszych rozważań można elementy przeciwnych stron rozróżniać wg koloru na "czerwonych" i "niebieskich", co odpowiada tradycyjnym oznaczeniom przyjętym w taktyce. - Przyp. autora.

je jako cele.

Wszystkie cele w zależności od odległości, różnicy wysokości, rzeźby terenu i pokrycia terenowego dzieli się umownie na dwie grupy: cele niewidoczne i cele widoczne.

Nie można wykryć celów należących do pierwszej grupy, natomiast niektóre cele drugiej grupy /niekiedy wszystkie/ wcześniej, czy później są wykrywane. Oznacza to, że wykrycie celu jest zdarzeniem losowym i w związku z tym, każdemu wykryciu celu grupy drugiej można przypisać pewne, różne od zera prawdopodobieństwo wykrycia. Naturalnie, im lepsze są warunki obserwacji i dalszy jej zasięg, tym większe jest prawdopodobieństwo wykrycia.

Rzeczywista postać rozkładu prawdopodobieństwa wykrycia może być bardzo różna - zależna od rodzaju rzeczywistego modelowanego procesu walki. Często zakłada się, że prawdopodobieństwo wykrycia dane jest rozkładem wykładniczym [26]

$$p(t) = 1 - e^{-\gamma t} \quad /5.1/$$

gdzie γ oznacza chwilową wartość funkcji gęstości prawdopodobieństwa wykrycia. Zatem γdt będzie oznaczać prawdopodobieństwo wykrycia w dowolnie małym przedziale czasu dt . Funkcja γ zależy od odległości do celu, jego wymiarów, typów środków obserwacji oraz warunków meteorologicznych w czasie obserwacji.

Po dokonaniu podziału celów na grupy, dla celów drugiej grupy oblicza się rzeczywiste wartości prawdopodobieństwa wykrycia i według obliczonych wartości wybiera się wszystkie cele widoczne. Informację o wszystkich wykrytych celach wykorzystuje się w modelu dla rozwiązania optymalnego przydziału celów.

Modelowanie przydziału celów. Zadaniem, którego nie sposób pominąć przy modelowaniu działań bojowych jest określenie przydziału celów. Problem ten może występować także samodzielnie, np. jako podstawa uzyskania a priori wartości pewnych parametrów kierowania środkami w walce i w czasie jej przygotowywania.

Sens fizyczny przydziału celów polega na ustaleniu takiego przydziału wykrytych celów własnym środkiem ogniowym, aby oddziaływanie ogniowe na te cele przynosiło maksymalny efekt odpowiednio do przyjętego kryterium efektywności. Na ogół, z punktu widzenia matematyki, zadanie to sprowadza się do rozwiązania zadania programowania liniowego w liczbach całkowitych. Sformułowanie takiego zadania może być następujące.

Jest pewna ilość m środków bojowych i pewna ilość n celów. Konieczne jest napisanie macierzy $\Delta = \|\delta_{ij}\|$, w której element δ_{ij} może przyjmować wartości:

$$\delta_{ij} = \begin{cases} 1, & \text{jeżeli } i\text{-ty środek ogniowy może prowadzić ogień} \\ & \text{do wykrytego celu } j; \\ 0, & \text{jeżeli środek } i \text{ nie może ostrzeliwać celu } j, \end{cases}$$

gdzie $i = 1, 2, \dots, m$ oraz $j = 1, 2, \dots, n$.

W opisywanej metodzie przypisuje się δ_{ij} wartość 1, jeżeli element i wykrył element j przeciwnego koloru, a odległość między nimi nie przekracza zasięgu ogniowego elementu i . Wprowadza się zmienne x_{ij} takie, że $x_{ij} = 1$, gdy cel j został przydzielony elementowi i , oraz $x_{ij} = 0$ - w przeciwnym przypadku.

Naturalnie w rozpatrywanym przypadku zakładamy, że jeden element nie może w tym samym czasie prowadzić ognia do kilku celów.

Wymaganie to można zapisać w postaci liniowych warunków ograniczających:

$$\sum_{j=1}^n x_{ij} \leq 1 \quad /i = 1, 2, \dots, m/ \quad /5.2/$$

Do danego celu może jednocześnie prowadzić ogień co najwyżej tyle elementów, ile jest w dyspozycji. Matematycznie ten warunek ma postać:

$$\sum_{i=1}^m x_{ij} \leq m \quad /j = 1, 2, \dots, n/ \quad /5.3/$$

Ponadto, nie można przydzielać celów tym elementom, które w danej chwili nie mogą do nich prowadzić ognia. Zapis formalny tego ograniczenia jest następujący:

$$\sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n /1 - \delta_{ij}/ x_{ij} = 0 \quad /i = 1, 2, \dots, m; j = 1, 2, \dots, n/ \quad /5.4/$$

Wprowadzone w ten sposób liniowe warunki ograniczające pozwalają na odrzucenie wszystkich rozwiązań niedopuszczalnych i pozostawienie skończonego zbioru rozwiązań dopuszczalnych odpowiadających warunkowi rozwiązania w liczbach całkowitych, z którego należy wybrać jedno, lub kilka najlepszych, odpowiednio do przyjętego kryterium efektywności. Najczęściej przyjmuje się kryterium liniowo zależne od szukanych zmiennych i zapisuje się je w postaci:

$$C/x/ = \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n C_{ij} x_{ij} \quad /5.5/$$

gdzie C_{ij} jest pewną liczbą rzeczywistą charakteryzującą efektywność przydziału celu j środkowi i /np. często C_{ij} jest prawdopodobieństwem rażenia celu j przez środek i /.

Wybór liniowego kryterium zadania przydziału celów doprowadził nas do problemu programowania liniowego w liczbach całkowitych. Po rozwiązaniu tego zadania otrzymuje się pewien zbiór zmiennych x_{ij} .

$$x^* = \{x_{11}^*, x_{12}^*, \dots, x_{1n}^*, x_{21}^*, \dots, x_{2n}^*, \dots, x_{m1}^*, \dots, x_{mn}^*\},$$

optymalizujący zadaną formę liniową, przy czym x_{ij}^* przyjmują wartości 0 lub 1. Wybrawszy wszystkie $x_{ij}^* = 1$ /niech będą to $x_{i_1 j_1}^*, x_{i_2 j_2}^*, \dots, x_{i_k j_k}^*$ / można uzyskać optymalne rozwiąza-

nie przydziału celów polegające na tym, że cele o numerach j_1, \dots, j_k zostają przydzielone elementom o numerach i_1, \dots, i_k .

Stosując metody ogólne nie należy pomijać szczególnych metod rozwiązania problemu przydziału celów. Przydatność metod szczególnych polega na tym, że istnieje pewna klasa algorytmów realizujących różne zasady przydziału celów/np. przydział celu elementowi najbliżej położonemu, przydział celu najgroźniejszego dla danego elementu itp./. Tę klasę algorytmów wykorzystuje się, tworząc konkretny model stochastyczny, w celu wyboru najlepszej zasady przydziału celów, przy czym właściwość wyboru zasady określa się na podstawie analizy wyników modelowania. W tym przypadku można osiągnąć zadowalające przybliżenie rozwiązania problemu przydziału celów. Wyniki takiego sposobu podejścia ilustrują konkretne przykłady modeli stochastycznych zamieszczone w dalszej części tego rozdziału.

Modelowanie prowadzenia ognia. W wyniku przydziału celów przeprowadzonego oddzielnie dla elementów "różnego koloru" w ten sposób, że każdy element występuje w dwóch rolach: środka walki i

celu, niektórym elementom przydziela się numery celów - elementy te rozpoczynają ogień. Model prowadzenia ognia daje bieżącą informację o wyniku strzelania do przydzielonych celów, zostają przy tym określone prawdopodobieństwa rażenia każdego celu.

Prawdopodobieństwo rażenia jest funkcją następujących argumentów: odległości do celu, jego wymiarów, prędkości ruchu elementu i celu, liczby poprzednich trafień w ten cel /parametr wyrażający odporność celu na trafienia, najczęściej określaną jako niezbędna, średnia ilość trafień, do rażenia celu/. Funkcję tę oznaczamy $\Phi(\beta)$, gdzie β - stanowi sumaryczny argument określający konkretną wartość prawdopodobieństwa rażenia. Realizację zdarzenia losowego, jakim jest wynik strzelania, uzyskujemy metodą eksperymentu statystycznego.

Wyniki prowadzenia ognia są niezbędne do określenia realizacji funkcji gotowości bojowej $\eta_{1/t/}$.

Po uzyskaniu rażenia celu element przechodzi w stan obserwacji, dzięki temu zachodzi realizacja funkcji charakteru działań

$\eta_{4/t/}$.

Ponieważ w modelu tym zawsze można uwzględnić ilość amunicji zużytej przy rażeniu każdego celu, to realizuje się także funkcja posiadanej ilości amunicji $\eta_{5/t/}$.

W następnym paragrafie na konkretnym przykładzie wyłożymy metodykę modelowania podstawowych procesów walki i uzyskania ogólnego modelu działań bojowych.

5.3. Struktura algorytmu
modelującego na FMC
natarcie pododdziału

Zajmijmy się badaniem prawidłowości rządzących wynikiem walki kompanii /batalionu/ czołgów pokonującej umocniony rejon przeciwpancerny.

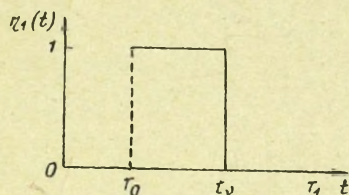
Rozpatrzmy następujące zadanie taktyczne. Kompania czołgów „czerwonych” licząca n_1 czołgów powinna przełamać umocniony rejon przeciwpancerny „niebieskich”. Rejonu tego broni n_2 czołgów „niebieskich” zamaskowanych i znajdujących się w specjalnie przygotowanych ukryciach. Kompania powinna nacierać utrzymując określone ugrupowanie bojowe w pasie natarcia szerokości a metrów i głębokości c metrów. Ogólny kierunek ruchu kompanii wyznacza się w terenie na podstawie położenia pozycji wyjściowej „czerwonych” i „niebieskich”. Kierunek ruchu każdego czołgu czerwonych wyznacza zbiór dozorów, którymi są wyraźnie wyróżniające się przedmioty terenowe.

Walka rozpoczyna się w zadanej chwili T_0 i trwa do chwili, w której jedna z walczących stron utraci zdolność do dalszej jej kontynuacji. Za koniec walki można również przyjąć tą chwilę $T_1 > T_0$, w której zostało wypełnione zadanie bojowe lub straty jednej ze stron przekroczyły porównywalny poziom.

Jednakowe elementy jednego koloru będą różnić się numerami porządkowymi niezmiennymi w czasie trwania walki. Wprowadzona dla scharakteryzowania gotowości bojowej funkcja $\eta_i/t/$ w związku z jednorodnością elementów będzie miała tą samą postać dla wszystkich elementów. Różnymi dla różnych elementów będą jedynie charakterystyki tej funkcji: wartość oczekiwana, współczynnik korelacji i inne. Stwierdzenie to pozostaje w mocy również w stosunku do innych parametrów opisu elementów. Przekrój funkcji $\eta_i/t/$ /dla dowolnego $T_0 \leq t \leq T_1/$ jest zmienną losową przyjmującą wartość 1,

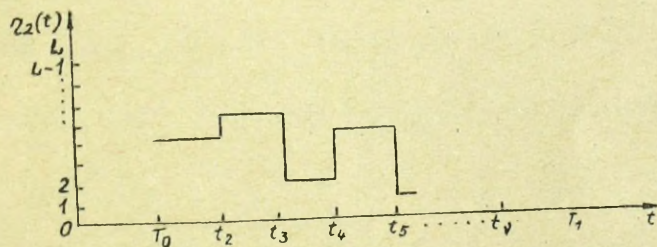
gdy dany element w danej chwili jest gotów do prowadzenia walki, oraz wartość 0 - w przypadku przeciwnym.

Realizacja funkcji $\eta_1/t/$ pokazana jest na rys. 5.2. Jest to nierosnąca funkcja schodkowa mająca skok w pewnej chwili $t_v / T_0 < t_v < T_1 /$.



Rys. 5.2. Przykład losowej realizacji funkcji gotowości bojowej

Funkcja losowa $\eta_2/t/$ charakteryzuje położenie elementu w dowolnej chwili. Ponieważ w dowolnej chwili element znajduje się w jednym z L kwadratów, to przekrój funkcji $\eta_2(t)$ przedstawia sobą zmienną losową przyjmującą jedną z wartości 1, 2, ..., L. Na rys. 5.3 pokazano przykłady możliwych realizacji funkcji $\eta_2(t)$.



5.3.

Rys. 5.3. Przykład losowych realizacji funkcji $\eta_2(t)$.

Realizacje funkcji szybkości $\eta_3(t)$ wskutek zaokrąglania uzyskiwanych wartości będą mieć postać analogiczną do zobrazowanych na rys. 5.3, przy czym możliwe wartości rzędnych tej funkcji będą należały do przedziału (v_{\min}, v_{\max}) . Parametry

$\eta_2(t)$ i $\eta_3(t)$ dla elementów „niebieskich” mają charakter zdeterminowany, przedstawiają sobą zadane wartości stałe - numery kwadratów, w których znajdują się te elementy oraz zerową prędkość ponieważ zakłada się, że czołgi w czasie walki nie zmieniają swego

położenia.

W modelu założono, że, jeżeli element znajduje się w gotowości bojowej, to w każdej chwili prowadzi on obserwację lub ogień do celu, którego numer porządkowy jest znany. Dlatego przekrój funkcji losowej $\eta_4(t)$ określającej charakter działań bojowych elementu przedstawia sobą zmienną losową przyjmującą jedną z wartości $1, 2, \dots, n_2$ dla „czerwonych” i $1, 2, \dots, n_1$ - dla „niebieskich” .

Wartość 0 oznacza, że element prowadzi obserwację ; wartość różna od zera wskazuje, że element prowadzi ogień do celu, którego numer porządkowy jest równy tej wartości. Postać graficzna realizacji funkcji losowej $\eta_4(t)$ jest analogiczna do przedstawionej na rys. 5.3 .

Realizacja funkcji losowej $\eta_5(t)$ jest malejącą funkcją schodkową, która ma jednostkowe skoki w pewnym zbiorze wartości czasu w przedziale (T_0, T_1) .
Przekrój funkcji $\eta_5(t)$ w dowolnej chwili t_v jest zmienną losową przyjmującą jedną z wartości $0, 1, 2, \dots, \Theta_i$, gdzie Θ_i - oznacza największą możliwą ilość ładunków bojowych elementu o numerze i .

Wartości powyżej rozpatrzonych parametrów opisują w dostatecznym stopniu stan elementu i pozwalają na otrzymanie danych charakteryzujących całą walkę. Na przykład, chcąc uzyskać realizację funkcji losowej ilości strat - sumuje się realizacje funkcji

$\eta_i(t)$ dla wszystkich elementów jednego koloru. Zadanie polega na tym, aby zbudować algorytmy pozwalające na otrzymanie parametrów stanu elementu w dowolnej chwili t_v ($v = 1, 2, \dots, N$) w oparciu o bieżącą informację dla chwil t_1, t_2, \dots, t_{v-1} i pewne, zadane informacje wyjściowe.

Główną składową zadanej informacji wyjściowej jest informacja

o terenie. Analiza tych danych o terenie, które w istotny sposób wpływają na charakter walki, pozwala wnioskować, że każdy kwadrat powinien być opisany następującymi parametrami będącymi funkcjami o zadanej postaci, których argumentami są numery porządkowe kwadratów :

1/ parametrem „ przejezdności ” $\beta_1(1)$; funkcja β_1 przyjmuje trzy wartości ^{x/} :

1 - jeżeli kwadrat o numerze 1 jest nieprzejezdny dla czołgów strony „czerwonych” ;

2 - trudno przejezdny ;

3 - łatwo przejezdny.

Z założenia, że wszystkie czołgi uczestniczące w walce są jednego typu , wynika, że funkcja $\beta_2(1)$ zależy tylko od własności terenu i jest stała dla czołgów ;

2/ parametrem rzeźby terenu $\beta_2(1)$, który przyjmuje wartość równą wysokości nad poziomem morza określoną dla środka kwadratu o numerze 1 ;

3/ parametrem $\beta_3(1)$ przyjmującym wartość równą średniej wysokości sztucznych i naturalnych przedmiotów terenowych zajmujących wystarczająco dużą część powierzchni kwadratu 1 ;

4/ parametrem $\beta_4(1)$, którego wartość jest równa współczynnikowi wytrzymałości gruntu dla gruntu charakterystycznego dla kwadratu 1 .

Budowany algorytm składa się z bloków podstawowych i pomocniczych. Bloki podstawowe modelują istotne dla walki czołgów procesy : przesunięcie , obserwację, podział celów i prowadzenie ognia. Przy rozwiązywaniu niektórych zadań cząstkowych, bloki te można wykorzystywać jako modele samodzielne.

- - - - -

x/ Oczywiście takie stopniowanie parametru β_1 nie jest konieczne we wszystkich przypadkach. - Przyp. autora.

Bloki pomocnicze przeznaczone są do wprowadzania informacji wejściowej, określenia konkretnej postaci rozwiązywanego wariantu, sterowania strumieniem informacji bieżącej uzyskiwanej w oddzielnych blokach, niezbędnej do opracowania statystycznych wyników modelowania i ich wyprowadzenia.

Pracą wszystkich bloków podstawowych kieruje blok sterowania w którym ustala się kolejność opracowania poszczególnych elementów i kolejność otrzymania informacji bieżącej o elemencie w blokach podstawowych. Oprócz tego, w bloku sterowania odbywa się rejestracja bieżącego czasu ; pozwala to na wydawanie w określonych przedziałach czasu informacji bieżącej niezbędnej do opracowania statystycznego i do wydruków oraz na ustalenie końca pracy programu .

Informacja wchodząca do wszystkich bloków i przetwarzana w nich, jest odpowiednio zakodowana. Informację początkową, jak i bieżącą można podzielić na dwie grupy :

1/ informację o czołgach, którą podaje się liczbowymi wartościami parametrów stanów elementu ;

2/ informację o kwadratach elementarnych, która opisuje poszczególne kwadraty przez liczbowe wartości parametrów charakteryzujących te kwadraty.

