

Grey Scale #13



DANES-PICTA.COM

A 1 2 3 4 5 6 M 8 9 10 11 12 13 14 15 B 17 18 19



**A K A D E M I A   S Z T A B U   G E N E R A L N E G O**  
im. generała broni K. Swierczewskiego

INSTYTUT ORGANIZACJI I TECHNIKI DOWODZENIA

Egz. Nr 50

ppłk dypl. Mieczysław CIECHANOWICZ

**ŚCISŁE METODY STEROWANIA**  
**ZŁOŻONYMI PROCESAMI**  
(Tłumaczenie z czeskiego)



4188

W A R S Z A W A

S T Y C Z E Ń

1 9 6 7



**AKADEMIA SZTABU GENERALNEGO**  
im. generała broni K. Świerczewskiego

---

INSTYTUT ORGANIZACJI I TECHNIKI DOWODZENIA

Egz. Nr 50

ppłk dypl. Mieczysław CIECHANOWICZ

**ŚCISŁE METODY STEROWANIA**  
**ZŁOŻONYMI PROCESAMI**  
(Tłumaczenie z czeskiego)



4188

A K A D E M I A   S Z T A B U   G E N E R A L N E G O  
im. gen. broni K. Świerczewskiego

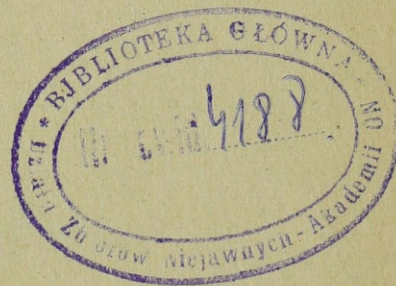
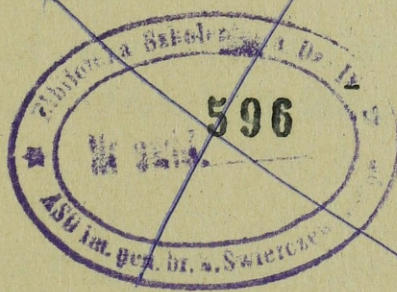
---

Instytut Organizacji i Techniki Dowodzenia

Do użytku wewnętrznego

ŚCISŁE METODY STEROWANIA  
ZŁOŻONYMI PROCESAMI

/Tłumaczenie z czeskiego/



---

WARSZAWA

Styczeń

1967 r.

Tytuł oryginału

EXAKTNI METODY ŘIZENI  
SLOŽITÝCH PROCESU

Autorzy: Petr BEZDĚK  
Jaroslav MORAVEK  
Milan ZELENÝ

Wyd. Sbornik Ministerstwa Narodni Obrany nr 19  
Praga 1965 r.

Tłumaczyły: mgr Maria Mastalerz  
mgr Zofia Ogrodzka

Redaktor przekładu

płk dr Mieczysław Ciechanowicz

## P R Z E D M O W A

Celem wydania niniejszej pracy jest bliższe zapoznanie oficerów z zastosowaniem metod graficzno-analitycznych dla potrzeb dowodzenia i kierowania wojskami.

Jesteśmy dzisiaj świadkami rozwoju pracy wojskowo-naukowej, który jest, między innymi, spowodowany konkretnym zadaniem "podnieść poziom dowodzenia i kierowania wojskami". Żeby zrealizować to wymaganie, dowództwo wydaje szereg zarządzeń o charakterze naukowo-doświadczalnym.

Doświadczenie oraz praktyka w zupełności potwierdzają obiektywną konieczność powyższego wymagania. Istnieje wiele powodów, dla których warunk wysokiej efektywności procesu kierowania /zarządzania/ obowiązuje zarówno państwa socjalistyczne jak i kapitalistyczne.

W szeregu prac przeanalizowano praktyczne skutki rewolucji naukowo-technicznej dla kierowania wszystkimi procesami, przede wszystkim procesami społecznymi oraz pokazano istnienie ogólnych praw kierowania również w specyficznych warunkach sił zbrojnych.

Rozważania te jednocześnie potwierdzają, że tak samo jak w gospodarce narodowej, chodzi w zasadzie o zmianę dotychczasowego myślenia ekonomicznego za pomocą zmian kwantytatywnych całego systemu planowego kierowania rozwojem gospodarki narodowej, również w kierowaniu siłami zbrojnymi w zasadzie chodzi o to samo - o zmianę w myśleniu ludzi oraz o osiągnięcie wysokiej efektywności dowodzenia. Zostało dowiedzione, że osiągnięcie tak ważnego celu nie jest możliwe

bez maksymalnego wykorzystania wszystkich możliwości, które dostarczają współczesne wyniki nauki i techniki. Dlatego ostatnio można zauważyć w wojsku duże zainteresowanie zastosowaniem metod i środków cybernetyki. Można stwierdzić, że chociaż jesteśmy dzisiaj na samym początku tego procesu, to pewne uogólnienie elementarnych wiadomości cybernetyki o zasadach i potrzebach kierowania złożonymi systemami, o jej metodach i środkach oraz ich wpływu na podniesienie poziomu naukowości i obiektywności decydowania pokazało nie tylko szereg ważnych problemów, ale również pokazało metodę ich rozwiązywania.

Jednym z pozytywnych rezultatów wpływu studiów tych problemów jest podkreślenie znaczenia pracy naukowo-badawczej i teorii dla potrzeb praktyki. Dzisiaj jest już oczywiste, że rozwiązywanie skomplikowanych problemów współczesnego dowodzenia nie jest możliwe bez systematycznej pracy naukowej, że rozwiązywanie to, nie jest problemem jednorazowym, ale długotrwałym, procesem ciągłym. Codzienna praktyka utwierdza w tym, że głównym wynikiem inwazji różnych dziedzin naukowych, zwłaszcza nauk ścisłych, są wysokie wymagania dotyczące poziomu wykształcenia dowództw i sztabów.

Ostatnio często spotykamy się z nazwą "naukowości zarządzania". Nie ma żadnych wątpliwości odnośnie potrzeby naukowości w zarządzaniu. Jest również oczywiste, że istnieją dzisiaj sprzyjające warunki, tj. wysoki poziom nauki i techniki. Jednak nie zawsze i nie wszędzie pamiętamy o tym, że istnienie tych warunków nie podniesie poziomu naukowego zarządzania, że nie wystarczy wiedzieć o istnieniu nowych metod i środków, ale jest konieczne ich stosowanie w prak-

tyce, aby zmienić tę obiektywną możliwość w rzeczywistość naukowego zarządzania.

Proces rozwoju zarządzania jest długotrwałym oraz wszechstronnie rozbudowanym procesem i podniesienie poziomu zarządzania nie jest tylko problemem wprowadzania wystarczającej ilości środków mechanizacji do systemu dowodzenia. Podniesienie poziomu zarządzania jest bardzo skomplikowanym procesem polegającym na zmianie myślenia ludzi, problemem zmiany wzajemnych stosunków ludzi w procesie dowodzenia. Każda zmiana w dotychczasowym systemie oraz metod i środków wymaga głębokiej i wnikliwej analizy wszystkich aspektów dowodzenia. Prosto i łatwo można dojść do wniosku, że dotychczasowe metody nie pozwalają poznać istoty i sensu kierowania, dlatego ostatnio praca wojskowo-naukowa koncentruje się na nowo powstałej dziedzinie naukowej, którą nazywamy badaniami operacyjnymi.

Chodzi w zasadzie o zespół nowych albo udoskonalonych metod analizy, które czerpią wiadomości z różnych dziedzin naukowych, zwłaszcza nauk ścisłych - matematyki, statystyki, logiki i innych.

Metody te stosuje się dzisiaj we wszystkich państwach rozwiniętych do analizy rozległych i złożonych procesów. Celem ich zastosowania jest przede wszystkim umożliwić rzeczywiste naukowe i obiektywne decydowanie, pozbawione wszystkich dotychczasowych pierwiastków intuicji i doświadczeń, które dla skomplikowanych i nowych procesów nie wystarczają. Metody te zastępują poważną część intuicyjnych osądów i za pomocą zwięzłych, obiektywnych kalkulacji prowadzą do po-

stępowania opartego o matematykę i logikę. Do obliczeń i optymalizacji możliwych wariantów używa się zwykle maszyn matematycznych. Właśnie duże możliwości techniki obliczeniowej umożliwiły współczesny rozwój metod badań operacyjnych.

Jest bezsporne, że dowodzenie wojskami jest właśnie jednym z typowych, bardzo skomplikowanych i dynamicznych procesów, dla których istnieje dużo wariantów decydowania. Dlatego zupełnie naturalne jest wykorzystywanie do analizy i do dowodzenia wojskami w maksymalnej mierze odpowiednich metod badań operacyjnych.

W niniejszej pracy zapoznamy oficerów z podstawami graficzno-analitycznych metod, które noszą wspólną nazwę "analiza ścieżki krytycznej".

Metody te stosuje się w świecie na bieżąco do analiz, planowania, kontroli oraz do operatywnego kierowania złożonymi procesami zawierającymi dużą ilość częściowych, wzajemnie warunkujących się czynności.

W literaturze można znaleźć dziesiątki różnych modyfikacji metod analizy ścieżki krytycznej o różnych nazwach. /W USA - CPM, PERT, CPP, LESS, RAMPS i inne, w ZSRR - KOPPER, tj. metod kriticzeskowo obzora projektoplanowych reszenij i SUR, tj. systema uprawlenij razrabotkami/. W zasadzie jednak chodzi przeważnie o modyfikację dwóch podstawowych metod - CPM i PERT, które różnią się tylko różnym wyrażeniem wpływu prawdopodobieństwa i elementów przypadkowych przy określaniu terminów poszczególnych czynności.

Głównym powodem ich stosowania jest to, że metody

analizy ścieżki krytycznej pozwalają wyrażać graficznie logiczną strukturę analizowanego procesu wraz ze wszystkimi wzajemnymi powiązaniem i warunkami czynności częściowych. Oprócz tego pozwalają odkryć wszystkie zapasy czasowe przy realizacji procesu. Dlatego metody te są skutecznym środkiem planowania procesów i kontroli ich realizacji. Plan opracowany za pomocą graficzno-analitycznej metody umożliwia operatywne kierowanie jego realizacją oraz wpływanie na jego przebieg i uzyskanie optymalnego rozwiązania nie tylko z punktu widzenia czasu, ale również z punktu widzenia efektywnego wykorzystania wszystkich źródeł.

Innym powodem ich stosowania jest gruntowne teoretyczne opracowanie tych metod oraz niektóre praktyczne doświadczenia uzyskane w ZSRR, USA, NRD oraz w niektórych naszych zakładach.

Oprócz szeregu artykułów w różnych naukowych czasopismach w grudniu 1964 roku, Państwowa komisja rozwoju i koordynacji nauki i techniki opublikowała pracę zbiorową "Metoda PERT i ścieżki krytyczne /CPM/" oraz Laboratorium ekonomiczno-matematyczne przy Instytucie Ekonomii CSAV opublikowało pracę ekonomisty M. Zeleneho "Analiza złożonych procesów za pomocą metody ścieżki krytycznej".

Opanowanie istoty tych metod przez dowództwa, zwłaszcza przez organy planowania wszystkich szczebli dowodzenia, daje możliwość kolejnego podwyższania poziomu dowodzenia i kierowania wojskami.

Dla opanowania oraz eksperymentalnego zastosowania tych metod do różnych zadań uważamy za celowe dostarczyć

dowództwu publikację częściowo dostosowaną do konkretnych zadań wojska, chociaż zastosowania tych metod dla celów wojskowych są w początkowym stadium rozwoju.

Trzeba podkreślić, że nie można nie doceniać graficzno-analitycznych metod i ich znaczenia dla dowodzenia i kierowania wojskami. Byłoby również niesłuszne uważać je za lekarstwo na wszystkie trudności dowodzenia i kierowania, które można z powodzeniem wszędzie i zawsze stosować. Nie można od nich oczekiwać niespodziewanych wyników od razu przy pierwszym zastosowaniu, również nie można przy ewentualnym niepowodzeniu metody te odrzucić. Nie nadają się one do rozwiązywania wszystkich zadań, ale są efektywne dla rozwiązywania dużej ilości zadań. Trzeba dopiero ustalić, dla których są najbardziej korzystne. Najpierw metody te musimy opanować.

Zadną metodą nie można rozwiązać rzeczowych problemów dowodzenia i kierowania. Chodzi o analityczne metody, które pomagają graficznie i obliczeniowo efektywnie planować - organizować realizację złożonych procesów w ten sposób, żeby logicznie powiązać ich częściowe czynności oraz rozwiązywać optymalne czasowe stosunki i ustalić poprawną kolejność ich znaczenia dla końcowego rezultatu.

Chodzi więc w zasadzie o to, aby wykorzystać te metody w wojsku dla opracowania naukowo uzasadnionych planów realizacji złożonych, przede wszystkim długotrwałych czynności, wykorzystać je do kontroli przebiegu ich realizacji oraz do skutecznych operatywnych zabiegów w czasie trwania procesu.

Naturalnie żadna metoda nie może określić celu rozwiązania. Oczywiście, jeżeli nie znamy dokładnie, co chcemy osiągnąć, wtedy nie możemy planować i przy pomocy dotychczasowych metod.

Z drugiej strony, odpowiednie zastosowanie tych metod w odpowiednim miejscu, często umożliwia dokładniejsze i bardziej naukowe planowanie, kontrolę i kierowanie. Umożliwiają one bowiem analizę poszczególnych częściowych czynności planu, uwzględniając wszystkie powiązania i zależności i tym samym pozwalają przewidywać zawczasu ewentualne dysproporcje, które mogą powstać przede wszystkim przy planowaniu bardzo prawdopodobnych procesów.

Dalszą wielką zaletą tych metod jest to, że oprócz wykrycia czasowych zapasów planu ustalają ścieżkę krytyczną, tzn. te decydujące czynności całego procesu, od realizacji których zależna jest realizacja i zupełność rozwiązania całego zadania. "Ścieżka krytyczna" jest to w zasadzie łańcuch głównych czynności realizacji całego planu, na który trzeba przede wszystkim skoncentrować uwagę kontroli i operatywnego kierowania. Oprócz tego metody te umożliwiają konkretnie wyznaczać odpowiedzialność wszystkich stopni kierowania i pomagają w ten sposób podwyższać organizację pracy.

Jesteśmy przekonani o tym, że właśnie w procesie dowodzenia i kierowania wojskami istnieje dużo takich czynności, do których można dane metody z powodzeniem zastosować. O tym również świadczy to, że metody te powstały właściwie dla potrzeb wojska.

Również współczesny poziom technicznej bazy dowodzenia umożliwia wykorzystywanie nowych metod do najróżniejszych zadań sztabów.

Z kolei istnieją wszystkie przesłanki ku temu, żeby w wojsku drogą doświadczalną sprawdzić możliwości zastosowania nowych metod planowania i kierowania na szeroką skalę do najróżniejszych zadań.

Wymaga to jednak opanowania tych metod przez dużą liczbę specjalistów wojskowych. Właśnie dlatego, żeby dostarczyć oficerom materiał do samodzielnego studiowania, opracowano niniejszą pracę zbiorową.

gen. mjr Jan Knotek

## W S T E P

Metody analizy ścieżki /drogi/ krytycznej cieszą się wzrastającym zainteresowaniem w wszystkich dziedzinach ludzkiej działalności. Możliwości zastosowania metod kierowania procesami złożonymi bada się w gospodarce, nauce, wojskowości oraz w kulturze. Do tej pory jednak nie istnieje w CSRS praca zbiorowa zajmująca się obszerniej tym tematem.

Okazuje się, że dla dokładniejszego zrozumienia tych metod konieczne jest przypomnienie podstaw matematycznych. Dlatego do pracy włączone zostały dodatki matematyczne. W nich znajdzie czytelnik potrzebne wiadomości z teorii grafów, rachunku prawdopodobieństwa oraz z algebry liniowej.

Dodatki matematyczne zawierają tylko materiał konieczny dla zrozumienia wyłożonych metod, nie chodzi więc o "autonomiczne" zbudowanie samodzielnych matematycznych teorii.

Z tego powodu są szczegółowo omówione przede wszystkim te części lub dowody, które mają bezpośredni związek z algorytmami obliczeniowymi.

W pozostałych częściach pracy autorzy starali się przedstawić podstawowe myśli bez zbędnego przytaczania szczegółów.

Czytelnika pragnącego zapoznać się głębiej z wyłożonym materiałem odsyłamy do spisu literatury zamieszczonego na końcu pracy.

Cała praca składa się z trzech podstawowych części:

1. Dotychczasowe środki i metody
2. Metody analizy za pomocą ścieżki krytycznej /CPA/

### 3. Dodatki matematyczne.

W jaki sposób należy studiować niniejszy podręcznik?

Rozdziały 1 oraz 2.1 nie dotyczą bezpośrednio metod CPA. Można je polecić czytelnikowi, który pragnie głębiej zapoznać się z podstawami powstania metody CPA. Jeżeli czytelnik chce szybko opanować metody CPM i PERT, może powyższe rozdziały opuścić.

Dla obu metod ważny jest rozdział 2.2. zawierający podstawowy materiał dla metod tego typu. Dlatego należy zwrócić większą uwagę na powyższy rozdział. Dogodnie jest studiować najpierw rozdział 3.1. Część 2.3.1 tak samo jak 2.4 można studiować samodzielnie po przeczytaniu 2.2. Żeby zrozumieć objaśnienie metody PERT /tj. 2.4/ należy zapoznać się z materiałem zawartym w rozdziale 3.3.

W tej części rozdziału zajmującego się metodą CPM, która porusza zagadnienie dotyczące przeliczeń kosztów, tj. 2.3.2, zakłada się znajomość rozdziału 3.1.

Cały rozdział 2.5 zajmuje się technikami pokrewnymi i jego zadaniem jest zapoznać czytelnika z możliwościami dalszego zastosowania metod oraz ich rozszerzenia. Zakłada się znajomość rozdziałów 3.3 oraz 3.2. Przeznaczony jest on dla czytelników interesujących się niektórymi specjalnymi zastosowaniami ewent. dalszym teoretycznym rozwojem metod CPA.

Rozdział 2.6 jest samodzielny i jego zadaniem jest poinformować czytelnika o obliczeniowych możliwościach w CSRS i za granicą oraz przedstawić szkic praktycznego po-

stępowania przy obliczeniach.

Stosunkowo obszerna literatura umożliwia orientację w rozszerzeniu niektórych specjalnych zagadnień ewent. studium klasycznej literatury.

W trosce o możliwie najwyższą kompleksowość opracowania oraz włączenia do pracy najnowszych wyników teorii CPA nie mogliśmy dotrzymać idealnej ciągłości wykładu. Praca zawiera kilka samodzielnych części, które wymagałyby dokładniejszego opracowania. Rozwój metod CPA jest jednak bardzo szybki i nie można mu dotrzymać kroku bez pewnych ustępstw.

Poszczególne rozdziały opracowali:

ing. Petr Bezdek /rozd. 1,2,3.3.1, 2.6, 3.2/, mgr mat.

Naroslav Moravek /rozd. 2.3.2.2, 2.3.3.2, 2.5.3, 3.1,

3.3/ i mgr ekon. Milan Zeleny /rozd. 2.1, 2.2, 2.3.1,

2.3.2.1, 2.4, 2.5.1, 2.5.2, 3.3.9/.

Rysunki ing. Petr Bezdek.

Autorzy pragną podziękować za współpracę pracownikom ośrodka MNO 28.

Praga, 1.5.1965 r.

Autorzy.

## 1. DOTYCHCZASOWE ŚRODKI PLANOWANIA I KIEROWANIA

Coraz bardziej skomplikowany proces wytwórczy i jego zmiany wymagają ciągłej obserwacji i kontroli.

Zeby móc skutecznie kierować poszczególnymi procesami wytwórczymi lub czynnościami, musimy potrafić je z góry zaplanować.

Dzisiaj w praktyce planowania korzysta się z "klasycznych", tradycyjnych metod, a dopiero powoli pojawiają się nowe metody korzystające z możliwości maszyn matematycznych. Najbardziej pracochłonne części obliczania wykonywane są za pomocą maszyn, metody te wykorzystują szybkość i niezawodność pracy maszyn. To, że maszyna pracuje nieporównywalnie szybciej niż powszechnie wprowadzona mechanizacja i praktycznie bez błędów, umożliwia sporządzić kilka wariantów planu oraz wybrać najlepszy wariant.

Zapoznanie z dotychczasowymi metodami planowania ma charakter pogładowy, a jego celem jest tylko naszkicowanie współczesnych metod planowania, przedstawienie i podkreślenie wad /ewent. zalet/ oraz pokazanie wyników osiągalnych za pomocą współczesnych metod planowania.

### 1.1 Harmonogramy

Jednym z najprostszych sposobów planowania procesów wytwórczych w czasie, jest harmonogram. Harmonogram został wprowadzony w ČSR na szerszą skalę dopiero w latach trzydziestych. Harmonogram powstał na podstawie tzw. wykresów Gantta.

Zasada:

Harmonogram szereguje planowane czynności w jednej rzędnej - rzędnej czasu. Informacje o długości trwania zaplanowanych czynności, ich ogólnej ilości oraz ilości w każdej jednostce czasu.

	$\Sigma ZI$	$\Sigma H.J$	CZAS			
ZJAWISKO 1	A	B	a	b	c	
ZJAWISKO 2	.	.		a, b, c		
.	.	.				

|-----y-----|

$$a = A \cdot f_1$$

$$A = a + b + c$$

$$b = A \cdot f_2$$

ANALOGICZNIE MOŻNA WYRAZIĆ

$$c = A \cdot f_3$$

DLA B

y = CZAS TRWANIA ZJAWISKA A

f = % CZĘŚĆ OKREŚLONA DO REALIZACJI ZJAWISKA A W JEDN. CZASU

Rys. 1

Zaplanowanie poszczególnych czynności w czasie przeprowadza się według następujących zasad:

1. Konieczne jest zapewnić, żeby w określonym czasie i w określonej przestrzeni przebiegało tyle czynności, ile jest wskazane /przeważnie tylko jedna/.

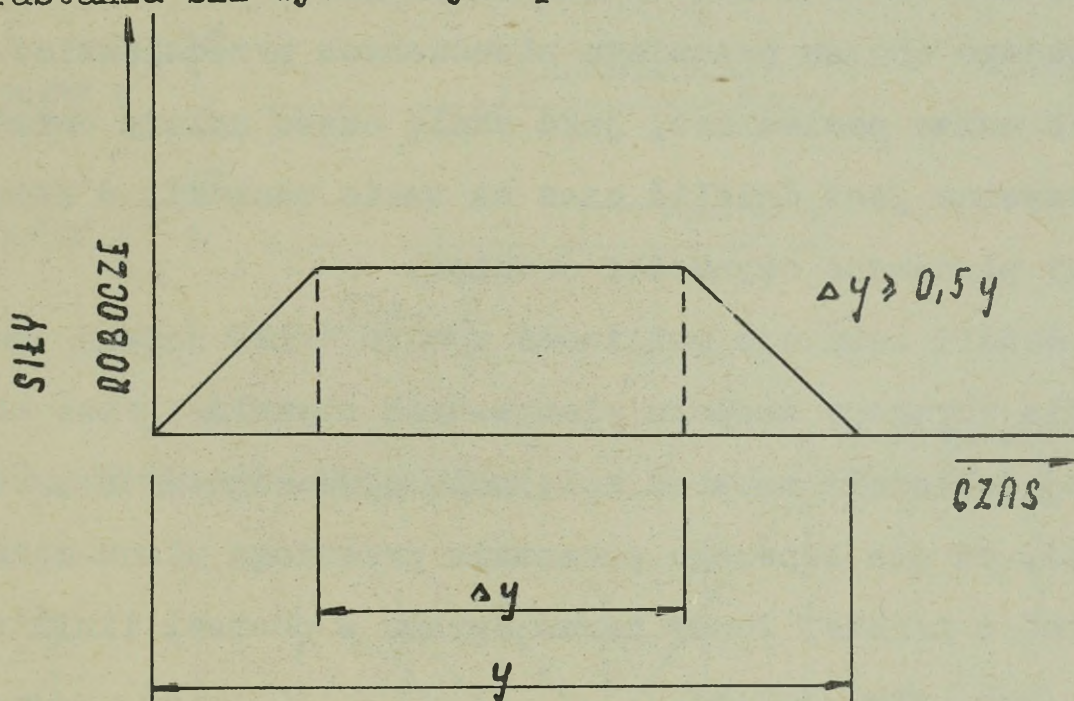
2. Przestrzegać zasady o nasyceniu frontu robót.

3. Planowanie przeprowadzić w ten sposób, żeby maksymalnie wykorzystać mechanizację i technikę.

4. Ciągłe i nieprzerwanie wykorzystywać siły wytwórcze.

Punkt 4 razem z punktem 1 stanowią dzisiaj przeważnie główne kryterium. Tak jest dlatego, że dzisiaj odczuwa się brak sił wytwórczych w CSRS prawie w wszystkich gałęziach produkcyjnych.

Jeżeli przy układaniu harmonogramu uwzględniamy nieprzerwane wykorzystywanie sił wytwórczych, można przebieg wzrastania sił wytwórczych przedstawić następująco:



Rys. 2

Jest więc korzystne opracować plan w ten sposób, żeby utrzymać jak najdłużej stałą ilość sił wytwórczych.

Jeśli harmonogram został opracowany bez dokładnego organizacyjnego i technologicznego opanowania planowanych przedsięwzięć, może się zdarzyć, że związki pomiędzy zjawiskami będą tylko "czasowe", a nie "rzeczowe". Żeby częściowo usunąć tę ewentualność, używa się przy planowaniu każdego przedsięwzięcia kilku jednostek pomiarowych, np. zł, m<sup>3</sup>, normogodzin itp. Przy porównywaniu jednostek można odkryć niektóre związki pomiędzy planowanymi czynnościami, które w przeciwnym razie można łatwo przeoczyć,

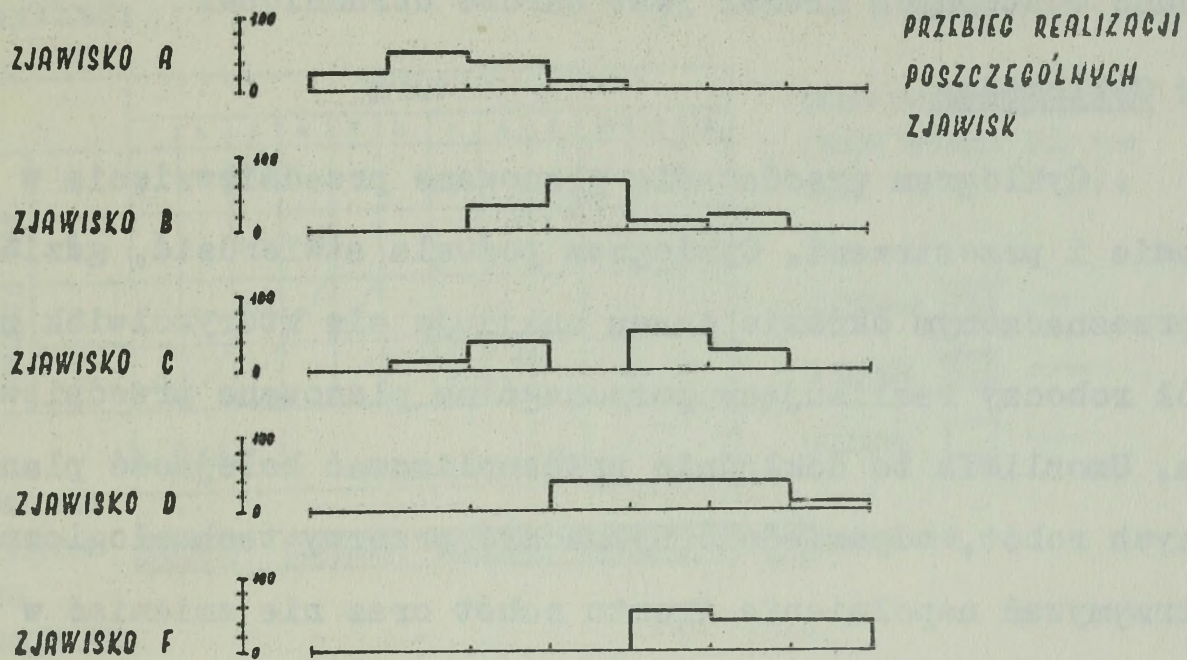
Wpływ czasowego podziału.

Ze względu na to, jaki rodzaj zjawisk planujemy, musimy również dobrać odpowiednią skalę czasu. Jeżeli weźmiemy zbyt drobny czasowy podział, to opracowanie harmonogramu będzie bardzo pracochłonne. Z drugiej strony, gruba skala czasu może nie ujawnić niektórych ważnych powiązań pomiędzy planowanymi przedsięwzięciami i nie otrzymamy zadowalającego obrazu przebiegu planowanych przedsięwzięć. Na ogół nie można powiedzieć, jaką skalę czasu należy obrać, ale korzystne jest dzielić czas na takie odcinki, w których będziemy planowane czynności oceniać.

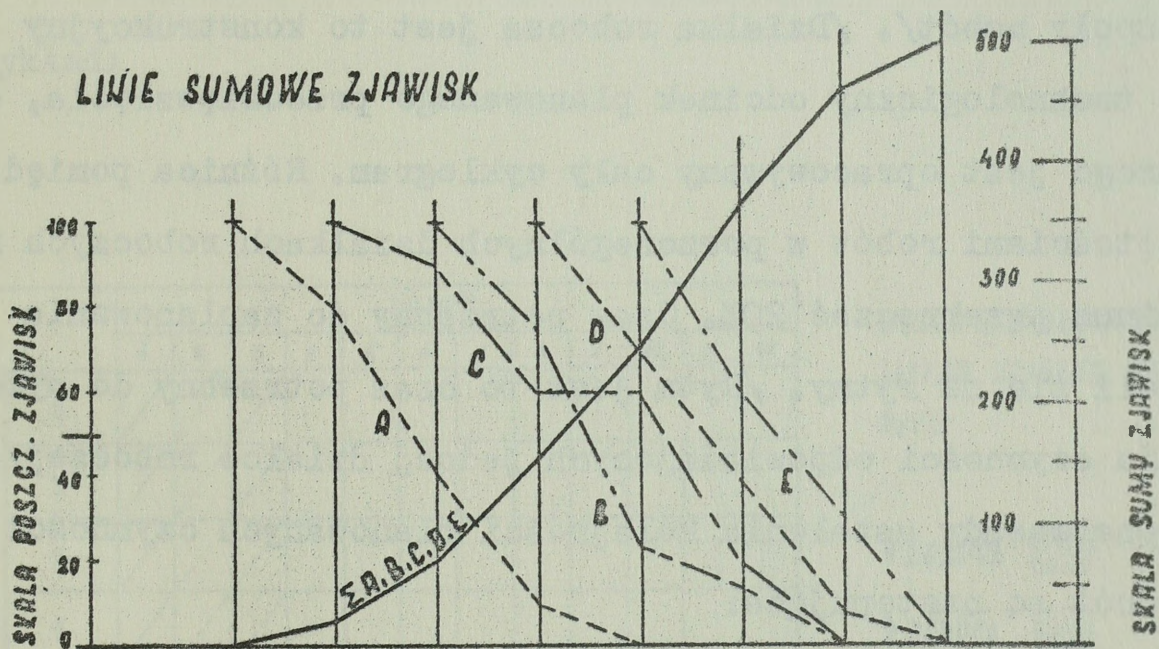
Jeżeli istnieje możliwość wyboru tylko jednej technologii dla obranego zespołu planowanych czynności oraz można dla niej dokładnie wskazać kolejność poszczególnych przedsięwzięć, to dla lepszego pokazania przebiegu planu można korzystać z prostej formy harmonogramu w postaci linii sumowanych /zob. rys. 3,4,5/.

OZNACZENIE	Zł	1	2	3	4	5	6	7	HARMONOGRAM
ZJAWISKO A	100	20	40	30	40				
ZJAWISKO B	100			25	50	10	15		
ZJAWISKO C	100		10	30		40	20		
ZJAWISKO D	100				30	30	30	10	
ZJAWISKO E	100					40	30	30	
	500	20	50	85	90	120	95	40	
		20	70	155	245	365	460	500	

Rys. 3



Rys. 4



Rys. 5

Obiektywnie oceniając trzeba zaznaczyć, że harmonogram jako środek służący do graficznej ilustracji planowanych przedsięwzięć, jest prosty w wykonaniu i przejrzysty. Z drugiej strony, wadą jego jest, że umożliwia śledzić planowane przedsięwzięcia tylko w czasie, a nie w przestrzeni. Również planowanie czynności wymagających korzystania z

trudno dostępnych źródeł jest bardzo utrudnione.