Każdą wartość liczbową parametru zapisuje się jako binarną liczbę całkowitą. W zadanym zbiorze stałych początkowych przewiduje się wartości skali kodowania niezbędne przy dekodowaniu w czasie przetwarzania informacji bieżącej. Taki sposób kodowania pozwala na zapisywanie wartości parametru w specjalnie wydzielonych bitach komórki pamięci operacyjnej EMC , przy czym ilość wydzielonych bitów określona jest na podstawie górnej granicy przedziału zmienności parametru. Dlatego też liczba komórek niezbędnych do zapisu informacji o jednym elemencie lub kwadracie, zależy od liczby parametrów i zakresu ich zmienności.

Tabl. 5.1. pokazuje możliwy sposób podziału bitów komórki pamięci EMC pomiędzy parametry stanu elementu.

Tablica 5.1

Możliwy podział bitów komórki pamięci EMC dla zapisu parametrów stanu elementu

Numer bitu	kod i jego znaczenie
1	0 - czołg nie osiągnął gotowości bojowej
	1 - czołg znajduje się w gotowości bojowej
2	0 - czołg „czerwonych”
	1 - czołg „niebieskich”
3	0 - czołg prowadzi obserwację
	1 - czołg prowadzi ogień
4 - 12	Numer kwadratu, w którym znajduje się czołg
13 - 17	v - prędkość czołgu w m/sek
18 - 21	Numer celu, do którego czołg prowadzi ogień
22 - 24	00 - czołg nie strzela
	01 - czołg strzela jeden raz
	10 - czołg strzela dwa razy
	11 - czołg strzela trzy razy
25 - 30	Liczba sztuk amunicji w czołgu
31 - 33	Ogólna liczba trafień w czołg
34 - 36	Czas nieprzerwanej obserwacji - liczba kroków δt
38 - 42	Czas przemieszczania się czołgu z jednego kwadratu do drugiego

Możliwy podział bitów komórki pamięci EMC dla zapisu parametrów kwadratu

Numer bitu	Kod i jego znaczenie
1 - 2	00 - brak czołgu 01 - znajduje się jeden czołg 10 - znajduje się dwa czołgi
3	0 - czołg „ czerwonych ” 1 - czołg „ niebieskich ”
4 - 5	01 - teren nieprzejezdny 10 - teren trudno przejezdny 11 - teren łatwo przejezdny
6 -11	$H - H_{\min}$ w metrach , gdzie H - wysokość kwadratu nad poziomem morza, H_{\min} - minimalna wysokość w zbiorze wszystkich kwadratów
12-17	h_i - wysokość otaczających przedmiotów terenowych, w metrach
18-24	f - współczynnik określający charakter gruntu ($0 < f < 100$)
25-28	00 - brak granicy 01 - pierwsza granica 10 - druga granica 11 - trzecia granica 100 - czwarta granica

Znając numery komórek : pierwszej i ostatniej, w których zapisano informację o elementach, można łatwo określić numer elementu, którego dotyczy informacja zapisana w określonej komórce, jeżeli tylko do zapisu tych informacji wydzielono zwarty obszar pamięci.

Tablica 5.2 przedstawia podział bitów komórki pamięci EMC pomiędzy parametry charakterystyki kwadratu. Numer kwadratu, o którym informacja jest zapisana w danej komórce określa się numerem tej komórki w analogiczny sposób, jak przy informacjach o elementach ugrupowania. Informację początkową o każdym kwadracie elementarnym przygotowuje się wprost z mapy, na której zaznacza się wyjściowe położenie czołgów obu stron.

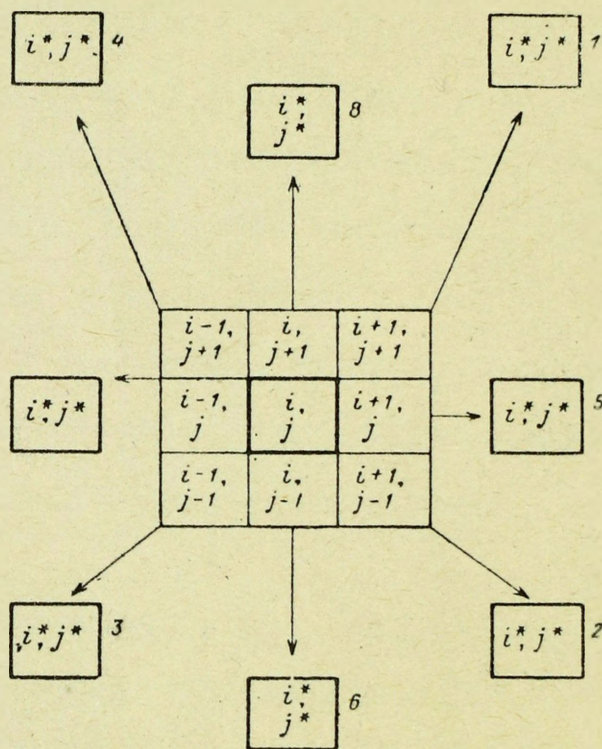
Praca bloku przemieszczania w algorytmie zbudowanym w oparciu o wyłożone zasady, wymaga znajomości konkretnej postaci funkcji wagowej w .

Ponieważ czołgi „czerwonych” są jednorodne - funkcja w będzie miała tą samą postać dla wszystkich czołgów. Kierunek przemieszczania każdego czołgu określa się zbiorem zadanych punktów orientacyjnych /dozorów/, szykiem bojowym i warunkami przejezdności. Ponieważ każdy punkt orientacyjny musi się znajdować na jednym z kwadratów elementarnych, to podając numery kwadratów, w których znajdują się punkty orientacyjne, uzyskujemy możliwość uwzględnienia ich wpływu na kierunek przemieszczania.

Określając postać funkcji wagowej możemy założyć, że każdy z elementów posiada tylko jeden punkt orientacyjny. Założenie to w niczym nie ogranicza ogólności modelu, ponieważ określenie wpływu punktów orientacyjnych na kierunek ruchu przebiega kolejno. Przejście od jednego punktu orientacyjnego do drugiego następuje w chwili, w której dany dozór przestaje wywierać wpływ na ogólny kierunek ruchu, to znaczy wtedy, kiedy poruszający się czołg osiągnie właśnie ten punkt orientacyjny.

Następnie, we wszystkich przypadkach, można określać kierunek ruchu na podstawie wzajemnego położenia czołgu i najbliższego mu punktu orientacyjnego. Dla każdego z kierunków, z ośmiu możliwych sąsiednich kwadratów wybiera się trzy.

Porządek wyboru i charakter kierunków pokazuje rys.5.4, na którym indeksy $/i^*, j^*/$ określają punkt orientacyjny, zaś indeksy (i, j) - rozpatrywany kwadrat .



Rys. 5.4. Schemat wyboru możliwych kierunków ruchu

W zależności od wartości różnic $/i^* - i /$ oraz $/j^* - j /$ otrzymujemy osiem możliwych kierunków :

- 1 - gdy $i^* > i$ oraz $j^* > j$,
- 2 - gdy $i^* > i$ oraz $j^* < j$,
- 3 - gdy $i^* < i$ oraz $j^* < j$,
- 4 - gdy $i^* < i$ oraz $j^* > j$,
- 5 - gdy $i^* > i$ oraz $j^* = j$,
- 6 - gdy $i^* = i$ oraz $j^* < j$,
- 7 - gdy $i^* < i$ oraz $j^* = j$,
- 8 - gdy $i^* = i$ oraz $j^* > j$.

Zasada wyboru trzech z pośród ośmiu kwadratów jest następująca : na przykład dla kierunku 1 wybiera się kwadraty z indeksami $/i,j+1/$, $/i+1,j+1/$, $/i+1,j/$, a dla kierunku 5 - $/i+1,j+1/$, $/i+1,j/$, $/i+1,j-1/$. Dla kierunków 2,3,4 wyboru dokonujemy analogicznie, jak dla kierunku 1, zaś dla kierunków 6,7,8 - jak dla kierunku 5.

Wybrane kwadraty sprawdza się pod względem przejezdności. Sprawdzenie to zawiera w sobie eliminację kwadratów nieprzejezdnych, oraz takich, których pokonywanie naruszałoby zadany szlak bojowy. Jeżeli każdy z trzech wydzielonych kwadratów jest nieprzejezdny, to zastępuje się go najbliższym mu kwadratem przejezdnym. Wybranych w ten sposób trzech kwadratom przypisuje się wagę dodatnią, zaś pozostałym - zerową. Rozkład prawdopodobieństwa $/wag/$ dla wybranych kwadratów zależy od konkretnej postaci modelu, wymiarów elementarnego kwadratu, typów elementów ugrupowania itd.

Jeżeli wymiary elementów i kwadratu są na przykład tego samego rzędu, to rozkład prawdopodobieństwa powinien być równomierny. Jeżeli natomiast wymiary kwadratów znacznie przekraczają wymiary elementów, to kwadrat środkowy powinien być wybierany z wyraźnie większym prawdopodobieństwem. W rozpatrywanym przykładzie bok kwadratu wynosił 100 m, zaś wymiary elementów ugrupowania 5 - 7 m; przyjęto układ wag 1 : 4 : 1, daje to następujący rozkład prawdopodobieństwa :

$$\frac{1}{6} ; \frac{2}{3} ; \frac{1}{6} .$$

Ze wszystkich sąsiednich kwadratów, przynajmniej jeden powinien być przejezdny, w skrajnym przypadku ten, z którego czołg przybył do danego kwadratu. Oprócz tego, podział na kwadraty elementarne powinien być skorelowany z dopuszczalnymi odstępami

pomiędzy elementami ugrupowania tak, aby wykluczyć możliwość eliminacji wszystkich ośmiu sąsiednich kwadratów ze względu na naruszenie przyjętego szyku bojowego. Dla konkretnych wymiarów kwadratów elementarnych i dopuszczalnych odstępów uwzględnienie tego warunku jest stosunkowo proste.

Dokonując wyboru wartości prędkości ruchu czołgu uwzględnia się jego typ, rodzaj i właściwości gruntów w tych kwadratach, które będą pokonywane oraz kąt nachylenia.

Z ogólnej teorii czołgów [14] wiadomo, że maksymalna prędkość jego ruchu jest określona wzorem

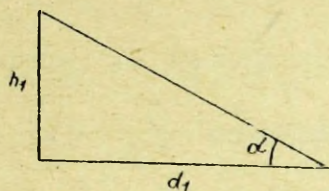
$$v_{\max} = \frac{270 N_d \eta_{cz}}{G(f \cos \alpha + \sin \alpha)}, \quad /5.6/$$

w którym N_d - tzw. moc swobodna, KM; η_{cz} - współczynnik strat mocy w przekładniach i układzie jezdny; G - ciężar czołgu, KG; f - współczynnik wytrzymałości gruntu; α - kąt nachylenia, v_{\max} - maksymalna prędkość, km/godz.

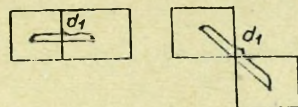
Wartość współczynnika f jest podana dla każdego kwadratu w informacji początkowej. Przemieszczając czołg z jednego kwadratu do drugiego znajduje się średnią arytmetyczną wartości współczynnika f dla tych kwadratów.

Wartość kąta α wyznacza się z trójkąta prostokątnego /rys.5.5/ w którym h_1 - różnica wysokości środków odpowiednich kwadratów; d_1 - odległość środków tych kwadratów równa a lub $a\sqrt{2}$, gdzie a - długość boku kwadratu elementarnego. Konkretna wartość d_1 zależy od wzajemnego położenia kwadratów. Oba te przypadki są pokazane na rys. 5.6.

Konkretną wartość prędkości ruchu wybiera się w oparciu o metodę opisaną powyżej, przyjmując przy tym z reguły $v_{\min} = 0$. Prawie zupełny brak niezbędnych danych nie pozwala



Rys.5.5. Kąt przewyższenia



Rys.5.6. Możliwe warianty
położenia sąsiednich kwadratów
elementarnych

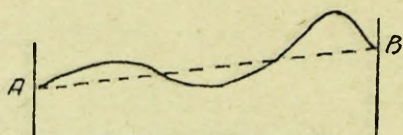
na określenie charakteru funkcji rozkładu wartości prędkości na dopuszczalnym przedziale. Dlatego najczęściej przyjmuje się rozkład równomierny lub rozkład normalny.

Jeżeli poruszający się element ugrupowania nie prowadzi ognia, to przyjmuje się, że prowadzi on ciągłą obserwację. Przydział celów pierwszej grupy dla każdego z czołgów prowadzących obserwację przebiega następująco. Określa się odległość czołgu do każdego z celów. Wszystkie te cele, których odległości przekraczają pewną wartość R_3 / zbyt oddalone / przydziela się do grupy pierwszej. Dla wszystkich pozostałych celów wyznacza się odcinek prostej łączącej środki kwadratów, w których znajdują się czołg i cel, przy czym odcinek ten buduje się w przestrzeni trójwymiarowej, tzn. trzecią współrzędną jest suma wysokości kwadratu nad poziomem morza i otaczających przedmiotów terenowych.

Zbudowany odcinek rzutuje się na płaszczyznę XOY. Następnie określa się numery tych wszystkich kwadratów, które zostają przecięte tym rzutem,. Dla każdego takiego kwadratu określa się odpowiednio sumaryczną wysokość, którą porównuje się z wartościami wysokości uzyskanymi z podstawienia współrzędnych środków kwadratów w płaszczyźnie rzutu. Jeżeli zdarzy się, że tak znaleziona wysokość przekracza wartość porównawczą, to znaczy, że rzeźba terenu nie pozwala na wykrycie odpowiadającego celu.

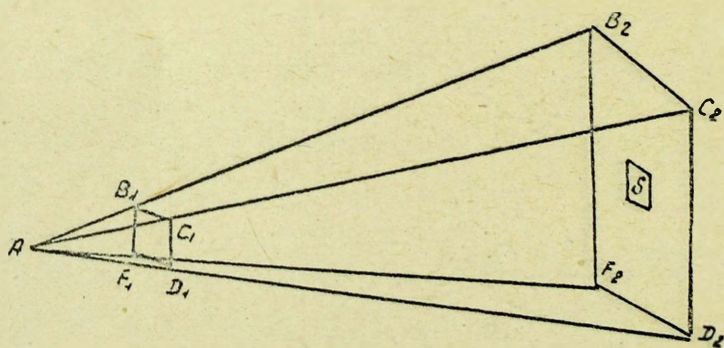
Rys. 5.7 wyjaśnia opisany powyżej brak możliwości wykrycia

z punktu B celu znajdującego się w punkcie A. Dlatego też wszystkie takie cele zalicza się do grupy pierwszej. Pozostałe cele natomiast zaliczamy do drugiej grupy. Oblicza się więc dla każdego z nich prawdopodobieństwo jego wykrycia posługując się wzorem /5.1/



Rys.5.7. Wpływ terenu na możliwość wykrycia

Ponieważ obserwację czołgów prowadzi się z czołgu, to funkcja chwilowej gęstości może być wyznaczona w oparciu o następujące rozumowanie. Oko obserwatora znajduje się w pewnej odległości /rys.5.8/ od otworu opisanego figurą $B_1 C_1 D_1 F_1$, którą można uważać za prostokąt. Cel, którego obserwowana powierzchnia wynosi S , położony jest prostopadle w stosunku do linii obserwacji, w odległości r_2 od punktu A. Można przy tym obserwować



Rys. 5.8. Schemat obserwacji celu

figurę $B_2 C_2 D_2 F_2$ podobną do $B_1 C_1 D_1 F_1$, której powierzchnia

$$S = \frac{S_1 r_2^2}{r_1^2}, \quad /5.7/$$

gdzie S_2 - powierzchnia $B_2 C_2 D_2 F_2$; S_1 - powierzchnia $B_1 C_1 D_1 F_1$.

Wzór /5.7/ jest słuszny dla warunków $r_1 \ll r_2$ i $S_1 \ll S_2$, dlatego też można napisać

$$AB_2 = AC_2 = AD_2 = AF_2 \approx r_2$$

Jeżeli założyć, że prawdopodobieństwo wykrycia celu znajdującego się w płaszczyźnie $B_2 C_2 D_2 F_2$ jest proporcjonalne do odpowiednich powierzchni, to znaczy

$$P = k_1 \frac{S}{S_2} = k_1 \frac{S}{S_1 r_2^2} r_1^2, \quad /5.8/$$

to wyrażenie /5.8/ celowym będzie zapisać

$$P = k \frac{S}{r^2}, \quad /5.9/$$

gdzie S -- powierzchnia rzutu celu na płaszczyznę prostopadłą do linii obserwacji; r -- odległość od obserwatora do celu; k -- współczynnik uwzględniający wpływ pozostałych czynników na prawdopodobieństwo wykrycia.

Zatem, wzór na prawdopodobieństwo wykrycia przyjmie następującą postać:

$$p/t/ = 1 - e^{-k \frac{S}{r^2} t} \quad /5.10/$$

Uzyskany współczynnik posiada wymiar $[T^{-1}]$.

Wartość współczynnika k do praktycznych obliczeń wartości prawdopodobieństwa wykrycia można otrzymać w oparciu o dysponowany materiał statystyczny.

Założmy na przykład, że w wyniku eksperymentu ustalono, iż prawdopodobieństwo wykrycia celu o powierzchni S_1 , znajdującego się w odległości r_1 w czasie t_1 wynosi p_1 .

Wówczas

$$p_1 = 1 - e^{-k \frac{S_1}{r_1^2} t_1},$$

a stąd

$$k = \frac{\ln /1 - p_1/r_1^2}{S_1 t_1} \quad /5.11/$$

Zatem, wykorzystując empiryczne wartości p_1 , można dobrać wartość współczynnika k , która w stopniu wymaganym będzie odzwierciedlać wpływ istotnych czynników na prawdopodobieństwo wykrycia. Z reguły, nie udaje się dobrać wartości k dogodnej dla całego przedziału $(0, R_3)$. Dlatego też przedział ten dzieli się zwykle na podprzedziały, dla których wyznacza się odpowiadające im wartości współczynnika k .

Po rozpoznaniu wszystkich wykrytych celów następuje ich podział. W opisywanym modelu zastosowano następującą zasadę podziału celów. Ze wszystkich celów wykrytych przez dany czołg przydziela się mu najbliższy cel prowadzący do niego ogień, a gdy takiego nie ma, to poprostu najbliższy.

W celu uzyskania bardziej równomiernego podziału wprowadza się ograniczenia: ogranicza się ilość środków ogniowych mogących jednocześnie prowadzić ogień do tego samego celu; ilość tą oznaczoną przez u można zmieniać; pozwala to na dobór takiej wartości u /czyli stopnia koncentracji ognia - przyp.tłum./, która w danych warunkach zapewnia najlepsze wyniki. Po dokonaniu podziału celów, w kolejnym kroku, czołg, dla którego $\eta_4 = r$ rozpoczyna prowadzenie ognia do czołgu przeciwnego koloru o numerze r . Ogień trwa tak długo, aż zajdzie jedno z trzech zdarzeń: czołg poraził cel o numerze r , czołg został rażony przez dowolny czołg przeciwnego koloru, zapas amunicji czołgu został wyczerpany. Po każdym strzale oblicza się prawdopodobieństwo trafienia wg. wzoru

$$P = \Phi\left(\frac{L \sqrt{A}}{B_d}\right) \Phi\left(\frac{m \sqrt{A}}{B_b}\right),$$

$$\Phi(\beta) = \frac{2\beta}{\sqrt{\pi}} \int_0^{\beta} e^{-\beta^2 z^2} dz, \quad /5.12/$$

w którym l, m - parametry opisujące wymiary celu, B_d - charakterystyka rozrzutu w donośności; B_b - charakterystyka rozrzutu w szerokości, μ - parametr rozkładu prawdopodobieństwa rozrzutu.

Wskutek braku możliwości znalezienia na drodze analitycznej poprawek dla drugiego i kolejnych strzałów, poprawek wynikających z zasad prowadzenia ognia artyleryjskiego z czołgów, w przypadku nie uzyskania trafienia przy pierwszym strzale w modelu przewiduje się następującą regułę obliczania prawdopodobieństwa dla kolejnych strzałów. Niech p_2 - oznacza prawdopodobieństwo trafienia drugim strzałem pod warunkiem, że pierwszy strzał był niecelny

$$p_2 = 1 - \frac{1 - p_1}{C_1}, \quad /5.13/$$

gdzie $C_1 > 1$ jest wielkością stałą.

Analogicznie

$$p_3 = 1 - \frac{1 - p_2}{C_2} \quad \text{i.t.d.}$$

Dobrawszy odpowiednie wartości stałych na podstawie danych statystycznych, można obliczyć prawdopodobieństwa trafienia kolejnymi strzałami dostatecznie bliskie rzeczywistemu rozkładowi wyników strzelania. Za każdym razem, po obliczeniu prawdopodobieństwa trafienia wykorzystując metodę statystycznego eksperymentu określa się wynik strzelania.

W przypadku uzyskania trafienia oblicza się w oparciu o wzór wprowadzony do modelu prawdopodobieństwo rażenia celu.

Wzorem takim może przykładowo być

$$G(c) = 1 - \left(1 - \frac{1}{c}\right)^c, \quad /5.14/$$

gdzie c - liczba trafień.

Funkcja ω zależy od odległości, na której uzyskano trafienie, od typu celu, oraz typu czołgu prowadzącego ogień. Funkcja ta charakteryzuje średnią liczbę trafień niezbędną do uzyskania rażenia celu, to znaczy moc ogniową strzelającego czołgu i odporność celu.

5.4. Dokładność modelowania stochastycznego

Ocena dokładności modelu - to określenie różnic pomiędzy wynikami uzyskanymi przy pomocy tego modelu a wynikami rzeczy - wistymi. Jest oczywistym, że jakość realizacji poszczególnych etapów modelowania wywiera wpływ na wynikową dokładność modelu.

Należy zatem rozpatrzyć wpływ na dokładność modelu dwóch podstawowych czynników : 1/ odwzorowania procesu „ fizycznego ” oraz 2/ uzyskania w algorytmie modelu tylko przybliżonych parametrów stanów elementów ugrupowania.

Dokładność modelu określają specjaliści, dostatecznie kompetentni w badanym problemie, przez porównanie wyników obliczonych w oparciu o model z wynikami rzeczywistego procesu. Należy jednak zauważyć, że bardzo często organizacja takiego eksperymentu jest wręcz niemożliwa, zatem jednym z aktualnych zadań, jest poszukiwanie i opracowanie teoretycznych metod określania dokładności modeli .

Przy modelowaniu stochastycznym szczególną przydatność dla dokładności matematycznej ma prawidłowe określenie liczby realizacji, niezbędnych do uzyskania zadowalających charakterystyk funkcji losowych. Po każdej realizacji otrzymuje się N wartości rzędnych tych funkcji w punktach

$$t_1, t_2, \dots, t_N .$$

Załóżmy, że wykonano n takich realizacji. Należy znaleźć

odpowiednie wartości charakterystyk pewnej funkcji losowej $x(t)$: jej wartość oczekiwaną $m_x(t)$, dyspersję $D_x(t)$, funkcję korelacji $k_x(t, t')$ itd. W tym celu należy obliczyć odpowiednie wartości tych charakterystyk dla każdego przekroju posługując się znanymi wzorami :

$$m_x(t_\nu) = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_i(t_\nu) ,$$

$$D_x(t_\nu) = \frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^n [x_i(t_\nu) - m_x(t_\nu)]^2 ,$$

$$k_x(t_\nu, t_\mu) = \frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^n [x_i(t_\nu) - m_x(t_\nu)] [x_i(t_\mu) - m_x(t_\mu)] .$$

Ponadto, dla przybliżonej oceny dystrybuanty zmiennej losowej, często niezbędnym staje się poznanie częstości pojawiania się możliwych wartości zmiennej losowej dla każdego przekroju.

Uzyskawszy prosty zbiór statystyczny

$$x_1, x_2, \dots, x_n$$

i przekształciwszy go na szereg rozdzielczy

$$x_1^* \leq x_2^* \leq \dots \leq x_n^*$$

można uzyskać empiryczną dystrybuantę $F_n(x)$:

$$F_n(x) = \begin{cases} 0 & \text{dla } x \leq x_1^* \\ \frac{k}{n} & \text{dla } x_k^* < x \leq x_{k+1}^* \\ 1 & \text{dla } x > x_n^* . \end{cases} ,$$

Niech zmienna losowa przyjmuje w tej realizacji jedną z możliwych wartości : C_1, C_2, \dots, C_m .

Wykorzystując otrzymany szereg rozdzielczy łatwo jest

uzyskać zbiór liczb m_j .

Zatem częstość pojawienia się każdej z wartości m_j będzie równa

$$p_j^* = \frac{m_j}{n} ; \quad j = 1, 2, \dots, m .$$

Z twierdzenia Borela [8] wynika, że częstość uzyskaną w ten sposób można przyjąć jako przybliżoną wartość prawdopodobieństwa, ponieważ dla $n \rightarrow \infty$ częstość dąży do prawdopodobieństwa. Jaką wartość powinno mieć n , aby 1° - otrzymane częstości były dostatecznie bliskimi prawdopodobieństw i 2° - empiryczna dystrybuanta $F_n(x)$ była dobrym przybliżeniem dystrybuanty teoretycznej $F(x)$?

Ponieważ charakter dystrybuanty teoretycznej przy modelowaniu z reguły nie jest znany, to w praktyce najczęściej postępuje się w sposób następujący.

Model realizuje się n_1 razy, przy czym n_1 jest na tyle duże, że spełniony jest warunek $m_j \gg 5$.

Uzyskawszy wyniki tworzymy empiryczną dystrybuantę $F_n(x)$. Z twierdzenia Gliwienki [8] wynika, że przy $n \rightarrow \infty$ prawdopodobieństwo tego, że górna granica wartości bezwzględnej różnicy pomiędzy dystrybuantą empiryczną a teoretyczną dąży do zera, jest równe jedności. Dlatego też, jeżeli otrzymamy dwie empiryczne dystrybuanty dla pewnych, dostatecznie dużych wartości n_1 i n_2 , to z odpowiednio dużym prawdopodobieństwem można oczekiwać że miara odchylenia między nimi będzie dowolnie mała. Zatem, wykonawszy jeszcze pewną ilość realizacji, na przykład 1, otrzymamy nowe dane statystyczne dla $n_2 = n_1 + 1$. Określiwszy dystrybuantę $F_{n_2}(x)$ można ją przyjąć jako dystrybuantę teoretyczną i zweryfikować hipotezę, że zmienna losowa η wg. danych wyboru n_1 podlega rozkładowi

$$F_{n_1}(x) = F(x).$$

Weryfikację tą prowadzi się wykorzystując test istotności χ^2 [9].

Jeżeli występuje różnica pomiędzy wybranymi danymi a założonym hipotetycznym rozkładem, to hipotezę odrzuca się.

W tym przypadku przeprowadzamy jeszcze 1 realizacji i otrzymujemy $F_{n_3}(x)$, gdzie $n_3 = n_2 + 1$, którą traktujemy jako dystrybuantę hipotetyczną, a $F_{n_2}(x)$ - jako empiryczną, poczym ponownie weryfikujemy nową hipotezę.

Proces ten powtarzamy tak długo, aż różnica stanie się nieistotna. Załóżmy, że zajdzie to dla dystrybuanty $F_{n_k}(x)$. Zatem można przyjąć ^{1/}, że otrzymana dystrybuanta empiryczna $F_n(x)$ dowolnie aproksymuje do nieznanej dystrybuanty teoretycznej, przy czym $n = n_k$. Wykorzystując funkcję $F_n(x)$ można otrzymać oszacowania nieznanych probabilistycznych charakterystyk m_x , D_x , / najczęściej wystarcza tych momentów dla dalszych badań, pozostałe charakterystyki można uzyskać w analogiczny sposób /.

Wykonawszy to dla każdego przekroju, można otrzymać ciąg wartości :

$$\begin{aligned} & m_x(t_1), \dots, m_x(t_\nu), \dots, m_x(t_N), \\ & D_x(t_1), \dots, D_x(t_\nu), \dots, D_x(t_N), \\ & k_x(t_\nu, t_\mu) \text{ dla } \nu, \mu \text{ z przedziału } (1, N). \end{aligned}$$

Znając te wartości można wyznaczyć przybliżone postacie funkcji

$$m_x(t), \quad D_x(t) \quad \text{i} \quad k_x(t, t').$$

Często funkcje te można aproksymować wygodnymi wyrażeniami analitycznymi. Niekiedy wystarcza sprawdzenie, na ile częstość p_j^* dobrze przybliży prawdopodobieństwo przyjęcia przez zmienną

1/ Brak ścisłego dowodu dla przypadku ogólnego. - Przyp. autora.

losową wartości o numerze j .

Zadanie polega na tym, aby w oparciu o obserwowaną częstość wyznaczyć z dowolnie dużym prawdopodobieństwem przedział pokrywający prawdopodobieństwo poszukiwane.

Niech ten zadany poziom prawdopodobieństwa wynosi P ; wówczas można znaleźć takie $t_p > 0$, że

$$P \left\{ -t_p < \frac{P_j^* - P_j}{\sqrt{\frac{P_j(1-P_j)}{n}}} < t_p \right\} \cong$$

$$\cong \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-t_p}^{t_p} e^{-\frac{t^2}{2}} dt = 2 \Phi_0(t_p) = P,$$

gdzie $\Phi_0(x)$ - jest funkcją Laplace'a [9].

Wówczas granice przedziału ufności można wyznaczyć ze wzorów :

$$p_1(x, n) = \frac{2np_j^* + t_p^2 - t_p \sqrt{D}}{2(n + t_p^2)},$$

$$p_2(x, n) = \frac{2np_j^* + t_p^2 + t_p \sqrt{D}}{2(n + t_p^2)},$$

w których

$$D = \sqrt{4np_j^*(1 - p_j^*) + t_p^2}.$$

W tym przypadku otrzymuje się przedział ufności $[p_1, p_2]$ odpowiadający zadanemu poziomowi ufności α .

Wszystkie wartości prawdopodobieństwa pokrywane przez przedział ufności przyjmuje się za równoważne empirycznym częstościom p_j^* , zaś znajdujące się na zewnątrz tego przedziału - jako nierównoważne. Wartość t_p dla każdego wybranego poziomu ufności α znajduje się z tablic wartości $\Phi(z)$ [4]. Przy opracowy-

waniu wyników modelowania najczęściej obiera się $\alpha = 0,95$ i dla tej wartości znajduje się $t_p \approx 2$.

Założwszy dokładność danych wyjściowych, na przykład wyjściowych wartości prawdopodobieństw równą Δp , należy realizować proces do tej pory, aż długość przedziału ufności stanie się mniejsza lub równa wartości Δp , ponieważ dążenie do większej dokładności nie ma sensu.

Można oczekiwać, że odpowiednim kryterium oceny adekwatności matematycznego modelu do rzeczywistego procesu walki będzie zgodność liczebności przeciwników.

Założmy, że w wyniku przeprowadzonych 15 walk otrzymano wartości liczebności m_i nacierającej kompanii w określonej chwili walki :

2, 0, 5, 2, 2, 3, 1, 4, 2, 0, 3, 2, 5, 0, 2 .

Średnia arytmetyczna liczebności nacierających czołgów w tej chwili będzie równa

$$\bar{m} = \frac{1}{15} \sum_{i=1}^{15} m_i = 2,2 ,$$

a wariancja

$$\bar{D} = \bar{\sigma}^2 = \frac{1}{15} \sum_{i=1}^{15} (\bar{m} - m_i)^2 = 2,246 ; \bar{\sigma} = 1,56.$$

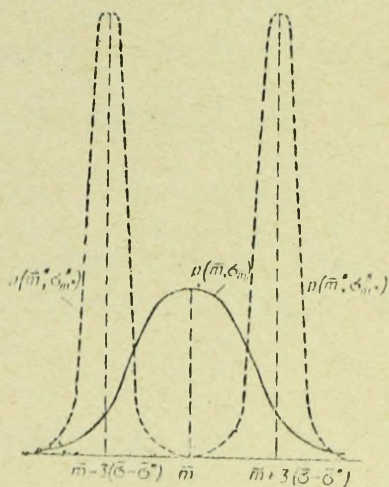
Zatem wartość przeciętna będzie miała rozkład normalny (rys. 5.9) o parametrach

$$\bar{m} \text{ i } \sigma_{\bar{m}} = \frac{\bar{\sigma}}{\sqrt{15}} = 0,402 .$$

Jeżeli teraz wykorzystamy nasz model do opisu rozegranych walk, to uzyskując w danej chwili wartości liczebności czołgów w przedziale

$$\bar{m} \pm 3\sigma_{\bar{m}} = 3,406 \pm 0,994$$

można przyjąć, że wyniki modelowania pokrywają się z realnym procesem.



Rys. 5.9. Dopuszczalne odchylenie wyników modelowania w stosunku do realnego procesu

Uzyskując oszacowania liczebności za pomocą modelu stochastycznego podany wyżej przedział zmienności zmniejszy się o wielkość $\pm 3 \sigma_m^*$, gdzie σ_m^* - oznacza odchylenie standardowe średniej arytmetycznej uzyskanej z modelu stochastycznego. Jeżeli założymy, że

$$\begin{aligned} \bar{\sigma}^* &= \bar{\sigma} \quad \text{to} \\ \sigma_m^* &= \frac{\bar{\sigma}}{\sqrt{100}} = 0,156 \end{aligned}$$

i przedział zmienności zmniejszy się do $2,938 \div 1,462$.

Analogiczne oszacowanie można zrealizować dla dowolnie wybranej, ustalonej chwili, jednak nie będzie ono wyczerpujące.

Poniżej rozpatrzemy nieco różniący się od znanych w analizie statystycznej, sposób oszacowania dokładności modelowania matematycznego w stosunku do rzeczywistych procesów.

Sposób ten można wykorzystywać, gdy liczba realizacji rzeczywistego procesu jest niewielka.

Mamy matematyczny model walki czołgów ze środkami oppanc pozwalający określić liczbę zniszczonych czołgów i środków oppanc do chwili t od początku walki. Będziemy oceniać ten model przez porównanie zniszczonych środków bojowych w N ($N = 10 \div 15$)

wzajemnie niezależnych realizacjach zachowując przy tym identyczność wszystkich warunków walki uwzględnionych w modelu.

W zadanych chwilach t_1, t_2, \dots, t_k dla wszystkich realizacji ustalamy liczbę zniszczonych środków bojowych dla obu stron.

Oznaczmy przez $\omega_i(t_j)$ i $\lambda_i(t_j)$ ($i = 1, 2, \dots, N$); ($j = 1, 2, \dots, k$) stosunek liczby zniszczonych czołgów i środków oppanc w chwili t_j w i -tej realizacji walki do ich liczby początkowej :

$$\omega_i(t_j) = \frac{m_0 - m_i(t_j)}{m_0} \quad \text{i} \quad \lambda_i(t_j) = \frac{n_0 - n_i(t_j)}{n_0} .$$

Zatem wartości średnie liczby zniszczonych czołgów i środków oppanc do chwili t_j odpowiednio wyniosą :

$$\omega(t_j) = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N \omega_i(t_j) \quad \text{oraz} \quad \lambda(t_j) = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N \lambda_i(t_j)$$

Oznaczmy te same stosunki, również do chwili t_j , uzyskane z modelu przez $\omega^*(t_j)$ i $\lambda^*(t_j)$.

Chcąc ocenić dokładność modelu według liczby zniszczonych środków bojowych do chwili walki t_j wystarczy ocenić różnice :

$$\Delta\omega(t_j) = \omega(t_j) - \omega^*(t_j) \quad \text{oraz}$$

$$\Delta\lambda(t_j) = \lambda(t_j) - \lambda^*(t_j) .$$

Gdybyśmy rozporządzali większą ilością, wzajemnie niezależnych rzeczywistych realizacji walki, na przykład $N \geq 100$, to naturalnie, przy ocenie posłużylibyśmy się testem χ^2 tzn. testem Pearsona . Jednak mała ilość obserwacji nie pozwala na stosowanie testu Pearsona.

Niech $s_1(t_j)$ i $s_2(t_j)$ oznaczają odpowiednio odchylenie

nia standardowe dla $\Delta\omega(t_j)$ i $\Delta\lambda(t_j)$. Wówczas wielkość

$$V_1(t_j) = \frac{(N-1)S_1^2(t_j)}{D_1} \quad (1 = 1, 2)$$

gdzie D oznacza wariancję zmiennej losowej $s_1(t_j)$ i ma rozkład χ^2 [9].