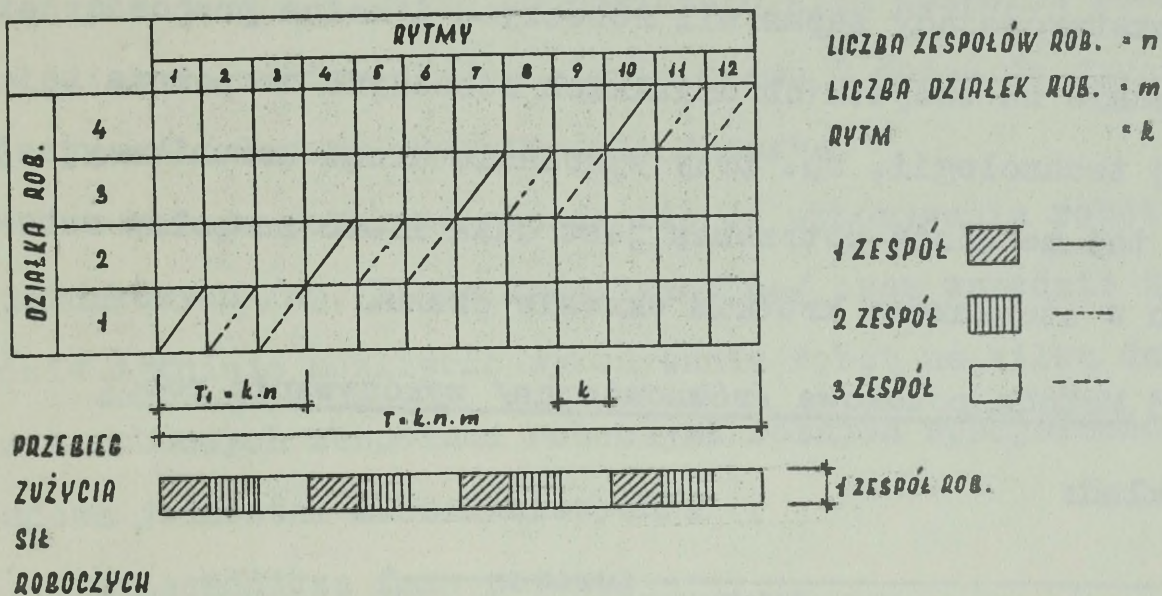
## 1.2 Cyklogramy

Cyklogram przedstawia planowane przedsięwzięcia w czasie i przestrzeni. Cyklogram pozwala stwierdzić, gdzie w przeznaczonym okresie czasu znajduje się którykolwiek zespół roboczy realizujący poszczególne planowane przedsięwzięcia. Umożliwia to dokładnie przeanalizować kolejność planowanych robót, odpowiednio wyznaczyć przerwy technologiczne, dotrzymywać napełnienia frontu robót oraz nie zmieniać w ciągu pracy składu zespołów roboczych. Całość planowanych przedsięwzięć dzieli się w przestrzeni na działki robocze /zespoły robót/. /Działka robocza jest to konstrukcyjny lub technologiczny odcinek planowanego przedsięwzięcia, dla którego jest opracowywany cały cyklogram. Różnica pomiędzy objętościami robót w poszczególnych działkach roboczych nie powinna przekraczać 20%. Czas potrzebny do zaplanowania dzieli się na rytmy. /Rytm jest to czas potrzebny do wykonania czynności odpowiadających jednej działce roboczej/. Główne zasady ustalenia kolejności planowanych czynności i robót są następujące:

### 1.2.1 Metoda kolejnego wykonywania robót

Metodę tę stosuje się w tych przypadkach, kiedy nie można pracować jednocześnie na kilku działkach roboczych, np. przy budowie tunelu /1. mierzy, 2. strzałowi, 3. robotnicy usuwający rozsadzoną skałę/. Chociaż zespoły robocze wykorzystywane są w sposób ciągły /ciągle pracuje tylko jeden zespół/, konieczna jest ich ustawiczna zmiana.

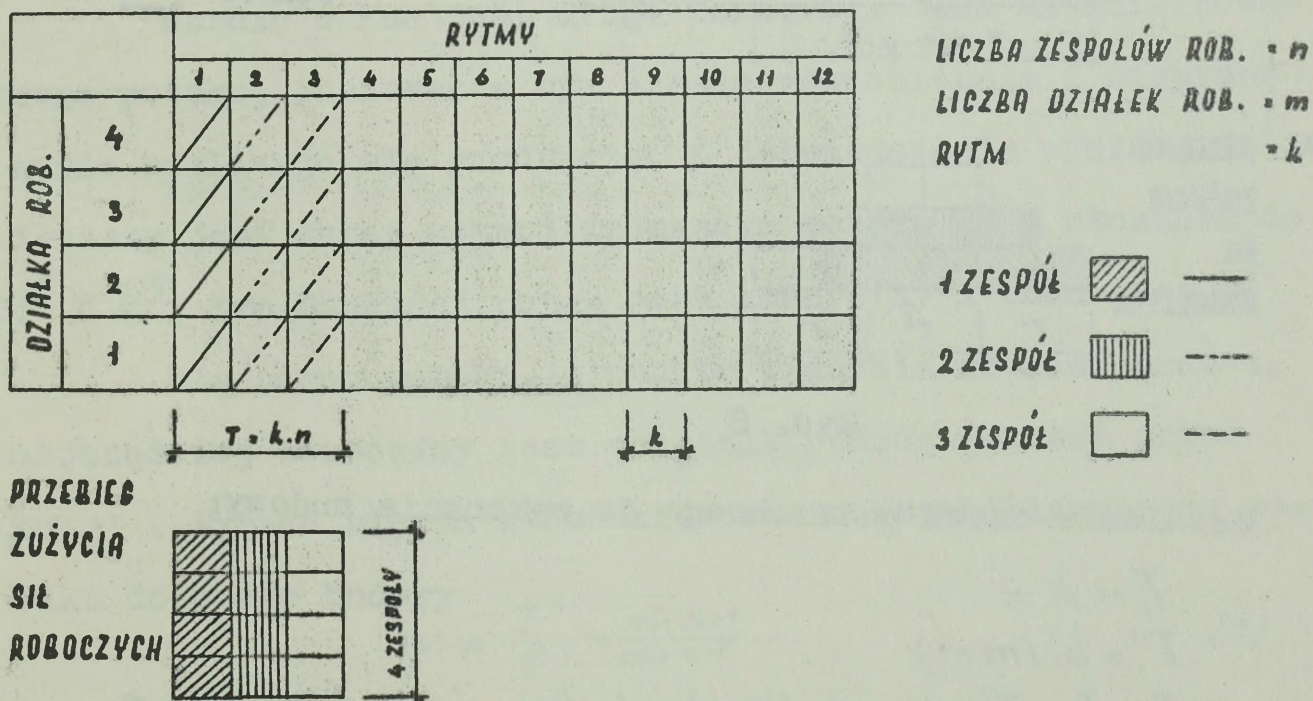
Przykład:



Rys. 6

1.2.2 Metoda jednoczesnego wykonywania robót

Przykład:

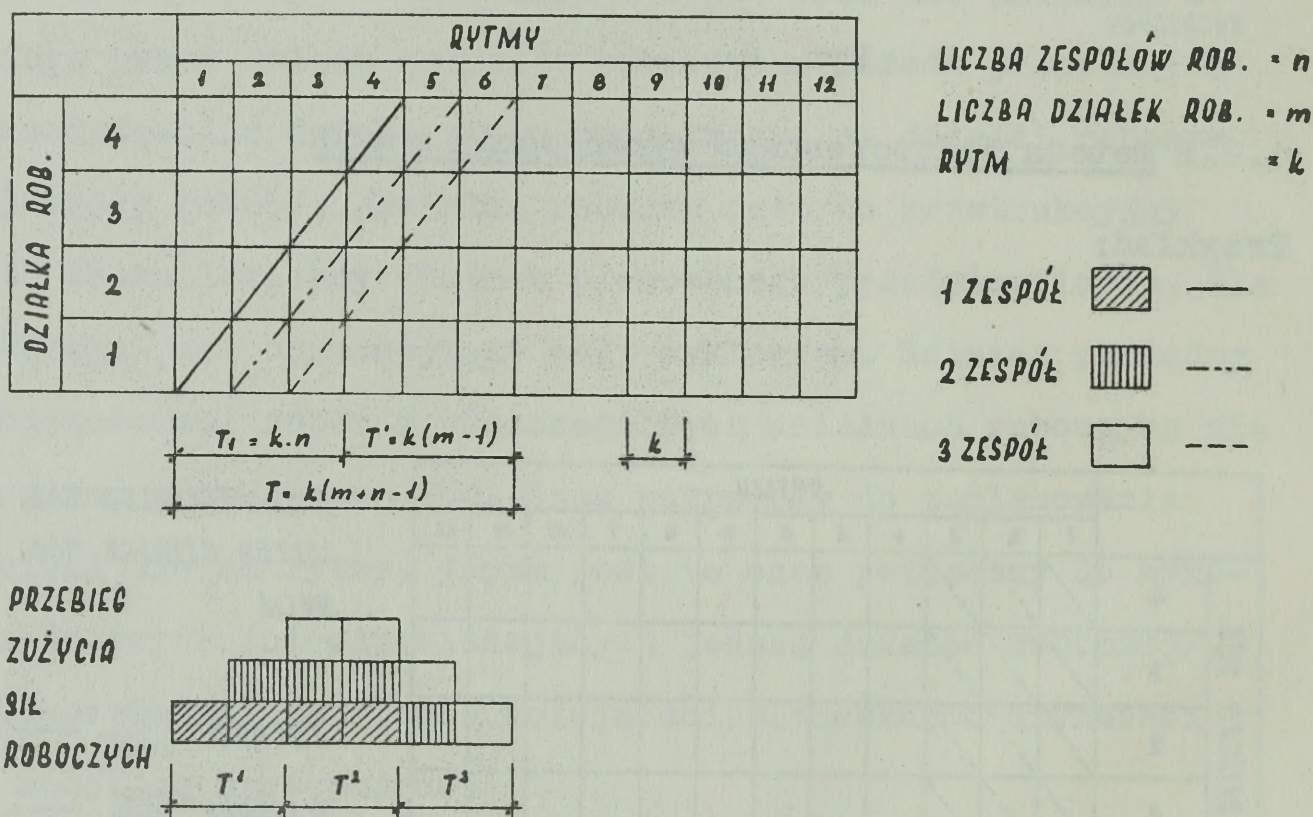


rys. 7

Metodę tę stosuje się wtedy, kiedy mamy do dyspozycji wystarczający zapas sił roboczych i można pracować jednocześnie na wszystkich działkach roboczych za pomocą tej samej technologii, np. przy wykonaniu drogi komunikacyjnej. Przy tej metodzie potrzebna jest duża ilość zespołów roboczych w stosunkowo krótkim okresie czasu.

### 1.2.3 Metoda potokowa /równomierna/ wykonywania robót

Przykład:



Rys. 8

Ustalenie czasu potrzebnego do wykonania budowy:

$$T_1 = k \cdot n$$

$$T' = k \cdot (m - 1)$$

$$T = T_1 + T' = k \cdot n + k \cdot (m - 1) = k \cdot (n + m - 1) = 1 \cdot (3 + 4 - 1) = 6$$

/1/

Jeżeli pojawi się konieczność przerw technologicznych pomiędzy zejściem i wejściem poszczególnych zespołów roboczych na działki, musimy dla ustalenia czasu  $T$  dodać do wyrazu  $k \cdot /m+n-1/$  łączny czas trwania przerw.

Metoda potokowa nadaje się do wykonywania robót jednokierunkowych /np. linie kanalizacyjne/ oraz wszędzie tam, gdzie istnieje możliwość wykonywania robót na kilku działkach roboczych zespołami roboczymi różnych specjalności /np. budowa jednostek mieszkaniowych/.

Zasadnicze fazy potoku:

$T^1$  = czas wzrastania potoku

$T^2$  = czas ustabilizowania potoku /2/

$T^3$  = czas zmniejszania potoku

$T^1 = T^3$

$T^2 = T - T^1 - T^3$

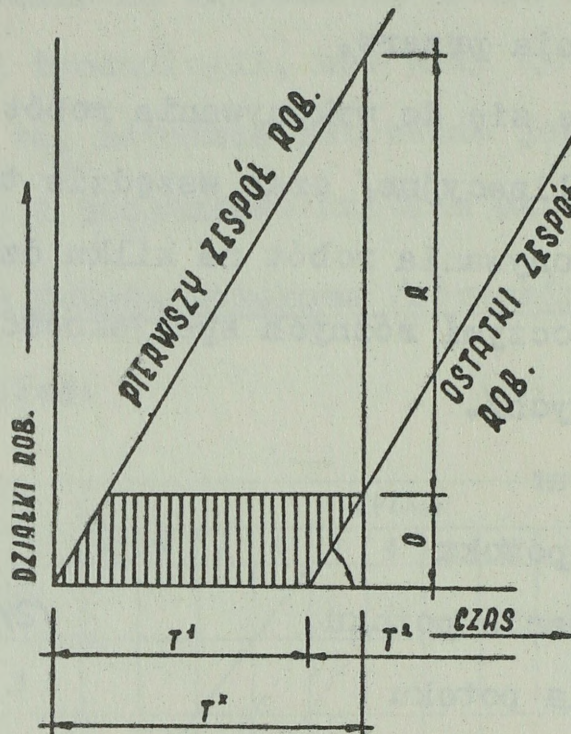
Bardzo ważna jest druga faza, tj. czas ustabilizowanego potoku, ponieważ w tym czasie równomiernie i nieprzerwanie realizuje się produkcję. Z doświadczenia wynika, że im dłuższy jest okres ustabilizowanego potoku  $T^2$  w stosunku do  $T^1$  i  $T^3$ , tym bardziej potok jest korzystny i ekonomiczny.

Dla oceny potoku, z punktu widzenia równomierności, najczęściej stosowany jest wskaźnik równomierności potoku  $\gamma$ . Wyraża się on stosunkiem czasu ustabilizowanego potoku do czasu budowy

$$\gamma = \frac{T^2}{T} = \frac{m-n+1}{m+n-1} \quad /3/$$

Im więcej zbliża się  $\gamma$  do 1, tym lepsza jest organizacja potoku. /Jeżeli  $\gamma < 0,5$  oznacza to, że potok prawdopodobnie nie jest prawidłowo zorganizowany/.

Za pomocą cyklogramu opracowanego dla metody potokowej wykonywania robót, można uzyskać jeszcze następujące dane:



$\alpha$  - PRĘDKOŚĆ  
POTOKU

A - OBJĘTOŚĆ ROZPOCZĘTYCH  
DZIAŁEK ROB.

O - OBJĘTOŚĆ UKOŃCZONYCH  
DZIAŁEK ROB.

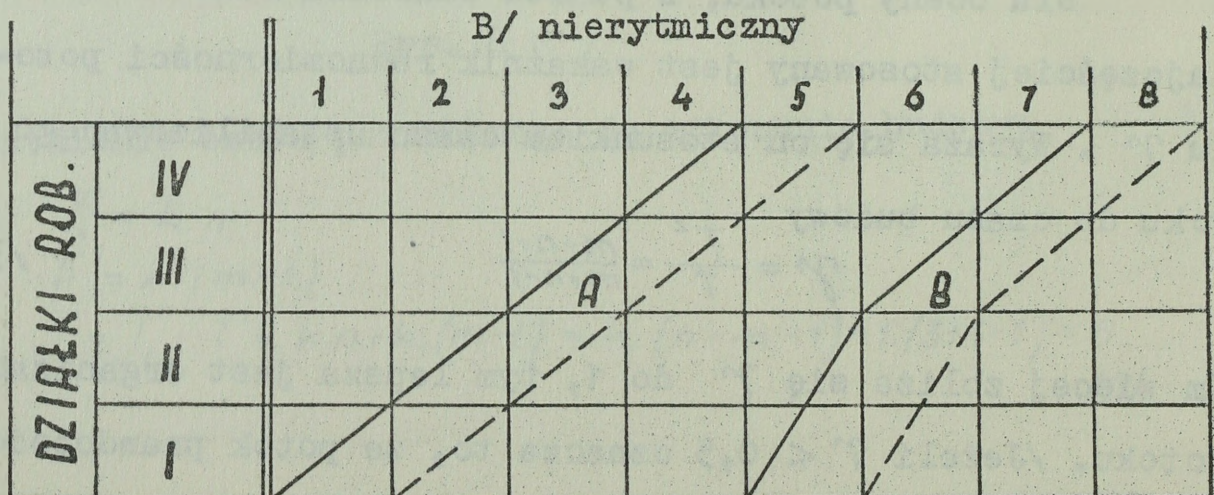
T¹ - CZAS, W KTÓRYM BADA  
SIĘ WIELKOŚCI A I O

Rys. 9

Wybór kąta  $\alpha$  /tj. prędkości toku/: dobiera się w zależności od najważniejszej roboty /roboty prowadząca/ i do niej dostosowuje się pozostałe roboty.

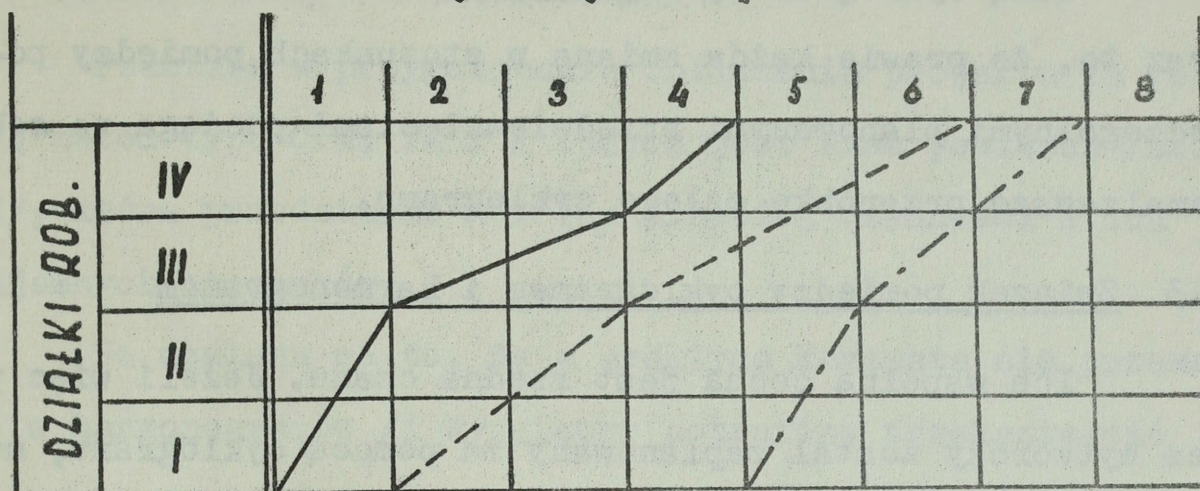
W zależności od tego, jakie związki zachodzą pomiędzy poszczególnymi czynnościami, rozróżniamy:

1. Potok zrównoważony: A/ rytmiczny



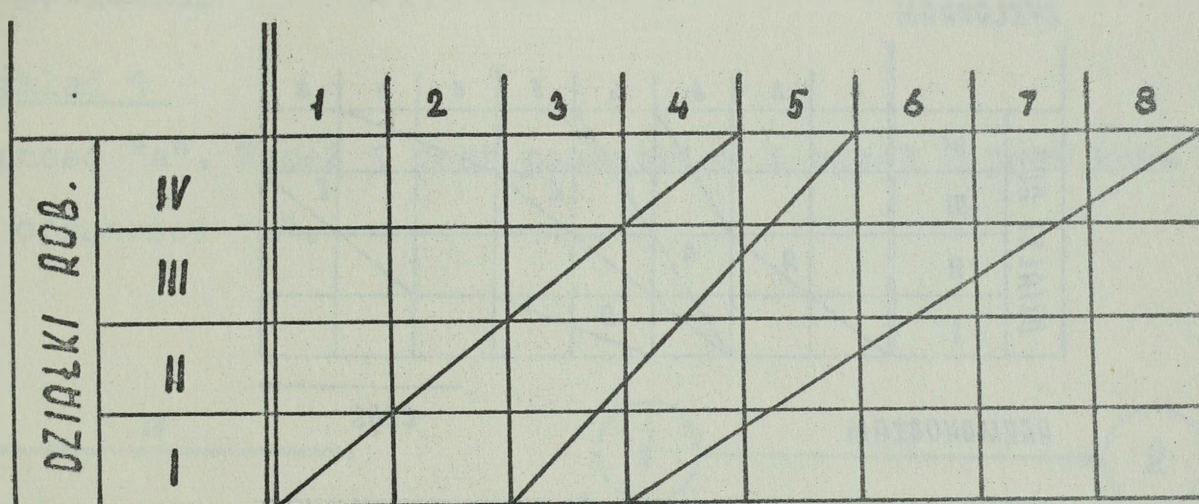
Rys. 10

2. Potok niezrównoważony nierytmiczny



Rys. 11

3. Potok niezrównoważony rytmiczny



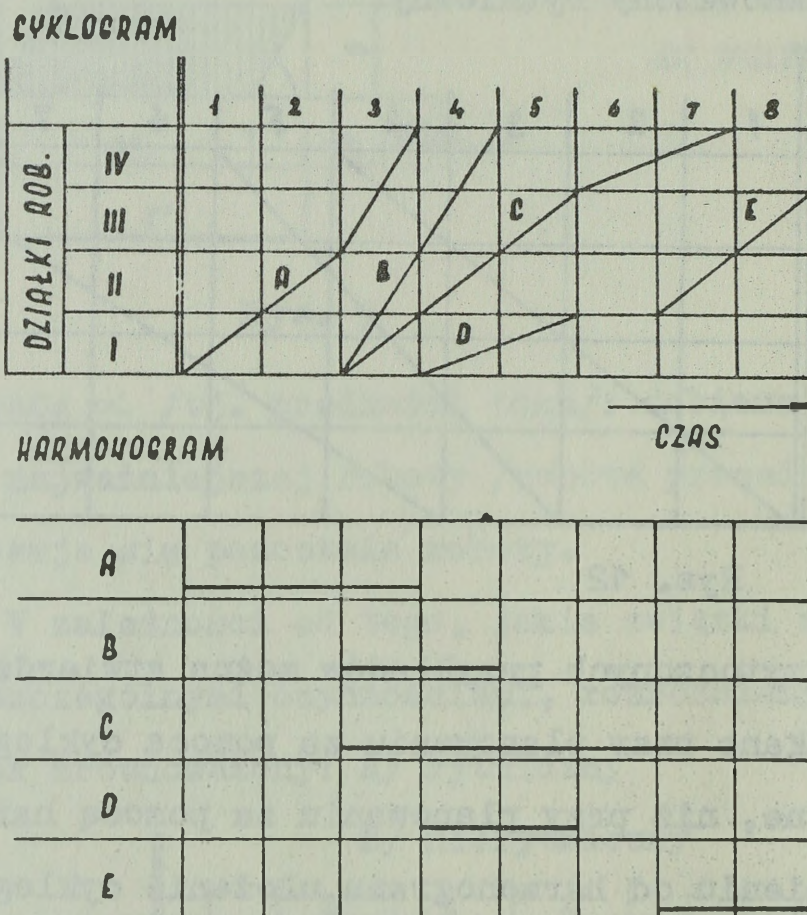
Rys. 12

Na podstawie przytoczonych przykładów można stwierdzić, że informacje uzyskane przy planowaniu za pomocą cyklogramu są bardziej obszerne, niż przy planowaniu za pomocą harmonogramu. W odróżnieniu od harmonogramu ułożenie cyklogramu jest bardziej skomplikowane, wymaga ono dokładnej znajomości projektu, technologii wykonania i organizacji przedsiębiorstwa lub zakładu wykonującego zaplanowane roboty. Sprawa komplikuje się jeszcze bardziej, jeżeli zakładamy pracę zmianową oraz uwzględniamy rok kalendarzowy /to znaczy święta, niedziele itp/.

Wadą cyklogramu jest nieco utrudniona orientacja oraz to, że prawie każda zmiana w stosunkach pomiędzy poszczególnymi planowanymi przedsięwzięciami pociąga za sobą niemalzawsze przeróbkę całego cyklogramu.

### 1.3 Związek pomiędzy cyklogramem i harmonogramem

Ich wspólną cechą jest rzędna czasu. Jeżeli więc proces wytwórczy został zaplanowany za pomocą cyklogramu, można go przekształcić w harmonogram za pomocą metody pokazanej w następującym przykładzie:



Rys. 13

Przejście od harmonogramu do cyklogramu nie jest jednoznaczne i wcale nie tak proste. Trzeba najpierw podzielić całość na działki robocze których harmonogram nie uwzględnia. Podział ten zależny jest od wykonawcy.

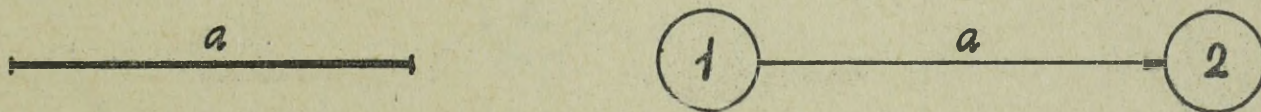
#### 1.4 Podstawowe związki pomiędzy harmonogramem i siecią powiązań

Podstawą w przygotowaniu obliczenia projektu za pomocą metod typu CPM, PERT i innych jest sieć powiązań /zob. 2.2/, która przedstawia kolejny przebieg czynności i ich wzajemnych stosunków.

Ze względu na to, że w praktyce korzysta się przeważnie z harmonogramów /i wyjątkowo potrafimy przekształcić cyklogram na harmonogram/, w następujących przykładach są przytoczone podstawowe związki pomiędzy harmonogramem i siecią powiązań.

##### Przykład 1

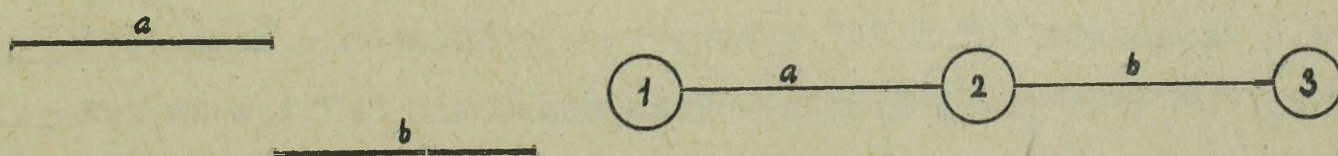
Czynność "a". Węzeł 1 jest początkiem i węzeł 2 jest końcem czynności "a".



Rys. 14

##### Przykład 2

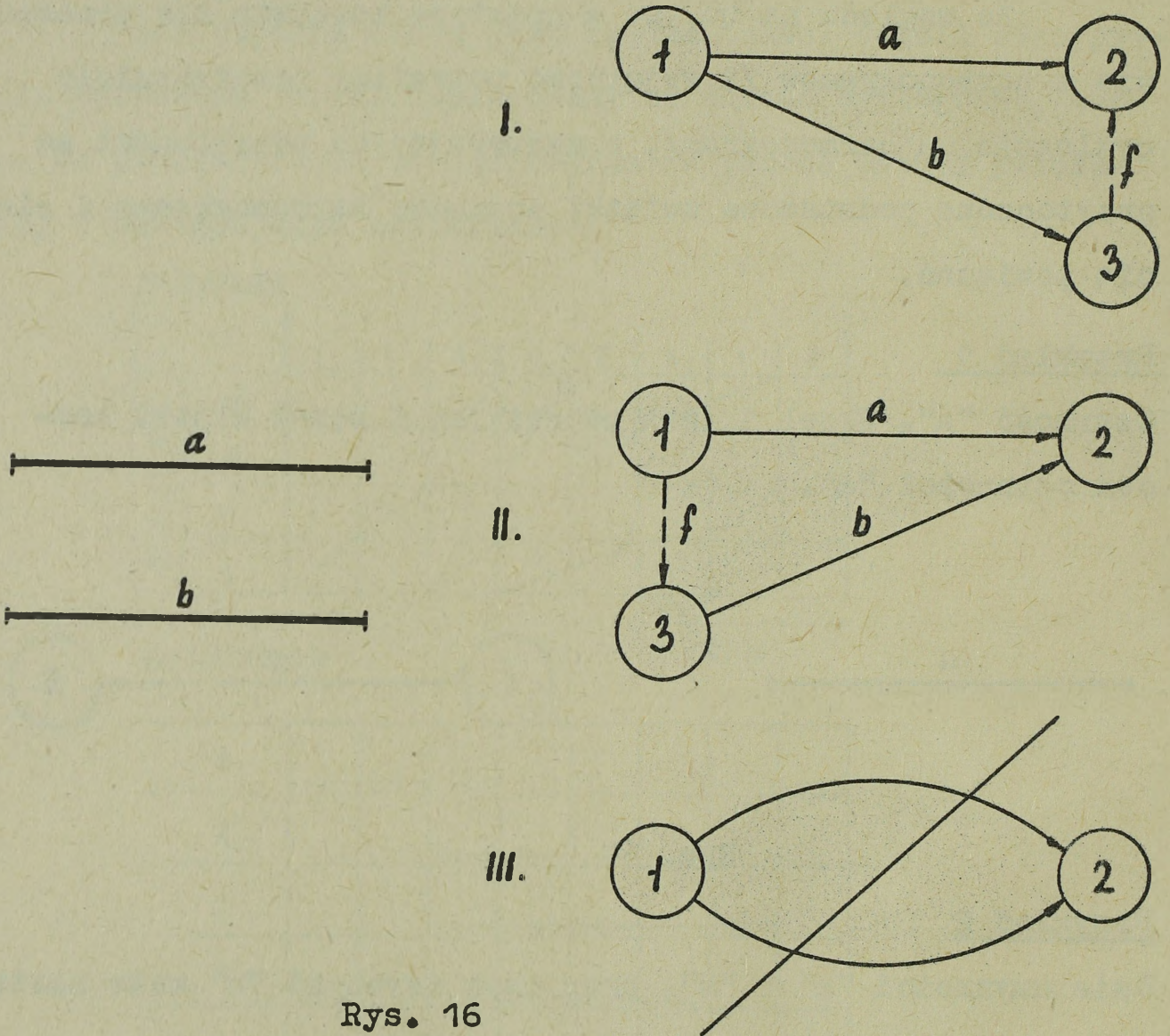
Dwie czynności "a" i "b", przy czym czynność "b" może nastąpić dopiero po ukończeniu czynności "a".



Rys. 15

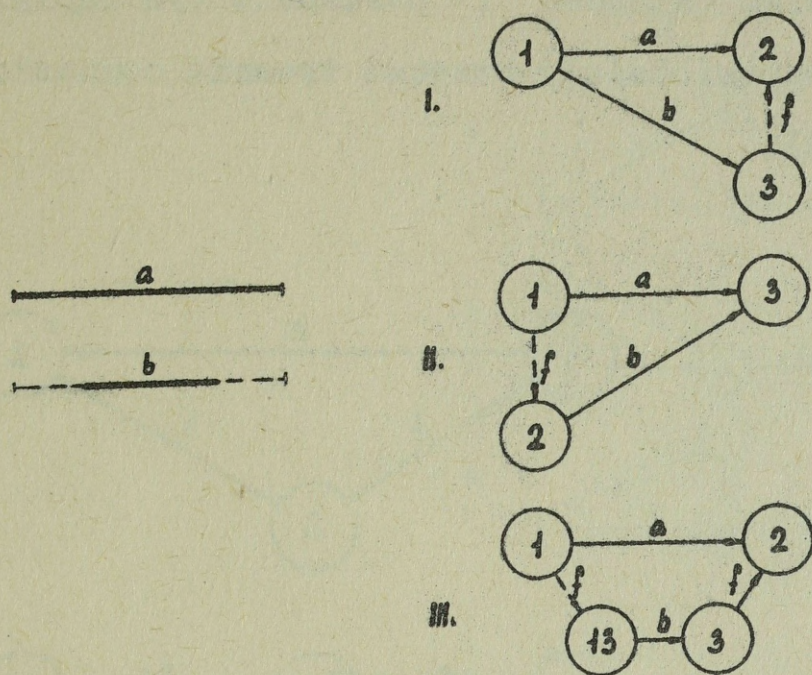
Przykład 3

Dwie czynności "a" i "b" mające jednakowy czas trwania oraz rozpoczynające i kończące się w jednakowym czasie. /Użycie zapisu I i II zależy tylko od czynności kończących i rozpoczynających się w poszczególnych węzłach. Użycie zapisu III jest niedopuszczalne/.



Przykład 4

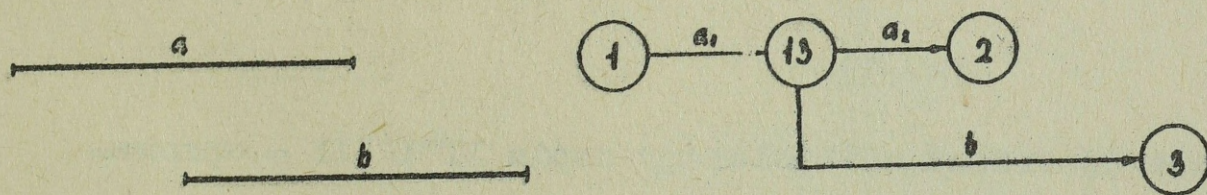
Dwie czynności "a" i "b" wykonywane jednocześnie oraz czynność "b" trwa przez krótszy okres czasu niż "a" i może rozpocząć się w którymkolwiek momencie trwania czynności "a". /Zapis III - drugiej fikcyjnej czynności można użyć dla lepszej orientacji, ale jest zbędny/.