Ponieważ przedział ufności dla zmiennej losowej s_1 można zapisać w postaci

$$J_1(t_j) = \left(\frac{s_1(t_j)(N-1)}{\chi_1^2} ; \frac{s_1(t_j)(N-1)}{\chi_2^2} \right),$$

to dla poziomu ufności α z tablic rozkładu χ^2 dla prawdopodobieństw

$$p(v > \chi_1^2) = \frac{1-\alpha}{2} \quad \text{i} \quad p(v > \chi_2^2) = \frac{1+\alpha}{2}$$

można znaleźć [9] wartości χ_1^2 i χ_2^2 oraz następnie określić wielkość przedziału ufności $J_1(t_j)$:

Wielkości $\omega(t_j)$ i $\lambda(t_j)$ mają rozkład asymptotycznie normalny, zatem, wykorzystując wartości graniczne przedziałów ufności $J_1(t_j)$ i $J_2(t_j)$ odpowiednio jako maksymalne i minimalne wartości $s_1(t_j)$ i $s_2(t_j)$ można znaleźć graniczne prawdopodobieństwa.

$$p(\Delta\omega(t_j) < \eta_1) \quad \text{i} \quad p(\Delta\lambda(t_j) < \eta_2) ,$$

gdzie $\eta_1 = m_0 - m(t)$ i $\eta_2 = n_0 - n(t)$ dla $t \geq t_j$ czyli bieżące wartości liczby zniszczonych środków bojowych odpowiednio dla obu przeciwników. Oznaczmy te prawdopodobieństwa dla zmiennej losowej $\Delta\omega(t_j)$ przez $p_1(t_j)$ i $p_2(t_j)$, a dla zmiennej losowej $\Delta\lambda(t_j)$ - przez $G_1(t_j)$ i $G_2(t_j)$. Ponieważ wartości $\omega^*(t_j)$ i $\lambda^*(t_j)$ określane w modelu matematycznym dla danej chwili t_j można uznać za zmienne nielosowe, zatem

przedziałami ufności dla prawdopodobieństw zgodności liczby zniszczonych środków bojowych do chwili t_j w modelu i w rzeczywistej modelowanej walce będą odpowiednio

$$J_1 / t_j / = \left[p_1 / t_j / , p_2 / t_j / \right]$$

oraz

$$\bar{J}_2 / t_j / = \left[G_1 / t_j / , G_2 / t_j / \right] .$$

Wynika stąd, że jako miarę dokładności matematycznego modelu walki czołgów ze środkami oppano do chwili t_j można przyjąć następujące prawdopodobieństwa :

$$p / t_j / = \frac{1}{2} \left[p_1 / t_j / + p_2 / t_j / \right]$$

oraz

$$G / t_j / = \frac{1}{2} \left[G_1 / t_j / + G_2 / t_j / \right] .$$

Prawdopodobieństwa $p(t_j)$ i $G(t_j)$ mają odpowiednio przedziały ufności $J_1(t_j)$ i $J_2(t_j)$ dla poziomu ufności równego α .

5.5. Przykłady zastosowania modelu stochastycznego

Na rys. 5.10 pokazano schemat blokowy modelu stochastycznego zbudowany w oparciu o opisane w poprzednich paragrafach zasady. W schemacie tym można wyróżnić następujące podstawowe grupy bloków :

- bloki 1,2,3,4, 6,7,8,9, odzwierciedlające formalizowany proces walki ;
- bloki 0,5, 10, 11, 12, 13, 15, 16, 17 i inne , pomocnicze, zabezpieczające funkcjonowanie modelu /blok czasu - " zegar " , generator liczb losowych itp. / ;
- blok 14 - opracowania wyników.

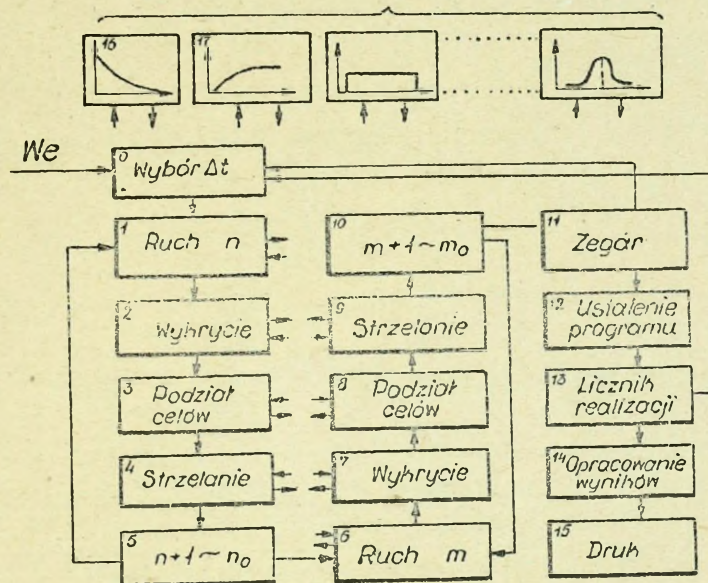
Bloki odzwierciedlające formalizowany proces walki modelują elementarne procesy jakim podlegają środki ogniowe w walce, takie, jak przemieszczanie, poszukiwanie, wykrywanie celu, podział celów i prowadzenie ognia. Funkcjonowanie tych bloków jest koordynowane przez blok czasu, który może być nastawiony albo na pracę ze stałym krokiem i wówczas mamy do czynienia z tak zwanym „modelem Δt ”, albo też, krok może być zmienny, $\Delta t = \text{var}$, a przejście z jednego stanu w drugi następuje w chwili skokowej zmiany jednego z parametrów, czyli jest to model quasi - węzłowy.

Taka budowa modelu zapewnia autonomię każdego bloku i pozwala na ewentualną ich zmianę w zależności wybranego schematu przebiegu procesu.

Omawiane w dalszym ciągu przykłady pewnych konkretnych przypadków zastosowania modeli zrealizowano stosując opisane wyżej sposoby odzwierciedlenia podstawowych procesów walki. Uzyskane w toku oddzielnych realizacji wyniki podlegały statystycznemu opracowaniu w bloku 14 i w zależności od objętości zbioru służyły do

oszacowania badanego parametru z wiekszym lub mniejszym bledem.

Generatory liczb losowych wg. różnych rozkładów



Rys. 5.10. Schemat blokowy modelu stochastycznego

Na przykład, przy ocenie wartości oczekiwanej pewnego parametru m w ustalonej chwili walki po N realizacjach maksymalny błąd ε określa się następująco [2]

$$\varepsilon = |m - M(m)| < 3 \sqrt{\frac{\bar{D}(m)}{N}} \leq 3 \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^N (m_i - \bar{m})^2}{N(N-1)}}, \quad /5.15/$$

gdzie m_i - wartość parametru w ustalonej chwili w i -tej realizacji ; \bar{m} - średnia arytmetyczna parametru po N realizacjach ; $\bar{D}(m)$ - wariancja ; $M(m)$ - wartość oczekiwana.

W praktyce, stosując wzór (5.15) dla oceny parametru występującego w toku walki jeden raz, liczbę realizacji można ograniczyć do $N = 100 \div 200$. Inne parametry wymagają odpowiednio mniejszej lub większej liczby realizacji.

Rozpatrzmy następujący przykład ^{1/} :

- prędkość czołgów $v = 15$ km/godz ;

- wymiary czołgów : $l = 3,0$ m , $m = 2,0$ m , $h = 0,9$ m
dla czołgów w obronie i $l = 6,0$ m , $m = 2,5$ m , $h = 2,5$ m
dla czołgów w natarciu ;

- charakterystyki rozrzutu przy strzelaniu z czołgów na odległości $500 \div 2500$ m :

$$U_{wo} = 0,10 \div 0,70 , \quad U_{wn} = 0,20 \div 2,0 ,$$

$$U_{so} = 0,10 \div 0,50 , \quad U_{sn} = 0,25 \div 0,9 ;$$

przy strzelaniu z miejsca, zaś przy strzelaniu w ruchu

$$U_{wo} = 0,40 \div 1,2 , \quad U_{wn} = 0,45 \div 1,3 ,$$

$$U_{so} = 0,80 \div 2,5 , \quad U_{sn} = 0,85 \div 2,8 ;$$

- średnia ilość trafień w czołg konieczna do uzyskania jego rażenia $1,4 \div 2,0$;

- wymiary PPRK , PPR, RPG : pionowa płaszczyzna $m \times h = 1,0 \times 0,5$ m² , płaszczyzna rażenia odłamkami $l \times m = 20 \times 10$ m² ;

- prawdopodobieństwo trafienia do czołgu z PPRK na odległościach ^h 500, 1500 i 3000 m odpowiednio 0,4, 0,6, 0,4 ;

- rozrzut przy strzelaniu z granatnika

$$U_{sn} = U_{wn} = 0,001 D ;$$

- prawdopodobieństwo trafienia do czołgu PPR pierwszym wystrzałem 0,5 , piątym wystrzałem $P_5 = 0,8$;

- prawdopodobieństwo wykrycia z czołgu na odległościach 500 - 3000 m :

$$\text{czołgu w okopie } 0,9 \div 0,3 ,$$

$$\text{PPRK, PPR, RPG : strzelających } 0,8 \div 0,6 , \\ \text{niestrzelających } 0,3 \div 0,0 ;$$

1/ Wartości parametrów w tym przykładzie i w następnych są fikcyjne. - Przyp. autora.

- odległość otwarcia ognia D_{\max} :
- dla czołgów w obronie 2000 m
- dla czołgów w natarciu 2500 m ,
- dla PPRK 2000 m ,
- dla PPR 500 m ,
- dla RPG 300 m .

W przykładzie pierwszym dla czołgów „niebieskich” w okopach :

- średnia liczba trafień do czołgu „niebieskich” konieczna do jego rażenia 1,76 - 1,85 na odległościach odpowiednio 500 - 1000m,
- średnia liczba trafień do czołgu „czerwonych” konieczna do jego rażenia 1,65 - 2,25 na odległość odpowiednio 500 - 1000 m.

Przytoczymy wyniki modelowania w oparciu o podany w § 5.2 schemat natarcia średnich czołgów „czerwonych” na okopane lekkie czołgi „niebieskich”.

W tabelicy 5.3 podano wartości funkcji η ; uzyskane w wyniku jednej realizacji walk na modelu przy ataku „czerwonych” z odległości 1km i początkowym stosunku sił „czerwonych” :
„niebieskich” = 10:5 .

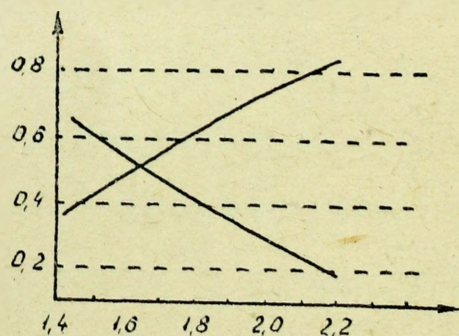
Opracowanie statystyczne wyników modelowania przy 100 realizacjach dla każdego badanego wariantu pozwoliło na określenie prawdopodobieństwa zwycięstwa każdej ze stron oraz statystycznych charakterystyk liczebności w końcu trzeciej minuty walki i w najbardziej prawdopodobnej chwili zakończenia tej walki , to znaczy w 4,2 min. Wartości te podano w tabelicy 5.4.

Przy obliczaniu prawdopodobieństwa zwycięstwa, za zwycięzcę uznawano tą stronę, która dysponowała co najmniej jednym czołgiem w chwili, gdy wszystkie czołgi przeciwnika były zniszczone, to znaczy ich gotowość bojowa była równa zeru. W przypadku, gdy

następowało jednoczesne rażenie pozostałych sprawnych czołgów u obu stron - uznawano obie strony za zwyciężone. Rys.5.11 obrazuje zależność prawdopodobieństwa zwycięstwa dla każdej ze stron w zależności od początkowego stosunku sił.

Analiza przytoczonych wyników pozwala na stwierdzenie, że dla uzyskania dostatecznie prawdopodobnego zwycięstwa konieczne jest w skrajnym przypadku posiadanie dwukrotnej przewagi początkowej. W pozostałych przypadkach zwycięstwo „czerwonych” jest mniej prawdopodobne niż zwycięstwo „niebieskich”, a osiągnięcie go pociąga za sobą nadmierne straty.

W celu sprawdzenia prawidłowości założonych w modelach sektorów wykrycia środków ogniowych rozpatrzmy wielkości kątów ostrzału czołgów w natarciu. Wyniki rozwiązania tego zadania mogą być wykorzystane jako uzasadnienie przy zalecaniu odpowiedniego sposobu prowadzenia obserwacji z czołgów w toku walki, a także przy wyborze broni obronnej.



Rys. 5.11. Zależność prawdopodobieństwa zwycięstwa od początkowego stosunku sił.

Kątem ostrzału α nazwiemy kąt pomiędzy kierunkiem ruchu czołgu a kierunkiem na ostrzeliwujący ten czołg środek ogniowy przeciwnika /rys.5.12/ .

TABLICA 5.3

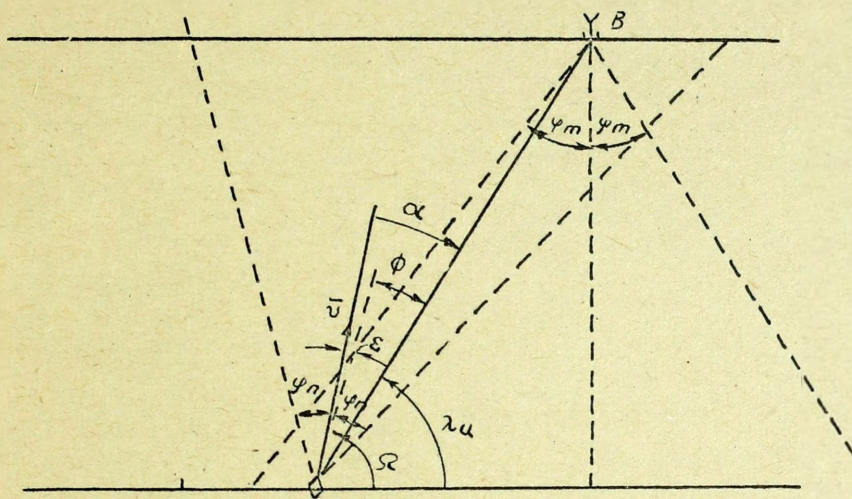
Zmiany stanów elementów w czasie walki

Nr czołgu	1 min			2 min			3 min			4 min			5 min						
	7 _h	7 _z	7 _s	7 _h	7 _z	7 _s	7 _h	7 _z	7 _s	7 _h	7 _z	7 _s	7 _h	7 _z	7 _s				
"czerwoni"																			
1	1	346	8	1	0	344	4												
2	1	343	7	1	0	370	2												
3	1	332	4	1	0	324	4												
4	1	304	2	1	0	362	10	1	0	351	9	1	0	420	8	1	0	444	2
5	1	312	2	0	0	340	4	1	0	405	15	1	0	444	8	1	0	514	3
6	1	340	4	1	1	340	4												
7	1	311	8	1	1	341	2												
8	1	302	2	1	0	340	1	1	0	364	2								
9	1	304	2	1	0	325	6	1	0	350	8	1	0	407	2	1	0	422	4
10	1	300	3	1	0			1	0	351	4	1	0	445	2				
"niebiescy"																			
1	1			1	1			0	0										
2	1																		
3	1			1	1			0	0										
4	1			1	1			1	1										
5	1			1	1			1	1										

TABLICA 5.4

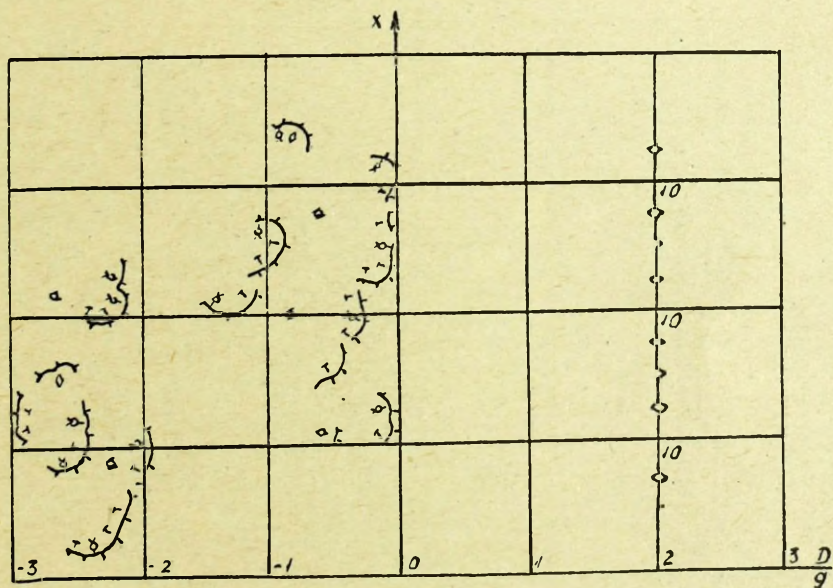
Zmiany liczebności stron w toku walki

Początkowy stosunek sił	Średnie straty i ich odchylenie standardowe w ciągu 3 min walki		Średnie straty i ich odchylenie standardowe w chwili końca walki		Prawdopodobieństwo zwycięstwa i jego przedział ufności							
	„czerwonych”	„niebieskich”	„czerwonych”	„niebieskich”	„czerwonych”	„niebieskich”						
	straty odchylenia	straty odchylenia	straty odchylenia	straty odchylenia	P-strona przedział	P-strona przedział						
10:5	5,46	1,45	3,53	1,08	6,7	2,26	4,66	0,81	0,8	0,664 - -0,902	0,2	0,1 - -0,337
10:6	5,7	1,55	3,6	1,10	7,7	2,22	5,2	1,12	0,6	0,492 - -0,675	0,4	0,325 - -0,508
10:7	6,2	1,03	3,3	1,10	9,3	1,09	5,4	1,54	0,38	0,336 - -0,446	0,62	0,554 - -0,675



Rys. 5.12. Schemat wzajemnego położenia celu i rażącego go środka ogniowego w walce :

Ω - kierunek ruchu ; λ_u - kierunek do celu ; ϵ - położenie lufy ; α - kąt ostrzału czołgu ; $2\psi_n$ - sektor wykrycia czołgu $2\psi_m$ - sektor wykrycia środka ppanc .



Rys. 5.13. Wariant modelowanej walki

Zebrano dane statystyczne obserwowanych kątów ostrzału α przy modelowaniu walki 30 czołgów nacierających w jednej linii na punkty oporu 2 kompanii piechoty jak pokazano to na rys. 5.13 , oraz w dwóch innych wariantach, gdy te punkty oporu znajdowały się albo na skrzydle atakujących czołgów, lub też w jednym rzucie , a uderzenie czołgów było skierowane na ich styk.

TABLICA 5.5

Częstości kątów ostrzału czołodów w walce

D, км	p, p*	Kąt ostrzału α					
		10	20	30	40	50	60
2	p	0,325	0,269	0,194	0,116	0,060	0,024
	p*	0,301	0,279	0,205	0,124	0,050	0,026
1	p	0,174	0,166	0,158	0,126	0,106	0,084
	p*	0,186	0,150	0,141	0,137	0,114	0,076
0	p	0,119	0,117	0,112	0,104	0,094	0,085
	p*	0,113	0,113	0,120	0,106	0,098	0,090
-1	p	0,092	0,089	0,086	0,084	0,081	0,076
	p*	0,099	0,086	0,095	0,083	0,080	0,068
-2	p	0,072	0,071	0,070	0,068	0,066	0,064
	p*	0,070	0,082	0,070	0,071	0,072	0,066

D, км	p, p*	Kąt ostrzału α						
		70	80	90	100	110	120	130
2	p	0,008	0,002	0,001				
	p*	0,011	0,003	0,001				
1	p	0,062	0,046	0,030	0,020	0,012	0,006	0,004
	p*	0,070	0,053	0,024	0,022	0,014	0,007	0,004
0	p	0,075	0,063	0,053	0,045	0,037	0,029	0,022
	p*	0,081	0,069	0,054	0,053	0,031	0,024	0,019
-1	p	0,072	0,066	0,060	0,052	0,044	0,038	0,033
	p*	0,073	0,069	0,061	0,057	0,051	0,042	0,035
-2	p	0,062	0,060	0,055	0,050	0,046	0,041	0,037
	p*	0,060	0,057	0,064	0,049	0,051	0,040	0,038

D, км	p, p*	Kąt ostrzału α						
		140	150	160	170	180	$\chi^2_{0,05}$	n
2	p p*							
1	p p*	0,002 0,001	0,001 0,001					
0	p p*	0,017 0,011	0,012 0,007	0,008 0,005	0,006 0,003	0,004 0,003	27,6 18,01	1350
-1	p p*	0,029 0,032	0,025 0,028	0,020 0,018	0,016 0,014	0,012 0,009	27,6 4,41	667
-2	p p*	0,033 0,036	0,029 0,026	0,026 0,032	0,024 0,017	0,021 0,015	27,6 10,6	1012

W tabelicy 5.5 podano częstości p^* pojawienia się określonych kątów ostrzału dla różnych odległości D zaobserwowane w 12 realizacjach każdego wariantu walki oraz prawdopodobieństwa p obliczone dla tych wartości przy założeniu, że rozkład zmiennych jest normalny a jego parametry wynoszą $M(\alpha) = 0$ i

$$\sigma_{\alpha} = 17^{\circ} + (2 - D) 15^{\circ} .$$

W przedostatniej kolumnie tabelicy podano wartości funkcji χ^2 odczytane z tablic na poziomie istotności 0,05 oraz obliczone dla każdej wartości D .

Analiza przeprowadzona metodą pokazaną w [9] wykazuje, że rozkład uzyskanych w rezultacie modelowania wartości kątów ostrzału można doskonale aproksymować rozkładem normalnym o podanych wyżej parametrach dla przedziału zmienności odległości D od +2 do -2km.

Prawdopodobieństwo ostrzału z sektora $\Delta\alpha = \alpha_2 - \alpha_1$ przy założeniu, że ruch czołgów odbywa się po linii prostej, można wyznaczyć ze wzoru :

$$P_{\Delta\alpha} = \frac{1}{\sigma_{\alpha} \sqrt{2\pi}} \int_{\alpha_1}^{\alpha_2} e^{-\frac{x^2}{2\sigma_{\alpha}^2}} dx \quad \text{dla } \alpha_2 > \alpha_1$$

Najważniejsze wyniki modelowania maksymalnych kątów ostrzału występujących z prawdopodobieństwem nie większym od 0,05 i 0,10, oraz odpowiadających im wartości sektorów wykrycia dla środków ogniowych znajdujących się w obronie podano w tabl. 5.6. Formalizując opisaną walkę należy stosować wartości sektorów wykrycia nie mniejsze od podanych w tabelicy.

Postępując analogicznie jak w poprzednim przykładzie można dokonać analizy możliwości pojawienia się dowolnych wartości kąta obrotu wieży ψ nacierającego czołgu w chwili wyboru celu, t.zn. znaleźć wartość sektora wykrycia dla nacierającego czołgu.

TABLICA 5.6

Maksymalne kąty ostrzału

P	0,05					0,10				
	2	1	0	-1	-2	2	1	0	-1	-2
D, km										
α_{max} , stopnie	47	88,5	130	171	213	39,6	74,6	109	144	179
$2\psi_m \geq 2\alpha_{max}$, stopnie	94	177	260	342	360	79,2	149,2	208	288	358

Otrzymane wyniki i wypracowana metodyka ich uzyskiwania mogą oprócz ich bezpośredniego wykorzystania przy modelowaniu walki znaleźć także zastosowanie przy projektowaniu czołgów, oraz przy opracowywaniu wytycznych i wskazówek dla prowadzenia obserwacji z czołgów w toku walki.

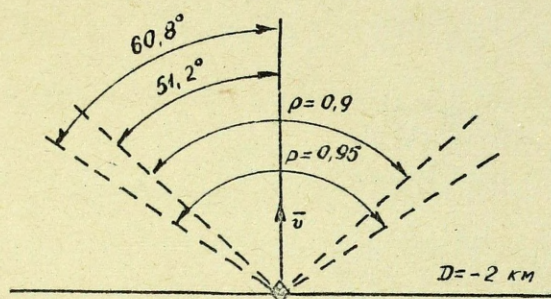
Ponieważ wybór celów położonych pod dużymi kątami do kierunku ruchu czołgu następuje z niewielkim prawdopodobieństwem, można ograniczyć sektor wykrywania z czołgu do przedziałów podanych na rys. 5.14. Zmniejszanie sektora wykrywania z czołgu pociąga za sobą zwiększenie efektywności tego wykrywania.

Rys. 5.15 przedstawia we współrzędnych biegunowych krzywe funkcji gęstości

$$P_\alpha = \frac{1}{\sigma_\alpha \sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2\sigma_\alpha^2}}$$

$$P_\psi = \frac{1}{\sigma_\psi \sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2\sigma_\psi^2}}$$

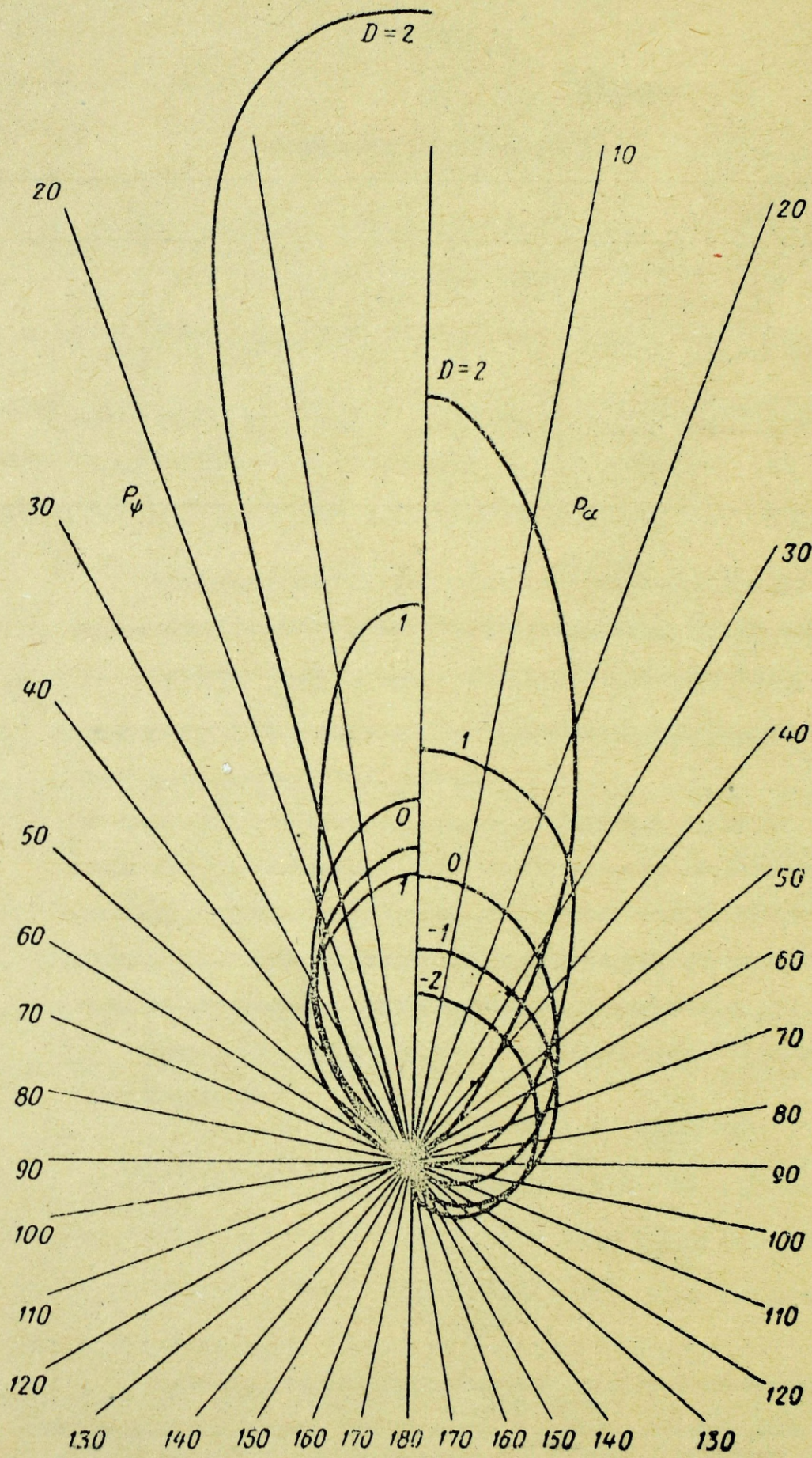
Kończąc, rozpatrzmy celowość przyjęcia określonych schematów podziału celów. Rozwiązując problem wyboru celu w stochastycz-



Rys. 5.14. Prawdopodobieństwo ostrzału celu w sektorze o danej wielkości.

nych modelach walki ugrupowania niejednorodnego można, wprowadzając szereg założeń upraszczających, zamiast metod programowania liniowego lub dynamicznego, zastosować proste algorytmy wyrażnie skracające czas maszynowy zużywany przy realizacjach tych modeli. W wybranym w naszym modelu algorytmie, podstawowym było założenie, że zdarzenie polegające na jednoczesnym wyborze przez dwa dowolne środki ogniowe jednego celu jest zdarzeniem niemożliwym /czyli prawdopodobieństwo tego zdarzenia jest równe zero/. W najprostszym przypadku, jako kryterium wyboru celu, przyjęto odległość między środkiem ogniowym a celem, przy czym minimalizowano tę wartość /kryterium I / ; okazuje się zresztą, że jest to najczęściej najbezpieczniejsze kryterium w rzeczywistych walkach tego rodzaju. Jako drugie kryterium można przyjąć wielkość strat przeciwnika w danym kroku obliczeniowym, przy czym wybierać będziemy tak, aby maksymalizować tę wielkość.

Przypuścimy, że środek ogniowy powinien w chwili t dokonać z pośród znajdujących się przed nim wykrytych celów, wyboru celu, do którego będzie następnie prowadzić ogień. Ponieważ w modelu, każdy środek bojowy obu walczących stron charakteryzuje się w dowolnej chwili parametrami stanu /oprócz jego danych taktyczno-technicznych / takimi jak : numer celu, do którego prowadzi on



Rys. 5.15. Wykresy funkcji P_α i P_ψ

ogień , numerami wykrytych celów, numerami celów, które z kolei prowadzą ogień do niego, to łatwo zauważyć, że wybór celu maksymalizujący straty przeciwnika, lub minimalizujący straty własne - nie przedstawia trudności. Prawdopodobieństwo rażenia celu j przeciwnika przy zmianie nastaw po każdym strzale po tym, gdy każdy z celów prowadzących do danego środka bojowego ogień oddał po jednym strzale wynosi

$$P_j = 1 - (1 - p_{1j}) \dots (1 - p_{kj}) = p_{1j} + (1 - p_{1j}) p_{2j} + (1 - p_{1j}) (1 - p_{2j}) p_{3j} + \dots + p_{kj} \prod_{s=1}^{k-1} (1 - p_{sj}) \quad (5.16)$$

gdzie p_{kj} - prawdopodobieństwo rażenia celu j przez środek k prowadzący do niego ogień .

Jeżeli dla wszystkich j ($1 \leq j \leq m$) można napisać wyrażenie (5.16) , to najbardziej efektywnym z punktu widzenia maksymalizacji wielkości strat przeciwnika $\Delta_m = \sum_{j=1}^m p_j$ na danym

kroku będzie wybór tego celu, dla którego iloczyn

$$p_{kj} \prod_{s=1}^{k-1} (1 - p_{sj})$$

stanowiący ostatni wyraz wzoru (5.16) będzie największy. Taki wybór można przyjąć wówczas, gdy szybkostrzelności wszystkich biorących udział w walce środków bojowych są w przybliżeniu jednokowe ; w rzeczywistych warunkach walk rozpatrywanego rodzaju warunek ten jest najczęściej spełniony.

Sformułowanie konkretnego zadania może nakładać na sposób wyboru celu szereg dodatkowych warunków ograniczających. Na przykład, zgodnie z trzecim kryterium, wybór celu opiera się na minimalizacji strat własnych. Algorytm nie wymaga wówczas innych zmian, poza wprowadzeniem wag przy wykorzystywaniu wartości

P_j . Wagi te są proporcjonalne do tych strat, które zadaje cel j prowadzącemu ogień środkowi. W przypadku ogólnym, wagi te mogą uwzględniać ponadto ważność naszego środka bojowego.

Konieczność analizy celowości przyjęcia określonego kryterium wynika przede wszystkim ze znacznego zwiększenia czasu jednej realizacji modelu stochastycznego w przypadku kryterium II, a szczególnie - kryterium III. Jeżeli przyjąć za jednostkę czas jednej realizacji modelu wykorzystującego kryterium I, to dla kryterium II czas ten wzrasta czterokrotnie, zaś dla kryterium III - ośmiokrotnie. W tabl. 5.7 przytoczono rezultaty pozwalające na ocenę efektywności przyjęcia kryteriów II i III. Wynika z nich że końcowa liczebność ugrupowania czołgów może być zwiększona o 15% w przypadku optymalizacji wykorzystania własnych możliwości ogniowych - dla wariantu walki przedstawionego schematycznie na rys. 5.13 wynosi to około jednego wozu bojowego.

TABLICA 5.9

Wpływ optymalizacji podziału celów
na wynik walki

Kryterium	Odległość w km					
	1,5	1	0,5	0	-0,5	-1
I	100	100	100	100	100	100
II	100,4	100,8	101,5	103,1	106,4	112,7
III	100,5	100,9	101,7	103,5	107,2	114,2

Należy zauważyć, że w rzeczywistych warunkach ani czołgi, ani środki ogniowe broniące się przeciwnika nie starają się optymalizować podziału celów w oparciu o nieelastyczne kryterium własnych możliwości ogniowych, zatem modelując te walki wykorzystujemy kryterium I.

Właściwości elektronicznych maszyn cyfrowych stosowanych do modelowania działań bojowych.

W porównaniu z uniwersalnymi elektronicznymi maszynami cyfrowymi, maszyny przeznaczone do modelowania działań bojowych powinny posiadać dodatkowe urządzenia zabezpieczające realizację modeli. Do tych urządzeń należą: długotrwała pamięć /pamięć zewnętrzna/, generator sygnałów czasu, automatyczne urządzenie piszące, urządzenia do zobrazowania sytuacji i generator liczb losowych.

Długotrwała pamięć jest odmianą pamięci operacyjnej umożliwiającej wybór, według programu, nieprzerwanie zapisywanej w niej informacji. Jako stałe informacje mogą być wykorzystane dane tabelaryczne, dane taktyczno-techniczne, najbardziej potrzebne wartości stałe, programy standartowych i specjalnych funkcji /Laplacea, Bayesa, Gaussa itd/. Zastosowanie długotrwałej pamięci zwalnia pamięć operacyjną od przechowywania stałych informacji, podwyższa możliwości elektronicznej maszyny cyfrowej i zmniejsza koszt modelowania.

Generator sygnałów czasu przeznaczony jest do generowania ostrych okresowych impulsów, sumowania ich i przekształcania w odcinki czasu. Po zwróceniu się, zgodnie z programem, do generatora sygnałów czasu, do odpowiedniej komórki powinna być przesłana wartość bieżącego czasu astronomicznego lub umownego. Wartość początkową i poprawkę do generatora sygnałów czasu wprowadza się z pulpitu kierowania. Generator sygnałów czasu zabezpiecza modelowanie w czasie rzeczywistym i pozwala na kierowanie w czasie blokami modelu.

Do utrzymania wyników modelowania, uwzględniając ich stosunkowo dużą objętość, celowo jest wykorzystywać współczesne szybko piszące urządzenia automatyczne. W chwili obecnej przemysł krajowy^{1/} produkuje dwa rodzaje takich urządzeń: automatyczną cyfrową drukarkę /ACFU-128/ i urządzenie kreślące /DRP-3/ w układzie współrzędnych prostokątnych. Automatyczna drukarka cyfrowa pozwala otrzymać wyniki pośrednie i końcowe nie tylko w postaci numerycznej, ale również w postaci schematów i tablic przedstawiających położenie i stan stron biorących udział w starciu w różnych chwilach czasu procesu modelowania.

Trzeba zaznaczyć, że graficzne możliwości drukarki wykorzystywane są stosunkowo rzadko, a ich realizacja wymaga opracowania bardzo złożonego programu dla elektronicznej maszyny cyfrowej.