Rys. 17

Przykład 5

Dwie czynności "a" i "b", które nie kończą się równocześnie oraz czynność "b" może nastąpić dopiero w pewnym momencie trwania czynności "a". Nowy węzeł - 13 - węzeł pośredni, który rozdziela czynność "a" na dwie części.

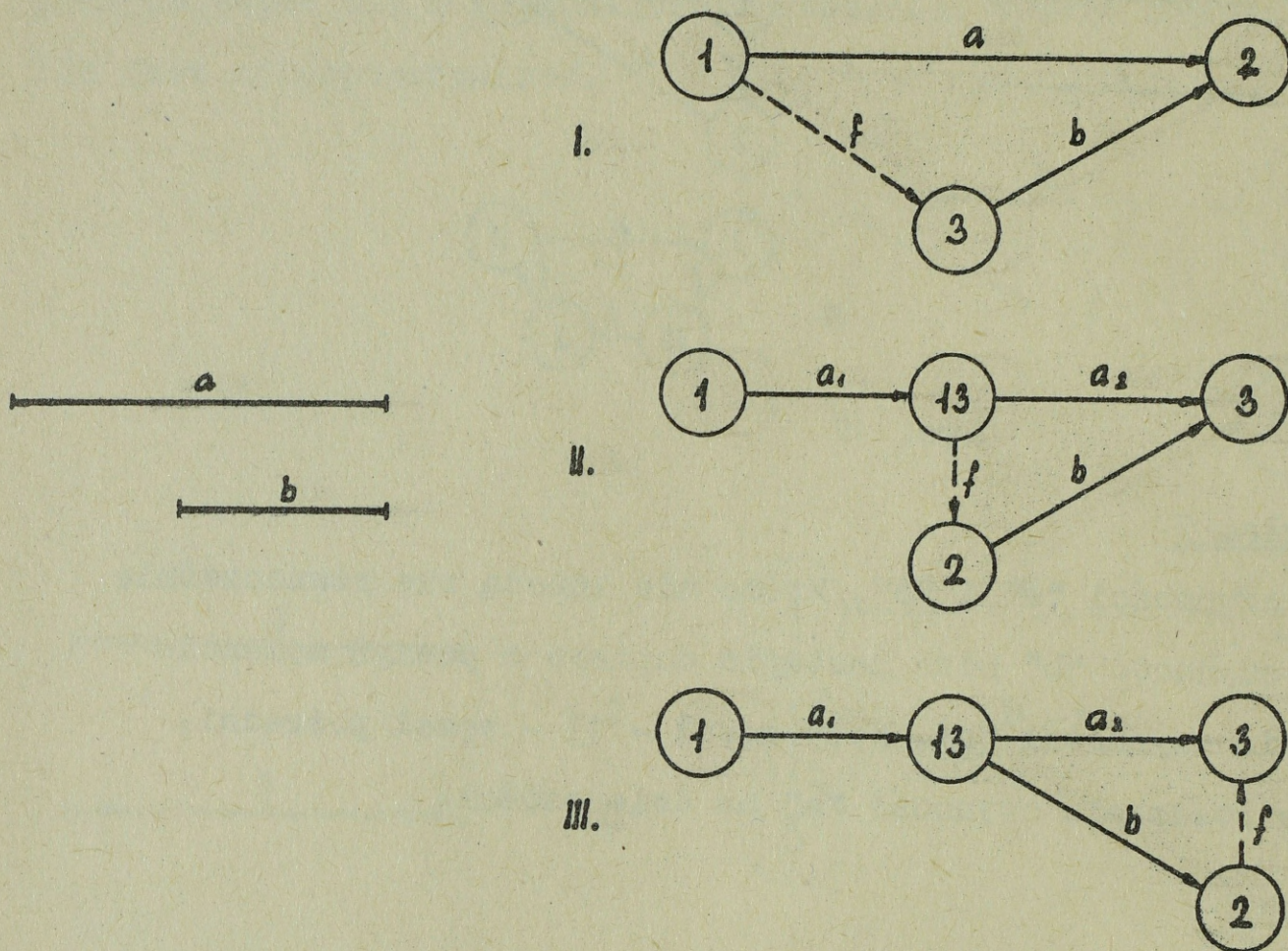


Rys. 18

Przykład 6

Dwie czynności "a" i "b" kończące się równocześnie oraz czynność "b" może nastąpić dopiero w pewnym momencie czynności "a". W zapisie I czynność "f" oznacza warunek czasowy i określa czas konieczny do wyprzedzenia czynności "b"

przez czynność "a". Więc czynność "f" posiada w tym zapisie pewien czas trwania odpowiadający czasowi trwania czynności "a<sub>1</sub>" z zapisu II i III.

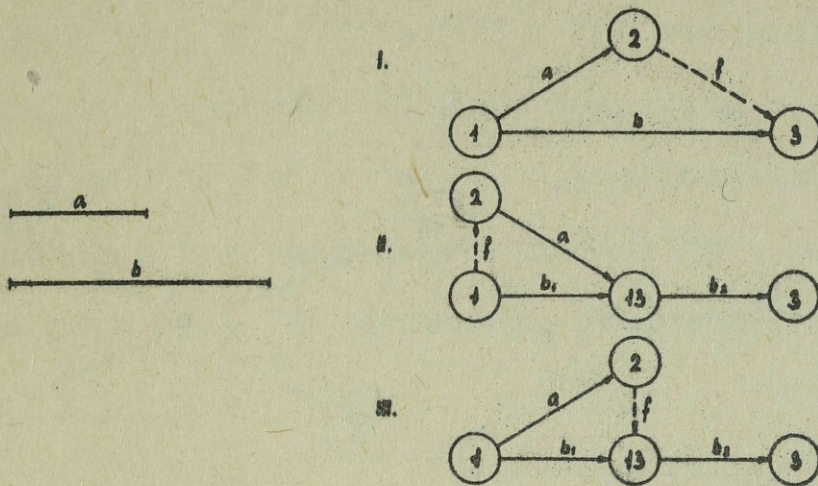


Rys. 19

/Dla lepszej orientacji polecamy zapis II i III - wprowadzenie fikcyjnej czynności "f" z pewnym czasem trwania stosuje się rzadko/.

Przykład 7

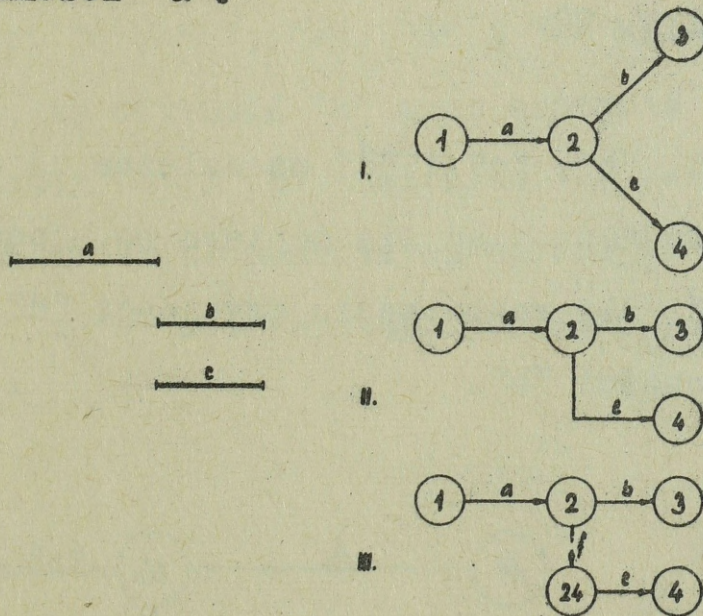
Dwie czynności "a" i "b" z różnym czasem trwania rozpoczynają się równocześnie oraz czynność "b" kontynuowana jest po ukończeniu czynności "a". /Dla czynności "f" ważne jest to samo co w prz. 6/.



Rys. 20

Przykład 8

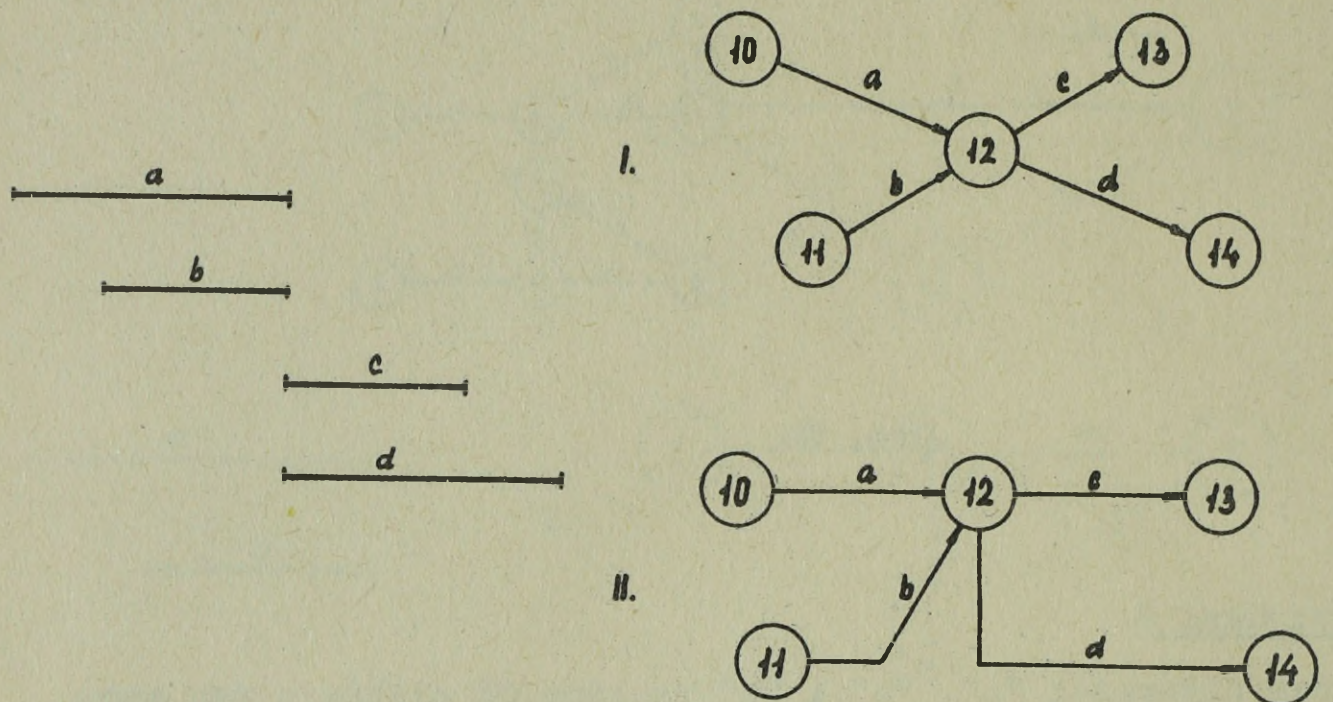
Trzy czynności "a", "b" i "c" zależne od siebie w ten sposób, że czynności "b" i "c" mogą nastąpić dopiero po ukończeniu czynności "a".



Rys. 21

Przykład 9

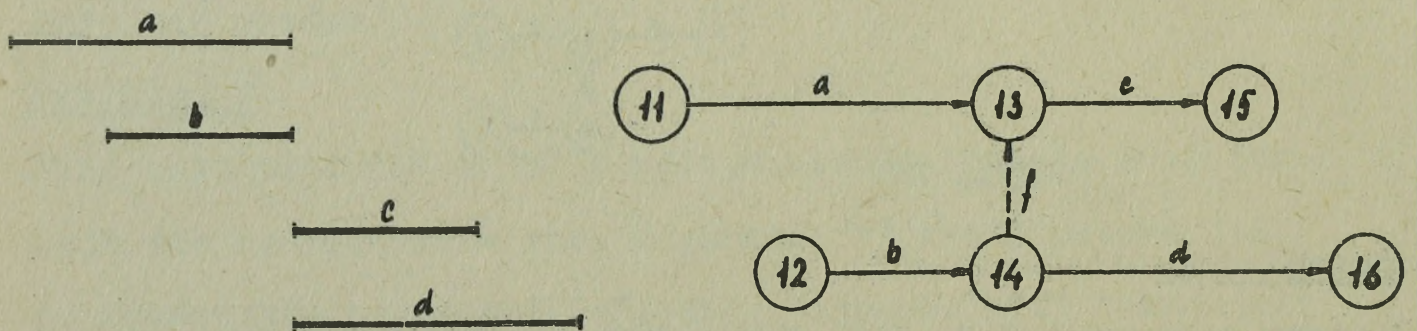
Cztery czynności "a", "b", "c" i "d" zależne od siebie tak, że czynności "c" i "d" mogą rozpocząć się dopiero po ukończeniu czynności "a" i "b".



Rys. 22

Przykład 10

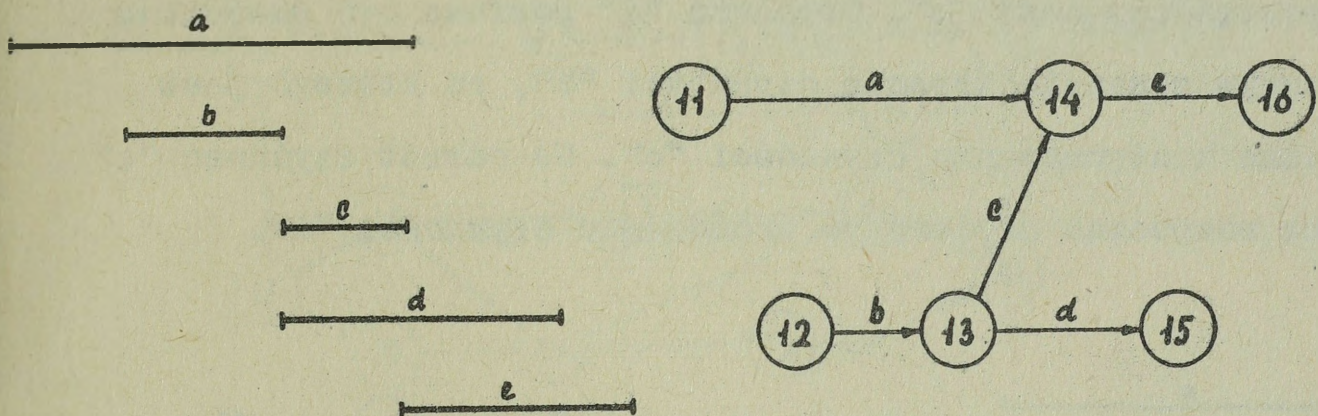
Cztery czynności "a", "b", "c" i "d" są zależne od siebie tak, że czynność "c" może rozpocząć się dopiero po ukończeniu czynności "a" i "b", dla rozpoczęcia czynności "d" wystarczy ukończenie czynności "b".



Rys. 23

Przykład 11

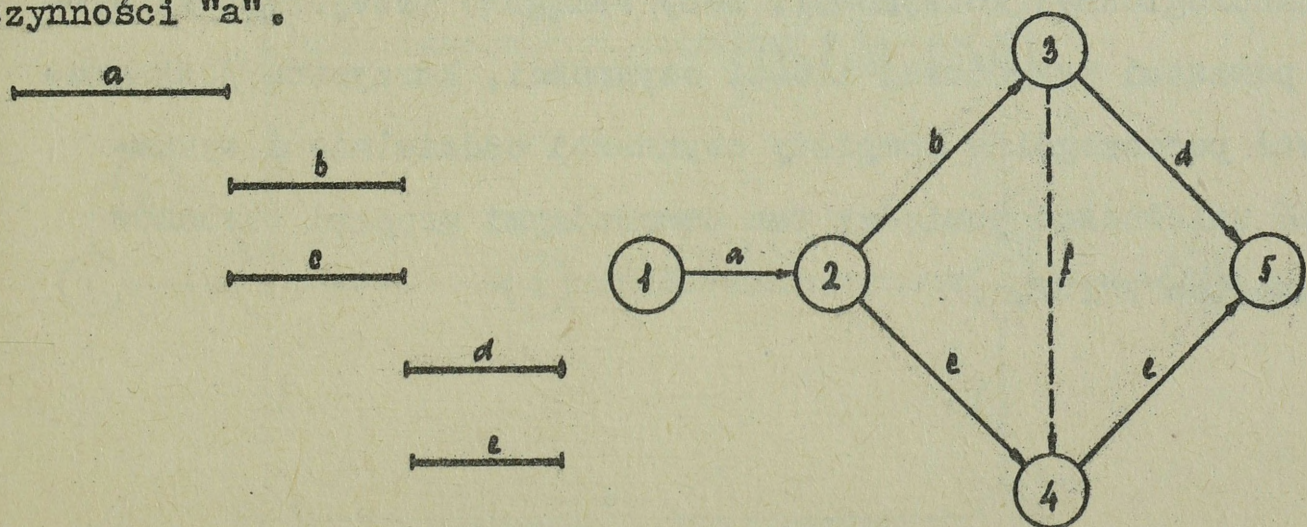
Pięć czynności "a", "b", "c", "d" i "e" zależnych od siebie w ten sposób, że czynność "e" może rozpocząć się dopiero po ukończeniu czynności "a" i "c", których rozpoczęcie natomiast uwarunkowane jest rozpoczęciem czynności "b", na odwrót dla rozpoczęcia czynności "d" wystarczy ukończenie czynności "b".



Rys. 24

Przykład 12

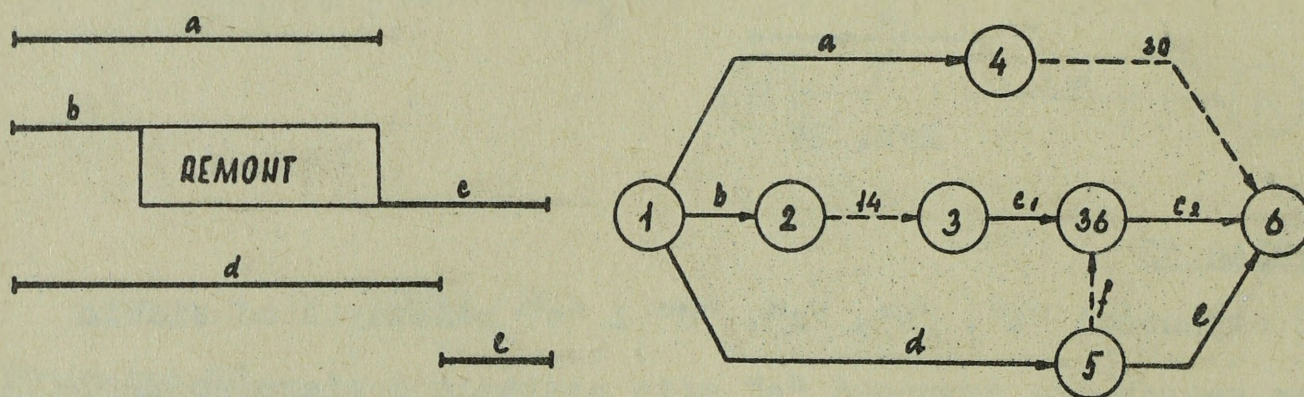
Pięć czynności "a", "b", "c", "d" i "e" zależnych od siebie w ten sposób, że czynność "e" może nastąpić dopiero po ukończeniu czynności "c" i "b", natomiast do rozpoczęcia czynności "d" wystarczy ukończenie czynności "b". Rozpoczęcie czynności "b" i "c" może nastąpić dopiero po ukończeniu czynności "a".



Rys. 25

Przykład 13

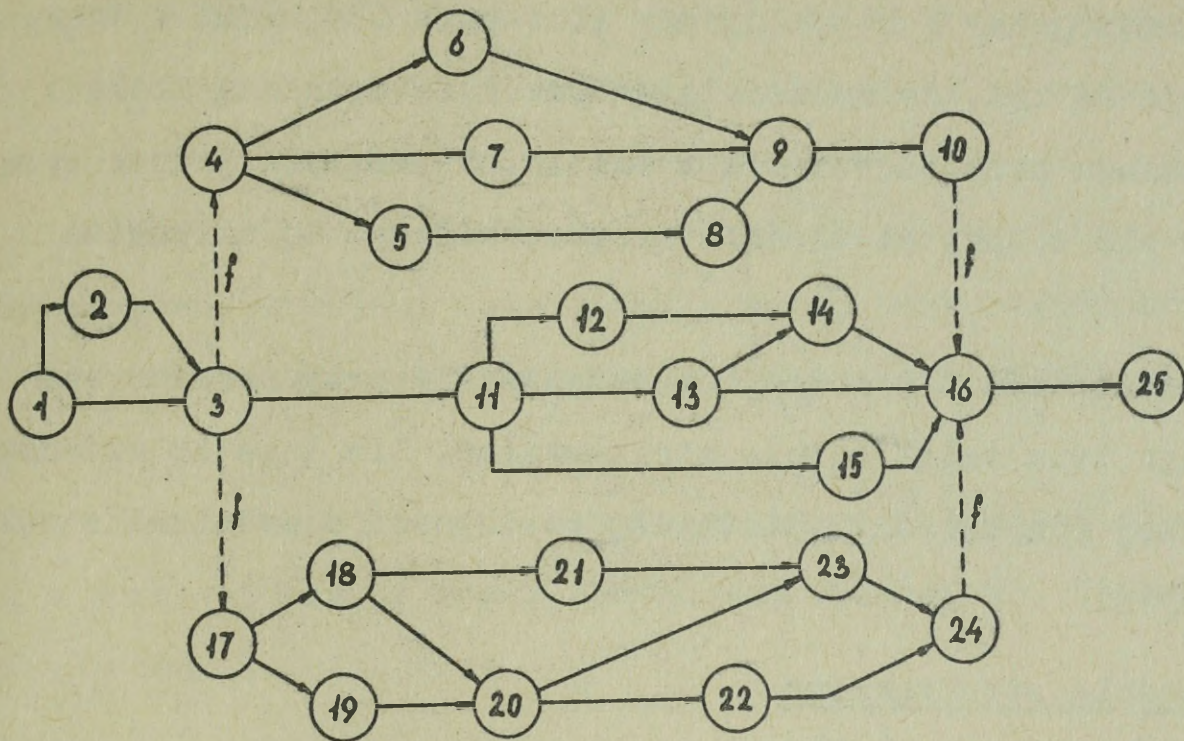
Pięć czynności "a", "b", "c", "d" i "e" zależnych od siebie w ten sposób, że czynność "a" powinna być ukończona np. 30 jednostek czasowych przed ukończeniem całego projektu. Po ukończeniu czynności "b" konieczna jest przerwa o długości 14 jednostek czasowych /np. remont/, a dopiero potem można rozpocząć czynność "c". Czynność "d" powinna być ukończona w pewnym momencie trwania czynności "c", od którego jest zależne kontynuowanie czynności "c". Na odwrót czynność "e" można rozpocząć dopiero po ukończeniu czynności "d".



rys. 26

Przykład 14

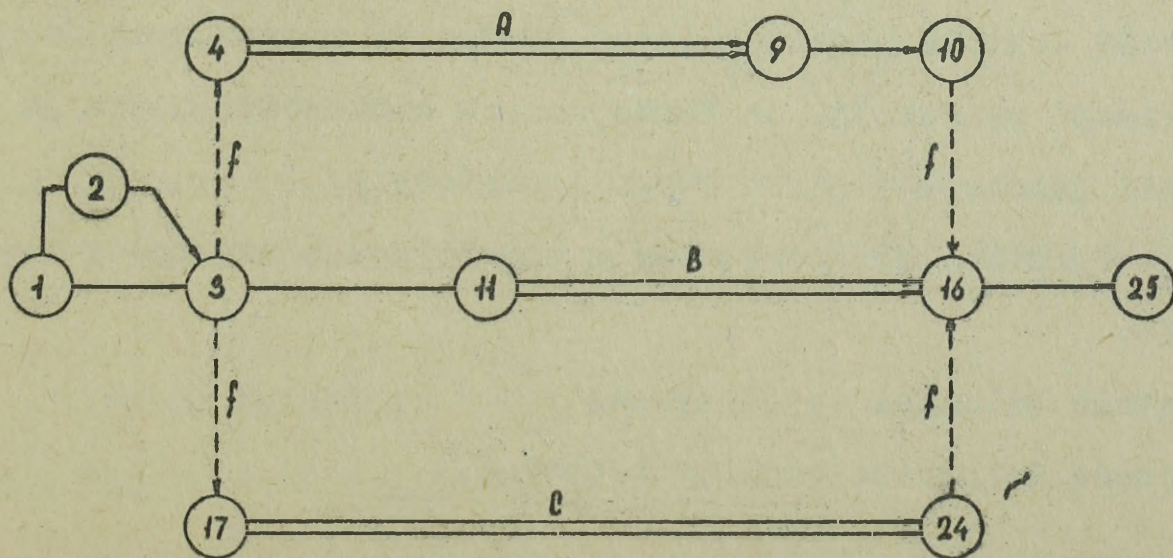
Szereg czynności, które od pewnego momentu zbiegają się w technologicznej kolejności. Żeby osiągnąć przejrzystość sieci powiązań przy dużej ilości czynności, korzystne jest grupować poszczególne komplety czynności oddzielnie i wyznaczać zależności pomiędzy tak utworzonymi grupami warunków czasowych /"f"/.



rys. 27

Przykład 15

Przy realizacji dużych projektów wymagających większej ilości czynności jest bardziej korzystne opracować ogólny schemat przedstawiający drobne czynności oraz ich związki w postaci bloków, które zwykle oznaczamy dużymi literami. W przykładzie tym jest uproszczony przykład 14 i użyto tu bloków "A", "B" i "C". Wprowadzone bloki podkreślane są graficznie - np. linią podwójną.



rys. 28

Dotychczas przytoczone metody planowania, "tradycyjne" harmonogramy lub cyklogramy albo nowe CPM, PERT i inne, polegają na tym, że rozdzielają uprzednio ustaloną ilość planowanego przedsięwzięcia w czasie. W praktyce jednak spotykamy się z tym, że właśnie trzeba obliczyć tę całkowitą ilość.

Ostatnio z powodzeniem stosuje się przy rozwiązywaniu tego typu zadań modele strukturalne. Dla lepszej orientacji niżej przytaczamy podstawowe wiadomości o modelach strukturalnych.

#### 1.5 Modele strukturalne

Modele strukturalne stanowią uproszczone przedstawienie rzeczywistości. Najprostsze są modele liniowe, które przedstawiają związki modelowane za pomocą układu równań liniowych. Rozróżniamy modele dotyczące gospodarki narodowej, resortowe i modele dotyczące przedsiębiorstw.

##### Konstrukcja modelu.

Przy konstrukcji modelu wychodzimy z założenia, że produkcja i zużycie poszczególnych produktów znajdują się w równowadze. Stosunki pomiędzy objętością produkcji i objętością zużycia poszczególnych produktów potrzebnych do realizacji produkcji, są funkcjami /w większości można je wyrazić jawnie w postaci funkcji liniowych/.

Podstawy do sporządzania modeli można uzyskać w zasadzie:

- 1/ metodą bilansowo-analityczną
- 2/ metodą technologiczno-syntetyczną.

Przy stosowaniu metody bilansowo-analitycznej korzystamy ze znajomości stosunków pomiędzy zużyciem i produkcją poszczególnych produktów. Podstawy uzyskujemy za pomocą statystyk zawierających wyniki minionego okresu.

Przy stosowaniu metody technologiczno-syntetycznej podstawy konstruujemy na podstawie norm, przeprowadzonych pomiarów w procesie produkcyjnym oraz związków technologicznych.

Żadnej z obu przytoczonych podstawowych metod nie można w praktyce prawie nigdy zastosować oddzielnie. Zazwyczaj obie metody kombinujemy.

#### Modele statyczne otwarte i zamknięte

Dla modeli statycznych charakterystyczne jest to, że wszystkie występujące w nich wielkości odnoszą się do jednego wspólnego okresu czasu.

W modelu statycznym zamkniętym, ogólna produkcja równa się globalnemu zużyciu produkcji w rozważanym okresie czasu.

Statyczny model liniowy zamknięty można wyrazić dla  $n$  gałęzi /lub  $n$  dziedzin produkcyjnych/ za pomocą jednorodnego układu równań liniowych.

Oznaczmy przez

$X_j$  całkowitą produkcję  $j$ -tej dziedziny gałęzi

$x_{ij}$  objętość produkcji  $i$ -tej gałęzi zużytej w  $j$ -tej gałęzi.

Wtedy zachodzi

$$x_{11} + x_{12} + \dots + x_{1n} = X_1$$

$$x_{21} + x_{22} + \dots + x_{2n} = X_2$$

/4/

.....

$$x_{n1} + x_{n2} + \dots + x_{nn} = X_n$$

Powyższy zapis można również wyrazić w postaci tabeli:

Gałąź	Zużycie w gałęziach prod.	Produkcja całkowita
1	$x_{11} \ x_{12} \ \dots \ x_{1n}$	$X_1$
2	$x_{21} \ x_{22} \ \dots \ x_{2n}$	$X_2$
.	.....	.
n	$x_{n1} \ x_{n2} \ \dots \ x_{nn}$	$X_n$

Statyczny model liniowy otwarty można przedstawić za pomocą układu równań liniowych.

Jeżeli następnie oznaczymy przez  $y_i$  końcowe zużycie produkcji  $i$ -tej gałęzi, możemy napisać

$$x_{11} + x_{12} + \dots + x_{1n} + y_1 = X_1$$

/5/

$$x_{21} + x_{22} + \dots + x_{2n} + y_2 = X_2$$

.....

$$x_{n1} + x_{n2} + \dots + x_{nn} + y_n = X_n$$

Układ tych  $n$  równań, które nazywają się równaniami bilansowymi podziału produkcji, jest punktem wyjściowym w analizie pomiędzy poszczególnymi gałęziami. Jednostki produkcji mogą być wyrażone w postaci albo naturalnej /t, q, m, m<sup>3</sup>, szt., itd/ albo pieniężnej.

Analogicznie do poprzedniego można zapis znów wyrazić za pomocą tabeli.

Gałąź	Zużycie w gałęziach prod.				Końcowe zużycie	Całkowita produkcja
	1	2	.....	n		
1	$x_{11}$	$x_{12}$	.....	$x_{1n}$	$y_1$	$X_1$
2	$x_{21}$	$x_{22}$	.....	$x_{2n}$	$y_2$	$X_2$
•	.....				...	..
n	$x_{n1}$	$x_{n2}$	.....	$x_{nn}$	$y_n$	$X_n$

W obydwu przypadkach /model otwarty i zamknięty/ trzeba wprowadzić następujące założenia:

a/ wielkość zużycia produktów i-tej dziedziny w j-tej dziedzinie jest proporcjonalna do całkowitej produkcji j-tej dziedziny /założenie liniowości/;

b/ następnie w produkcji zachodzi taki związek, że powiększenie jednego z czynników produkcji, zakładając przy tym, że żaden z pozostałych czynników się nie zmieni, nie prowadzi do podwyższenia całkowitej produkcji.

Założenie liniowości można zapisać  $x_{ij} = a_{ij} \cdot X_j$ , gdzie  $a_{ij}$  oznacza tzw. współczynnik techniczny /prosta norma zużycia/, którego ważność jest ograniczona w czasie /w różnych modelach różny okres ważności - rzędu kilka lat/.

Po wprowadzeniu współczynników technicznych można układy równań zapisać w postaci

a/ model zamknięty

$$\sum_{j=1}^n a_{ij} X_j = X_i \quad i = 1, 2, \dots, n \quad /6/$$

b/ model otwarty

$$\sum_{j=1}^n a_{ij} X_j + y_i = X_i \quad i = 1, 2, \dots, n \quad /7/$$

Następnie oznaczmy przez A macierz współczynników technicznych

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix} \quad /8/$$

Wektor produkcji

Wektor końcowego zużycia

$$X = \begin{bmatrix} X_1 \\ X_2 \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ X_n \end{bmatrix} \quad Y = \begin{bmatrix} Y_1 \\ Y_2 \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ Y_n \end{bmatrix} \quad /9/$$

Wtedy możemy napisać

a/ model statyczny zamknięty w postaci równania macierzowego

$$A X = X \quad [E - A] \cdot X = 0 \quad /10/$$

b/ model statyczny otwarty

$$A X + Y = X \quad \text{lub} \quad Y = [E - A] \cdot X \quad \text{lub} \quad X = [E - A]^{-1} Y, \quad /11/$$

gdzie E oznacza macierz jednostkową /zob. rozdz. 3.2/.

Znajdując współczynniki techniczne możemy za pomocą statycznego modelu liniowego zamkniętego obliczyć stosunek między produkcjami poszczególnych gałęzi.

Za pomocą statycznego modelu liniowego otwartego można obliczać /znając współczynniki techniczne/

- końcowe zużycie Y przy określonej całkowitej produkcji X
- całkowitą produkcję X przy określonym końcowym zużyciu Y

Własności współczynników technicznych.