W odróżnieniu od automatycznej drukarki cyfrowej pracującej w reżimie skokowym, urządzenie kreślące jest urządzeniem analogowym i pracuje dzięki przesuwaniu główki kreślącej w układzie współrzędnych prostokątnych. Przy pomocy urządzenia kreślącego mogą być opisane dowolnie złożone sytuacje przedstawiające położenie różnych pojedynczych środków, ich charakter działania, kierunek przesunięcia, wyniki strzelania itd.

Szczególne miejsce wśród urządzeń dodatkowych elektronicznych maszyn cyfrowych przeznaczonych do modelowania działań bojowych zajmują generatory liczb losowych. W szeregu przypadków można obejść się bez tych generatorów oraz bez urządzeń wyżej wymienionych i przeprowadzać modelowanie przy pomocy uniwersalnych maszyn cyfrowych. Jednak w tym przypadku wynikają określo-

1/ Przemysł ZSRR - przyp.tłum.

ne trudności związane z otrzymaniem liczb losowych oraz zwiększa się czas modelowania.

Liczby losowe, konieczne do modelowania zdarzeń przypadkowych, można otrzymać różnymi sposobami. Najprostszym generatorem liczb losowych jest urządzenie wytwarzające równomiernie rozłożone sygnały odpowiadające wartościom 1 i 0 lub słowom tak, nie. Na przykład, jeżeli na oś nałożymy dysk rozdzielony przez średnicę na dwie równe i izolowane części, to impulsy przeciwne zdejmowane z tych części przez nieruchomy kontakt w chwili zatrzymania się dysku, mogą być wykorzystane do otrzymania liczb losowych. Urządzenia elektromechaniczne z powodu małej prędkości, nie mogą być praktycznie wykorzystywane do otrzymywania liczb losowych w elektronicznych maszynach cyfrowych.

W elektronicznych generatorach liczb losowych sygnały przypadkowe wypracowywane przez generator szumów przechodzą przez układ formowania, gdzie przyjmują postać impulsów prostokątnych o dwóch poziomach napięcia i dochodzą do sumatora wykonującego złożone operacje logiczne. W wyniku dodawania, parzysta liczba impulsów daje na wyjściu sumatora wartość 0, a nieparzysta liczba impulsów wartość 1. Sumator logiczny, licząc ilość impulsów pozwala usunąć usterki wynikające z odchylenia czasu trwania impulsów i daje na wyjściu równomierny ciąg liczb d_i , przyjmujących wartości 0,1. Ciąg liczb d_i tworzy na wyjściu k pozycyjną liczbę losową postaci

$$z = \alpha_k 2^{-k} + \alpha_{k-1} 2^{-(k-1)} + \dots + \alpha_i 2^{-i} + \dots + \alpha_1 2^{-1}$$

gdzie:

$$\alpha_i = \begin{cases} 0 \\ 1 \end{cases} \quad /i = 1, 2, \dots, k/$$

Jeżeli wszystkie $\alpha_i = 1$, to otrzymamy liczbę $Z = \sum_{i=1}^k 2^i =$
 $= 1-2^{-k}$

Jeżeli wszystkie $\alpha_i = 0$, to $Z=0$. Na podstawie losowej kolejności i , otrzymamy liczbę losową Z , prawdopodobieństwo wystąpienia jej w przedziale $[0, 1]$ można obliczyć ze wzoru: 2^{-k} . Liczby Z uporządkowane w kolejności wzrastającej tworzą następujący ciąg:

$$0, \frac{1}{2^k}, \frac{2}{2^k}, \dots, \frac{i}{2^k}, \dots, \frac{2^k - 1}{2^k}$$

Wartość oczekiwania z

$$m(z) = \sum_{j=0}^{2^h-1} \frac{j}{2^h} \frac{1}{2^h} = \frac{1}{2} \left(1 - \frac{1}{2^h} \right)$$

z dokładnością do $\frac{1}{2^{k+1}}$ określona liczbą wygenerowanych liczb losowych, jest bliska wartości $m / z / = 0,5$, co jest dowodem, że rozkład liczb losowych Z podlega rozkładowi równomiernemu. Sprawdzenie według odchylenia standardowego $/Z/$ oraz na podstawie kryteriów zgodności wykazuje, że k pozycyjna liczba Z , przedstawiona w wyżej podany sposób, posiada rozkład równomierny w przedziale $0,1$.

Mając ciąg Z_i możemy otrzymać drugi ciąg liczb losowych W_1 dla dowolnego przedziału a, b przy różnych prawach rozkładu. Jeżeli przedział jest nieograniczony z prawej strony

$a = 0, b = \infty$ i znana jest funkcja gęstości $F / W_1 /$, to liczby W_1 , określa się na podstawie znanych liczb Z_i ze wzoru

$$F / W_1 / = Z_i$$

Na przykład dla wykładniczego prawa rozkładu z parametrem otrzymamy:

$$F / W_i / = 1 - e^{-\lambda W_i}$$

na podstawie tego

$$W_i = - \frac{1}{\lambda} \ln / 1 - Z_i /$$

Jeżeli przedział $[a, b]$ jest ograniczony i znana jest funkcja $f / w /$ gęstości rozkładu wielkości W , to należy przejść do przedziału jednostkowego $[0, 1]$ osi odciętych, co realizuje się przez zamianę zmiennych

$$Z = \frac{W - a}{b - a}$$

Przejście do przedziału jednostkowego osi współrzędnych prowadzi do zamiany zmiennych

$$U = \frac{f \left[a + \frac{b-a}{m} Z \right]}{f/m}$$

gdzie: f/m - największa wartość funkcji $f \left[a + \frac{b-a}{m} Z \right]$ w przedziale $[0, 1]$

Dla dowolnych par liczb losowych Z_i i Z_{i+1} zbioru Z na podstawie warunku

$$Z_i \leq \frac{f \left[a + \frac{b-a}{m} Z_{i+1} \right]}{f/m}$$

można dobrać zbiór liczb

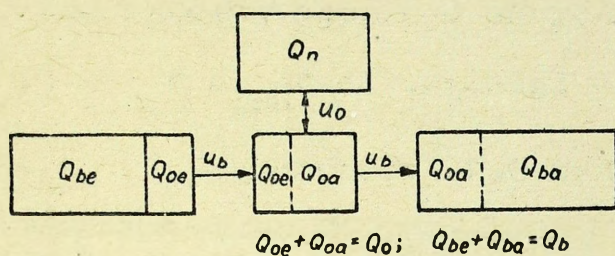
$$W_i = a + \frac{b-a}{m} Z_i,$$

podlegający założonemu rozkładowi $f / u /$ w przedziale $[a, b]$

W przypadku braku generatora liczb losowych można posługiwać się tablicami liczb losowych, wprowadzając je do pamięci

operacyjnej EMC lub otrzymać liczby pseudolosowe na podstawie programów. Istota takich programów polega na tym, że wybiera się jedną lub kilka liczb losowych i na nich wykonuje się działania arytmetyczne lub logiczne, w wyniku których otrzymuje się liczby pseudolosowe, mające rozkład zbliżony do równomiernego. Na przykład można wziąć dwie k - pozycyjne liczby losowe Z_0 i Z_1 i pomnożyć jedną przez drugą. Ich iloczyn będzie posiadał $Z \cdot k$ pozycji. Wybierając średnią z k pozycji otrzymamy liczbę pseudolosową Z_2 , następnie na podstawie Z_2 i Z_1 możemy otrzymać Z_3 itd. Podanym sposobem można otrzymać nie więcej jak 2^k liczb pseudolosowych. Przy "degeneracji" liczb pseudolosowych tj. przy otrzymaniu $Z_i = 0$ należy zamienić Z_i jedną z wcześniej otrzymanych liczb i obliczenia prowadzić dalej.

Przy zastosowaniu elektronicznych maszyn cyfrowych do modelowania działań bojowych często wynika problem oceny ilości czasu maszynowego potrzebnego na realizację tego lub innego modelu, przy uwzględnieniu wielokrotnego jego powtórzenia dla różnych wariantów danych początkowych. Sumaryczna ilość czasu maszynowego t_{Σ} zależy od szybkości pracy EMC U_0 , wielkości programu Q_D , ilości danych początkowych Q_{be} , szybkości dostępu do pamięci zewnętrznej U_p i od przyjętej organizacji pracy EMC. Dla typowego schematu przedstawionego na rys. D.1. ilość czasu maszynowego określona jest na podstawie częstotliwości i szybkości dostępu do wolno pracującej pamięci zewnętrznej. Na początku określimy ilość informacji Q_{oe} , która jest jednorazowo przekazywana z pamięci zewnętrznej do pamięci operacyjnej, dla której czas t_{Σ} rozwiązania zadania będzie najmniejszy.



Rysunek D.1. Schemat pamięci EMC

- Q_{oa} - jednorazowa ilość wyników;
- Q_{be} - całkowita ilość początkowych danych;
- Q_{ba} - całkowita ilość wyników;
- Q_n - wielkość programu;
- Q_{oe} - wielkość obszaru pamięci operacyjnej przeznaczonego dla danych początkowych.

Czas t_Σ może być w przybliżeniu określony ze wzoru:

$$t_\Sigma = t_o + t_{ne} + t_e + t_{na} + t_a;$$

gdzie: t_o - czas wykonania programu;

t_{ne} - czas poszukiwania danych początkowych w pamięci zewnętrznej;

t_e - czas przekazania danych początkowych do pamięci operacyjnej;

t_{na} - czas poszukiwania strefy wyników w pamięci zewnętrznej;

t_a - czas przekazania wyników do pamięci zewnętrznej.

Czasu na wydrukowanie lub zobrazowanie wyników nie uwzględnia się, podobnie jak we współczesnych EMC operacje te łączą się z wykonaniem programu i nie potrzebują dodatkowego czasu.

Dla EMC, które mają połączone operacje poszukiwania stref w pamięci zewnętrznej, można założyć, że $t_{ne} = t_{na} = 0$.

Na podstawie rysunku D.1. otrzymamy:

$$t_o = \frac{Q_{be}}{Q_{oe}} \cdot \frac{Q_{\pi}}{U_o}$$

$$t_{\pi e} + t_e = \left(\alpha_e \frac{Q_{be}}{U_b} + \frac{Q_{oe}}{U_b} \right) \frac{Q_{bc}}{Q_{oe}},$$

$$t_{\pi a} + t_a = \left(\alpha_a \frac{Q_{ba}}{U_b} + \frac{Q_{oa}}{U_b} \right) \cdot \frac{Q_{ba}}{Q_{oa}},$$

gdzie: - współczynnik uwzględniający złożoność programu;
 - współczynniki uwzględniające rozmieszczenie danych początkowych i wyników $/0,3 < \alpha_e < 0,5/$;

Oznaczając stosunek $Q_{oa} : Q_{oe} = \varepsilon$ i uwzględniając, że $Q_{oe} + Q_{oa} = Q_o$ wyrażenie na obliczenie t_{Σ} przyjmie postać:

$$t_{\Sigma} = \frac{Q_{be} + Q_{ba}}{U_b} + (1 + \varepsilon) \frac{Q_{be}}{Q_o} \left(\alpha_o \frac{Q_{\pi}}{U_o} + \alpha_e \frac{Q_{be}}{U_b} + \frac{\alpha_a}{\varepsilon} \cdot \frac{Q_{ba}^2}{U_b Q_{be}} \right)$$

Z wzoru tego widać, że w celu zmniejszenia t_{Σ} należy wykorzystać wolną pojemność pamięci operacyjnej $/Q_o/$ i wybrać optymalną wielkość $\varepsilon = \varepsilon_o$, którą obliczamy na podstawie warunku, że $t_{\Sigma} / \varepsilon_o = \min$. Różniczkując t_{Σ} względem zmiennej ε i przyrównując pochodną do zera otrzymamy

$$\varepsilon_o = \sqrt{\frac{\alpha_a}{\alpha_e + \alpha_o \frac{U_b}{U_o} \cdot \frac{Q_{\pi}}{Q_{be}}} \cdot \frac{Q_{ba}}{Q_{be}}}$$

Zgodnie z tym, że: $U_0 \gg U_b$, $Q_{be} \gg Q_{\pi}$; $\alpha_e \approx \alpha_a$

można przyjąć: $\epsilon_0 = \frac{Q_{ba}}{Q_{be}}$

Dla tych założeń minimalna wartość t_{Σ} będzie wynosić

$$t_{\Sigma} = \left[\frac{U_0}{U_b} + \alpha_0 \frac{Q_{\pi}}{Q_0} + \alpha_e \frac{Q_b}{Q_0} \cdot \frac{U_0}{U_b} \right] \cdot \frac{Q_b}{U_b}$$

Przechodząc do efektywnej szybkości pracy EMC i zakładając, że $Q_{\pi} = Q_0$, otrzymamy

$$\frac{Q_b}{t_{\Sigma}} = \frac{U_0}{\alpha_0 + \left(1 + \alpha_e \frac{Q_b}{Q_0}\right) \frac{U_0}{U_b}}$$

Z otrzymanego wyrażenia widać, że efektywna szybkość pracy EMC U_{ef} jest znacznie mniejsza od maksymalnej szybkości pracy U_0 i zmniejsza się wraz ze wzrostem ilości danych początkowych. Na przykład, jeżeli $\alpha_0 = 1$; $\alpha_e = 0,5$;

$$\frac{U_0}{U_b} = 5 \text{ to } U_{ef} = 0,12 U_0.$$

DODATEK 2

O pewnej właściwości gasnącego strumienia zgłoszeń

Matematyk węgierski A. Reni udowodnił, że jeżeli w dowolnym strumieniu z ograniczonym następstwem, w którym zgłoszenie pozostaje z prawdopodobieństwem $1-p$ i ubywa ze strumienia z prawdopodobieństwem p wskutek zmiany skali czasu, intensywność strumienia nie ulega zmianie, to taki strumień dąży /zbliża się/ do strumienia najprostszego [8]. Z tego wynika, że w zbiorze kolejnych stref obsługi istnieje taka i -ta strefa, w której wielkość następstwa wchodzącego do niej strumienia zgłoszeń zwiększa się w $1, 2, \dots, i-1$ strefach osiągając wielkość maksymalną. W przypadku, kiedy i jest mniejsze od M -numeru ostatniej strefy obsługi, to wielkość następstwa strumienia wchodzącego kolejno w strefy $i+1, \dots, M$ zmniejsza się wraz z przejściem strumienia do strefy następnej, tj. strumień zgłoszeń Palma, w zbiorze stref $i+1, \dots, M$, monotonicznie zbliża się do strumienia najprostszego. Wobec tego interesujący nas problem należy sformułować w następujący sposób.

Niech do strefy obsługi S i $S+1$; $S=1, 2, \dots, M$ wchodzi strumienie zgłoszeń z intensywnością równą intensywności strumienia wchodzącego do strefy S . Pytamy się, czy w tych warunkach prawdopodobieństwa odmowy obsługi /prawdopodobieństwo nierażenia wykrytych celów/ w strefie S i w strefie $S+1$ będą takie same, czy też będą się różnić i czy ich różnica zależy będzie od S .

W tym celu rozpatrzmy tzw. zadanie Palma. Mamy system obsługi składający się z r jednakowych urządzeń, w którym dowolne zgłoszenie wchodzące do systemu obsługi jest obsługiwane j -tym $j \leq r$ urządzeniem wtedy i tylko wtedy, kiedy otrzymało odmowę obsługi od $j-1$ urządzeń obsługi. Założymy, że do pierwszego

urządzenia obsługi wchodzi prosty strumień, to znaczy, że do następnych urządzeń wchodzi strumienie typu Palma.

Przy tych założeniach prawdopodobieństwo odmowy obsługi przez j -te urządzenie, strumienia wchodzącego z intensywnością λ do pierwszego urządzenia pod warunkiem, że rozkład czasu trwania obsługi jest funkcją wykładniczą, o średniej liczbie zgłoszeń obsługiwanych w jednostce czasu równej μ . Określa się na podstawie wzoru Erlanga

$$E_j = \frac{l^j}{j! \sum_{k=0}^j \frac{l^k}{k!}}$$

gdzie: $l = \frac{\lambda}{\mu}$

Jeżeli prawdopodobieństwo odmowy obsługi przez j -te urządzenie, pod warunkiem, że strumień zgłoszeń wchodzi do tego urządzenia oznaczmy przez π_j , to otrzymamy

$$\pi_j = \frac{E_j}{E_{j-1}} \quad /D.1/$$

W celu wyjaśnienia zadania Palma udowodnimy następujące twierdzenie [23]
"Jeżeli π_S i $\pi_{S-1}^{\lambda_S}$ są prawdopodobieństwami odmowy określonymi na podstawie wzoru /D.1/ dla strumieni Palma wchodzących z intensywnością λ_S do stref obsługi S i $/S-1/$, to dla wszystkich $S \geq 1$ prawdziwa jest następująca nierówność":

$$\pi_S - \pi_{S-1}^{\lambda_S} > 0 \quad /D.2/$$

Na podstawie tego twierdzenia można wyciągnąć następujące wnioski:

1. Liczba przypadków odmowy obsługi strumieni Palma jest większa od liczby przypadków odmowy obsługi prostego strumienia zgłoszeń posiadającego tę samą intensywność.
2. Obsługa strumienia Palma z następstwem odpowiadającym i -temu urządzeniu zachodzi z większą ilością odmów niż obsługa strumienia Palma o tej samej intensywności, jednak z następstwem odpowiadającym urządzeniu $/i-1/$.