Współczynniki techniczne są określone równaniem

$$a_{ij} = \frac{x_{ij}}{X_j} \quad i, j = 1, 2, \dots, n \quad /12/$$

O ile  $x_{ij}$  i  $X_j$  wyraża się w jednostkach naturalnych, współczynniki  $a_{ij}$  określają, jaka ilość produktów "i" wyrażona w jednostkach naturalnych potrzebna jest do produkcji jednej jednostki produkcji "j" wyrażonej również w jednostkach naturalnych.

Trzeba uświadomić sobie, że wartość bezwzględna współczynników zależy od jednostek, w których mierzymy obydwie produkcje  $x_{ij}$  i  $X_j$ . Zmiana jednostek powoduje zmianę wartości współczynników technicznych.

Jeżeli objętość produkcji wyrażona jest w jednostkach pieniężnych, współczynnik techniczny jest liczbą bezwymiarową. Wartość współczynnika zależy w tym przypadku nie tylko od objętości naturalnego zużycia, tj. od związków technologicznych, ale również od stosunku cen zużywanego i końcowego produktu.

#### Aggregacja dziedzin

Klasyfikacja dziedzin jest podstawą do konstruowania i funkcjonowania modeli strukturalnych. Jeżeli nie została ona poprawnie wykonana, współczynniki techniczne mogą się zmieniać i nie odpowiadać wymaganiom. Liczba dziedzin musi być jednak ograniczona. Ograniczenie jest konieczne przede wszystkim ze względu na możliwości techniki obliczeniowej, jak również dlatego, że przy dużej ilości dziedzin istnieje możliwość zastępowania jednej przez dru-

gą, co jest w sprzeczności z założeniami konstrukcji modelu strukturalnego. Z doświadczenia wynika, że najkorzystniejsza liczba dziedzin wynosi od 50 do 200. Żeby nie przekroczyć tej liczby można łączyć dziedziny w większe całości.

Łączenie dziedzin nie jest problemem o rozwiązaniu jednoznacznym i dopiero w ostatnich latach zostały odkryte ściśle zależności matematyczne. Trzeba uświadomić sobie, że przy każdym łączeniu gubimy pewne informacje. Można więc zgubić np. niektóre dziedziny deficytowe, ponieważ mogą one być tylko częścią dziedziny zagregowanej. Przy rozległym łączeniu mogą zniknąć cechy charakterystyczne współczynników technicznych dlatego, że w tym przypadku wyrażają one zużycie dziedziny, która nie jest jednorodna. To może wpłynąć negatywnie na rezultaty bilansu sporządzonego na podstawie współczynników technicznych.

Przykład agregacji:

Jeżeli łączymy dziedziny t, g, h w jedną dziedzinę r, wtedy współczynnik techniczny dziedziny r wynosi

$$a_{ir} = \frac{\bar{X}_{ir}}{\bar{X}_r} \quad , \text{gdzie}$$

$$\bar{X}_{ir} = x_{it} + x_{ig} + x_{ih} \quad /13/$$

$$\bar{X}_r = X_t + X_g + X_h$$

Podstawiając  $x_{ij} = a_{ij} \cdot X_j$  do równania /1/ otrzymamy

$$a_{ir} = \frac{a_{it} \cdot X_t + a_{ig} \cdot X_g + a_{ih} \cdot X_h}{X_t + X_g + X_h} \quad /14/$$

To oznacza, że współczynnik dziedziny zagregowanej jest średnią ważną współczynników technicznych dziedzin łączonych.

Ze zwięzłego opisu współczesnych metod planowania wi-  
dać, że za wyjątkiem modeli strukturalnych, są one sztywne.  
Są również mało operatywne. Również i to, że tylko małą  
część z nich można zaprogramować, wskazuje na dużą praco-  
chłonność ich opracowania.

Dlatego były i są poszukiwane nowe drogi i metody,  
które mogłyby umożliwić przeniesienie najbardziej praco-  
chłonnych części na maszyny matematyczne i dostarczyłyby  
zarazem co najmniej tyle informacji co metody dotychczasowe.

## 2. METODY ANALIZY ZA POMOCĄ ŚCIEŻKI KRYTYCZNEJ

### 2.1 Warunki powstania metod analizy sieciowej i ich miejsce w badaniach operacyjnych /Operations Research//

Zagadnienia kierowania i kontroli procesów złożonych i systemów pojawiły się w czasie drugiej wojny światowej. Potrzeba było rozwiązać dużo skomplikowanych sytuacji na froncie i na tyłach. Powstały nowe środki łączności, maszyny do przetwarzania danych, teoria cybernetyki i metody pozwalające na naukowe i obiektywne rozwiązywanie problemów kierowania procesami złożonymi. Powstała nowa dyscyplina - Operations Research /badania operacyjne/.

Dla badań operacyjnych jest charakterystyczne to, że powstały one podobnie jak cybernetyka, z połączenia różnych dyscyplin naukowych. Badania operacyjne korzystają z rezultatów matematyki, statystyki, logiki, psychologii, socjologii, ekonomii, biologii, cybernetyki, nauk technicznych itp. Badania operacyjne są nową nauką, która się dopiero kształtuje i rozwija. Mimo to jest już dzisiaj stosunkowo jednolitą dyscypliną i zasługuje na większą uwagę.

Rozwojowi metod badań operacyjnych sprzyjają współczesne warunki /maszyny matematyczne, metody modelowania matematycznego/.

Nie można jeszcze dzisiaj dokładnie wyznaczyć zakresu zastosowania metod badań operacyjnych. Do najbardziej znanych należą programowanie matematyczne, analiza strukturalna, teoria gier, teoria masowej obsługi /frontów/, teoria zapasów, metody Monte Carlo, metody analizy sieci,

teoria niezawodności itp.

Konieczne jest nowe podejście do rozwiązywania nowych zagadnień, ponieważ metody te wykorzystują wiadomości dużej ilości dyscyplin naukowych. Warunkiem jest współpraca różnych specjalistów i ich grupowanie. W dziedzinie tej wykorzystuje się modelowanie matematyczne. Model matematyczny służy do uchwycenia zjawisk i procesów złożonych. Użycie modeli jest konieczne ze względu na to, że eksperymentatorstwo w zakresie wojskowości i gospodarki jest praktycznie niemożliwe.

Na modelach można przeprowadzać doświadczenia, opracowywać różne warianty i z nich wybierać optymalne. Przy opracowaniu dużej ilości wariantów stosuje się ostatnio metody symulacji, które operują liczbami losowymi. Do zastosowania tych metod potrzebne są jednak duże maszyny matematyczne.

Praca w zespołach, modelowanie i symulacja są głównymi charakterystycznymi cechami współczesnego podejścia do rozwiązywania skomplikowanych zagadnień technicznych i ekonomicznych.

Poszczególne metody badań operacyjnych są dzisiaj na różnym poziomie opracowania i praktycznego użycia. Niektóre można dokładnie wyrazić w postaci algorytmów, istnieją dla nich sprawdzone programy, metody są wypróbowane i stosowane w praktyce /programowanie liniowe, analiza strukturalna, metody analizy sieci - CPM, PERT itp/. Dla innych metod szukamy dopiero matematycznego sformułowania.

Następnie zostaną przytoczone główne cechy charak-

terystyczne i zagadnienia rozwiązywane za pomocą niektórych bardziej znanych metod badań operacyjnych.

### 1. Programowanie matematyczne /Mathematical Programming/

Metody te można podzielić na metody programowania liniowego i metody programowania nieliniowego. Chodzi tutaj o rozwiązywanie zadań wariacyjnych, tj. takich, w których można dojść różnymi drogami do określonego celu. Tylko jeden albo ograniczona liczba sposobów jest optymalna. Z punktu widzenia modelu matematycznego mamy więc znaleźć ekstremum, tzn. minimum lub maksimum funkcji charakteryzującej cel, który zamierzamy osiągnąć.

Jeżeli funkcja ta jest liniowa, zagadnienie sprowadza się do programowania liniowego. Jeżeli nie jest liniowa /np. dwumianowa/, zagadnienie sprowadza się do programowania nieliniowego.

Optymalizując modele liniowe są pełniej opracowane i wielokrotnie wypróbowane w praktyce. Dla modeli nieliniowych ciągle jeszcze szukamy najdogodniejszych algorytmów rozwiązania zadań.

Najprostszymi modelami programowania liniowego są tzw. zagadnienia alokacji. Przede wszystkim jest to problem transportowy, w którym bada się optymalne rozwiązanie dowozu przy określonych wydajnościach i wymaganiach. Celem jest zminimalizowanie kosztów w ten sposób, żeby zostały spełnione wszystkie warunki ograniczające. Następnie do takich modeli sprowadzają się zagadnienia przyporządkowania - rozwiązujące optymalne wykorzystanie maszyn, siły roboczej itp. na różnych stanowiskach roboczych.

Tzw. zagadnienie przejazdów obwodowych /"zagadnienie komiwojażera"/ rozwiązuje problem dowozu, w przypadku kiedy środek komunikacji w czasie jazdy obwodowej kolejno wyładowuje swój ładunek i wraca z powrotem. Zadanie jest następujące: przejechać tylko raz przez każde miejsce, wrócić do punktu wyjściowego oraz osiągnąć minimalną ilość przebytych km.

W zakres programowania liniowego wchodzi też modele dystrybucyjne, które są uogólnieniem modeli zagadnień transportowych, zagadnienia mieszanki rozwiązujące optymalne wykorzystanie surowców itp.

## 2. Analiza strukturalna /Input - Output Analysis/

Pierwszy raz została matematycznie sformułowana i opracowana przez W.W.Leontiewa w okresie między pierwszą i drugą wojną światową. Leontiew kontynuował myśli Quesnay'a i Parrota.

Analiza strukturalna korzysta z rachunku macierzowego oraz z przedstawienia tabelowego. Chodzi tutaj o metody bilansowe, które mają za zadanie ustalić wymagania i źródła dla każdej gałęzi gospodarki narodowej, dla każdego produktu pewnej gałęzi itp. W połączeniu z modelami optymalizującymi usiłuje się znaleźć optymalną strukturę gospodarki narodowej.

Dla określonych wymagań zużycia, metody te umożliwiają obliczyć optymalną strukturę produkcji lub dla określonej zdolności produkcji obliczyć optymalną strukturę zużycia. Umożliwiają również za pomocą macierzy odwrotnych i tzw. wskaźników kompleksowych określić wpływ zmiany produkcji jednej gałęzi na produkcję wszystkich pozostałych

gałęzi itp. Ich możliwości są duże, przede wszystkim w połączeniu z modelami optymalizującymi, metodami analizy sieciowej itp.

Wadą dotychczasowych modeli strukturalnych jest to, że są statyczne. Pokazują strukturę tylko w pewnym ustalonym czasie. Nie umożliwiają one określać wystarczająco dokładnych naukowych przewidywań. Te zagadnienia rozwiązują tzw. modele dynamiczne. Na razie jednak ich metodyka nie jest zadowalająco opracowana.

Z modeli strukturalnych korzysta się nie tylko w skali gospodarki narodowej, ale również w skali gałęzi, dziedzin, zakładów itp.

### 3. Teoria masowej obsługi /frontów/ /Queuing Theory/

Teoria masowej obsługi nosi też nazwę teorii frontów. Z rozwojem urządzeń umożliwiających zbiorową obsługę dużej ilości jednostek powstało zagadnienie, jaka jest zdolność urządzeń w pewnych warunkach i w jakiej proporcji są koszty eksploatacyjne i czysty dochód.

Chodzi tutaj o zagadnienia z zakresu działania linii telegraficznych i telefonicznych, ruchu komunikacyjnego, funkcjonowania urządzeń sanitarnych, samoobsług, linii operacyjnych itp.

Ogólnie zawsze bierzemy pod uwagę jakiś system, który jest zdolny obsłużyć pewną ilość określonych elementów. Czas wejścia do systemu waha się, czas obsługi również. Możemy dostarczyć dane o gromadzeniu się elementów przed wejściem do systemu. Potem można ułożyć stosunek między

nateżeniem wejścia i wyjścia w ten sposób, żeby gromadzenie nie przekroczyło pewnej granicy.

#### 4. Teoria zapasów /Inventory Theory/

Nazywa się również teorią składowania. Metody teorii zapasów umożliwiają rozwiązywać problemy powstałe w związku z nagromadzeniem surowców, produktów, części zamiennych itp. Pewne nagromadzenie zapasów jest konieczne, żeby zapobiec ewentualnym trudnościom w zaopatrzeniu. Określenie optymalnej ilości zapasów może być bardzo skomplikowanym zadaniem.

Wymagania mogą zmieniać się w ten sposób, że pewną wielkość zapasów wymagamy z określonym prawdopodobieństwem. Utrzymywanie zapasów dla "małoprawdopodobnych" wymagań jest przeważnie bardzo kosztowne. Dla takich wymagań musimy liczyć się z przerwami w przebiegu produkcji.

#### 5. Teoria gier /Theory of games/

Przy rozwiązywaniu praktycznych zadań z zakresu ekonomiki, wojskowości itp. bardzo często trzeba rozwiązywać sytuacje, kiedy spotyka się dwie lub więcej "przeciwstawnych" stron. Każda strona /"gracz"/ zmierza do celów odwrotnych niż przeciwnicy. Powstaje sytuacja konfliktowa, w której postępowanie jednej ze stron zależy od rezultatów postępowania strony drugiej.

Model matematyczny powyższego przypadku nazywa się grą. W odróżnieniu od opisaney sytuacji, gra przebiega według ustalonych reguł koniecznych dla matematycznej analizy gry.

Regułami nazywamy zespół warunków określających możliwe warianty postępowania obydwóch stron. Strategią nazywamy zbiór reguł określających w sposób jednoznaczny posunięcie gracza przy każdym posunięciu przeciwnika w zależności od położenia układającego się podczas gry.

Celem jest znaleźć optymalną strategię, która zapewnia przy jakimkolwiek posunięciu przeciwnika maksymalną możliwą wygraną. Jest to tzw. zasada minimaks, która również zapewnia przeciwnikowi, że przy jakimkolwiek naszym posunięciu istnieje posunięcie zapewniające mu minimalną przegraną.

Modele teorii gier można w prosty sposób sformułować jako zagadnienia programowania liniowego. Wtedy ograniczenia są równoważne regułom gry i należy znaleźć strategię ekstremalizującą funkcję wygranej. Własnej strategii odpowiada rozwiązanie jednego zagadnienia, strategii przeciwnika odpowiada rozwiązanie zagadnienia sprzężonego.

Wśród przytoczonych metod badań operacyjnych szczególnie ważna jest metoda analizy sieciowej.

#### 6. Analiza sieci /Critical Path Analysis/

Metody te rozwiązują zagadnienia związane z kierowaniem, planowaniem i kontrolą przebiegu procesów złożonych. Są to procesy, przy których do osiągnięcia wyznaczonego celu potrzebne jest zrealizowanie setek tysięcy nachodzących na siebie logicznie i technologicznie związanych operacji i czynności.

Dotychczasowe metody nie pozwalały rozwiązać problem kierowania takimi procesami w całości przy ich złożoności.

Główną rolę odgrywało doświadczenie i intuicja. Dopiero istnienie maszyn matematycznych i modelowania matematycznego umożliwiło ich powstanie. Podwyższają one sprawność kierowania za pomocą szybszej i bardziej odpowiedzialnej kontroli, odkrywają problemy wcześniej niż mogą nastąpić dysproporcje i umożliwiają sprawną redukcję czasu i kosztów w rozwiązywanych zadaniach.

Istnieje już około 40 różnych modyfikacji wyprowadzonych z dwóch podstawowych metod CPM i PERT.

Są to przede wszystkim:

PERT /Program Evaluation and Review Technique/, CPM /Critical Path Method/, TOPS /The Operational PERT System/, HEPP /Hoffmann Evaluation Procedure/, GAP /Graphic Application of PERT/, LESS /Least Cost Estimating and Scheduling/, LOB /Line of Balance/, RAMPS /Resource Allocation and Multi Project Scheduling/, SCANS /Scheduling and Control by Automated Network Systems/, RITE /Rapid Information Technique for Evaluation/, MAPS /Multivariate Analysis and Prediction of Schedules/, DBPS /Decision Box Planning and Scheduling/, MS /Multiship, Multishop, Workload - Smoothing Program/, PEP /Program Evaluation Procedure/, CPS /Critical Path Scheduling/, CPPS /Critical Path Planning and Scheduling/, PROMOCOM /Project Monitor and Control Method/, IMPACT /Implementation, Planning and Control Technique/, CPP /Critical Path Programming/, PERT /COST, PILOT, RPSM, MCX, CRAM, COMET, PROMPT, DELTA, NARMS, TARMS, PLANNET, PRISM, SVS, TRACE, PEST, RELECOM, PERT - NAP, SUPERT, PERTOCOM i inne.

Wskazuje to na ich dostosowania się do różnych warunków i celów.

### 2.1.1 Historia powstania

Historia powstania obu podstawowych metod jest szczególnie pouczająca z punktu widzenia szybkości i całości ich rozwoju. Dlatego przytoczymy niektóre najbardziej ważne fakty.

Metoda CPM jest starsza od metody PERT. Już pod koniec 1956 r. firma E.I. du Pont de Neumeurs Comp. roz-

wiążywała zagadnienie kierowania i planowania budowy zautomatyzowanego przemysłu chemicznego, przede wszystkim planowanie prac konserwatorskich i kontrolnych. Przy współpracy z Sperry Rand Corporation pod kierownictwem Morgana R. Walkera i Jamesa E. Kelley'ego został opracowany projekt czasowego planowania za pomocą sieci powiązań. Pierwsze obliczenia zostały przeprowadzone już na początku 1957 r.

Pierwsze wypróbowanie nowej metody w praktyce, przeprowadzone równoległe z tradycyjnymi metodami planowania, pokazało wszystkie zalety nowej metody: prostsza, bardziej elastyczna, ujawnia decydujące części projektu itd.

Następnie wykorzystana została przy planowaniu prac konserwatorskich i kontrolnych w zakładzie chemicznym w Louisville. Również tutaj zostały osiągnięte bardzo dobre wyniki. Metodę CPM zaczęto stosować również poza granicami koncernu du Pont.

Również inne spółki akcyjne, np. Remington Rand UNIVAC i Mauchly Associated brały duży udział przy rozpowszechnianiu metody CPM i jej dalszym rozwoju.

W ostatnich latach metodą CPM intensywnie zajmuje się firma General Electric. Tutaj powstała metoda CPM/GE, która jest modyfikacją metody CPM z punktu widzenia planowania głównych węzłów /Milestones/. Następne - to metoda PROMOCOM, uwzględniająca planowanie kalendarzowe oraz RAMPS umożliwiającą planowanie większej ilości projektów jednocześnie przy optymalnym wykorzystaniu źródeł.

W literaturze metodę CPM można znaleźć często również pod innymi oznaczeniami, np. CPS, CPPS, LESS, CPP, itp. Różnice są jednak znikome.

Metoda PERT, druga podstawowa forma analizy ścieżki krytycznej /Critical Path Analysis/, powstała nieco później.

Przy realizacji tzw. programu FBM /tj. Fleet Ballistic Missile Program/ pojawiły się /w związku z rozwojem rakiet Polaris/ duże trudności z dotrzymanywaniem terminów. Opracowany harmonogram realizacji nie odzwierciedlał zmian w zaplanowanych terminach całego projektu i jego kontrola była bardzo trudna.

Wysunęło się więc zadanie znalezienia dobrych systemów planowania prac badawczych, rozwojowych, konstrukcyjnych i wytwórczych. Wykonawcą zadania był Urząd do zadań specjalnych /Special Project Office/ należący do Ministerstwa Marynarki.

Projekt otrzymał nazwę PERT /Program Evaluation Research Task/. Jego realizację rozpoczęto 27.1.1958 r. Grupa specjalistów pod kierunkiem Willarda Fazara obrała dla przedstawienia projektu już poprzednio znaną sieć powiązań. Nie było można odgadnąć czasów trwania poszczególnych czynności, ponieważ był to projekt badania i rozwoju /R D/. Został opracowany system trzech oszacowań i dla obliczenia wartości średniej obrano aproksymację rozkładem  $\beta$ .

Całą metodę opracowano w rekordowo krótkim czasie. Już w lipcu 1958 r. została opublikowana podstawowa praca opisująca metodę PERT "Summary Report Phase 1" i w miesiąc później "Summary Report Phase 2". Całą metodę uogólniono i nazwano PERT, tj. Program Evaluation and Review Technique. Metoda ta umożliwiła wyrobić prosty pogląd na cały kompleks czynności, znaleźć czynności mające decydujący

wpływ na zrealizowanie całego kompleksu i ustalić wpływ zmian na wykonanie całego programu.

Metodę oddano dyspozycji w tak krótkim czasie, że można ją było całkowicie zastosować do projektu Polaris. Pierwszą pracę za pomocą metody PERT przeprowadził admirał William F. Raborn. Projekt rozwoju rakiet Polaris udało się skrócić o dwa lata.

Na zakończenie trzeba podkreślić, że metody typu PERT nie przedstawiają zupełnie nowej koncepcji. Bezpośrednio nawiązują do niektórych zagadnień teorii grafów /teoria ścieżki krytycznej/, statystyki, rachunku prawdopodobieństwa, socjologii produkcji itp. W czasie pięciu lat ich istnienia osiągnięto dużo znakomitych rezultatów. Ich rozwój idzie szybko naprzód, powstają nowe i doskonalsze metody /RAMPS, IMPACT, GE/CPM, itp/. istnieją setki publikacji.

## 2.2 Wykres procesu złożonego - sieć

Pierwszą fazą przy zastosowaniu metod analizy ścieżki krytycznej jest wykres procesu złożonego. Chodzi tutaj o procesy z zakresu badań, rozwoju, projektowania, budowy, konserwacji i produkcji. Ich wspólną cechą jest skomplikowanie i rozległość. Żeby móc przeprowadzić analizę procesu złożonego, trzeba zapoznać się z wszystkimi jego logicznymi i technologicznymi zależnościami, dokładnie określić zespół wszystkich częściowych czynności i robót koniecznych do osiągnięcia wyznaczonego celu i określić odpowiedzialność za wykonanie poszczególnych części badanego procesu.

Cały kompleks robót i czynności koniecznych do osiągnięcia wyznaczonego celu będziemy w dalszym ciągu nazywać

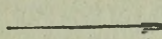

projektem P.

Projekt P /bez względu na konkretne zastosowanie/ zawiera dwa podstawowe rodzaje elementów - czynności oraz zdarzenia. Modelem graficznym takiego projektu jest wykres zorientowany /skierowany/ /zob. 3.1/. Wykres /graf/ zorientowany, jest to skończony zbiór zdarzeń /węzłów/

$$U = (u_1, u_2, \dots, u_n) \quad /1/$$

gdzie uporządkowaną parę węzłów  $(u_i, u_j)$  nazywamy łukiem zorientowanym.

Graf zorientowany, w którym poszczególne węzły przedstawiają etapy i poszczególne łuki, zorientowane czynności projektu, nazywamy siecią projektu P.

Sieć projektu P składa się z czynności, którym odpowiadają strzałki  oraz węzłów, którym odpowiadają kółka . Długość odcinka na ogół nie ma żadnego związku z czasem trwania odpowiadającej czynności /w matematycznej terminologii mówimy o tzw. quasiwektorze, tj. wektorze, którego długość i kierunek nie mają znaczenia/.

Jeżeli mamy ułożyć sieć projektu, musimy go rozłożyć na czynności i zdarzenia

Czynność określamy jako element projektu zużywający źródła /siła robocza, maszyny, materiał, pieniądze itp/ i trwający w czasie. Każdej czynności odpowiada jedno zdarzenie jako jej początek i drugie jako jej koniec.

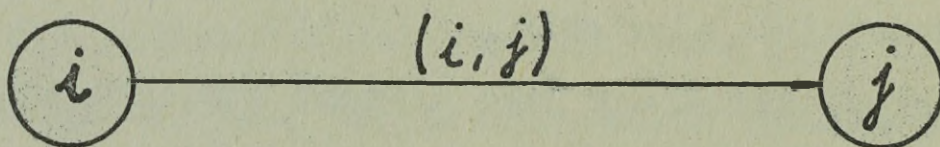
Zdarzenie, w odróżnieniu od czynności, jest to taki element projektu, który nie zużywa ani źródeł ani czasu. Jest to tylko moment, w którym niektóre czynności rozpoczynają się a inne kończą się.

Żadna czynność nie może rozpocząć się wcześniej, dopóki nie zostało osiągnięte poprzednie zdarzenie, tj. dopóki nie zostały ukończone czynności poprzednie.

Odrębny przypadek stanowią zdarzenia początkowe i zdarzenia końcowe sieci. Żadna czynność nie może poprzedzać zdarzenie początkowe i żadna czynność nie może nachodzić na zdarzenie końcowe. W rzeczywistości przedstawiają one rozpoczęcie projektu oraz jego ukończenie.

Czynnościami mogą być np. poszczególne fazy procesu produkcyjnego, opracowanie projektu, rozruch próbny, oczekiwanie dostaw, fazy decydowania /np. zatwierdzenie projektu, kontrola itp/.

Zdarzenia są symbolami punktów stycznych poszczególnych czynności. Np. zdarzeniem początkowym czynności "montaż" jest "rozpoczęcie montażu" i zdarzeniem końcowym jest "ukończenie montażu". Zapis graficznie wygląda następująco /rys. 29/:

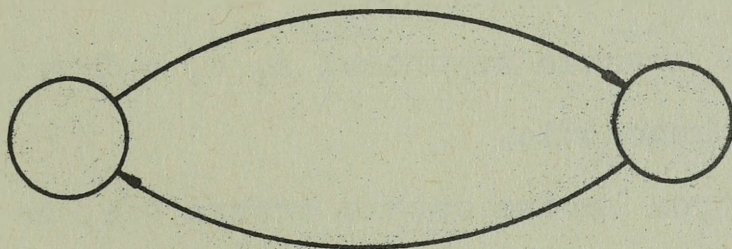


rys. 29

Czynność - oznaczamy  $(i, j)$  - jest więc określona za pomocą zdarzeń, które ją ograniczają. Zatem czynność  $(i, j)$  łączy zdarzenia  $i, j$ .

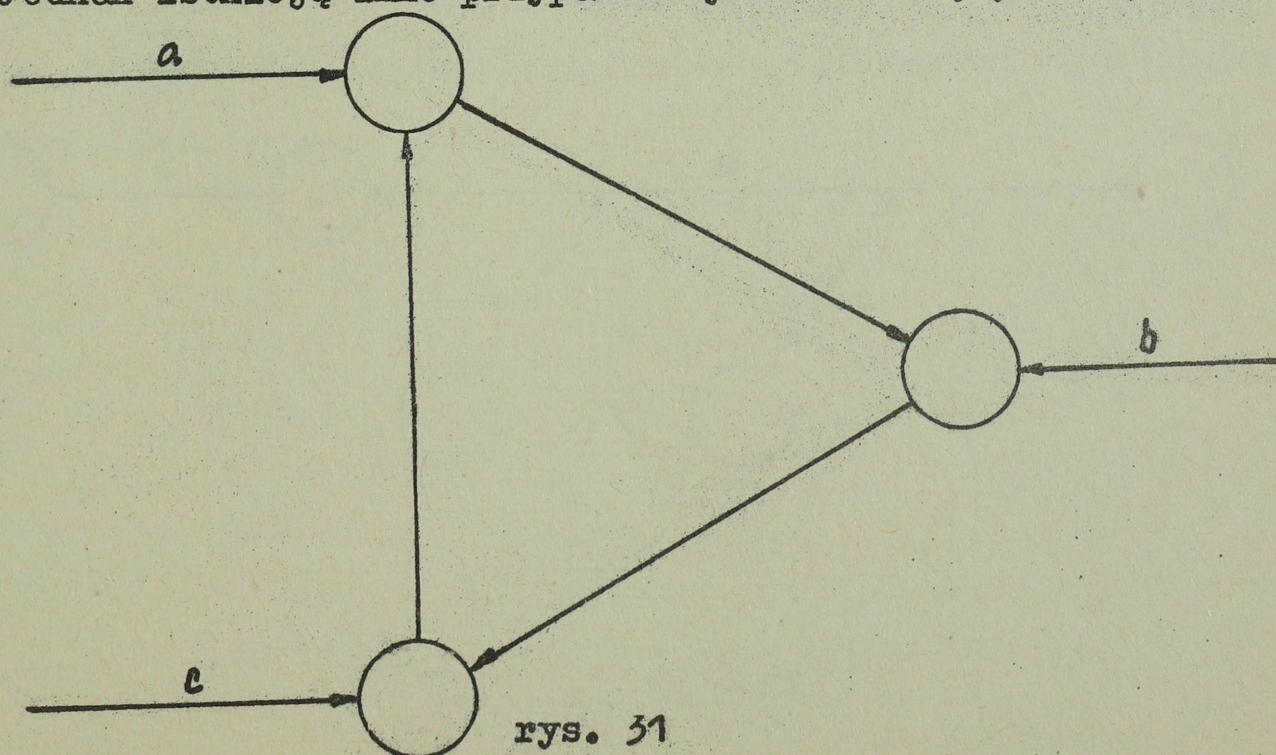
Przy prostych technologicznych i logicznych zależnościach nie mogą pojawić się większe trudności związane ze sporządzeniem sieci. Przy bardziej skomplikowanych zależnościach trzeba rozwiązywać niektóre zagadnienia związane z graficznym przedstawieniem. W skrócie przytoczymy niektóre z nich.

1. Jest niedopuszczalne, żeby sieć zawierała pętle lub cykle zamknięte, tj. żaden węzeł nie może poprzedzać samego siebie /rys. 30/.



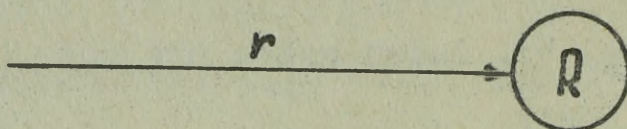
rys. 30

Taki stosunek bowiem nie może być zrealizowany w czasie. Jednak istnieją inne przypadki cykli zamkniętych /rys. 31/.



rys. 31

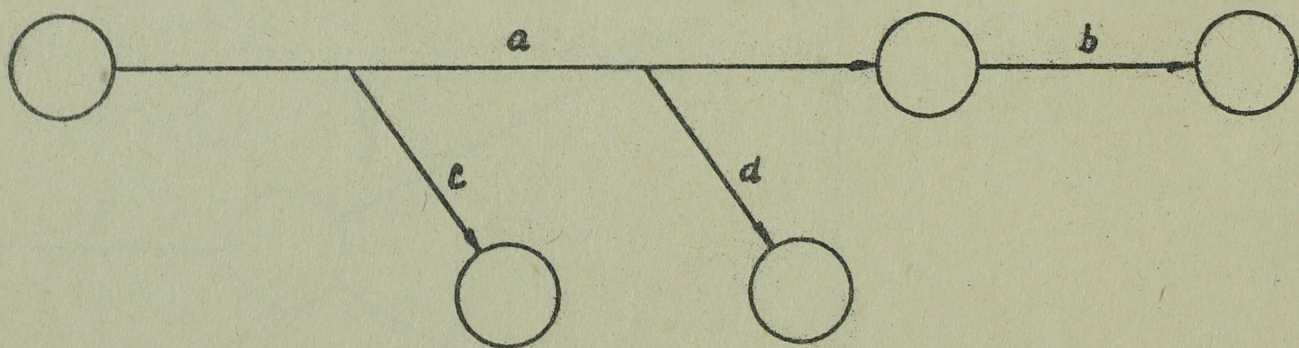
Tak na przykład, kiedy każda z trzech czynności a, b, c nie może zostać ukończona dopóki nie są znane rezultaty pozostałych dwóch czynności. Takie sytuacje mogą w rzeczywistości powstać, ale ich wykres /tak jak na rys. 51/ jest niedopuszczalny. W tym przypadku przeprowadzamy tzw. redukcję sieci /rys. 52/.



Rys. 32

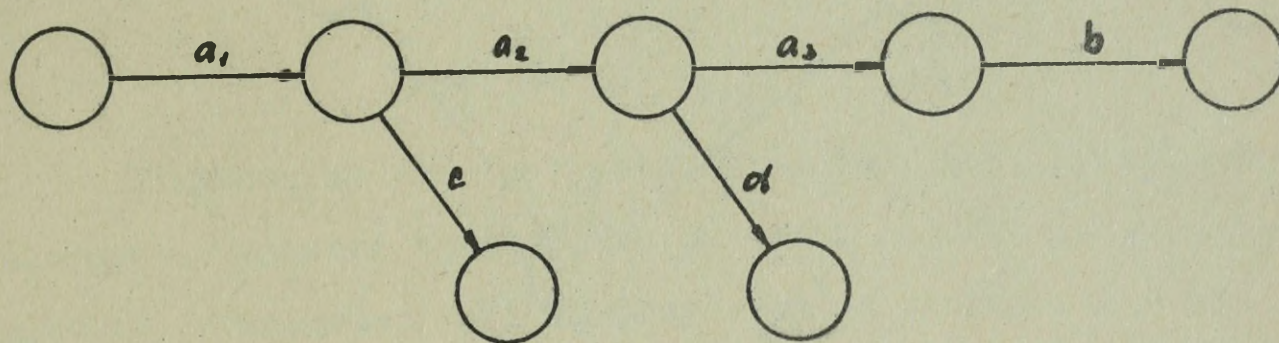
r odpowiada sumie trwania czynności a, b, c i węzeł R przedstawia ich ukończenie.

2. W praktyce bardzo często zdarza się, że niektóre następujące czynności mogą nastąpić przed ukończeniem poprzedniej czynności. Jest to przypadek tzw. czynności złożonej. Załóżmy, że czynności b, c, d zależą od różnego stopnia wykonania czynności a /rys. 53/.



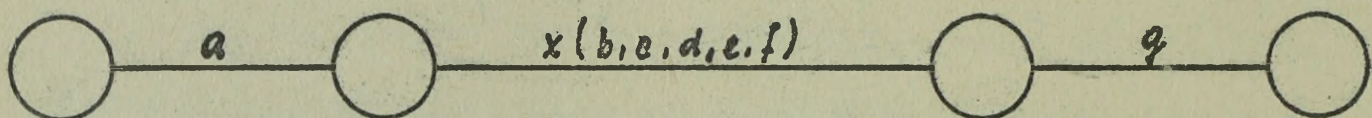
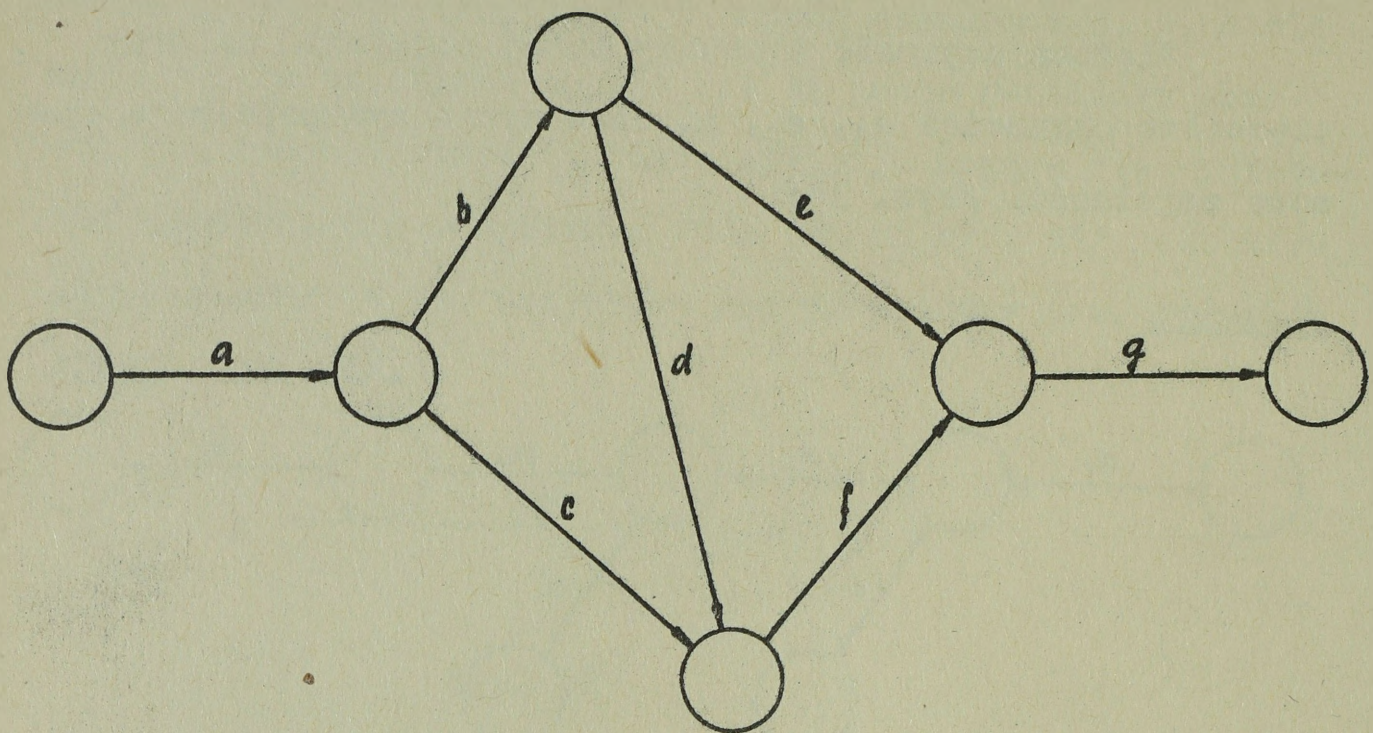
rys. 53

Złożoną czynność a możemy tutaj podzielić na trzy częściowe czynności  $a_1$ ,  $a_2$ ,  $a_3$  oraz wyznaczyć poprawnie czasowe zależności /rys. 34/.



rys. 34

3. Jeżeli projekt P jest bardzo skomplikowany i rozległy, można całą sprawę uprościć w ten sposób, że projekt P podzielimy na szereg częściowych projektów  $(P_1, P_2, \dots, P_n)$ , dla których opracowuje się samodzielne sieci /sieci podrzędne/. Te poszczególne częściowe projekty w globalnej sieci projektu P przedstawiamy za pomocą czynności zagregowanej /rys. 35/.



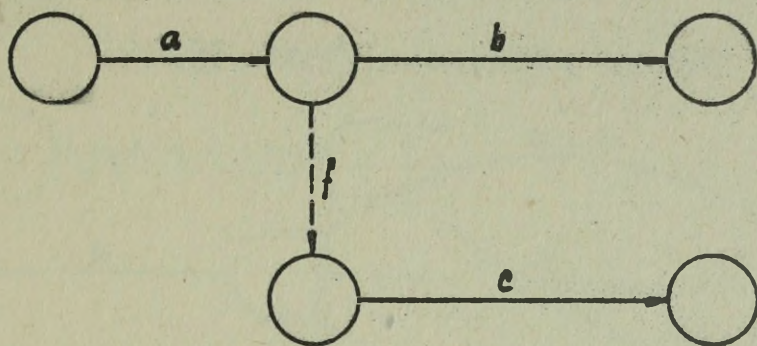
Rys. 35

x oznacza czynność zagregowaną.

4. Bardzo często spotykamy się z czynnościami zależnymi i niezależnymi. Zależność czynności występuje wszędzie tam, gdzie więcej czynności kończy lub rozpoczyna się w jednym zdarzeniu. Żeby zaznaczyć tę zależność, wprowadzamy tzw. czynność fikcyjną i oznaczamy ją — — — →.

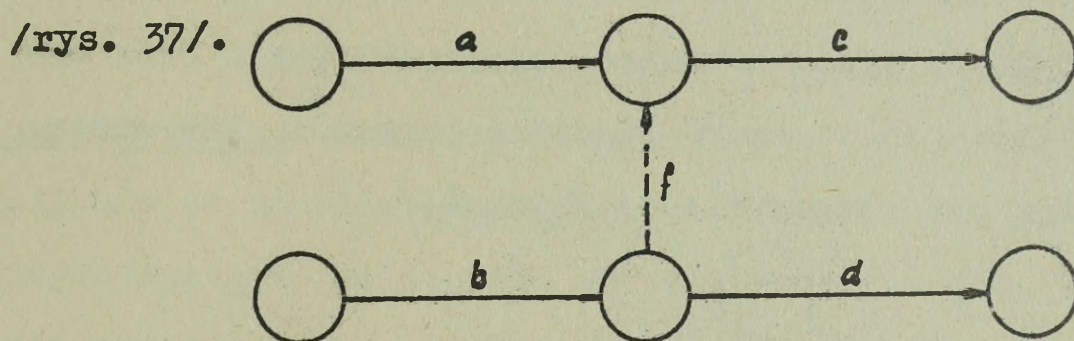
Czynność fikcyjna jest to czynność nie mająca żadnego trwania w czasie i nie zużywająca żadnych źródeł. Musi jednak posiadać kierunek w czasie oraz numery węzłów.

Np. czynność c ma nastąpić równocześnie z b dopiero po ukończeniu czynności a. Zależność tutaj wyrażamy za pomocą czynności fikcyjnej /zob. rys. 36/.



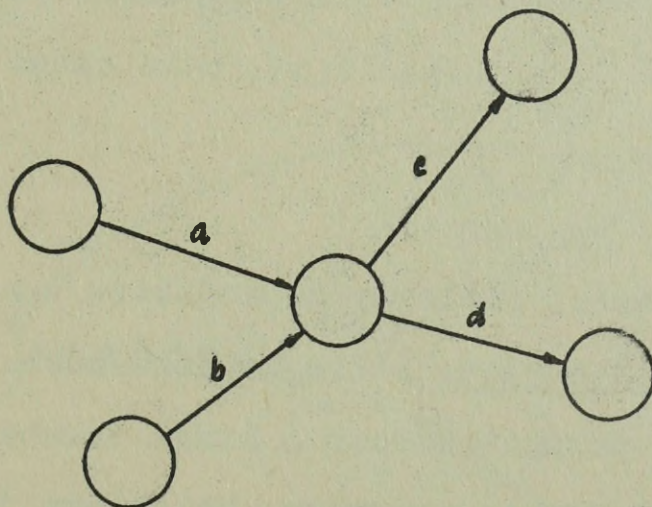
rys. 36

Przytoczymy inny przypadek czynności zależnych i niezależnych. Czynność c następuje po dwóch równoległe przebiegających czynnościach a i b, przy czym od ukończenia b zależna jest czynność d, która jest z kolei niezależna od a



rys. 37

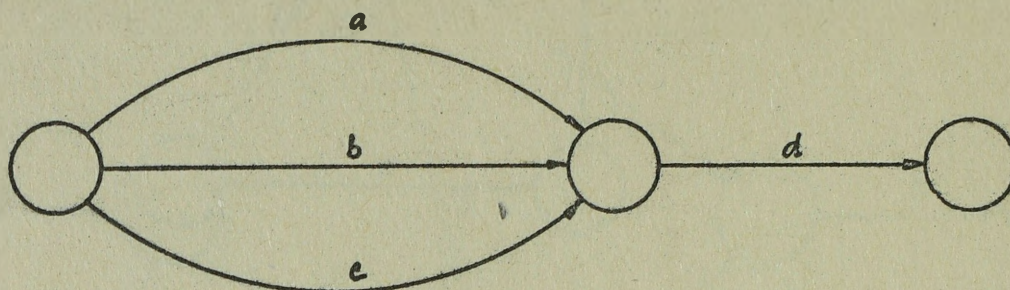
Niewłaściwy wykres w tym przypadku wyglądałby następująco /rys. 38/:



rys. 38

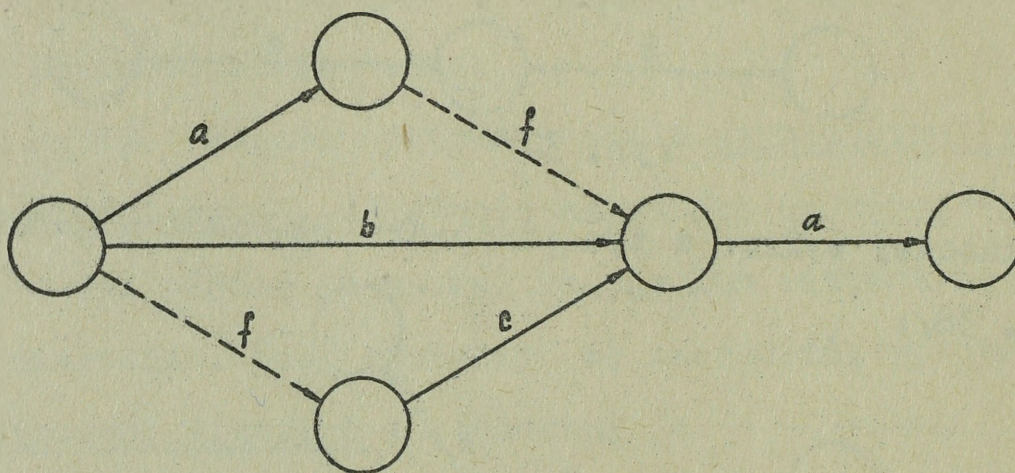
5. Innym przykładem zastosowania czynności fikcyjnych jest przypadek czynności równoległych. W prawidłowo

wykonanej sieci nie może więcej czynności rozpoczynać się lub kończyć w jednym zdarzeniu /rys. 39/.



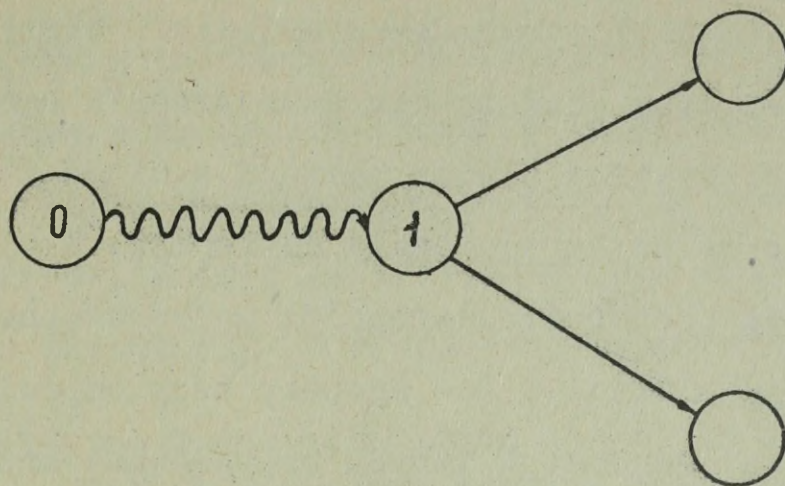
rys. 39

Jest to przypadek tzw. multigrafu, który jest niedopuszczalny, ponieważ wszystkie równoległe czynności miałyby jednakowe oznaczenie. Przy  $n$  równoległe przebiegających czynnościach ( $n-1$ ) z nich musimy uzupełnić czynnościami fikcyjnymi, żeby zachować sprawność sieci. Przy tym jest obojętne, czy czynność fikcyjna poprzedza lub następuje po czynności rzeczywistej /rys. 40/.



rys. 40

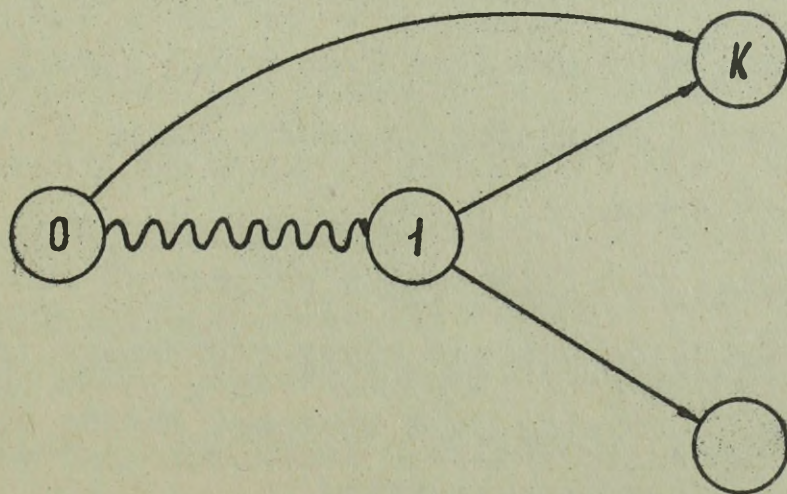
6. Dla bardziej rozległych projektów wprowadzamy tzw. czynność przedwstępną, która zawiera różne prace administracyjne i przygotowawcze i którą trzeba wykonać przed rozpoczęciem samego projektu. Ustawiamy ją przed pierwszym węzłem i oznaczamy linią wężykowatą /rys. 41/.



rys. 41

Skróceniem czynności przedwstępnej przesuwamy termin rozpoczęcia całego projektu. Zdarzenie 0 określa czas, w którym znajdujemy się przy rozpoczęciu opracowywania sieci i zdarzenie 1 określa czas rozpoczęcia prac projektowych.

7. W sieci możemy również uchwycić różne zewnątrzne ograniczenia. Rozpoczęcie niektórych czynności może być zależne od zrealizowania pewnych prawnych lub gospodarczych wymagań, od dostaw, od zatwierdzenia itd. Ewentualnie pewne roboty /np. budowlane/ muszą koniecznie zostać zakończone do przerwy zimowej. Wszystkie te ograniczenia wygodnie jest oznaczyć łukiem zorientowanym wychodzącym z pierwszego węzła sieci /rys. 42/.



rys. 42

Jeżeli przy obliczeniu dla zdarzenia k otrzymamy najwcześniejszy możliwy czas dłuższy niż czas trwania ograniczenia zewnętrznego /np. przerwa zimowa nastąpi w ciągu x dni od zdarzenia 0/ nie można ograniczenia dotrzymać. W tym przypadku staramy się skracaniem czynności przedwstępnej ułożyć czasowe proporcje w sieci w ten sposób, żeby odpowiadały zewnętrznym ograniczeniom. W innych przypadkach możemy czynność przedwstępną przedłużyć, żeby zachować zgodność z warunkami zewnętrznymi.

Przy układaniu sieci można postępować kilkoma sposobami. Najpierw jednak musimy znać odpowiedzi na następujące podstawowe pytania:

- Które czynności poprzedzają bezpośrednio każdą czynność?
- Które czynności następują bezpośrednio po każdej czynności?
- Które czynności przebiegają równolegle?
- Które czynności są od siebie zależne ewent. niezależne?

Konstrukcję grafu możemy wykonywać postępowaniem naprzód, postępowaniem wstecz i postępowaniem ze środka.

Czasami jest korzystniejsze rozpocząć od lewej strony schematu, tj. od zdarzenia początkowego. W ten sposób postępujemy głównie przy metodzie CPM, którą stosuje się w projektach, których czynności są dobrze znane i które już zostały kilka razy wykonane.

Przy bardziej skomplikowanych projektach lub przy opracowywaniu nowego, dotychczas niewypróbowanego projektu /badania/ bardziej korzystne jest stosować metodę postępowania wstecz /przy zastosowaniu PERT/.

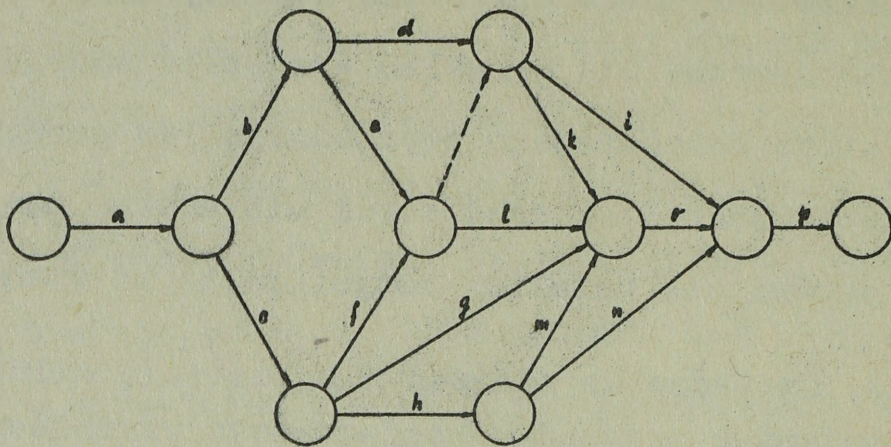
Najpierw dokładnie określamy końcowy cel, do którego dążymy. Potem staramy się określić wszystkie zdarzenia i czynności, które bezpośrednio poprzedzają lub warunkują zdarzenie końcowe. Żadnej ścieżki sieci nie możemy konstruować wcześniej, dopóki nie ustalimy wszystkie te zdarzenia. Musimy zapewnić, że żadne ze zdarzeń nie zostanie ominięto. Tak samo postępujemy w przypadku każdego nowo uzyskanego zdarzenia. W ten sposób postępujemy ciągle wstecz aż do czasu, w którym się znajdujemy.

W szczególnych przypadkach lub w bardzo skomplikowanych sieciach można postępować ze środka albo jednocześnie naprzód oraz wstecz.

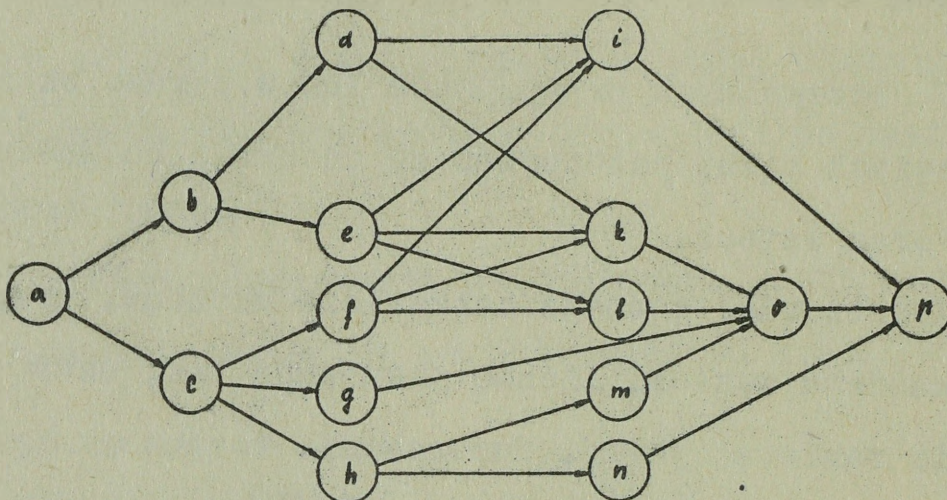
Jeżeli sieć została całkowicie ułożona, przyporządkujemy każdemu węzłowi liczbę nieujemną tak, żeby  $i < j$  /sieć nie zawiera cykli/. Numerowanie rozpoczynamy od węzła początkowego, który oznaczamy 0, kolejno aż do końcowego węzła  $n$ . Otrzymamy  $n + 1$  węzłów.

Warunek  $i < j$  nie musi być dla niektórych programów spełniony. Ostatnio zostały opracowane programy /głównie dla metody PERT/, dla których wystarcza  $i \neq j$ .

Sieć, o której mowa, nazywa się siecią łukowo określoną. Poszczególne czynności są przedstawione za pomocą poszczególnych łuków. Istnieje jednak inny sposób, przy którym czynności są przedstawione za pomocą węzłów. Chodzi o tzw. sieć węzłowo określoną. Ten sposób stosuje się raczej przy metodzie PERT, poprzedni przy metodzie CPM. Dla ilustracji pokażemy oba typy sieci dla jednego projektu /rys. 43 i 44/.



rys. 43



rys. 44

Strzałki na tym wykresie określają tylko związki, następstwa poszczególnych czynności w sieci. Widzimy, że wykres nie zawiera żadnych czynności fikcyjnych, co może być korzystne. To, że czynności oznaczamy jednym wskaźnikiem  $j$  zamiast  $i, j$  jest niewątpliwie korzystne z punktu widzenia obliczania na maszynie matematycznej. Od sieci węzłowo określonej można stosunkowo prosto przejść do sieci łukowo określonej. Każdy węzeł  $i$  w sieci węzłowo określonej zamienimy parą węzłów  $/i', i''/$ . W istocie czynności  $i$  przekształcamy na czynność  $/i, i''/$ . Łuki w sieci węzłowo określonej symbolizują tylko związki następstwa, a nie trwają w czasie. Możemy zamienić je czynnościami fikcyjnymi. Jeżeli

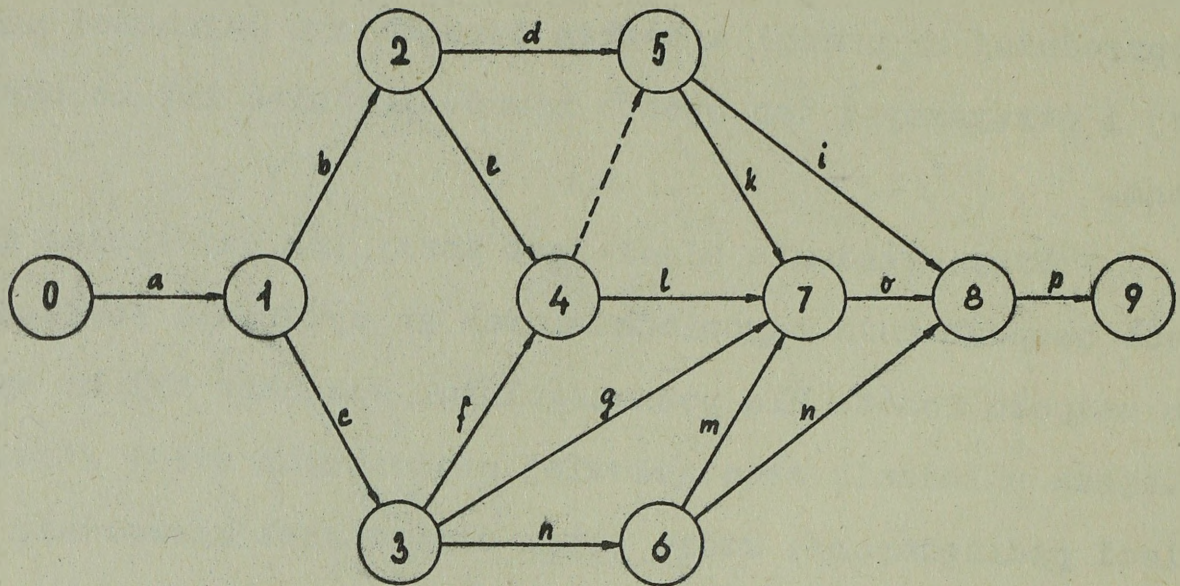
zaniedbamy czynności fikcyjne, połączy się węzeł końcowy poprzedniej czynności z węzłem początkowym czynności następnej i otrzymamy w ten sposób równoważną sieć łukowo określoną.

Przy układaniu sieci jest korzystna współpraca grupy osób bezpośrednio odpowiedzialnych za wykonanie podstawowego zespołu robót. Dla poszczególnych odcinków byłoby wygodniejsze układanie szczegółowej częściowych sieci /tzw. sieci podrzędnych/, które potem dla potrzeb kierowania całym projektem włączamy w główną sieć projektu.

Rozległość sieci zależy od poziomu kierowania, stopnia agregacji i obszerności projektu. Dla orientacji podamy niżej tablicę ułożoną przez Walter Cosinuke'a. Podaje ona zależność ilości czynności od kosztów inwestycyjnych /zakłady chemiczne/.

Nakłady inwest. w mln \$	Ilość czynności
1	340
5	1300
8	1500
12	2400
20	3200

Jednemu zdarzeniu odpowiada przeciętnie 1,6 - 1,7 czynności. Jako przykład przytoczymy sieć ułożoną dla fikcyjnego projektu budowy zakładu maszynowego. Poniższa sieć będzie służyć w całej pracy do demonstracji wszystkich następnych obliczeń /rys. 45/.



- |                                  |                         |                     |
|----------------------------------|-------------------------|---------------------|
| a ZADANIE INWEST.                | f PODST. BLOKI MASZYU   | h ŚCIANY POPRZECZNE |
| b PROJEKT CZĘŚCI MASZYU.         | l PODŁ. ENERGII         | g DOST. PREF. DACH. |
| c PROJEKT CZĘŚCI BUDOWL.         | k MONTAŻ URZĄDZ. MASZYU | n DOST. SUROWCÓW    |
| d ZAMÓW. I DOST. URZĄDZ. MASZYU. | l POZOSTAŁE FUNDAMENTY  | r KONSTR. DACH.     |
| e MONTAŻ URZĄDZ. KOTW.           | m ŚCIANY PODŁUŻNE       | r ROZRUCH           |

rys. 45

Nawet w ten sposób ułożona sieć, tj. na razie bez oceny czasu trwania poszczególnych czynności, ma w porównaniu z klasycznymi metodami szereg zalet. Taka sieć służy co najmniej jako:

1. niezawodna baza dla czasowego planowania
2. jasny i zrozumiały wykres projektu
3. środek dla określenia poszczególnych celów i dróg prowadzących do ich osiągnięcia
4. środek prewencyjny przeciw opuszczeniu czynności należącej do projektu
5. obraz wyznaczenia odpowiedzialności za poszczególne odcinki projektu
6. podstawa dla dalszego dokładniejszego opracowania

pierwotnego planu projektu

7. środek wykrycia nachodzących na siebie zewnętrznych czynników, tj. dostawcy, odbiorcy, konsumenta, banku itp.

8. środek dla orientacji i edukacji kadr projekcyjnych

Poszczególne fazy ułożenia sieci są dla wszystkich metod analizy ścieżki krytycznej w zasadzie jednakowe. Następnie sieć przekształcamy w model matematyczny w ten sposób, że do każdej czynności dodajemy jedną czasową ocenę /CPM - model deterministyczny/ lub trzy czasowe oceny /PERT - model stochastyczny/ lub wymagania dotyczące źródeł i czasu /RAMPS - model wielowymiarowy/.

### 2.3 Metoda CPM

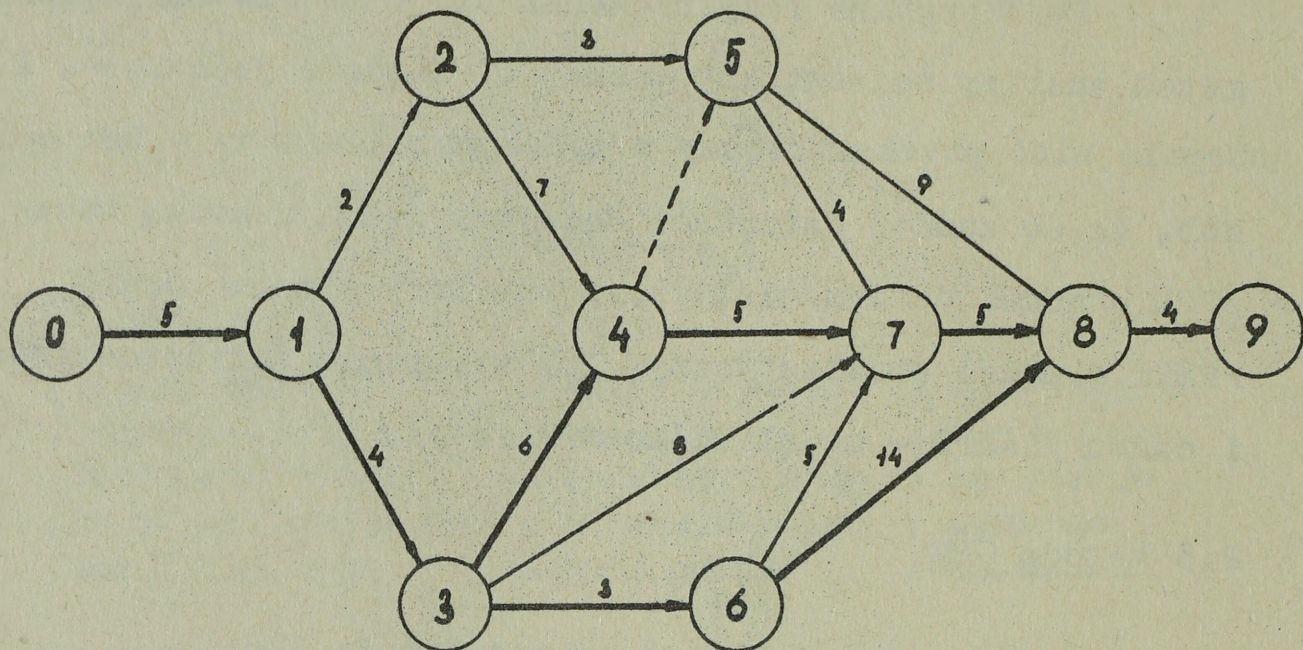
#### 2.3.1 Czasowe planowanie za pomocą metody CFM

Jeżeli mamy ułożoną sieć projektu P, musimy poszczególne czynności sieci uzupełnić ocenami czasu ich trwania, obliczyć czasy poszczególnych węzłów, wyznaczyć ścieżkę krytyczną, wielkość i rodzaje zapasów na drogach niekrytycznych.

Najpierw dla każdej czynności oszacujemy tzw. czas oczekiwany trwania czynności (i,j) -  $y_{ij}$ . Jest to czas, w którym najprawdopodobniej zostanie zrealizowana czynność z zachowaniem wszystkich zewnętrznych ograniczeń. Ograniczeniami mogą być np. ilość i kwalifikacja sił roboczych, liczba i wydajność maszyn, planowane godziny nadliczbowe, zmienowość itp. Biorąc pod uwagę wszystkie te czynniki, możemy określić  $y_{ij}$ . Ten czas bierzemy następnie przy meto-

dzie CPM jako stałą ocenę ewent. normę, którą staramy się przestrzegać.

Jeżeli przyporządkujemy każdej czynności sieci  $y_{ij}$ , uzyskamy matematyczny model deterministyczny CPM /zob. rys. 46/.



rys. 46

### Definicja modelu

Korzystając z powyżej przytoczonej definicji sieci możemy zdefiniować model CPM.