Aby dowiedzieć się do jakich błędów może doprowadzić obsługa strumienia zgłoszeń w strefie i bez uwzględnienia wzrostu zależności od historii procesu tj. bez uwzględnienia zmian następstw w strumieniu zgłoszeń wchodzącym do strefy i w stosunku do strumienia wchodzącego do strefy $/i-1/$ niezbędne jest określenie charakteru zmian i ich wielkości:

$$\pi_s - \pi_{s+1}^{\lambda_s} \quad /s = 1, 2, \dots, r-1/$$

Określmy różnicę

$$\pi_s - \pi_1^{\lambda_s} \quad \text{i} \quad \pi_3 - \pi_2^{\lambda_3}$$

Oznaczmy przez λ_s intensywność strumienia wchodzącego do urządzenia $S /s \geq 2/$. Wówczas

$$\lambda_s = \lambda E_{s-1} \quad (s = 2, 3, \dots)$$

Na podstawie wzoru Erlanga [7]

$$E_s = \frac{l_s}{s} \bigg/ \sum_{h=0}^{s-1} \frac{l_h}{h!} = \frac{l_s}{s+l_s} \quad \left(l_s = \frac{\lambda_s}{u} \right)$$

Następnie, na podstawie wzoru /D.1/ otrzymamy

$$\pi_{s+1} = \frac{l_{s+1}(s+l_s)}{l_s(s+l_{s+1}+1)}$$

Jeżeli: $l_3 = lE_{s-1}$

$$\pi_{s+1} = \frac{s\pi_s + l_{s+1}}{s + l_{s+1} + 1}$$

/D.3/

Podstawiając: $\lambda_2 = \lambda\pi_1$ otrzymamy

$$\pi_1^{\lambda_2} = \frac{l\pi_1}{1+l\pi_1} = \frac{l^2}{l^2+l+1}$$

/D.4/

Odejmując od równości /D.3/ dla $s=1$ równość /D.4/ otrzymamy

$$\pi_2 - \pi_1^{\lambda_2} = \frac{l}{l^4 + 3l^3 + 5l^2 + 4l + 2}$$

Na podstawie, że $\lambda_3 = \lambda E_2$ i równości /D.3/ otrzymamy

$$\pi_3 = \frac{2\pi_2 + l_3}{3 + l_3}$$

$$\pi_2^{\lambda_3} = \frac{\pi_1^* + l_3}{2 + l_3}$$

Znajdziemy π_1^* . Jeżeli $l_2 = \frac{l^2}{l+1}$, to

$$l = \frac{l_2 + \sqrt{l_2^2 + 4l_2}}{2}$$

stąd

$$\pi_1 = \frac{l}{1+l} = \frac{l_2 + \sqrt{l_2^2 + 4l_2}}{2 + l_2 + \sqrt{l_2^2 + 4l_2}}$$

A więc

$$\pi_1^* = \frac{l_3 + \sqrt{l_3^2 + 4l_3}}{2 + l_3 + \sqrt{l_3^2 + 4l_3}}$$

Uwzględniając równości

$$l_3 = \frac{l^3}{l^2 + 2l + 2} \quad \text{i} \quad l_2 = \frac{l^2}{l+1}$$

i przeprowadzając proste przekształcenia otrzymamy

$$\pi_2^{\lambda_3} = \frac{l^3(l^3 + 3d) + l(l^3 + d)\sqrt{l^4 + 4l^3 + 8l^2 + 8l}}{(2d + l^3)(2d + l^3 + l)\sqrt{l^4 + 4l^3 + 8l^2 + 8l}}$$

gdzie: $d = l^2 + 2l + 1$

Na podstawie wyrażeń: π_3 i $\pi_2^{\lambda_3}$ obliczymy, że

$$\pi_3 - \pi_2^{\lambda_3} = \frac{l^7 + 8l^6 + 32l^5 + 72l^4 + 108l^3 + 96l^2 + 32l}{D} - \frac{(l^5 + 4l^4 + 8l^3 + 16l^2 + 12l)\sqrt{l^4 + 4l^3 + 8l^2 + 8l}}{D};$$

gdzie: $D = \sqrt[3]{1^3+3d} / \sqrt[3]{2d+1^3} / \sqrt[3]{2d+1^3+1} \sqrt{1^4+4 \cdot 1^3+8 \cdot 1^2+8 \cdot 1}$

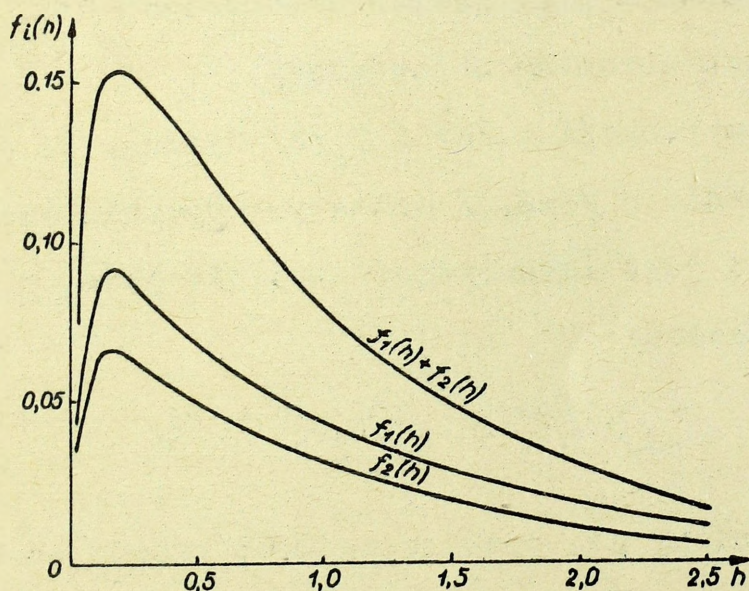
Na rysunku D.2 przedstawione są wykresy funkcji:

$$f_1(h) = \pi_2 - \pi_1^{\lambda_2} \quad \text{i} \quad f_2(h) = \pi_3 - \pi_2^{\lambda_3},$$

w których parametr h zależy od l . Zależność h od l wyrażona jest przy pomocy następujących równości:

$$l^2 - lh - h = 0 \quad \text{dla } f_1/h/$$

$$l^3 - l^2h - 2lh - 2h = 0 \quad \text{dla } f_2/h/$$



Rys.D.2 wykresy funkcji $f_1/h/$ i $f_2/h/$

Z wykresów funkcji $f_1/h/$ i $f_2/h/$ wynika:

$$1. \quad \pi_{s+1} - \pi_s^{\lambda_s} < 0.75 (\pi_s - \pi_{s-1}^{\lambda_s}) \quad \text{dla } S=2$$

2. Maksymalna różnica

$$\tilde{\pi}_S - \tilde{\pi}_{S-1}^{\lambda_S} \quad /S=2,3,\dots,r/$$

występuje dla $\lambda_S \approx 0,15$. Przy wystąpieniu odchylen od tej wartości zarówno w jedną, jak i w drugą stronę, różnica gwałtownie maleje.

3. Maksymalna wartość funkcji $f_1/h/ = 0,09$, a funkcji $f_2/h/ = 0,065$.

Na podstawie tego, maksymalna wielkość błędów, jakie możemy otrzymać, jeżeli założymy, że na drugie i trzecie urządzenie obsługi wchodzi najprostsze strumienie zgłoszeń, a nie strumienie Palma, będzie wynosić: 0,09 dla funkcji $f_1/h/$ i 0,065 dla funkcji $f_2/h/$.

Oczywiście, nie zawsze można lekceważyć takie błędy. Dlatego też należy wskazać przy jakich wartościach λ_S strumień Palma można uważać jako strumień najprostszy.

Z wykresów funkcji $f_1/h/$ i $f_2/h/$ wynika, że strumień wchodzący do urządzenia S $/S=2,3/$ można praktycznie uważać za najprostszy, jeżeli jego intensywność spełnia jedną z dwóch następujących nierówności:

$$\lambda_S > 0,75 \mu, \quad \lambda_S < 0,05 \mu \quad /D.5/$$

Błąd jaki popełniamy nie przekracza 0,05 prawdopodobieństwa odmowy obsługi przez dane urządzenie.

Na podstawie tego co było powiedziane dotychczas o strumieniach Palma, można nadać im następującą interpretację geometryczną. Jeżeli w strumieniu najprostszym zgłoszenia są równomiernie rozłożone w czasie, tj. w zbiorze wchodzących zgłoszeń nie ma "zagęszczeń i rozrzedzeń", to w strumieniach Palma wskutek obsługi zgłoszeń w poprzednich strefach pojawiają się puste obszary.

Liczba pustych obszarów i ich wielkość w strumieniach wchodzących do strefy i będzie rosnać w miarę wzrostu numeru strefy.

W ten sposób możemy założyć, że strumienie Palma są strumieniami składającymi się ze zbioru "zagęszczeń" i pustych obszarów, a wzrost następstwa polega na zwiększeniu pustych obszarów i ich wielkości. Podana interpretacja geometryczna strumieni Palma i twierdzenie A. Reni pozwalają stwierdzić, że nierówność

$$\bar{\pi}_{s+1} - \bar{\pi}_s^{\lambda_{s+1}} < \bar{\pi}_s - \bar{\pi}_{s-1}^{\lambda_s}$$

jest spełniona dla $S > 2$. Założenie to zostało sprawdzone na przykładach liczbowych dla $S=3,4$ i 5 . Dla tych danych otrzymaliśmy:

$$\bar{\pi}_4 - \bar{\pi}_3^{\lambda_4} \leq 0,048$$

$$\bar{\pi}_5 - \bar{\pi}_4^{\lambda_5} \leq 0,039$$

$$\bar{\pi}_6 - \bar{\pi}_5^{\lambda_6} \leq 0,032$$

a kryterium odpowiadające /D.5/ dla $/3 \leq S < 5/$ można wyrazić za pomocą nierówności

$$\lambda_s > 2\mu, \lambda_s < 0,0045\mu$$

Z tego wynika, że praktycznie w tych przypadkach, kiedy prawdopodobieństwo odmowy można obliczyć z dokładnością nie przewyższającą $0,05$, w zadaniu Palma dla wartości $S = 5$, strumień wchodzący do strefy obsługi S można traktować jako najprostszy, jeżeli jego intensywność spełnia jedną z nierówności:

$$\lambda_s > 2\mu + (s-5)\Delta_1, \lambda_s < 0,0045\mu - (s-5)\Delta_2,$$

gdzie

$$\Delta_1 = \bar{\pi}_6 - \bar{\pi}_5^{2\mu} = 0,0056$$

$$\Delta_2 = \bar{\pi}_6 - \bar{\pi}^{0,0045\mu} = 0,0075$$

Tablica liczb losowych

11 16 43 63 18	75 06 13 76 74	40 60 31 61 52	83 22 53 73 61
21 21 59 17 91	76 83 15 83 78	41 94 15 35 85	69 95 83 09 16
10 43 84 44 82	66 55 83 76 49	73 50 58 34 72	55 95 31 79 57
36 79 22 62 36	33 26 66 65 83	39 41 21 60 13	11 44 28 93 20
73 94 40 47 73	12 03 25 14 14	57 99 47 67 48	54 62 74 85 11
49 53 31 28 72	14 06 39 31 04	61 83 45 91 99	15 43 98 22 85
64 20 84 82 37	41 70 17 31 17	91 40 27 72 27	79 51 62 10 07
51 48 67 28 75	38 60 52 93 41	58 99 98 38 80	20 12 51 07 94
99 75 62 63 60	64 51 61 79 71	40 68 49 99 48	33 88 07 64 13
71 32 55 52 17	13 01 57 29 07	75 97 83 42 98	08 07 46 20 55
65 28 59 71 98	12 13 85 30 10	34 55 63 98 61	88 26 77 60 68
17 26 45 73 27	38 22 42 93 01	65 99 05 70 48	25 03 77 75 71
95 63 99 97 54	31 19 99 25 58	16 38 11 50 69	25 41 68 78 75
61 55 57 64 04	83 21 01 18 08	52 45 88 88 81	78 35 26 79 13
78 13 79 87 68	04 68 98 71 30	33 00 78 56 07	92 00 84 48 97
62 49 09 92 15	84 98 72 87 59	38 71 23 15 12	08 58 83 14 90
24 21 66 34 44	21 28 30 70 44	58 72 20 36 78	19 18 66 93 02
16 97 59 54 28	33 22 65 59 03	26 18 83 94 97	51 35 14 77 99
59 13 83 95 42	71 16 85 76 09	12 89 35 40 48	07 25 58 61 49
29 47 85 93 52	50 41 43 19 66	33 18 68 13 45	85 09 53 72 82
93 15 59 50 09	27 42 97 29 18	79 89 32 94 48	88 39 25 42 11
29 62 16 65 83	62 95 61 24 68	48 44 91 51 02	44 12 16 94 38
12 63 97 52 91	71 02 01 72 65	94 21 50 42 59	68 98 35 05 61
14 54 43 71 34	54 71 40 24 01	38 64 80 92 78	81 31 37 74 00
83 40 38 88 27	09 83 41 13 33	04 29 24 60 28	75 66 62 69 54
67 64 20 52 04	30 69 74 48 03	17 02 64 97 37	85 87 51 21 39
64 04 19 90 11	61 04 02 73 09	48 07 07 68 48	02 53 19 77 37
17 04 89 45 23	97 44 45 99 04	30 15 99 54 50	83 77 84 61 15
93 03 98 94 16	52 79 51 06 31	12 14 89 22 31	31 36 16 05 59
82 24 43 43 92	93 60 71 72 20	73 83 87 70 07	24 83 39 75 76
93 99 05 52 44	70 69 32 52 55	73 54 74 37 59	95 63 23 95 55
09 11 97 48 03	97 30 38 87 01	07 27 79 32 17	79 42 12 17 69
57 66 64 12 04	47 58 97 83 64	65 12 84 83 34	07 49 32 80 98
46 49 26 15 94	26 72 95 82 72	38 71 66 13 80	60 21 20 50 99
08 43 31 91 72	08 32 02 08 39	31 92 17 64 58	73 79 00 83 57
10 01 17 50 04	83 05 44 11 97	57 23 82 74 64	61 48 75 23 29
92 42 03 54 31	16 53 00 55 40	24 21 94 10 90	08 53 16 15 78
35 54 25 58 65	07 30 44 70 10	31 30 94 93 87	02 33 00 24 76
83 59 52 62 47	18 55 22 94 91	21 75 09 70 24	72 61 93 66 28
72 11 53 49 85	58 03 69 91 37	28 53 78 43 95	25 65 43 78 51
07 42 85 88 63	93 02 38 89 36	97 92 94 12 20	86 43 19 44 85
35 37 92 79 22	28 91 65 50 13	40 53 83 32 22	40 48 69 11 22
10 98 22 28 07	10 92 02 62 99	41 48 39 29 35	17 05 17 82 52
90 12 73 33 41	77 89 61 24 43	93 04 03 64 76	24 99 04 10 99
63 09 21 29 90	23 51 06 87 74	76 83 93 93 00	84 97 80 75 04
40 77 98 63 82	48 45 43 52 69	02 98 25 79 91	50 76 59 19 39
43 21 61 26 08	18 16 78 45 31	94 47 97 65 09	39 17 09 66 29
93 16 76 43 75	74 10 89 36 43	52 29 17 58 22	95 93 69 69 47
70 97 53 26 93	35 68 47 23 07	03 68 40 36 00	52 83 15 53 81
85 81 23 18 75	23 57 07 57 54	58 93 92 83 66	85 76 53 74 65

c.d. tabl. liczb losowych

37	10	06	24	92	63	64	24	76	38	54	72	35	65	27	53	07	63	82	35
53	40	61	38	55	38	51	92	95	00	84	82	88	12	48	25	54	83	40	75
55	17	28	15	56	18	85	65	90	43	65	79	90	19	14	81	36	30	51	73
40	35	38	48	07	47	76	74	68	90	87	91	73	85	49	48	21	37	17	08
18	89	90	96	12	77	54	15	76	75	26	90	78	81	73	71	18	92	83	77
68	14	12	53	40	92	55	11	13	26	68	05	26	54	22	88	46	00	63	52
51	55	99	11	59	81	31	06	32	51	42	58	76	81	49	88	14	79	97	00
92	21	43	33	86	73	45	97	93	59	97	17	65	54	16	67	64	20	50	51
15	08	95	05	57	33	16	68	70	94	53	29	58	71	33	38	26	49	47	08
93	46	10	03	04	11	12	02	22	54	23	01	19	41	08	29	19	66	51	87
28	17	74	41	11	15	70	57	38	35	75	76	84	95	49	24	54	36	32	85
66	95	34	47	37	81	12	70	74	93	83	66	87	03	41	66	46	07	56	48
19	71	22	72	63	84	57	54	98	20	56	72	77	20	36	50	34	73	35	21
68	75	66	47	57	19	98	79	22	22	27	93	67	80	10	09	61	70	44	08
75	02	26	53	32	98	60	62	94	51	31	99	46	90	72	37	35	49	30	25
11	32	37	00	69	90	26	98	92	66	02	98	59	53	03	15	18	25	01	66
55	21	86	34	70	18	15	82	52	83	89	96	51	02	06	95	83	09	54	06
11	47	40	87	83	05	59	46	70	45	45	58	72	96	11	98	57	94	24	81
81	42	28	68	42	60	99	77	96	69	01	07	10	85	30	74	30	57	75	09
21	77	17	59	63	23	15	19	02	74	90	20	96	85	21	14	29	33	91	94
42	27	81	21	60	32	57	61	42	78	04	98	26	84	70	27	87	51	54	80
17	69	76	01	14	63	24	73	20	96	19	74	02	46	37	97	37	73	21	12
05	68	63	02	43	34	12	40	29	36	50	19	77	98	69	83	49	76	87	09
52	99	24	66	50	89	91	05	73	95	46	95	46	75	36	28	96	88	19	36
94	51	89	39	84	81	47	86	77	50	82	54	96	26	76	31	12	34	98	99
00	18	47	21	85	78	90	67	54	81	61	79	88	16	00	80	01	88	47	42
87	46	26	31	65	79	81	66	16	30	57	66	62	90	55	46	51	80	14	87
88	69	25	87	16	12	27	34	81	76	29	80	56	49	94	66	87	26	22	30
20	09	44	29	62	41	38	21	67	68	06	71	13	49	39	19	59	97	62	47
60	93	58	15	04	50	52	08	21	53	13	93	44	68	85	58	31	58	83	66
51	39	28	59	36	43	89	85	05	96	28	54	99	83	27	99	94	32	53	77
54	23	94	19	18	79	52	64	62	74	40	87	16	18	03	25	76	75	54	84
57	89	27	33	94	07	16	09	02	62	47	70	43	83	55	71	70	88	01	17
02	33	07	47	36	53	27	44	44	68	62	61	11	96	98	09	30	42	92	65
76	11	52	92	47	55	34	25	12	99	03	04	78	39	81	11	91	60	92	67
63	31	28	18	83	29	08	52	01	01	26	46	06	05	01	31	73	11	89	38
27	63	22	15	70	34	27	45	64	26	01	76	42	59	69	69	29	38	98	75
06	33	56	21	11	44	01	45	25	67	11	76	25	48	06	02	65	15	29	12
64	14	28	76	76	21	35	88	87	73	31	73	63	16	95	11	52	36	42	13
28	43	62	54	68	75	23	57	53	70	97	15	54	87	06	52	23	92	18	31
09	52	28	38	55	85	97	31	58	88	31	18	14	96	72	17	23	70	40	24
93	71	41	54	14	93	71	20	27	42	32	11	58	26	83	67	18	28	90	30
15	68	15	35	99	58	18	57	38	40	07	06	87	59	47	71	74	36	92	85
71	71	22	39	14	08	90	74	37	68	26	62	27	41	84	75	16	69	67	48
78	45	35	48	44	61	50	90	12	45	02	80	55	26	76	22	51	94	78	48
24	86	06	82	84	19	36	72	90	73	32	30	15	87	01	04	19	33	01	42
37	28	40	68	44	78	88	75	72	76	26	33	95	69	09	39	33	14	21	01
35	48	85	24	73	37	63	43	25	69	95	27	40	95	08	81	01	24	24	13
51	59	55	99	09	35	22	34	49	91	24	27	53	96	32	05	77	79	88	00
90	66	03	51	71	30	02	19	11	20	36	11	64	21	28	69	40	19	41	99
47	50	50	20	08	20	30	08	71	88	96	19	50	70	59	13	26	63	13	89
13	35	00	84	14	64	04	99	43	77	22	40	89	49	58	19	09	55	80	35
33	00	69	26	90	69	24	89	74	43	53	89	62	35	08	16	22	75	69	29
55	21	66	38	86	06	80	41	18	61	22	56	50	24	75	00	25	87	90	18
21	99	12	62	28	14	80	11	91	92	49	43	82	07	72	60	84	66	97	32

c.d. tabl. liczb losowych

71	02	52	82	12	10	47	42	75	22	65	62	03	45	84	00	21	00	48	63
65	52	21	52	42	84	55	47	45	60	20	24	62	69	41	41	29	89	47	63
27	97	55	49	23	90	65	00	61	70	09	43	30	91	67	35	16	63	27	31
07	30	00	97	04	36	09	95	15	77	95	55	27	34	55	16	57	88	81	40
54	35	71	36	89	19	55	90	38	14	75	05	30	51	50	99	12	56	94	42
00	97	70	44	81	42	04	40	85	49	34	82	23	58	43	78	46	88	23	80
13	92	07	87	61	12	31	19	28	08	07	75	30	40	73	58	52	08	00	22
08	39	53	70	43	37	88	03	41	72	04	20	49	44	34	62	79	88	19	02
45	16	66	72	06	01	61	94	37	69	96	77	01	94	40	29	70	04	20	93
87	76	77	76	07	03	74	21	16	13	65	98	95	28	43	10	91	73	44	58
29	88	09	52	88	21	64	64	65	87	05	64	49	47	84	66	99	56	18	12
35	24	82	66	66	14	89	45	92	73	88	95	04	69	77	34	65	11	20	38
12	38	62	95	56	30	47	42	59	64	21	48	29	54	22	02	00	23	36	71
52	05	87	38	01	52	18	81	94	91	55	13	76	10	39	02	00	66	99	13
41	72	75	21	71	56	71	90	60	54	98	44	18	15	29	59	60	76	52	25
49	31	97	45	80	57	47	01	46	00	57	16	83	04	58	23	89	20	78	25
81	78	67	69	63	12	12	72	50	14	71	88	66	53	34	38	01	30	93	79
64	85	69	52	02	43	98	37	26	55	40	41	85	95	04	52	38	30	72	32
11	84	92	64	82	20	46	19	94	50	28	83	37	66	61	47	27	79	29	35
54	96	61	75	94	57	39	37	32	67	37	88	36	21	24	62	19	94	95	42
10	95	93	33	49	80	71	99	67	51	44	88	23	35	92	66	23	41	38	21
22	78	40	77	83	35	91	30	00	91	19	08	21	38	73	07	18	42	15	66
86	03	76	17	91	33	81	56	39	68	45	31	62	92	83	89	31	85	58	06
80	03	76	50	89	85	91	97	43	91	22	78	85	54	33	31	18	87	48	82
72	75	18	43	59	15	76	91	36	15	08	29	38	61	93	05	02	62	12	55
18	53	20	38	74	66	22	07	90	50	29	22	37	05	41	67	11	58	45	84
22	93	62	20	58	49	17	11	10	27	22	68	18	01	10	31	59	50	92	46
66	39	77	65	10	81	15	00	07	04	74	58	09	03	54	43	74	42	21	78
89	73	02	32	72	65	42	03	50	91	69	09	37	13	64	08	10	79	69	52
81	82	17	53	23	95	06	89	17	24	40	45	69	12	34	58	09	05	53	42
94	37	78	25	54	53	58	61	14	32	72	92	76	73	49	83	93	25	89	12
68	48	54	99	91	53	16	51	98	65	61	86	93	30	93	81	12	90	64	81
07	33	00	71	84	86	78	85	45	77	40	04	81	65	20	07	63	81	07	97
10	99	31	49	30	35	07	23	64	29	68	77	39	76	69	28	65	68	99	38
20	80	11	51	78	64	45	38	33	57	09	77	43	07	51	49	74	01	13	85
79	24	13	53	47	66	85	17	92	47	46	13	93	66	89	82	58	71	35	83
43	59	33	95	55	97	34	55	84	94	26	56	69	53	23	32	99	38	99	88
29	52	26	27	13	33	70	11	71	85	06	76	55	71	41	48	61	71	82	82
88	83	64	72	90	67	27	47	83	62	35	38	49	03	80	12	31	78	97	02
65	90	56	62	53	91	48	23	06	89	49	33	37	84	82	36	19	91	13	55
44	79	85	93	71	07	86	58	17	56	45	59	51	41	44	56	80	69	91	26
35	51	09	91	39	32	03	12	79	25	79	81	91	50	54	76	17	41	22	06
50	12	59	32	23	64	20	94	97	14	11	97	16	22	34	74	85	74	64	01
25	17	39	00	38	63	87	14	04	18	11	45	28	93	18	53	08	42	19	93
68	45	99	00	94	44	99	59	37	18	38	74	68	12	71	96	26	09	81	37
93	36	91	30	44	69	68	67	81	62	66	37	80	29	19	34	01	25	00	80
19	36	05	50	49	94	95	17	63	41	84	01	93	06	90	25	65	67	29	96
47	79	88	98	90	06	89	36	54	83	17	70	12	12	92	14	88	01	53	86
69	22	33	20	07	03	51	36	11	49	32	54	69	20	72	62	52	22	15	04
34	51	15	07	21	84	85	03	41	49	97	13	86	19	19	97	78	92	85	75
54	03	15	93	29	58	96	35	22	20	35	29	22	79	24	55	46	74	30	35
66	72	28	55	15	04	72	39	24	11	02	73	70	81	68	30	04	36	34	5
71	05	90	74	96	38	40	41	81	26	28	26	13	78	44	12	54	31	43	9
45	47	88	60	66	31	13	53	32	43	80	57	33	06	06	48	64	45	30	0
97	24	69	11	21	89	43	72	03	93	77	15	38	85	52	26	84	31	28	4

B I B L I O G R A F I A

1. B u s l e n k o N.P. Matematyčeskoje modelirovanie proiz-
wodstwiennyh processow na cifrowyh wyczislitelnyh
maszinach. Wyd. "Nauka", 1964.
2. B u s l e n k o N.P., G o l e n k o D.J., S o b o l I.M.,
S r a g o w i c z W.G., S z r e j d e r J.A. Metod
statyčeskič ispytanij. Wyd. Fizmatgiz, 1962.
3. B u s l e n k o N.P., J u r k i e w i c z O.M. Ob.
opieracjach nad agregatami w słožnyh sistemach. "Izwestia AN
SSSR", Tyechničeskaja Kibiernietika, 1964, nr 2.
4. W e n t c e l E.S. Tyeoria wierojatnostiej. Wyd. "Nauka";
1964.
5. W e n t c e l H.S. Wstępi do badań operacyjnyh. Wyd. MON, 1968.
6. G n i e d e n k o B.W., K o w a l e n k o I.N. Lekciji po
tyeorii massowowo obsłužiwanija. Wyd. KWIRTU, 1963.
7. G n i e d e n k o B.W. Lekciji po tyeorii massowowo obsłu-
žiwanija. Wyd. KWIRTU, 1960.
8. G n i e d e n k o B.W. Kurs tyeorii wierojatnostiej. Wyd.
"Nauka", 1965.
9. D u n i n - B a r k o w s k i I.W., S m i r n o w N.W.
Kurs rachunku prawdopodobieństwa i statyčyki matematycznej.
PWN, 1969.
10. K a u f m a n A., C r u o n R. Massowoje obsłužiwanije.
Wyd. "Mir", 1965 /tłum. z franc./
11. K i t o w A.I., K r i n c k i N.A. Elektromnyje cifrowyje masziny
i programmirowanie. Fizmatgiz, 1959.
12. L u c e R., R a i f f a H. Gry i decyzje. PWN, 1964.

13. M o r s e F., K i m b a l l D. Metody badań operacji. ASG, 1963.
14. N i k i t i n , S i e r g i e j e w , T a r a s o w .
Teoria tanka. Wyd. WBTA, 1956.
15. R o m a n o w s k i W.I. Diskretnyje ciepi Markowa. Gostechizdat, 1949.
16. R i o r d a n D. Wierojatnostnyje sistemy obsłużiwania. Wyd. "Swiaż", 1966.
17. S a r y m s a k o w T.A. Osnowy teorii processow Markowa. Gostechizdat, 1954.
18. F e l l e r W. Wstęp do teorii prawdopodobieństwa. PWN, 1968.
19. C h i n c z y n A.J. Matematyckeskoje metody teorii massowowo obsłużiwania. Trudy matematyckeskoje instituta im. W.A. Stieklowa, t.49, Wyd. AN SSSR.
20. C z e b o t a r e w A. Gieodezja. Izd.gieodeziczieskoje i kartograficzieskoje literatury, 1948.
21. C z u j e w J.W., M i e l n i k o w P.M., P i e t u c h o w S.J., S t i e p a n o w G.F., S z o r J.B. Osnowy issledowanija opieracji w wojennoj tiechnike. Wyd. "Sowietiskoje radio", 1965.
22. J u d i n D.B., G o l e s z t e i n E.G. Zadaczi i metody liniejnowo programmirowanija. Wyd. "Sowietiskoje radio", 1961.
23. A z ł a r o w T.A. Obobszczenije odnoj tieoremy A.J.Chinczyzna. Trudy Taszkientskowo uniwersiteta, 1961/189/.
24. B r a k n e y G. The dynamics of military combat. Operation Research, 1959, vol. 7, nr 1.
25. C h u r c h m a n C.W., A c k o f f R.L., A r n o f f E.L. Queuing models. Introduction to Operation Research, 1957, vol.2
26. C o o p m a n s B. Target detection. Operation Research, 1956, vol. 4, nr 5.

27. G a n e l i u s T. Mathematical discription of warfare. Artillery Tidskrift, 1955, vol.84, nr 3.
28. L a c h r i s s o n L.E. A tank duel with game-theory implications. Naval Research Logistics Quarterly, 1957, vol.4, nr 2.
29. Z i m m e r m a n R.E. A Monte-Carlo model for military analysis. Operation Research, 1959, vol.2.
30. W a l s h J.E. Inadequacy of cost per kill as measure of effectiveness. Operation Research, 1957, vol.5, nr 6.
31. W e i s s K. Lanchester-type models of warfare. Papers International Conference on Operation Research, Bristol - Stonebridge, 1957.
32. L a n c h e s t e r F.W. Aircraft in warfare. The down of the fourth army. London, 1916.
33. Ancker C.J. Stochastic duels. Operation Research, 1962, vol.10.
34. C h e l m b o l d R. Modification of the Lanchester models. Operation Research, 1965, vol.13, nr 2, p.5.
35. Patrz pozycja 27.
36. W e i s s H. Dynamics of the warfare. Operation Research, 1963, vol. 11, nr 1.
37. C o l l i n s G .J., C u t r i e D. A model for the analysis of AEW and CAP aircraft avalibility. Naval Research Logistics Quarterly, 1963, vol. 10, nr 1.
38. M u r r e y A., G e i s l e r . A first experiment in logistic system simulation. Naval Research Logistics Quarterly, 1960, vol.7, nr 1.
39. B a c h R., D o l a n s k y L., S p a b b s H. Some recent contribution to the Lanchester theory of combat. Weiss H.The Fiske model of warfare. Operation Research, 1962, vol.10, nr 3.
40. Col.Tromes G.S c h r e i b e r . Note of combat value of intelligence and command control systems. Operation Research, 1964, vol.12, nr 3.

S K O R O W I D Z

- Algorytm modelujący na EMC nataracie pododdziałów 212
- Ancker C.T. 20, 27
- Azłarow T.A. 263
- Bach R. 20
- Buslenko N.P. 22, 23
- Cel 28
- Collins G.J. 20
- Coopmans B. 21
- Cruon R. 167
- Cuthrie D. 20
- Częstość kątów ostrzału czołgów w walce 246
- Czujew J.W. 21
- Dokładność modelowania stochastycznego 228
- Dolansky L. 21
- Dunin-Barkowski I.W. 231, 232
- Działania bojowe
- czołgów a teoria masowej obsługi 167
 - , modele liniowe 128
 - , - matematyczne 20
 - , systemy dowodzenia 155
 - wojsk lądowych 21
 - , wpływ różnych czynników 18
- Feller W. 126
- Funkcja wagowa 204

- Gasnące strumienie zgłoszeń 262
- Glinienko 230
- Gniedenko B.W. 22, 105, 167, 180, 230
- Golenko D.I. 23
- Informacja o terenie 214
- Intensywność strumienia wykrytych celów 185
- Kaufman A. 167
- Kąty ostrzału maksymalne 248
- Kimball D.E. 20, 171
- Kowalenko I.N. 22
- Kryteria oceny wyników modelowania 25
- Kryterium Pearsona 235
- Krytyczna płaszczyzna trafienia przy rażeniu obiektu jednym
uderzeniem 141
- Lanchester F.W. 12, 20, 27
- Metody Monte-Carlo 23
- Model Δt 23
- Modele działań bojowych 6, 10, 13, 22
- - - , czynniki jakościowe i ilościowe 10
- - - grupowych 7, 97
- - - , problemy operacyjno-taktyczne 6, 9, 10
- - - stochastyczne 7, 194
- - - , zastosowanie teorii masowej obsługi 7, 167
- Modele kombinowane 24
- pojedynków 6, 27
- walki grupowej 97

- Modele walki grupowej przy równomiernej gęstości ugrupowań 138
- z punktami węzłowymi 23
- Modele matematyczne działań bojowych 6,8,10,21,24,95
- - analityczne 23
 - - , analiza statystyczna 8,229
 - - stochastyczne 23
 - - -, przykłady zastosowań 238
 - - wojsk lądowych 11
- Modelowanie działań bojowych
- - -, bibliografia 19
 - - - kompanii czołgów w natarciu na umocniony rejon 21
 - - -, ocena dokładności 25
 - - -, warunki zwycięstwa stron 143
 - - -, zastosowanie metody eksperymentu statystycznego i EMC 21
 - podziału celów 208
 - przesunięcia 199
 - strzelania 210
 - wykrycia celów 206
- Modelowanie walki czołgów 120
- - niejednorodnych ugrupowań liniowych 113
 - - środków jednorodnych 98
 - - środków różnych 120
- Morse F.M. 20,173
- Murrey A. 21
- Nikitin 29,222
- Nomogram określania ω_{opt} 165
- Obszary zwycięstwa walczących stron 143
- Ocena celowości przyjęcia określonych schematów podziału celów 248
- systemu uzbrojenia 153

- Określenie kalibru pocisków, przy którym zadanie realizuje się z minimalnymi kosztami 159 ;
- optymalnego stosunku między kosztami systemu uzbrojenia i dowodzenia 162
- Określenie prawdopodobieństwa odnowy w strefach obsługi 171
- - - dla strumieni Palma 183
- Optymalny stosunek sił i środków stron 157
- Parametr obsługi wykrytych celów 187
- oczekiwania na obsługę 188
- Porządek numeracji kwadratów elementarnych 201
- Przykład losowej realizacji funkcji gotowości bojowej 213
- - - - $\eta_{2/t}$ 213
 - pojedynku 30,33
- Prawdopodobieństwo ostrzału celu w sektorze 249
- Reni A. 262,268
- Rozkład liczebności stron w toku walki 112 :
- Schemat fizycznego działania stron 15
- obsługi czołgów na rubieży obrony 189
 - ogniowego oddziaływania stron 140 ;
 - systemu walki 14 ,
 - wyboru możliwych kierunków ruchu 220
 - wzajemnego położenia celów i środków ogniowych w walce 245
- Siergiejew 29,222
- Smirnow N.W. 232,236,247
- Sobol I.M. 23
- Spabbs H. 21
- Sragowicz W.T. 23
- Stan elementu 195

Sumaryczne koszty wykonania zadania bojowego	164
Systemy dowodzenia	18
Tablica ilościowego opisu wariantów obliczeniowych	84
- ilościowych charakterystyk i oczekiwanych wyników pojedynku	50
- możliwych podziałów bitów komórki pamięci EMC do zapisu parametrów	217,218
- parametrów niezależnych od odległości do celu	79
- prawdopodobieństw wyniku pojedynku dla różnych warunków walki	85
Tablica prawdopodobnych zmian środków stron i warunków walki	78
- - - stanów walki	174
- średnich wartości czasu trwania czynności	80
Teoria efektywności bojowej i metody oceny efektywności	21
- masowej obsługi	21
Walsh J. E.	154
Wariant walki	245
Weiss H.	20
Wentzel E.S.	21,232
Wpływ optymalizacji podziału celów na wynik walki	252
Zadanie ilościowej oceny uzbrojenia	74
- oceny wpływu rzeźby terenu	75
- teorii masowej obsługi	167
- wyboru prędkości przesunięcia	75
Zależność funkcji X od warunków poszukiwania	130
- $M/n/$ w toku walki od początkowej liczebności przeciwnika	136
Zależność prawdopodobieństwa liczebności nacierających czołgów w końcu walki od ilości pozornych celów	137

Zależność prawdopodobieństwa zwycięstwa od początkowego stosunku
sił 241,242

- prędkości ruchu czółgów od charakteru walki 111

Zimmerman R.E. 21,200

Zmiany liczebności stron w toku walki 244

- stanów elementów jako funkcji czasu 243

Wyd. w 70 egz.
Egz. nr 1-60 B. Jawna
Egz. nr 61-70 kat. Cyber. Wojak.
Wyd. "pakiet NIS4K
Poz. nr 359/WN

Druk ASG-0-XV-4428