Mamy skończony zbiór  $P$  /projekt/, przedstawiony w postaci sieci, złożony z  $n+1$  zdarzeń i  $m$  czynności.

W zbiorze  $P$  rozróżniamy dwa zdarzenia - zdarzenie początkowe i zdarzenie końcowe. Zdarzenie początkowe poprzedza wszystkie pozostałe zdarzenia sieci i wszystkie zdarzenia sieci poprzedzają zdarzenie końcowe. Każde zdarzenie jest ponumerowane liczbą nieujemną  $i < j$ . Każdemu zdarzeniu jest przyporządkowany czas  $t_i \leq t_j$ . Dla zdarzenia początkowego zachodzi  $t_0 = 0$ .

Każdej czynności  $(i, j) \in P$  przyporządkujemy czas oczekiwany trwania  $y_{ij}$ .

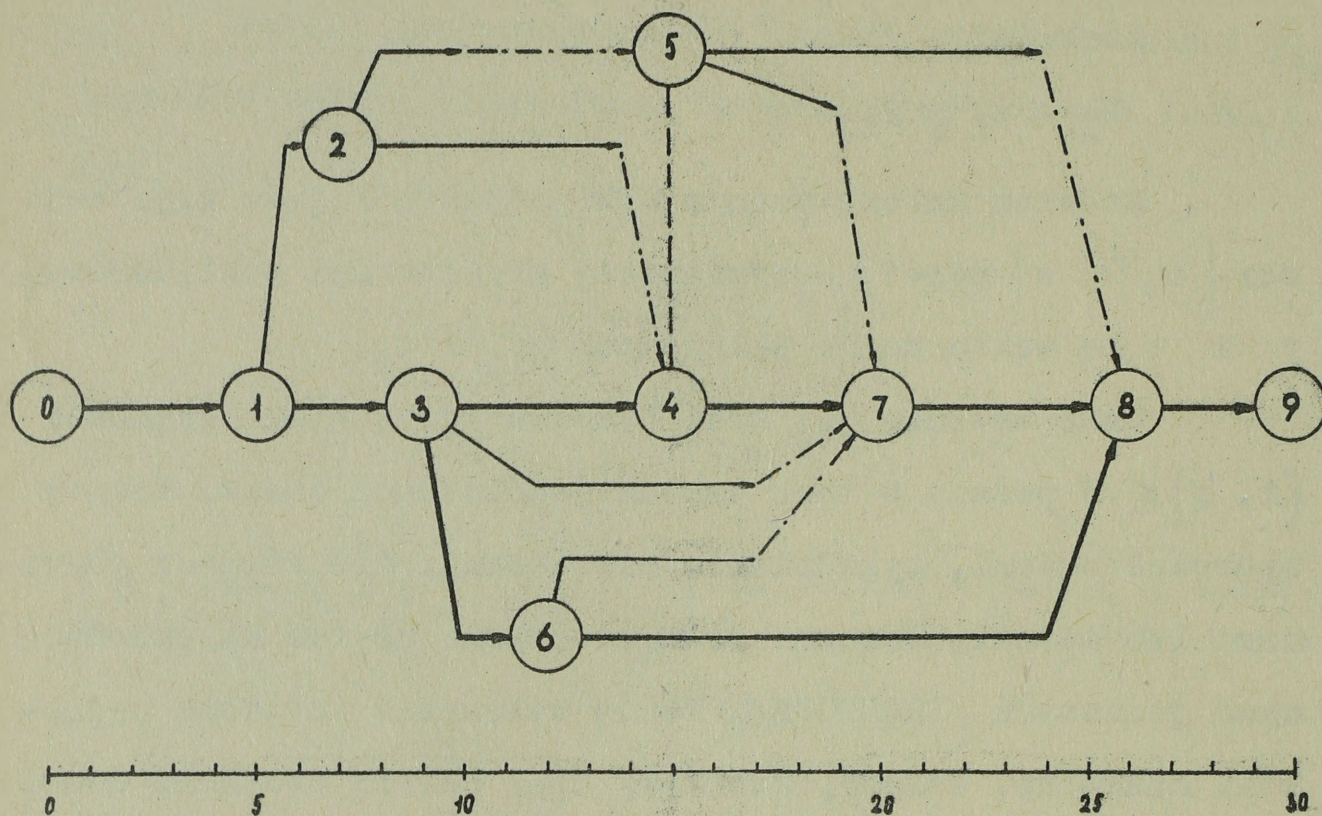
Zachodzi

$$t_j - t_i \geq y_{ij}$$

Modelem matematycznym CPM projektu  $P$  jest więc wektor  $\{y, t\}$  w  $(m+n+1)$ -wymiarowej przestrzeni euklidesowej,  $y$  i  $t$  są wektorami o składowych  $y_{ij}$  i  $t_i$ .

Czas trwania  $y_{ij}$  musi być dla wszystkich czynności  $(i, j) \in P$  podany w tych samych jednostkach czasu. Możemy operować dniami, tygodniami, miesiącami, ale również godzinami lub latami. Czasami jest korzystne używać kalendarzowych jednostek /PROMOCOM/. Można wytwarzać sztuczne jednostki czasu np. dekady, kwartały itp. Sulzer Brothers Comp. pracuje z jednostkami odpowiadającymi 1/100 roku.

Czasami może być niekorzystne to, że sieć nie odzwierciedla realizacji projektu w kalendarzowym czasie. Tę wadę można usunąć przez to, że narysujemy sieć w skali czasu. Teraz długości łuków mają znaczenie - ich długości odpowiadają czasom trwania czynności  $y_{ij}$  w obranej skali. Czynności fikcyjne, których czas trwania jest zerowy, rysujemy zawsze pionowo /zob. rys. 47/.



rys. 47

Powyższa sieć jest narysowana w tzw. "wewnętrznym kalendarzu". Każda sieć ma własny kalendarz, o początku w zdarzeniu początkowym sieci, którego czas równa się zeru.

Dla potrzeb praktyki sieć można również rysować w "kalendarzu zewnętrznym", tj. czas zdarzenia początkowego będzie niezerowy. Ścieżka krytyczna się nie zmieni, jak również wielkość zapasów, Zmieniają się tylko czasy poszczególnych zdarzeń o wartość, o którą różni się czas zdarzenia początkowego od zera.

Czasowe obliczenia w sieci.

Po ustaleniu wszystkich  $y_{ij}$  określimy tzw. najwcześniejszy początek czynności (i,j). Widzimy, że czynność (i,j) może rozpocząć się dopiero po zrealizowaniu zdarzenia i. Jeżeli do i-tego zdarzenia prowadzi więcej dróg, może zostać zrealizowane ono po ukończeniu najdłuższej z nich. Oznaczmy najwcześniejszy początek czynności (i,j) przez  $t_i^{(0)}$ .

Najwcześniejszy koniec czynności (i,j) uzyskamy przez dodanie czasu trwania  $y_{ij}$  do czasu  $t_i^{(0)}$ . Jeżeli do zdarzenia j prowadzi więcej dróg,  $t_j^{(0)}$  jest określony czasem trwania czynności na najdłuższej ścieżce /wzdłuż najdłuższej ścieżki/. Położmy najwcześniejszy początek zdarzenia początkowego równy zeru.

Wtedy możemy napisać

$$\begin{aligned} t_0^{(0)} &= 0 \\ t_j^{(0)} &= \max_i [t_i^{(0)} + y_{ij}] \end{aligned} \quad (3)$$

jeżeli  $i < j$ ;  $(i,j) \in P$ ;  $1 \leq j \leq n$ .

$t_i^{(0)}$  i  $t_j^{(0)}$  dla każdej czynności (i,j) obliczamy analogicznie postępując od zdarzenia początkowego do zdarzenia końcowego. Wychodzimy od  $t_0^{(0)} = 0$ . Najwcześniejsze ukończenie projektu P będzie  $t_n^{(0)}$ . Zaplanowany termin ukończenia projektu oznaczmy przez  $\lambda$ .

Jeżeli  $\lambda \geq t_n^{(0)}$ , zatem wartość  $\lambda$  określa termin najpóźniejszego ukończenia projektu P. Jeżeli zdarzy się, że  $t_n^{(0)} > \lambda$ , zatem dla danej technologii nie może być projekt ukończony w zaplanowanym czasie. Musimy przeprowadzić takie czasowe redukcje w sieci lub projekcie, żeby zachodziło  $t_n^{(0)} \leq \lambda = t_n^{(\lambda)}$ . Przez  $t_n^{(\lambda)}$  oznaczamy najpóźniejsze ukończenie projektu P. Jeżeli jest spełniony powyższy warunek, możemy określić najpóźniejszy koniec  $t_j^{(\lambda)}$  oraz

najpóźniejszy początek każdej czynności  $(i,j)$ .

Wychodząc od  $t_n^{(0)} = \lambda$  kolejno odejmujemy czasy trwania czynności  $(i,j) - y_{ij}$ . Jeżeli prowadzi do zdarzenia  $j$  więcej dróg, odejmujemy czas trwania czynności wzdłuż drogi najdłuższej.

Możemy pisać

$$\begin{aligned} t_n^{(\lambda)} &= \lambda \\ t_i^{(\lambda)} &= \min_l \left[ t_j^{(\lambda)} - y_{ij} \right], \end{aligned} \quad (4)$$

dla  $i < j; (i,j) \in P; 1 \leq i \leq n-1$ .

Czas trwania każdej czynności jest ograniczony przez najwcześniejszy początek  $t_i^{(0)}$  i najpóźniejszy koniec  $t_j^{(\lambda)}$ . Różnicę  $t_j^{(\lambda)} - t_i^{(0)}$  nazywamy maksymalnie dopuszczalnym czasem trwania czynności  $(i,j)$ .

Dla każdej czynności możemy więc obliczyć następujące najważniejsze wartości:

- |   |                               |
|---|-------------------------------|
| 1. najwcześniejszy początek                   | $t_i^{(0)}$                   |
| 2. najwcześniejszy koniec                     | $t_i^{(0)} + y_{ij}$          |
| 3. najpóźniejszy początek                     | $t_j^{(\lambda)} - y_{ij}$    |
| 4. najpóźniejszy koniec                       | $t_j^{(\lambda)}$             |
| 5. maksymalnie dopuszczalny przedział czasowy | $t_j^{(\lambda)} - t_i^{(0)}$ |

Obliczenie tych wartości możemy przeprowadzić trzema podstawowymi metodami:

1. ręcznie-bezpośrednio w sieci powiązań
2. za pomocą macierzy sprzężonej
3. za pomocą maszyny matematycznej

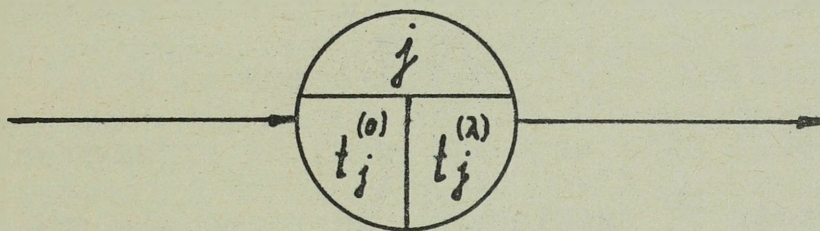
ad. 1. Ręczne obliczenie bezpośrednio w sieci powiązań.

Obliczanie to stosujemy tylko w przykładach instrukcyjnych bardzo prostą logiczną budową. Tym sposobem można również

przeprowadzać kontrolne przeliczenia mniejszych odcinków sieci. Jeżeli sieć jest bardziej rozległa, takie obliczanie nie jest ekonomiczne.

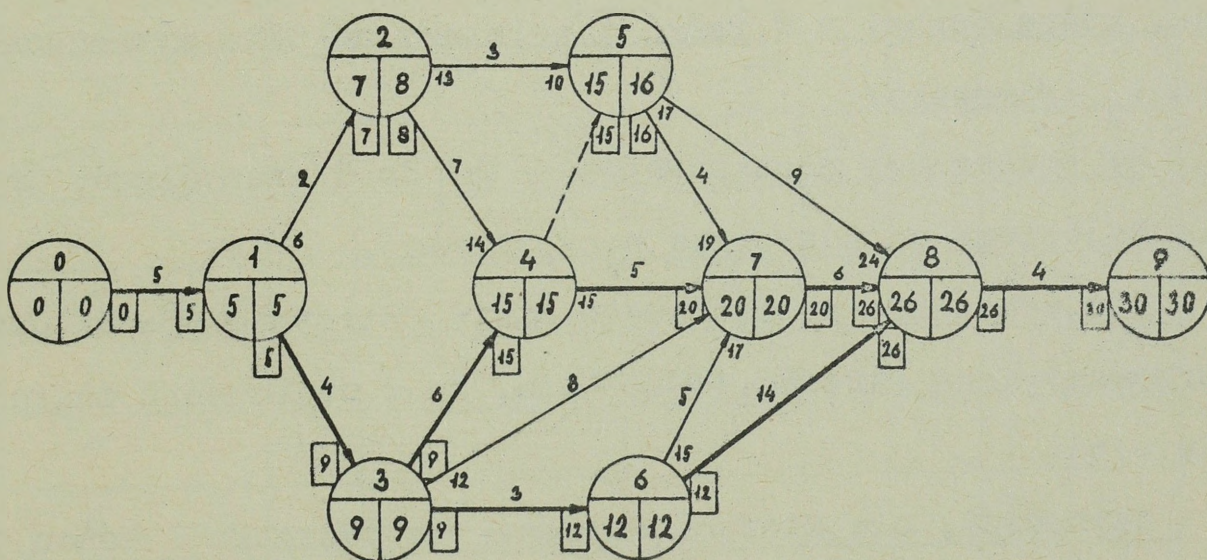
Można jednak właśnie na tej metodzie dobrze pokazać algorytm znajdowania wszystkich najważniejszych wartości. Dlatego zajmiemy się nią bliżej.

Każdy węzeł sieci doprowadzimy dla przejrzystości do następującej postaci /rys. 48/:



Rys. 48

W górnej części jest numer węzła /zdarzenia/. Do lewej dolnej części wpisujemy wartość  $t_j^{(0)}$  i do prawej  $t_j^{(λ)}$ . Otrzymamy sieć /rys. 49/:



Rys. 49

Metoda obliczenia  $t_j^{(0)}$ :

a/ dla zdarzenia /węzła/ początkowego wpiszemy do lewej dolnej połowy  $t_0^{(0)} = 0$

b/ na końcu wszystkich strzałek wychodzących z zdarzenia początkowego zaznaczymy wartość  $t_0^{(0)} + y_{0j}$

c/ znajdziemy takie zdarzenie /węzeł/, że wszystkie strzałki do niego skierowane są już oznaczone i wybierzemy wartość największą, którą wpiszemy w miejsce przeznaczone dla  $t_j^{(0)}$

d/ powtarzamy postępowanie od b/ dla wszystkich węzłów sieci, dopóki nie dojdziemy do węzła /zdarzenia/ końcowego.

Następnie obieramy  $t_n^{(0)} = t_n^{(\lambda)}$  i obliczamy  $t_j^{(\lambda)}$ :

a/ dla zdarzenia końcowego wpiszemy do prawego dolnego pola obliczoną wartość  $t_n^{(0)}$  /zakładamy, że równa się ona  $t_n^{(\lambda)}$ /.

b/ na początku wszystkich strzałek prowadzących do zdarzenia końcowego wpiszemy wartość  $t_n^{(\lambda)} - y_{ij}$

c/ następnie znajdziemy takie zdarzenie, że wszystkie strzałki z niego wychodzące są oznaczone, obierzemy wartość najmniejszą, którą oprawi y w ramki i wpiszemy do pola wyznaczonego dla  $t_j$  /prawego/

d/ powtarzamy postępowanie od b/ do d/ tak długo, dopóki nie dojdziemy do zdarzenia początkowego.

Dla zdarzenia początkowego musimy otrzymać  $t_0^{(\lambda)} = 0$ . Jeżeli otrzymamy inną wartość, oznacza to, że w obliczeniu znajduje się błąd.

Czynności, dla których wartości na początku i końcu strzałki opatrzone są w ramki, nazywamy krytycznymi. Ich ciąg, prowadzący od zdarzenia początkowego do zdarzenia końcowego nazywamy ścieżką krytyczną.

Oznaczmy różnicę  $d_j = t_j^{(\lambda)} - t_j^{(0)}$ . Zdarzenia, dla których zachodzi  $d_j = 0$ , leżą na ścieżce krytycznej.

ad 2. Obliczenie za pomocą macierzy sprzężonej.

Jeżeli mamy do czynienia z mniejszymi sieciami / od 50 do 100 węzłów/, czasami korzystne jest przeprowadzić obliczenie odręcznie z zastosowaniem macierzy sprzężonej sieci projektu.

Macierz sprzężona jest to inne przedstawienie tego samego wykresu i rezultaty obliczeń powinny być takie same jak przy zastosowaniu którejkolwiek innej metody.

Ułożymy teraz macierz sprzężoną dla naszej sieci. Będzie ona zawierać tyle wierszy i kolumn ile węzłów zawiera sieć zdarzeń /węzłów/. Wiersze i kolumny oznaczymy kolejnymi numerami zdarzeń.

$t_i^{(0)}$	$j$	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	0		5								
5	1			2	4						
7	2					7	3				
9	3					6		3	8		
15	4						0		5		
15	5								4	9	
12	6								5	14	
20	7									6	
26	8										4
30	9										
$t_j^{(\lambda)}$		0	5	8	9	15	16	12	20	26	30
$d_i = t_i^{(\lambda)} - t_i^{(0)}$		0	0	1	0	0	1	0	0	0	0

Każdej czynności  $(i,j)$  odpowiada w macierzy  $i$ - ty wiersz i  $j$ - ta kolumna. Do pola stanowiącego przecięcie  $i$ - tego wiersza i  $j$ - tej kolumny wpisujemy czas trwania czynności  $(i,j)$ -  $y_{ij}$ . Jeżeli chodzi o czynność fikcyjną, wpisujemy 0. Pozostałe pola zostawiamy puste.

Dla poprawnie ułożonej sieci, tj. skończonej, skierowanej, bez cykli, itd., otrzymamy macierz trójkątną taką, że wszystkie wpisane wartości leżą nad główną przekątną. W wypadku, gdy otrzymamy pewną wartość na lub pod główną przekątną, oznacza to, że sieć zawiera pętlę lub cykl.

Dla obliczenia wartości  $t_i^{(0)}$  i  $t_j^{(\lambda)}$  ~~wpisujemy dla zdarzenia~~ podany następnie prosty algorytm:

a/ do kolumny dla  $t_i^{(0)}$  wpisujemy dla zdarzenia 0 /pierwszy wiersz wartość 0, ponieważ  $t_0^{(0)} = 0$ .

b/ w kolumnie odpowiadającej następnemu zdarzeniu do wartości  $y_{ij}$  dodamy odpowiadającą wartość  $t_i^{(0)}$ , którą mamy już obliczoną

c/ jeżeli w  $j$ - tej kolumnie jest tylko jedno pole niepuste /w zdarzeniu kończy się tylko jedna czynność/, wpisujemy wartość  $t_i^{(0)} + y_{ij}$  do kolumny odp.  $t_i^{(0)}$  w wierszu odp.  $j$ - temu zdarzeniu.

d/ jeżeli w  $j$ - tej kolumnie jest więcej pól niepustych /w zdarzeniu kończy się więcej czynności/, dodajemy kolejno  $t_i^{(0)} + y_{ij}$ , wybierzemy wartość największą, którą wpisujemy

e/ analogicznie postępujemy /powtarzając postępowanie od b/ do e/ / dla wszystkich kolumn; dopóki nie otrzymamy  $t_n^{(0)}$ , tj. najwcześniejszy czas dla ostatniego zdarzenia.

Jeżeli znaleźliśmy wszystkie  $t_i^{(0)}$ , możemy obliczyć czasy  $t_j^{(\lambda)}$  następująco :

a/ w wierszu odp.  $t_j^{(\lambda)}$  wpiszemy w ostatniej kolumnie /odp. zdarzeniu n/ obliczoną wartość  $t_n^{(0)}$ , ponieważ  $t_n^{(0)} = t_n^{(\lambda)}$ .

b/ bierzemy wiersz odp. poprzedniemu zdarzeniu i wartości  $y_{ij}$  w niepustych polach kolejno odejmiemy od odp.  $t_i^{(\lambda)}$ , które już zostały obliczone

c/ jeżeli i- ty wiersz zawiera tylko jedno niepuste pole, tj. w zdarzeniu i rozpoczyna się tylko jedna czynność, wpiszemy wartość  $t_j^{(\lambda)} - y_{ij}$  w pole przecięcia wiersza odp.  $t_i^{(\lambda)}$  i kolumny odp. zdarzeniu i.

d/ jeżeli w i- tym wierszu znajduje się więcej pól niepustych, tj. z i- tego zdarzenia wychodzi więcej czynności, znajdziemy wszystkie wartości  $t_j^{(\lambda)} - y_{ij}$ , wybieramy wartość najmniejszą, którą wpiszemy

e/ postępujemy analogicznie dla wszystkich wierszy tak długo, dopóki nie otrzymamy  $t_0^{(\lambda)}$ , tj. czas najpóźniejszy dla pierwszego zdarzenia.

Jeżeli otrzymamy  $t_0^{(\lambda)} \neq 0$ , oznacza to, że w obliczeniach znajduje się błąd albo sieć nie jest wystarczająco gęsta. Obliczamy następnie dla każdego zdarzenia różnicę  $t_i^{(\lambda)} - t_i^{(0)}$ . Zdarzenia, dla których wartość różnicy wynosi zero, leżą na ścieżce krytycznej.

### ad 3. Obliczenie z zastosowaniem maszyny matematycznej.

Stosowanie maszyn matematycznych zalecane jest w takich przypadkach, gdy sieć jest bardziej rozległa /zawiera zwykle więcej niż 100 węzłów/. Zagadnieniom związanym z obliczeniami za pomocą maszyn matematycznych poświęcony jest rozdz. 2. 6.

Załóżmy, że maksymalnie dopuszczalny przedział czasowy czynności  $t_j^{(\lambda)} - t_i^0$  = równa się czasowi jej trwania, tj. zachodzi

$$t_j^{(\lambda)} - t_i^{(0)} - y_{ij} = 0. \quad (5)$$

Stąd wynika, że

$$t_i^{(0)} = t_i^{(\lambda)} \quad \text{i} \quad t_j^{(0)} = t_j^{(\lambda)},$$

ponieważ

$$t_i^{(0)} + y_{ij} = t_j^{(0)} \quad \text{i} \quad t_j^{(\lambda)} - y_{ij} = t_i^{(\lambda)}.$$

Czynność  $(i, j)$ , której czas trwania  $y_{ij}$  równa się maksymalnie dopuszczalnemu przedziałowi czasowemu, nazywamy czynnością krytyczną. Cechą charakterystyczną czynności krytycznej jest równoważność początku i najwcześniejszego początku oraz równoważność końca i najpóźniejszego końca /z zachowaniem powyżej przytoczonych warunków/.

Dla tych czynności, dla których

$$t_j^{(\lambda)} - t_i^{(0)} - y_{ij} > 0, \quad (6)$$

istnieje różnica pomiędzy maksymalnie dopuszczalnym przedziałem czasowym czynności  $(i, j)$  i czasem jej trwania  $y_{ij}$ . Różnicą po lewej stronie nierówności (6) nazywamy zapasem czasowym czynności  $(i, j)$ . Czynność, dla której istnieje zapas czasowy, nazywamy czynnością niekrytyczną. Wartość zapasu czasowego czynności niekrytycznej otrzymamy przez zamianę nierówności /6/ na równość. Wartość zapasu czasowego czynności krytycznej równa się zeru.

Ciąg czynności krytycznych prowadzących od zdarzenia początkowego do końcowego nazywamy ścieżką krytyczną sieci. W języku teorii grafów ścieżka krytyczna jest drogą zorientowaną zawierającą łuki, które przedstawiają czynności krytyczne.

Ścieżka krytyczna jest takim ciągiem czynności, której czas trwania jest dłuższy od czasu trwania którejkolwiek innej drogi sieci. Wszystkie inne drogi posiadają krótszy czas trwania, posiadają więc zapas czasowy. Ścieżki zawierające zapas czasowy nazywamy ścieżkami niekrytycznymi. Są one utworzone z ciągów czynności

ności niekrytycznych.

Ścieżka krytyczna jako najdłuższa droga sieci określa czas trwania całego projektu  $t_n^{(0)} = t_n^{(\lambda)}$ . Każda zmiana czasu trwania lub przesunięcie którejkolwiek czynności na ścieżce krytycznej prowadzi do przedłużenia lub skrócenia czasu realizacji całego projektu, ponieważ ścieżka krytyczna nie posiada żadnego zapasu czasowego.

Jeżeli celem analizy jest skrócenie czasu realizacji projektu, można postępować trzema podstawowymi sposobami:

a/ staramy się usunąć niektóre czynności na ścieżce krytycznej. Są to te czynności, które nie są konieczne dla ukończenia projektu lub te, które nie mają większego znaczenia;

b/ staramy się realizować równolegle te czynności, które pierwotnie były zaplanowane ze sobą;

c/ możemy skrócić czas trwania czynności na ścieżce krytycznej w ten sposób, że przeprowadzimy część źródeł z dróg niekrytycznych na ścieżkę krytyczną. Wyczerpiemy pewną część zapasów na ścieżkach niekrytycznych.

Ostatni sposób jest bardzo kosztowny i dlatego stosujemy go dopiero po wyczerpaniu pierwszych dwóch możliwości. Musimy zastanowić się dokładnie nad tym, czy jest celowe skracać czas realizacji projektu za cenę ewentualnego powstania nowych ścieżek krytycznych. Może się to zdarzyć, jeżeli zapasy czasowe na ścieżkach niekrytycznych są stosunkowo małe. Grozi bowiem niebezpieczeństwo, że cały projekt zostanie "napiętym" systemem i najmniejsza zmiana w stosunkach czasowych spowoduje niedotrzymanie zaplanowanego terminu ukończenia projektu.

Jeżeli za pomocą przesunięcia dodatkowych źródeł, tj. sił

roboczych, maszyn, materiału, godzin nadliczbowych itp., skrócimy czas realizacji niektórych czynności na ścieżce krytycznej, tym samym skrócimy również całkowity ~~ea~~ czas realizacji projektu. Użycie tych źródeł w króрымkolwiek innym miejscu i jakiegokolwiek ilości jest zbędne o ile nie została uprzednio skrócona ścieżka krytyczna. Ich użycie ma sens tylko na ścieżce krytycznej.

Analiza ścieżki krytycznej umożliwia więc w procesach złożonych znaleźć takie czynności albo taki ciąg czynności, na które organ kierowniczy powinien skoncentrować uwagę przy realizacji projektu. Jest oczywiste, że nie każda oszczędność czasu i źródeł daje efektywne rezultaty dla całego projektu. Przez wyznaczenie ścieżek niekrytycznych oraz wielkości zapasów odkrywamy te miejsca projektu, gdzie znajdują się potrzebne dodatkowe źródła.

Pewne przedłużenie realizacji wzdłuż ścieżek niekrytycznych niekoniecznie ma wpływ na czas realizacji całego projektu /zależnie od wielkości zapasu czasowego/.

Ścieżek krytycznych może być więcej, mogą się różnie rozgałęziać i mogą przechodzić również przez czynności fikcyjne. W sieci oznaczamy je grubą linią.

Duże znaczenie dla kierowania mają drogi krytyczne drugorzędne. Są to drogi posiadające bardzo mały zapas czasowy. Grozi bowiem niebezpieczeństwo, że zapas zostanie szybko wyczerpany. Ścieżka krytyczna drugorzędna posiadająca zapas czasowy o wartości jednej jednostki staje się nową ścieżką krytyczną przy przedłużeniu którejkolwiek czynności o jedną tylko jednostkę czasu. Ścieżki krytyczne drugorzędne odkrywają miejsca możliwych dys-

proporcji; trzeba im poświęcić największą uwagę.

### Zapasy czasowe.

Dla czynności niekrytycznych zachodzi  $t_j^{(\lambda)} - t_i^{(0)} - y_{ij} > 0$ , tj. maksymalnie dopuszczalny przedział czasowy różni się od czasu jej trwania o wartość zapasu czasowego. Zapasy czasowe można wykorzystać w celu racjonalnego wykorzystania źródeł, nawet w czasie układania sieci albo realizacji projektu. W granicach wielkości zapasów czasowych można przesuwac lub przedłużać czas realizacji czynności niekrytycznych bez wpływu na końcowy termin  $t_n^{(\lambda)}$  całego projektu. Możemy jednak wpłynąć na najwcześniejszy początek następujących czynności. Dlatego korzystając z zapasów czasowych musimy rozróżniać jakiego rodzaju jest zapas i jakie są jego własności.

W każdym węźle /zdarzeniu/ sieci mamy obliczone wartości  $t_i^{(0)}$  i  $t_i^{(\lambda)}$ , przy czym zachodzi

$$t_i^{(0)} \leq t_i^{(\lambda)}$$

Jak wiadomo, zdarzenie, dla którego  $t_i^{(0)} = t_i^{(\lambda)}$ , leży na ścieżce krytycznej. Jeżeli  $t_i^{(\lambda)} > t_i^{(0)}$ , to zdarzenie i nie leży na ścieżce krytycznej i różnica  $d_i = t_i^{(\lambda)} - t_i^{(0)} > 0$  określa czas, w którym możemy oczekiwać ukończenie czynności kończących się w zdarzeniu i.

Mamy obliczone wartości  $t_i^{(0)}$ ,  $t_i^{(\lambda)}$  i  $d_i$  dla każdego zdarzenia. Pomiedzy czasem trwania czynności (i,j)  $y_{ij}$  i czasami  $t_i^{(0)}$ ,  $t_j^{(0)}$ ,  $t_i^{(\lambda)}$ ,  $t_j^{(\lambda)}$  zachodzą następujące związki :

$$y_{ij} \leq t_j^{(\lambda)} - t_i^{(\lambda)} \tag{7}$$

$$y_{ij} \leq t_j^{(0)} - t_i^{(0)} \tag{8}$$

Ze względu na to, że  $t_i^{(0)} \leq t_i^{(\lambda)}$  zachodzi również

$$\begin{aligned} y_{ij} &\leq t_j^{(\lambda)} - t_i^{(0)} \\ y_{ij} &\leq t_j^{(0)} - t_i^{(\lambda)}. \end{aligned} \tag{9}$$

Jeżeli w powyższych nierównościach zachodzi równość, czynności znajdują się na ścieżce krytycznej. Nie posiadają więc żadnych zapasów czasowych. Jeżeli zachodzą ostre nierówności, wartość zapasów czasowych można ustalić za pomocą uzupełnienia nierówności do równości:

$$\begin{aligned} y_{ij} &= t_j^{(\lambda)} - t_i^{(\lambda)} - ZZ_{ij} \\ y_{ij} &= t_j^{(0)} - t_i^{(0)} - ZW_{ij} \\ y_{ij} &= t_j^{(\lambda)} - t_i^{(0)} - ZC_{ij} \\ y_{ij} &= t_j^{(0)} - t_i^{(\lambda)} - ZN_{ij} \end{aligned} \tag{10}$$

Za pomocą przekształcenia powyższych równań możemy obliczyć wartość poszczególnych zapasów :

$$\begin{aligned} ZC_{ij} &= t_j^{(\lambda)} - t_i^{(0)} - y_{ij} \\ ZW_{ij} &= t_j^{(0)} - t_i^{(0)} - y_{ij} \\ ZN_{ij} &= t_j^{(0)} - t_i^{(\lambda)} - y_{ij} \\ ZZ_{ij} &= t_j^{(\lambda)} - t_i^{(\lambda)} - y_{ij} \end{aligned} \tag{11}$$

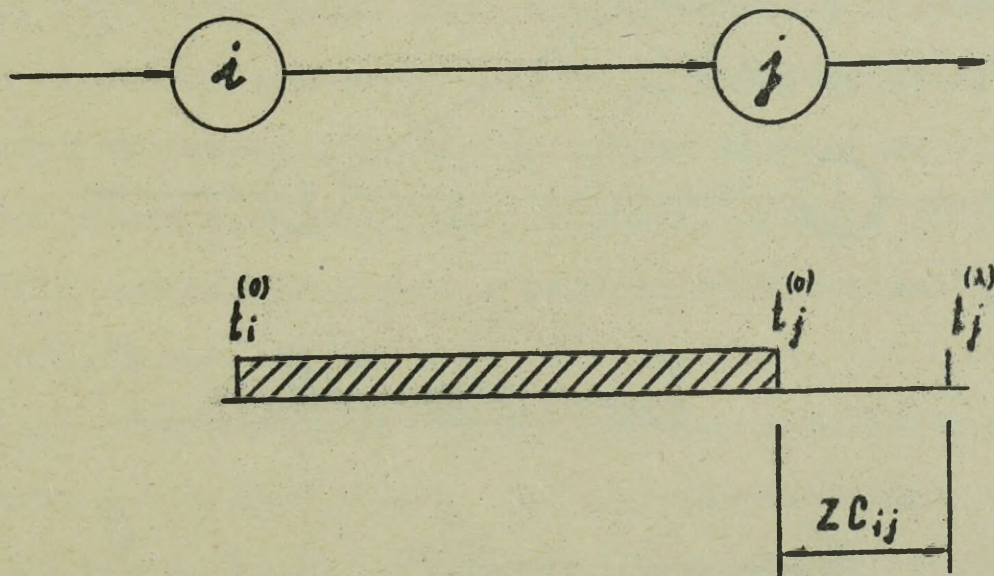
Wszystkie zapasy czasowe mogą odróżniać się od siebie wielkością, interpretacją oraz użyciem. Następnie scharakteryzujemy poszczególne rodzaje zapasów.

1. Zapas czasowy całkowity  $ZC_{ij} = t_j^{(\lambda)} - t_i^{(0)} - y_{ij}$

$ZC_{ij}$  jest to różnica pomiędzy maksymalnie dopuszczalnym przedziałem czasowym i czasem trwania czynności.  $ZC_{ij}$  jest zawsze nieujemne. Podaje, o ile jednostek czasu można przedłużyć czas trwania lub przesunąć czas najwcześniejszego początku czynności w przedziale  $\langle t_i^{(0)}, t_j^{(\lambda)} \rangle$  bez przedłużenia terminu ukończenia całego projektu  $t_n^{(0)} = t_n^{(\lambda)}$ .

Jeżeli zapas całkowity równa się zero, czynność  $(i,j)$  leży na ścieżce krytycznej. Po zupełnym wyczerpaniu zapasu całkowitego czynności  $(i,j)$ , tj. przy przedłużeniu czasu  $y_{ij}$  o wartość  $ZC_{ij}$  powstanie w sieci nowa ścieżka krytyczna, na której leżą węzły /zdarzenia/  $i$ ,  $j$  oraz czynność  $(i,j)$ .

Zapas całkowity otrzymamy wtedy, jeżeli wszystkie poprzednie czynności zostały ukończone w najwcześniejszym początku i wszystkie następne czynności rozpoczną się w najpóźniej dopuszczalnym czasie. Graficzne przedstawienie  $ZC_{ij}$  zob. na rys. 50.



Rys. 50

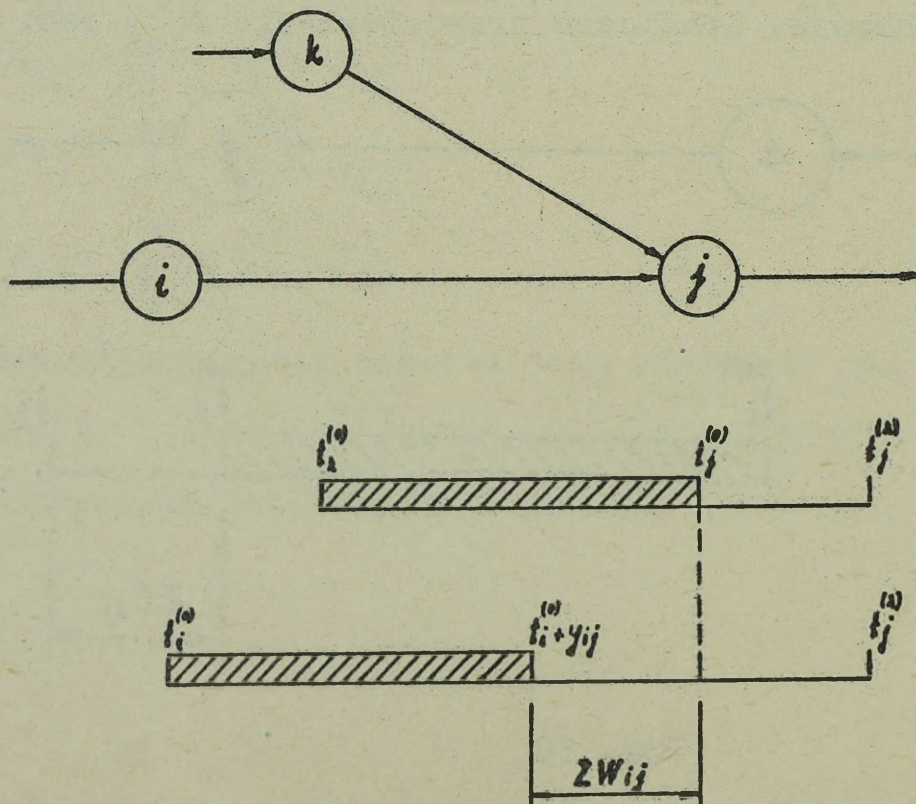
2. Zapas czasowy wolny  $ZW_{ij} = t_j^{(0)} - t_i^{(0)} - t_{ij}$

Jego wartość jest nieujemna. Podaje o ile jednostek czasu można przedłużyć czas trwania lub przesunąć najwcześniejszy początek czynności, żeby najwcześniejsze początki wszystkich następnych czynności nie zostały zagrożone. Zapas czasowy wolny powstaje wtedy, jeżeli wszystkie poprzednie czynności zostały ukończone w najwcześniejszym możliwym czasie i wszystkie następne rozpoczną się również w najwcześniejszym możliwym czasie. Warunkiem jest, żeby w  $j$ -tym zdarzeniu kończyły się conajmniej dwie czynności  $(i,j)$  i  $(k,j)$  o różnych najwcześniejszych końcach czynności.

Jeżeli

$$t_i^{(0)} + y_{ij} < t_k^{(0)} + y_{kj},$$

powstaje zapas czasowy wolny czynności  $i,j$ . Graficzne przedstawienie  $ZW_{ij}$  znajduje się na rys. 51.



Rys. 51

Jeżeli nie chcemy dopuścić, żeby powstała nowa ścieżka krytyczna, nie możemy zupełnie wyczerpać  $ZW_{ij}$  tych czynności,  $(i,j)$ , dla których zdarzenie  $j$  leży na ścieżce krytycznej.

3. Zapas czasowy niezależny  $ZN_{ij} = t_j^{(0)} - t_i^{(\lambda)} - y_{ij}$

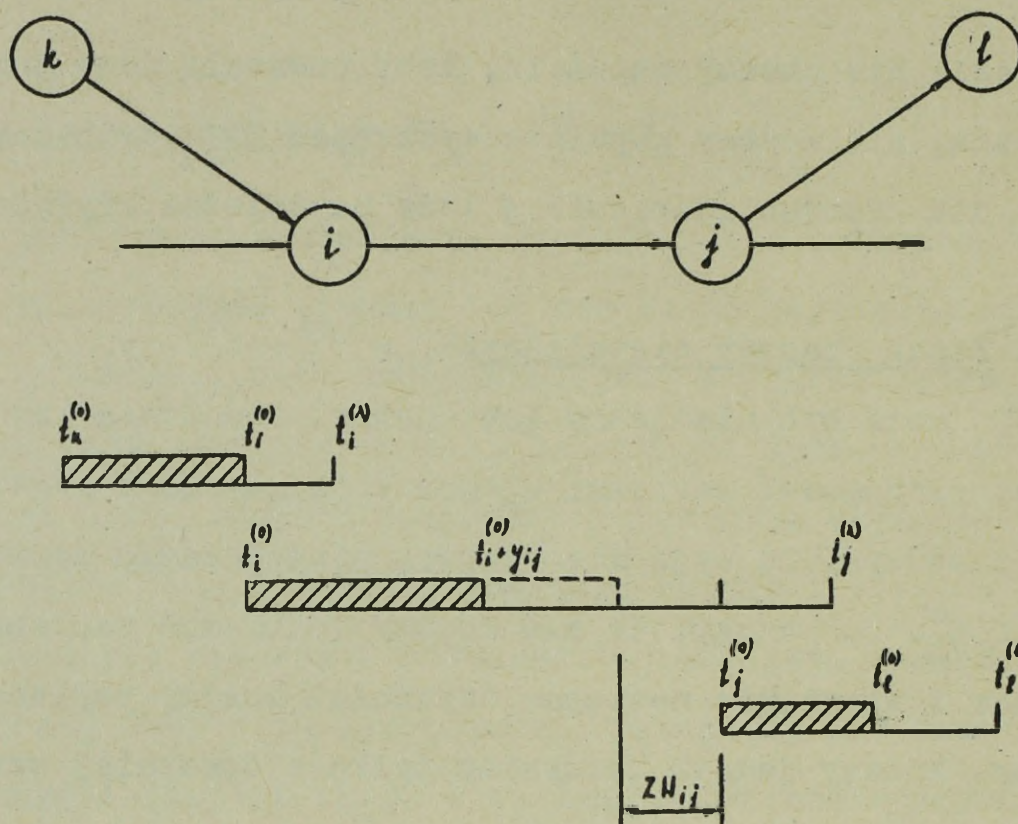
$ZN_{ij}$  może być nieujemny lub ujemny. Pozostałe zapasy mogą również przyjmować wartości ujemne /tj. powstaje negatywny zapas czasowy/. Za wyjątkiem zapasu niezależnego oznacza to, że  $t_j^{(\lambda)} < t_j^{(0)}$ . To znaczy, że nie możemy dotrzymać zaplanowanych terminów i wszystkie następne czynności musimy zaplanować jeszcze raz. Możemy jednak korzystać tylko z dodatniej wartości  $ZN_{ij}$ .

Z punktu widzenia obliczania za pomocą maszyny matematycznej korzystamy z wzoru

$$ZN_{ij} = \max(0, t_j^{(0)} - t_i^{(\lambda)} - y_{ij}). \quad (12)$$

Zapas czasowy niezależny podaje o ile jednostek czasu możemy przedłużyć czas trwania lub przesunąć czas najwcześniejszego początku czynności niezależnie od czasowych stosunków w sieci. Jego wyczerpanie nie zmienia żadnej z wartości  $t_i^{(0)}$  i  $t_i^{(\lambda)}$  oraz wielkości zapasów żadnej innej czynności. Przy jego całkowitym wyczerpaniu możemy dotrzymać terminy najwcześniejszych początków następujących czynności, chociaż czynności poprzednie zostaną ukończone w najpóźniejszym czasie. Graficzne przedstawienie zob. na rys. 52.

Jeżeli nie chcemy, żeby powstała nowa ścieżka krytyczna, nie możemy w zupełności wyczerpać zapasu niezależnego żadnej czynności  $(i,j)$ , której zdarzenia  $i$  i  $j$  leżą na ścieżce krytycznej. Wtedy bowiem zachodzi  $ZN_{ij} = ZC_{ij}$ .



Rys. 52

4. Zapas czasowy zależny  $ZZ_{ij} = t_j^{(\lambda)} - t_i^{(\lambda)} - y_{ij}$

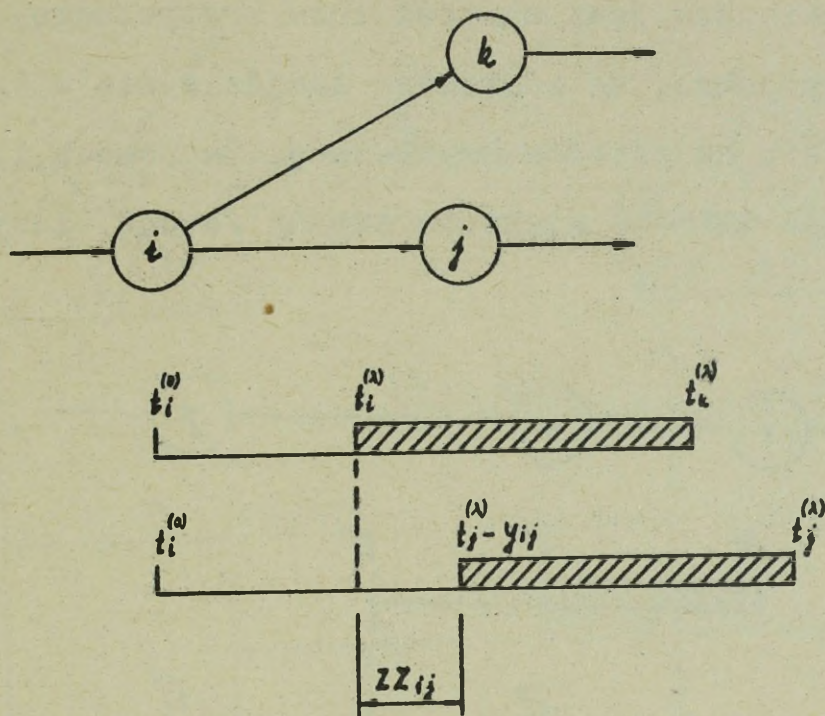
$ZZ_{ij}$  podaje o ile jednostek czasu możemy przedłużyć czas trwania czynności lub przesunąć termin najwcześniejszego początku czynności, przy założeniu, że wszystkie poprzednie czynności zostaną ukończone w najpóźniejszym czasie oraz wszystkie następane rozpoczną się również w najpóźniejszym czasie.

W zdarzeniu  $i$  muszą rozpoczynać się conajmniej dwie czynności  $(i,j)$  i  $(i,k)$  o różnych najpóźniejszych początkach. Jeżeli

$$t_j^{(\lambda)} - y_{ij} > t_k^{(\lambda)} - y_{ik},$$

powstaje zapas czasowy zależny czynności  $(i,j)$ . Jego graficzne przedstawienie zob. na rys. 53.

Jeżeli nie chcemy, żeby powstała nowa ścieżka krytyczna, nie możemy w zupełności wyczerpać zapasów zależnych czynności, dla których zdarzenie  $i$  leży na ścieżce krytycznej.



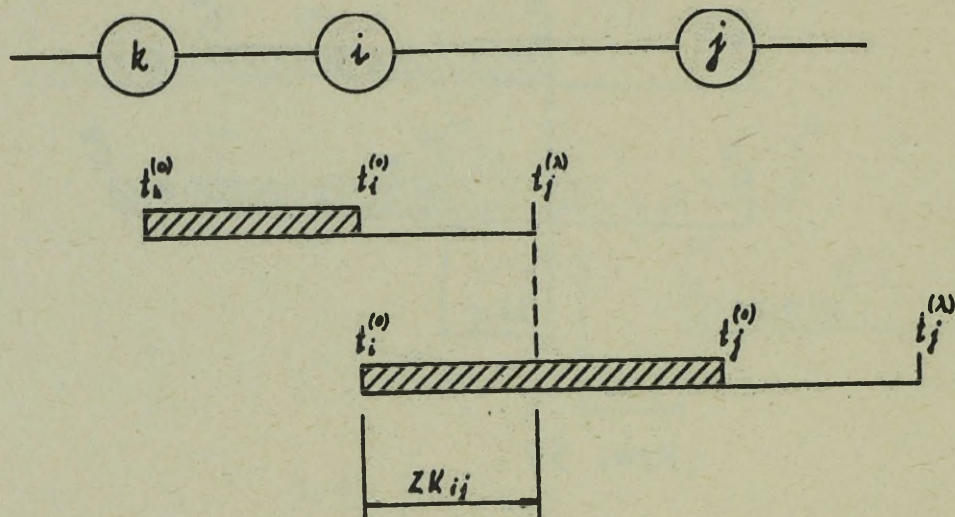
Rys. 53

Dotychczas zwracaliśmy uwagę tylko na te zapasy, które odnoszą się do poszczególnych czynności (*i, j*). W literaturze zalicza się zwyczajnie do zapasów /które w tym wypadku nazywamy luzami/ również różnicę  $d_i = t_i^{(\lambda)} - t_i^{(0)}$  odpowiadającą zdarzeniu *i*, więc tym wszystkim czynnościom, które rozpoczynają lub kończą się w zdarzeniu *i*. Tym odróżnia się on od powyżej przytoczonych rodzajów zapasów, które zawsze odpowiadają pewnej czynności. Będziemy go nazywać luzem /zapasem/ krytycznym  $ZK_i$ .

5. Luz czasowy krytyczny  $ZK_i = t_i^{(\lambda)} - t_i^{(0)}$

$ZK_i$  określa czas, w którym oczekujemy ukończenia czynności kończących w zdarzeniu *i*. Określa on możliwość przedłużenia czynności (*i, j*) lub przesunięcia najwcześniejszego początku, który można osiągnąć za pomocą przesunięcia początku wszystkich następnych czynności, zob. rys. 54.

Im mniejsza jest wartość luzu krytycznego, tym bardziej jest prawdopodobne, że zdarzenie znajdzie się w czasie realizacji projektu na ścieżce krytycznej. Za pomocą luzu krytycznego można również wyrazić niektóre zapasy /ewent. luzy/ przy pomocy innych.



Rys. 54

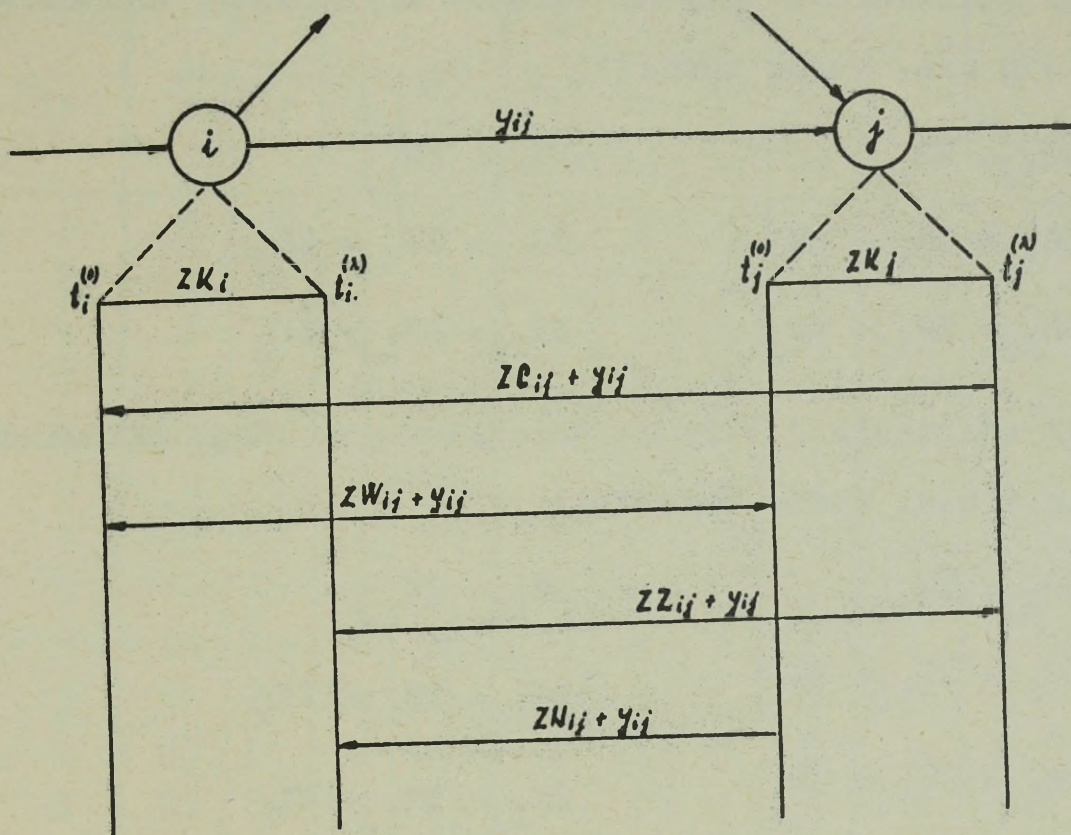
Związki pomiędzy wielkościami poszczególnych zapasów czasowych czynności niekrytycznych (i,j) są przedstawione na rys. 55.

Podstawowe związki pomiędzy zapasami są następujące :

$$ZW_{ij} = ZC_{ij} - ZK_j$$

$$ZZ_{ij} = ZC_{ij} - ZK_i \tag{13}$$

$$ZN_{ij} = ZC_{ij} - ZK_i - ZK_j$$



Rys. 55

Wielkość poszczególnych zapasów czynności  $(i,j)$  może zmieniać się w zależności od położenia czynności w sieci /w zależności od jej położenia ze względu na ścieżkę krytyczną/.

Rozpatrzmy główne przypadki :

a/ oba zdarzenia  $i, j$  oraz czynność  $(i,j)$  leżą na ścieżce krytycznej. Wtedy zachodzi  $t_j^{(λ)} - t_i^{(0)} - y_{ij} = 0$ , zatem otrzymamy

$$ZC_{ij} = ZW_{ij} = ZZ_{ij} = ZN_{ij} = 0 \quad (14)$$

b/ oba zdarzenia  $i, j$  leżą na ścieżce krytycznej, ale czynność  $(i,j)$  nie. Wtedy zachodzi

$$ZC_{ij} = ZW_{ij} = ZZ_{ij} = ZN_{ij} > 0 \quad (15)$$

c/ zdarzenie i leży na ścieżce krytycznej, natomiast zdarzenie j nie. Wtedy zachodzi

$$\begin{aligned} ZC_{ij} &= ZZ_{ij} & ZW_{ij} &= ZN_{ij} \\ ZC_{ij} &= ZN_{ij} + ZK_{ij} & ZC_{ij} &= ZW_{ij} + ZK_j \\ ZZ_{ij} &= ZW_{ij} + ZK_j & ZZ_{ij} &= ZN_{ij} + ZK_j \end{aligned} \quad (16)$$

d/ zdarzenie j leży na ścieżce krytycznej, natomiast zdarzenie i nie. Wtedy zachodzi

$$\begin{aligned} ZC_{ij} &= ZW_{ij} & ZZ_{ij} &= ZN_{ij} \\ ZC_{ij} &= ZZ_{ij} + ZK_i & ZC_{ij} &= ZN_{ij} + ZK_i \\ ZW_{ij} &= ZZ_{ij} + ZK_i & ZW_{ij} &= ZN_{ij} + ZK_i \end{aligned} \quad (17)$$

Teraz obliczamy za pomocą macierzy sprzężonej wszystkie rodzaje zapasów wszystkich czynności w naszym przykładzie. Na razie znamy wielkość luzu krytycznego  $ZK_i$  dla każdego zdarzenia i /ewent. różnicę  $d_i$ /. Wyniki uporządkujemy do tablicy. Do pierwszej kolumny wpiszemy po kolei wszystkie czynności sieci i do pierwszego wiersza wszystkie potrzebne dane oraz zapasy

CZYNNOŚĆ (i,j)	$y_{ij}$	$t_i^{(0)}$	$t_j^{(0)}$	$t_i^{(s)}$	$t_j^{(s)}$	$t_j^{(0)} - y_{ij}$	$t_j^{(s)} - y_{ij}$	$t_j^{(0)} - t_i - y_{ij}$	$t_j^{(s)} - t_i - y_{ij}$	$t_j^{(0)} - t_i^{(0)}$	$t_j^{(s)} - t_i^{(s)}$
0,1	5	0	5	0	5	0	0	0	0	0	0
1,2	2	5	7	5	8	1	0	0	1	1	0
1,3	4	5	9	5	9	0	0	0	0	0	0
2,4	7	7	15	8	15	1	1	0	0	0	1
2,5	3	7	15	8	16	6	5	4	5	1	1
3,4	6	9	15	9	15	0	0	0	0	0	0
3,6	3	9	12	9	12	0	0	0	0	0	0
3,7	8	9	20	9	20	3	3	3	3	0	0
4,5	0	15	15	15	16	1	0	0	1	1	0
4,7	5	15	20	15	20	0	0	0	0	0	0
5,7	4	15	20	16	20	1	1	0	0	0	1
5,8	9	15	26	16	26	2	2	1	1	0	1
6,7	5	12	20	12	20	3	3	3	3	0	0
6,8	14	12	26	12	26	0	0	0	0	0	0
7,8	6	20	26	20	26	0	0	0	0	0	0
8,9	4	26	30	26	30	0	0	0	0	0	0

### 2.3.1.1 CPM/General Electric.

Przy praktycznym zastosowaniu metody CPM zauważono, że zapasy czasowe poszczególnych czynności nie mają jednakowego znaczenia. Nie chodzi tutaj o różne rodzaje zapasów, ale o ich wielkości. Dwie czynności posiadające zapasy jednakowej wielkości i tego samego rodzaju mogą mieć zupełnie inny charakter. Dla niektórych czynności nie ma sensu liczyć się z dużymi zmianami zaplanowanego czasu  $y_{ij}$  i istnienie zapasu prowadzi do niepotrzebnej luźności sieci. Dla innych znów jest lepiej liczyć się z niepewnością zaplanowanych terminów; tutaj zasap i jego wielkość w pewnym sensie określają tę niepewność.

Specjaliści z General Electric Company opracowali metodę CPM/GE, która rozwiązuje przytoczone problemy. Metoda ta polega na przyporządkowaniu każdej czynności sieci określonego czasu. Pierwotna metoda CPM uważa za obowiązujące tylko czasy czynności leżących na ścieżce krytycznej. W metodzie podanej tutaj mogą w pewnym sensie posiadać wartości niezerowe również niektóre czynności, które nie leżą na ścieżce krytycznej. Dla czynności  $(i,j)$  obliczamy czasy  $t_i^{(s)}$  i  $t_j^{(s)}$ . Różnica  $P_{ij} = t_j^{(s)} - t_i^{(s)} - y_{ij}$  określa wielkość planowanego zapasu czynności niekrytycznej. W ten sposób mogą również na ścieżkach niekrytycznych powstać czasowe napięcia, które pozytywnie wpływają na dotrzymanie planowanych terminów.

Rozwiązanie za pomocą GE polega na systemie oceniania poszczególnych czynności. Różne znaczenie zapasów czasowych odbija się w przyporządkowanych preferencjach  $W_{ij}$ , które przyjmują wartości od 0 do 9. Największą wartość mają preferencje tych zapasów czynności, dla których niepewność czasu  $y_{ij}$  jest największa. Im mniejsza jest niepewność, tym mniejsza jest preferencja czynności. Czynności fikcyjnej zawsze odpowiada preferencja 0.

Kryteria przyporządkowania preferencji mogą być różne. Np. niepewność wczesnego zapewnienia materiału lub maszyn, niezadowolające uzasadnienie norm, możliwość wpływu nieprzewidzianych czynników oraz inne czynniki, które mogą wpłynąć na opóźnienie realizacji.

Wyznaczenie preferencji zależy bardzo często od doświadczenia wykonawcy, więc ich wartość ma zawsze charakter założeń.

Metoda GE nawiązuje do klasycznych obliczeń metody CPM. Najpierw układamy sieć według Original CPM. W tablicy wyników uwzględniamy tylko zapas całkowity i wolny. Dotychczas zapas wolny rozważano tylko dla ostatniej czynności leżącej na ścieżce niekrytycznej. Przy planowaniu za pomocą metody CPM/GE za pomocą preferencji zapasy wolne rozdzielamy do pozostałych czynności niekrytycznych.

W ten sposób uzyskamy tzw. planowane zapasy dla czynności niekrytycznych. W każdym wypadku planowany zapas musi być większy od zapasu całkowitego czynności. Metodę CPM/GE zademonstrujemy na naszym przykładzie.

Wykorzystamy część tablicy wyników CPM :

CZYN- NOŚCI	$y_{ij}$	$t_j^{(\lambda)}$	$ZC_{ij}$	$ZW_{ij}$	$W_{ij}$	$H_j$	$G_j$	$t_i^{(s)}$	$t_j^{(s)}$	$P_{ij}$
0,1	5	5	0	0	1	1	9	0	5	0
1,2	2	8	1	0	1	1	8	5	7	0
1,3	4	9	0	0	2	2	7	5	9	0
2,4	7	15	1	1	2	2	6	7	15	1
2,5	3	16	6	5	2	2	5	7	15	5
3,4	6	15	0	0	1	2	6	9	15	0
3,6	3	12	0	0	1	1	6	9	12	0
3,7	8	20	3	3	3	3	4	9	20	3
4,5	0	16	1	0	0	2	5	15	15	0
4,7	5	20	0	0	2	3	4	15	20	0
5,7	4	20	1	1	1	3	4	15	20	1
5,8	9	26	2	2	1	3	3	15	26	2
6,7	5	20	3	3	2	3	4	12	20	3
6,8	14	26	0	0	3	3	3	12	26	0
7,8	6	26	0	0	1	3	3	20	26	0
8,9	4	30	0	0	2	2	1	26	30	0

Dla wyznaczenia planowanych terminów stosujemy wzór :

$$t_0^{(s)} = 0$$

$$t_j^{(s)} = \max \left[ \frac{(t_j^{(s)} + y_{ij}) G_j + t_j^{(\lambda)} \cdot H_j}{G_j + H_j} \right] \quad (18)$$

gdzie  $y_{ij}$  jak zwykle oznacza czas trwania czynności  $(i,j)$ ,  $t_i^{(s)}$ ,  $t_j^{(s)}$  planowane czasy zdarzeń  $i$ ,  $j$  ( $i < j$ ),  $t_j^{(\lambda)}$  najpóźniejszy koniec czynności  $(i,j)$ .

$G_j$  i  $H_j$  są to tzw. wagi i są określone dla każdego zdarzenia oddzielnie. Poszczególne  $G_j$  obliczamy następująco :

$$\text{Położmy } G_n = 1. \quad (19)$$

Dodając preferencje  $W_{ij}$  zapasu czasowego otrzymujemy kolejno wszystkie  $G_i$ . Jeżeli z zdarzenia  $i$  wychodzi więcej dróg, wybieramy wagę największą, tj.

$$G_i = \max_j [G_j + W_{ij}] \quad (20)$$

Wagę  $H_j$  ustalamy w inny sposób : jest nią największa spośród wszystkich wartości preferencji zapasu czasowego poszczególnych czynności kończących w zdarzeniu  $j$  :

$$H_j = \max W_{ij} \quad (21)$$

Przytoczoną tablicę wyników CPM uzupełnimy obranymi preferencjami  $W_{ij}$ . Wartości  $W_{ij}$  wpiszemy do macierzy. W przecięciu wiersza odp. zdarzeniu  $i$  i kolumny odp. zdarzeniu  $j$  znajduje się  $W_{ij}$  odpowiadające czynności  $(i,j)$ . Przy pomocy macierzy obliczymy  $G_j$  i  $H_j$ . Uzyskane wartości wpiszemy do tablicy i mamy teraz do dyspozycji dane potrzebne do obliczenia  $t_i^{(s)}$  i  $t_j^{(s)}$  według wzoru (18).

i \ j	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0		1								
1			1	2						
2					2	2				
3					1		1	3		
4						0		2		
5								1	1	
6								2	3	
7									1	
8										2
9										
$G_j$	10	9	8	7	6	5	6	4	3	1
$H_j$	0	1	1	2	2	2	1	3	3	2

Obliczone wartości  $\Phi$   $t_i^S$  i  $t_j^S$  wpiszemy do tablicy i ustalimy wielkość planowanego zapasu każdej czynności  $P_{ij}$ :

$$P_{ij} = t_j^{(s)} - t_i^{(s)} - y_{ij} \quad (22)$$

Wartości planowanych zapasów są wpisane w ostatniej kolumnie tablicy. W odróżnieniu od pierwotnego planu możemy zauważyć pewne zmiany. Czynność (1,2) posiada planowany zapas równy 0, zapas czynności (2,5) zmniejszył się o 1, czynność fikcyjna (4,5) ma teraz zapas zerowy.

Metoda CPM jest próbą uzyskania bardziej obowiązującego planowania oraz bardziej racjonalnego wykorzystywania zapasów. Kilka rodzajów zapasów zastępujemy jednym planowanym zapasem. Wyznaczanie preferencji jest jednak zbyt subiektywne i polega

ono na dokładnej analizie wszystkich czynności. Żeby otrzymać przy zastosowaniu metody CPM/GE dobre wyniki, potrzebne są duże doświadczenia oraz trzeba zastosować metodę Original CPM.

### 2.3.1.2 Kierowanie procesem realizacji projektu i jego kontrola.

Zastosowanie metody CPM i pozostałych metod analizy sieciowej nie kończy się na ułożeniu sieci, jej obliczeniu i analizie. W ten sposób uzyskamy tylko wstępny plan realizacji projektu, który możemy za pomocą maszyny porównywać z rzeczywistymi terminami realizacji projektu i wydawać odpowiednie rozporządzenia służące do naprawy. Równocześnie przeprowadzamy sprawną kontrolę realizacji projektu.

Jeżeli prawidłowo działa sprzężenie zwrotne, tj. organy zarządzania otrzymują okresowo potrzebne dane o realizacji projektu, można efektywnie kierować projektem. W ciągu realizacji projektu można wstępne czasowe oszacowania w sieci zastępować rzeczywistymi czasami realizacji. Nowe obliczenia w połączeniu z rzeczywistymi danymi i ocenami czasu trwania czynności, które nie zostały dotychczas zrealizowane, umożliwiają coraz dokładniejsze planowanie pozostałej części projektu.

Organy kierownicze zwracają uwagę przede wszystkim na termin realizacji całego projektu, tj.  $t_n^{(0)}$ , który zmienia się jednocześnie z zmianami terminów realizacji niektórych czynności. Porównywaniem  $t_n^{(0)}$  z zaplanowanym terminem  $\lambda$  wyznacza odchylenie i wydaje takie rozporządzenia, żeby zachodziło  $t_n^{(0)} \leq \lambda$ .

W zależności od charakteru i znaczenia projektu można dobrać dowolnie małą liczbę  $\varepsilon$ , którą nazywamy dopuszczalną to-

lerancją. Jeżeli zachodzi  $t_n^{(0)} < \lambda - \varepsilon$ , nie wydajemy żadnych rozporządzeń, realizacja przebiega w dopuszczalnych granicach.

Jeżeli zachodzi

$$\lambda \geq t_n^{(0)} \geq \lambda - \varepsilon \quad (23)$$

trzeba skoncentrować uwagę na te drogi /ścieżki/ projektu, których długość jest zawarta w przedziale  $\langle \lambda - \varepsilon, \lambda \rangle$ . Jeżeli  $t_n^{(0)} > \lambda$ , trzeba wydać odpowiednie rozporządzenia, żeby osiągnąć  $t_n^{(0)} \leq \lambda$ . W innym wypadku projekt nie może zostać ukończony w terminie  $\lambda$ .

Za pomocą analizy możemy ustalić, że dla pozostałej części projektu trzeba opracować nowy plan, ponieważ nie możemy w żadnym wypadku osiągnąć początkowo wyznaczonego  $\lambda$ . Możemy również opracować więcej wariantów, wyznaczyć ich wpływ na termin końcowy, nakłady i źródła oraz dobrać optymalny wariant.

Czas trwania sprzężenia zwrotnego pomiędzy projektem i organami kierowniczymi musi być jak najkrótszy. Jeżeli jest on zbyt długi, wtedy rozporządzenia służące do poprawienia oraz decyzja organów kierowniczych działają w położeniu różnym od tego, w którym projekt znajdował się w momencie przekazywania informacji. Za pomocą maszyny matematycznej możemy znaczenie skrócić czas pomiędzy wejściem i wyjściem danych organów kierowniczych. Okres pomiędzy następnymi zawiadomieniami o stanie realizacji projektu powinien być dłuższy niż czas pomiędzy wejściem i wyjściem danych organów kierowniczych.

Podstawę dla zarządzania organów kierowniczych stanowią okresowe zawiadomienia o stanie realizacji projektu. Zawierają one spis dotychczas ukończonych czynności oraz przy każdej roz-

początej czynności czas konieczny do jej całkowitego ukończenia. Na podstawie tych danych można ułożyć nową sieć, w której nie uwzględniamy tych czynności, które już zostały ukończone. Rozpoczęte czynności zamieniamy przez inne czynności z czasem trwania potrzebnym do ich ukończenia. W ten sposób uzyskamy więcej nowych zdarzeń początkowych. Ta metoda jest jednak zbyt pracochłonna.

Bardziej korzystne jest zmieniać czas trwania tych czynności, dla których rzeczywiście wystąpiły pewne zmiany. Przeprowadzane jest to za pomocą maszyny matematycznej, która oblicza zmiany długości czasu trwania czynności. Za każdym razem uwzględniamy ewentualne zmiany i za pomocą maszyny obliczamy ich odbicie w czasowych stosunkach sieci. Ukończonym czynnościom przyporządkujemy czas trwania równy zeru.

Możemy również ukończonym czynnościom przyporządkować rzeczywiste terminy ich realizacji i korzystając z nich możemy obliczać dane dla pozostałej części projektu. Wychodzimy więc kolejno z coraz bardziej realnych założeń i wtedy przewidywania są dokładniejsze. W przypadku granicznym, tj. kiedy projekt został ukończony i zamiast wszystkich czynności podstawiamy ich rzeczywiste terminy realizacji, model dokładnie odzwierciedla rzeczywistość.

W krajach zachodnich z dużym powodzeniem stosuje się modelowanie i eksperymentowanie przy analizie rozwiązania realizacji projektu. Projekt uważamy za tzw. "black box" i obserwujemy jego zachowanie się przy różnych możliwych wartościach podanych na wejściu. Do modelu można wprowadzać pewne założenia, np. zastosowanie bardziej nowoczesnej maszyny, nowych materiałów, różnych wariantów dostaw itp. i obliczać ich wpływ na cały projekt.

Można więc każde rozporządzenie "wypróbować" za pomocą modelu przed jego wprowadzeniem do praktyki i według rezultatów doświadczenia przyjąć lub odrzucić rozwiązanie albo obrać ten wariant, który jest w danej sytuacji najbardziej korzystny.

### 2.3.1.3 Zastosowanie metody CPM przy koordynacji większej liczby projektów.

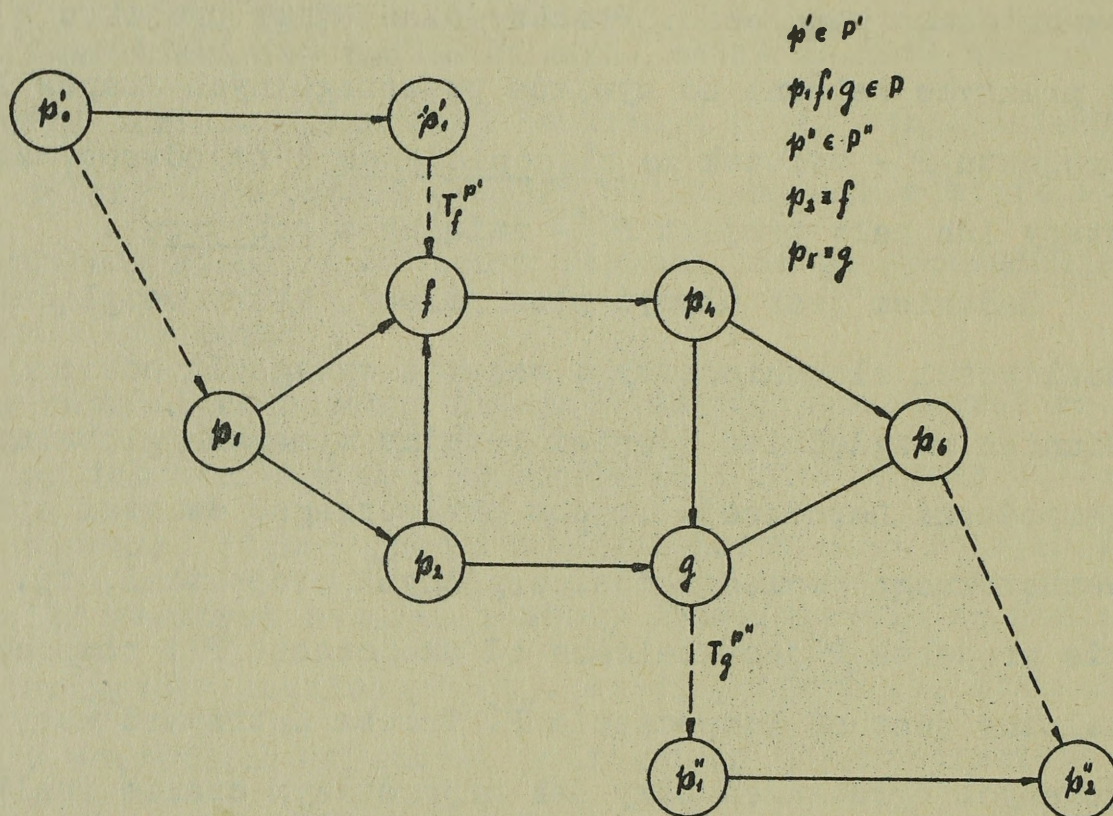
Dotychczas rozważaliśmy obliczenia sieci jednego projektu, zamkniętego kompleksu. Poszczególne etapy projektu P są jednak w praktyce zależne od wyników poszczególnych etapów lub całego projektu P' - związek ze zleceniodawcą i na odwrót, warunkują one etapy lub cały projekt P'' - związek z odbiorcą.

Zadaniem jest ułożyć plan /sieć/, który uwzględni czasowe możliwości zleceniodawcy i czasowe wymagania odbiorcy. Plan powinien uwzględniać również terminy wymagane globalnym planem gospodarki narodowej. Trzeba przestrzegać związku sprzężenia wewnętrznego pomiędzy poszczególnymi projektami, tj. rozpoczęcie projektu P' jest zależne od ukończenia P i rozpoczęcia P'' zależne jest od rozpoczęcia P'. Trzeba dotrzymać wszystkich podanych ograniczeń przy jak najkrótszym czasie realizacji projektów.

Związek pomiędzy projektami P i P' jest czasowym warunkiem określającym czas, w którym można rozpocząć czynność  $(f, j) \in P$ . Realizacja czynności  $(f, j)$  oraz wszystkich następnych czynności jest zależna od czasu zdarzenia f. Oznaczamy go przez  $T_f^{P'}$ , co przedstawia czas zdarzenia, który jest odbiorcą P'.

Związek pomiędzy projektami  $P'$  i  $P''$  jest znów czasowym warunkiem określającym tym razem czas ukończenia czynności  $(i, g) \in P$  ważnej dla odbiorcy. Od realizacji czynności  $i, g$  oraz wszystkich czynności ją poprzedzających zależne są niektóre czynności projektu  $P''$ . Zależą one od czasu zdarzenia  $g$ , oznaczamy go  $T_g^{P''}$ , tj. czas zdarzenia, które jest zależne od zleceniodawcy i  $P'$ .

Przytoczone związki można dla projektu  $P$  przedstawić następująco /rys. 56/:



Rys. 56

Jest oczywiste, że projektowi  $P$  może odpowiadać kilka różnych wartości  $T_f^{P'}$  i  $T_g^{P''}$ . Czasy /terminy/ te mogą odnosić się do każdego zdarzenia  $j$ , nie wyłączając zdarzenia początkowego i końcowego.

W sieci projektu  $P$  zazaczyliśmy wszystkie zdarzenia  $f$  i  $g$ , do których odnoszą się terminy  $T_f^{P'}$  i  $T_g^{P''}$ . Dla uproszczenia można założyć, że wszystkie zewnętrzne warunki

czasowe narzucone są tylko przez jednego zleceniodawcę i jednego odbiorcę. Można więc ułożyć sieci  $P'$  /zleceniodawca/ i  $P''$  /odbiorca/ wzajemnie połączone czynnościami fikcyjnymi i zdarzeniami  $f$  i  $g$ , do których odnoszą się warunki czasowe. Sieci te przedstawione są na rys. 56.

Sieć  $P'$  ma postać prostej serii czynności z zdarzeniami  $p'_0, p'_1, \dots, p'_k$ , gdzie  $p'_0$  oznacza zdarzenie pomocnicze,  $k$  liczbę zewnętrznych warunków czasowych zleceniodawcy. Każdemu zdarzeniu przyporządkowany jest jeden termin zleceniodawcy  $T_{p'_i}^{P'}$  w ten sposób, żeby zachodziło

$$T_{p'_i}^{P'} \leq T_{p'_j}^{P'} \quad /24/$$

dla  $i < j$ .

Zdarzeniu  $p'_i$  przyporządkowana jest wartość  $T_{p'_i}^{P'}$  w ten sposób, żeby nie przewyższała rozpoczęcie realizacji projektu  $P$ . Czas trwania czynności  $(p'_i, p'_j)$  jest określony wzorem

$$Y_{p'_i p'_j} = T_{p'_j}^{P'} - T_{p'_i}^{P'} \quad /25/$$

Czynności  $(p'_i, p'_j)$  nie przedstawiają żadnych konkretnych prac zleceniodawcy, określają tylko warunki czasowe zleceniodawcy tak samo jak sieć  $P'$ .

Sieć  $P''$  ma również postać prostej serii czynności ze zdarzeniami  $p''_1, p''_2, \dots, p''_m, p''_{m+1}$ , gdzie  $p''_{m+1}$  oznacza zdarzenie pomocnicze,  $m$  liczbę zewnętrznych warunków czasowych odbiorcy.

Każdemu zdarzeniu  $p''_1, \dots, p''_m$  przyporządkowany jest termin odbioru  $T_{p''_i}^{P''}$  w ten sposób, żeby zachodziło

$$T_{p_i''}^{P''} \leq T_{p_j''}^{P''} \quad /26/$$

Zdarzeniu  $p_{m+1}''$  przyporządkowana jest wartość  $T_{p_{m+1}''}^{P''}$  w ten sposób, żeby była ona większa od terminu ukończenia projektu P. Czas trwania czynności  $(p_i'', p_j'')$  jest określony wzorem

$$Y_{p_i'' p_j''} = T_{p_j''}^{P''} - T_{p_i''}^{P''} \quad /27/$$

Czynności  $(p_i'', p_j'')$  nie przedstawiają żadnych konkretnych prac odbiorcy, określają tylko warunki czasowe odbiorcy tak samo jak sieć  $P''$ .

Wszystkie sieci P,  $P'$ ,  $P''$  przedstawione na rys. 56. połączone są za pomocą czynności fikcyjnych w jedną sieć  $\Pi$ , tzw. sieć koordynacyjną. Zewnętrzne warunki czasowe uchwyczone są w ten sposób, że zdarzenia  $p_1'$ , f, dla których zachodzi

$$T_{p_1'}^{P'} = T_f^{P'} \quad /28/$$

połączone są czynnością fikcyjną  $(p_1', f)$ . Zdarzenia g,  $p_1''$ , dla których zachodzi

$$T_g^{P''} = T_{p_1''}^{P''} \quad /29/$$

połączone są czynnością fikcyjną  $(g, p_1'')$ .

Następnie musimy w sieci  $\Pi$  połączyć zdarzenie pom.  $p_0'$  ze zdarzeniem początkowym sieci P czynnością fikcyjną  $(p_0', p_1')$  oraz zdarzenie końcowe sieci P ze zdarzeniem pom.  $p_2''$  czynnością fikcyjną  $(p_6, p_2'')$ .

Zdarzeniu pom.  $p_0'$  przyporządkujemy taki termin  $T_{p_0'}^{P'}$ , żeby

$$T_{p_i'}^{P'} - T_{p_0'}^{P'} \geq t_f^{(\lambda)}; \quad f \in P \quad /30/$$

oraz zdarzeniu pom.  $p_{m+1}''$  termin  $T_{p_{m+1}''}^{P''}$ , żeby zachodziło

$$T_{p_{m+1}''}^{P''} - T_{p_m''}^{P''} \geq t_{p_n}^{(0)} - t_g^{(0)}; \quad g \in P \quad /31/$$

Teraz mamy wykres  $\Pi$  przygotowany do zastosowania metody CPM. Ilość węzłów wynosi  $n'$

$$n' = n + k + m + 2$$

Jeżeli mamy do czynienia z dużą ilością bardziej rozległych sieci, bardzo szybko wzrastają wymagania na maszynę matematyczną. Żeby móc rozwiązywać takie skomplikowane zadania, stosujemy redukcję sieci. Sieć zredukowana zawiera tylko minimalną ilość zdarzeń i czynności koniecznych do koordynacji.

Jeżeli wystąpi konieczności skrócenia czasu trwania projektu lub czynności albo musimy korzystać z zapasów czynności itp. musimy z powrotem sieć uzupełnić szczegółami sieci wyjściowych.

Redukcję sieci przeprowadzamy następująco /zob. również rys. 35/:

Mamy sieć  $P$  zawierającą zdarzenia  $p_1, \dots, p_n \in P$ . Dla każdego zdarzenia  $p_i$  ustalimy  $t_i^{(0)}$ , długość najdłuższej drogi /ścieżki/ prowadzącej od zdarzenia  $p_1$  do zdarzenia  $p_i$  oraz  $t_i^{(\lambda)}$ , tj. różnicę pomiędzy długościami najdłuższej drogi prowadzącej od  $p_1$  do  $p_n$  i najdłuższej drogi od  $p_i$  do  $p_n$ . Zachodzi:

$$t_n^{(0)} = t_n^{(\lambda)} \quad \text{oraz} \quad t_1^{(0)} = 0.$$

Do niektórych zdarzeń odnoszą się warunki czasowe.

Warunek czasowy zleceniodawcy odnosi się do zdarzeń  $f$  i odbiorcy do zdarzeń  $g$ . Zdarzeniu  $f$  przyporządkujemy  $t_f^{(\lambda)}$ , zda-

rzeniu g czas  $t_g^{(0)}$ .

Sieć zredukowana zawiera zdarzenia f, g,  $p_1$  i  $p_n$  i przybiera postać prostej serii zdarzeń oraz czynności. Ilość zdarzeń w sieci zredukowanej wynosi

$$n' = k + m + 2,$$

gdzie k jest liczbą zdarzeń f, m liczbą zdarzeń g. Czynnościom sieci zredukowanej nie odpowiadają teraz żadne rzeczywiste czynności. Oznaczają one tylko przedział czasowy pomiędzy zdarzeniami f i g.

Dla koordynacji ułożymy więc sieć projektu zleceń  $P'$ , projektu odbioru  $P''$  oraz sieć zredukowaną koordynowanego projektu /projektów tych może być więcej/. Sieć koordynacyjny przybiera teraz postać równoległe przebiegających serii czynności, które są wzajemnie połączone za pomocą czynności fikcyjnych.

Opisana metoda koordynacji czasowej więcej projektów nie daje odpowiedzi na pytania związane z równomiernym wykorzystaniem zdolności dostawców, nie usuwa szczytowego zużycia źródeł itp. Problem optymalnego podziału źródeł wśród większej ilości jednocześnie wykonywanych projektów musimy rozwiązywać za pomocą metody RAMPS.

## 2.3.2 Rozszerzenie metody CPM uwzględniając nakłady

### 2.3.2.1 Sformułowanie zagadnienia

Dotychczas mieliśmy do czynienia tylko z czasem. Chcemy jednak, żeby projekt został zrealizowany nie tylko w jak najkrótszym czasie, ale również żeby nakłady na realizację były jak najmniejsze. Chcemy więc znaleźć optymalne nakładowo-czasowe kombinacje czynności projektu P.

Uważaliśmy czas trwania czynności  $(i,j)$  -  $y_{ij}$  jako stały. W praktyce możemy jednak przeważnie zmniejszyć  $y_{ij}$ , jeżeli podniesiemy nakłady na czynność  $(i,j)$ . Czas trwania  $y_{ij}$  staje się zmienną niezależną, która może przyjmować wartości  $y_{ij}^0, y_{ij}^1, \dots, y_{ij}^n$  z przedziału domkniętego  $\langle d_{ij}, D_{ij} \rangle$ . Przedział ten musimy najpierw znaleźć.

Najpierw dla opracowanej alternatywy czasu trwania poszczególnych czynności  $(i,j)$  szukamy nakładów minimalnych. Czas trwania czynności  $(i,j)$ , przy którym nakłady są minimalne, nazwiemy czasem normalnym trwania czynności  $(i,j)$ . Oznaczamy go przez  $D_{ij}$ . Powiększenie  $D_{ij}$  jest nieekonomiczne, ponieważ prowadzi do powiększenia  $y_{ij}$  i nakładów.

Jeżeli mamy za zadanie skrócić czas realizacji całego projektu, musimy skracać  $y_{ij}$  bez względu na wysokość nakładów. Dla każdej czynności istnieje minimalny czas trwania, przy którym jakiegokolwiek podniesienie nakładów nie umożliwia skrócenie czasu trwania. Jest to tzw. najkrótszy czas trwania czynności -  $d_{ij}$ .

W praktyce zwykle możemy  $d_{ij}$  osiągnąć tylko po wykonaniu obszernych i kosztownych zabiegów. Wyjątki stanowią

czynności fikcyjne, dla których  $d_{ij} = D_{ij} = 0$ .

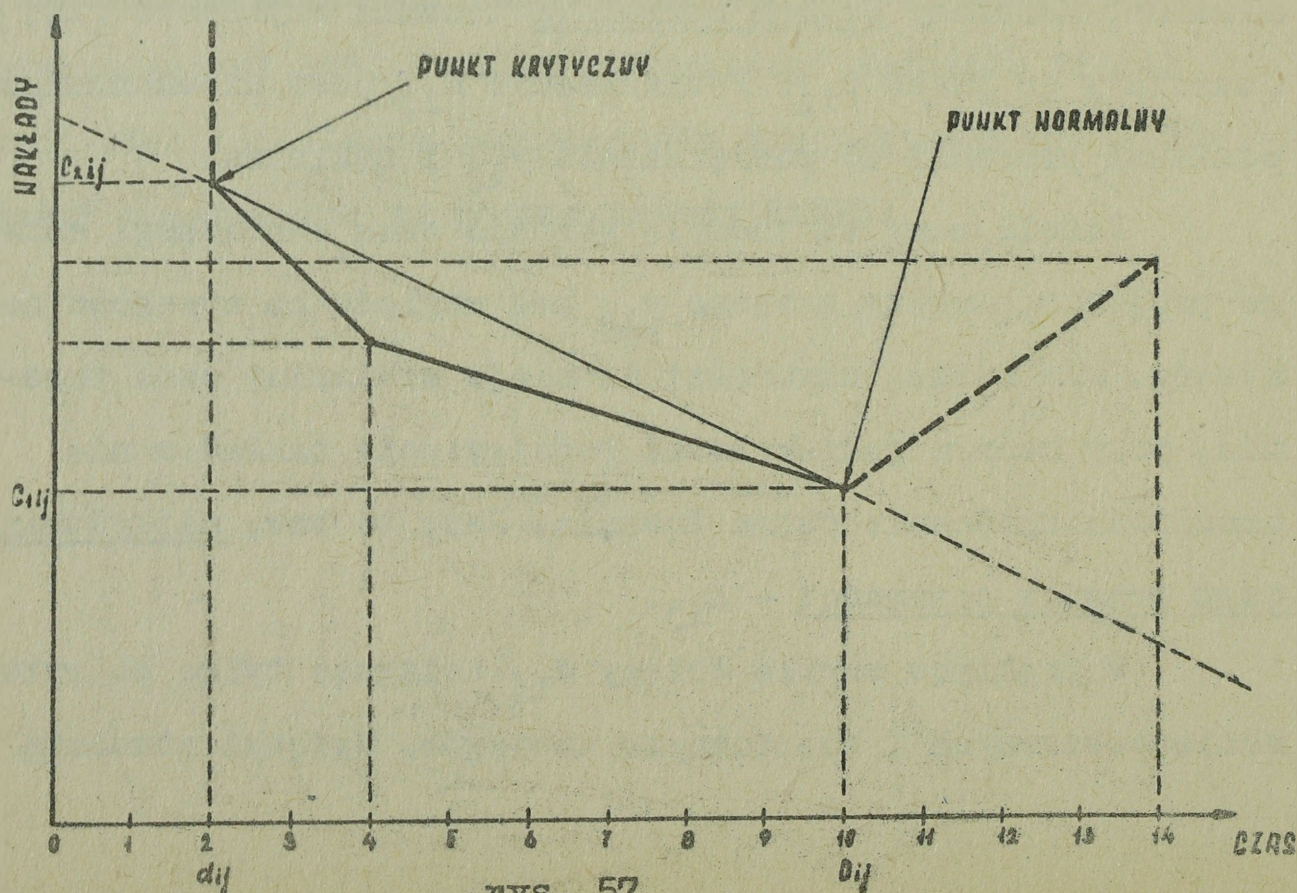
Każdej czynności  $(i,j) \in P$  przyporządkujemy przedział  $\langle d_{ij}, D_{ij} \rangle$  w ten sposób, żeby czas trwania  $y_{ij}$  spełniał warunek  $0 \leq d_{ij} \leq y_{ij} \leq D_{ij} < \infty$  /32/

Wysokość nakładów odpowiadającą różnym czasom trwania czynności  $(i,j)$  oznaczmy przez zmienną zależną  $c_{ij}$ . Przy tym dla obydwóch rozważanych czasów trwania czynności odpowiadające nakłady oznaczmy następująco:

$c_{1ij}$  = nakłady związane z realizacją przy czasie normalnym trwania  $D_{ij}$

$c_{2ij}$  = nakłady związane z realizacją przy najkrótszym czasie trwania  $d_{ij}$ .

W naszych rozważaniach bierzemy na razie pod uwagę tylko nakłady bezpośrednie /surowce, materiał podstawowy i pomocniczy itp/, dla których ich przyrost w przedziale  $\langle d_{ij}, D_{ij} \rangle$  jest w przybliżeniu funkcją liniową. Graficznie zmianę nakładów przedstawić następująco /rys.57/:



rys. 57

Funkcja przedstawiona na rys. 57 jest funkcją częściami liniową, nierosnącą i wypukłą zmiennej  $y_{ij}$  w przedziale  $\langle d_{ij}, D_{ij} \rangle$ .

Przy założeniu liniowości nakłady na czynności  $(i, j)$  wyrażone są funkcją liniową jej czasu trwania  $y_{ij}$ .

$$c_{ij} = a_{ij} \cdot y_{ij} + b_{ij} \quad /33/$$

gdzie  $a_{ij} \leq 0$ ,  $b_{ij} \geq 0$ ,  $y_{ij} \in \langle d_{ij}, D_{ij} \rangle$ .

Równanie prostej przechodzącej przez punkty  $(d_{ij}, c_{2ij})$  i  $(D_{ij}, c_{1ij})$  ma postać

$$c_{ij} = \frac{c_{1ij} - c_{2ij}}{D_{ij} - d_{ij}} \cdot y_{ij} + \frac{c_{2ij} \cdot D_{ij} - c_{1ij} \cdot d_{ij}}{D_{ij} - d_{ij}} \quad /34/$$

Dla każdego czasu  $y_{ij}$  możemy więc znaleźć nakłady  $c_{ij}$  na czynność  $(i, j)$ , jeżeli znamy punkty graniczne naszej funkcji, tj.  $(d_{ij}, c_{2ij})$ ,  $(D_{ij}, c_{1ij})$ .

Przy skracaniu czasu trwania od  $D_{ij}$  do  $d_{ij}$  możemy obliczyć wskaźnik narastania nakładów na jednostkę czasu skrócenia:

$$k_{ij} = \frac{c_{2ij} - c_{1ij}}{D_{ij} - d_{ij}} \geq 0. \quad /35/$$

Najpierw skracamy te czynności, dla których wartości  $k_{ij}$  są najmniejsze.

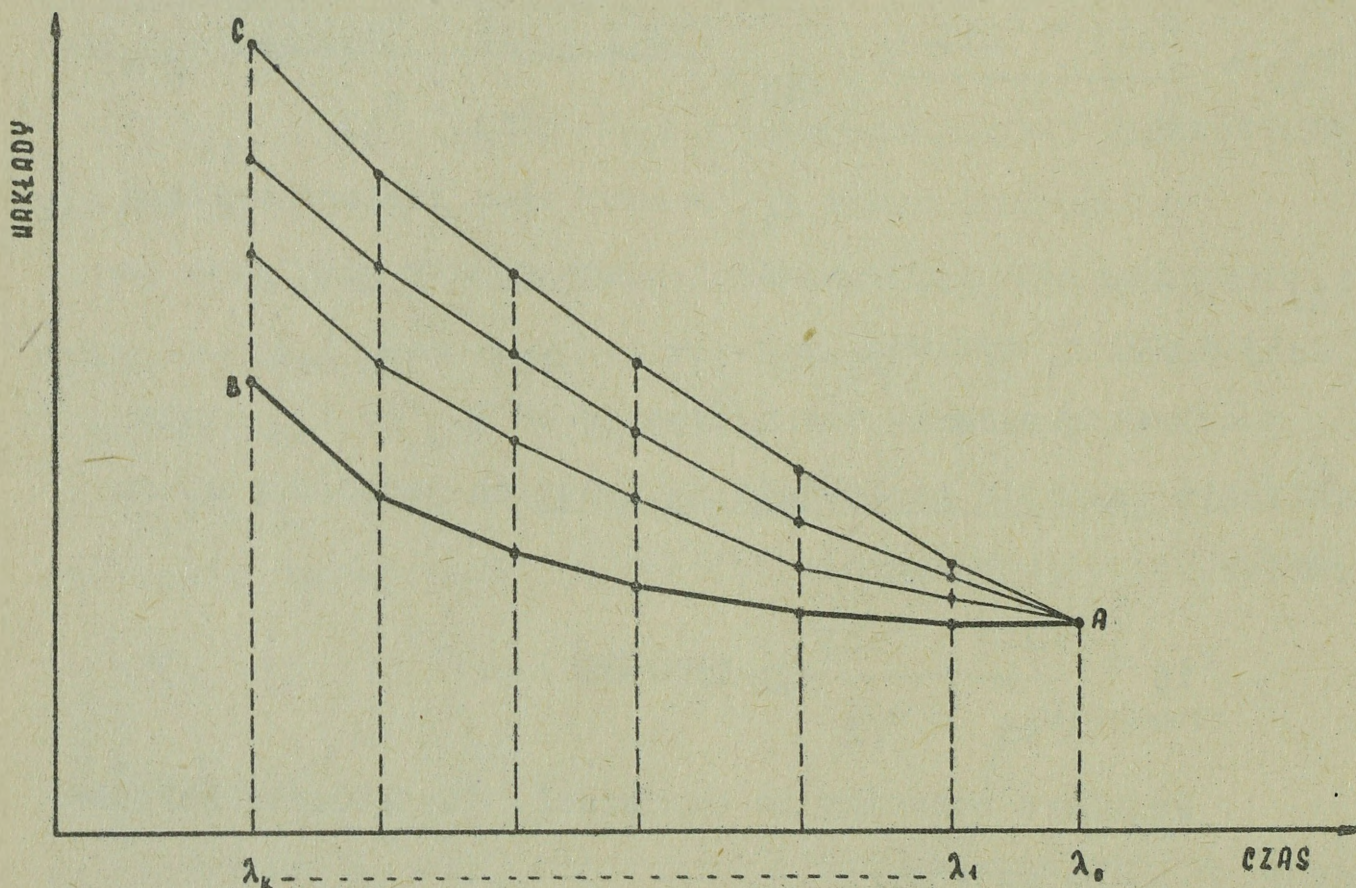
Jeżeli określimy funkcję nakładów  $c_{ij}$  dla każdej czynności projektu P, to za pomocą ich dodania otrzymamy funkcję, która charakteryzuje przebieg nakładów bezpośrednich  $C_P$  projektu w zależności od czasu trwania  $\lambda$ .

$$C_P = \sum_{(i,j)} C_{ij} = \sum_{(i,j)} a_{ij} \cdot y_{ij} + \sum b_{ij} = 1361$$

$$= \sum_{(i,j)} (a_{ij} \cdot y_{ij} + b_{ij}) \quad 1371$$

Z poprzedniego wiemy, że  $y_{ij}$  jest funkcją parametru  $\lambda$ , tj. czasu trwania projektu. Z tego wynika, że również  $C_P$  jest funkcją parametru  $\lambda$ , co oznaczamy  $C_P(\lambda)$ .

Funkcję nakładów bezpośrednich na projekt  $C_P(\lambda)$  możemy przedstawić następująco /rys. 58/:



rys. 58

Jeżeli wszystkie  $y_{ij} = D_{ij}$  oraz  $t_n^{(0)} = \lambda = t_n^{(\lambda)}$ , otrzymamy tzw. rozwiązanie normalne. Czas realizacji projektu  $\lambda$  równa się  $\lambda_0$  i odpowiada mu minimalna wielkość nakładów (A).

Skracanie czasu  $\lambda_0$  do  $\lambda_1$  oznacza, że niektóre  $y_{ij} < D_{ij}$ , musimy więc skrócić czas trwania czynności leżą-

cych na ścieżce krytycznej. Niekoniecznie musimy skracać wszystkie czynności, najpierw oczywiście skracamy te, dla których wartość  $k_{ij}$  jest najmniejsza.

Jest oczywiste, że wartości  $\lambda_1$  można osiągnąć kilkoma sposobami w zależności od tego, które czynności skracamy. Dla ustalonego  $\lambda$  różne warianty będą różnić się wysokością nakładów. Tylko w jednym przypadku wysokość nakładów osiągnie minimum. Zadaniem jest dla każdej wartości  $\lambda(\lambda_0, \lambda_1, \dots, \lambda_k)$  wyznaczyć nakłady minimalne. Chodzi się w znalezieniu krzywej BA z rys. 58. Istnieje taki czas realizacji projektu  $\lambda_0$ , że dla każdego  $\lambda \leq \lambda_0$  można spośród dużej ilości możliwych rozwiązań wybrać co najmniej jedno, dla którego funkcja  $C_p(\lambda)$  osiąga minimum.

Powyższe zagadnienie sprowadza się do zagadnienia parametrycznego programowania liniowego. Zagadnienie możemy sformułować następująco:

Mamy znaleźć minimum funkcji

$$\sum_{(i,j)} (a_{ij} \cdot y_{ij} + b_{ij}) \quad /38/$$

uwzględniając warunki ograniczające

$$y_{ij} \leq t_j^{(\lambda)} - t_j^{(0)}$$

$$0 \leq d_{ij} \leq y_{ij} \leq D_{ij} < \infty$$

$$t_0^{(0)} = 0$$

$$t_n^{(\lambda)} = \lambda$$

/39/

dla  $(i,j) \in P$ ,  $i = 0, 1, \dots, n-1$ ;  $j = 1, 2, \dots, n$ ;  $y_{ij} \geq 0$ .

Przy rozwiązywaniu tego zagadnienia uzyskamy wartości  $y_{ij}$ , dla których funkcja przyjmuje wartość najmniejszą /minimum/. W ten sposób uzyskamy jeden punkt krzywej BA z

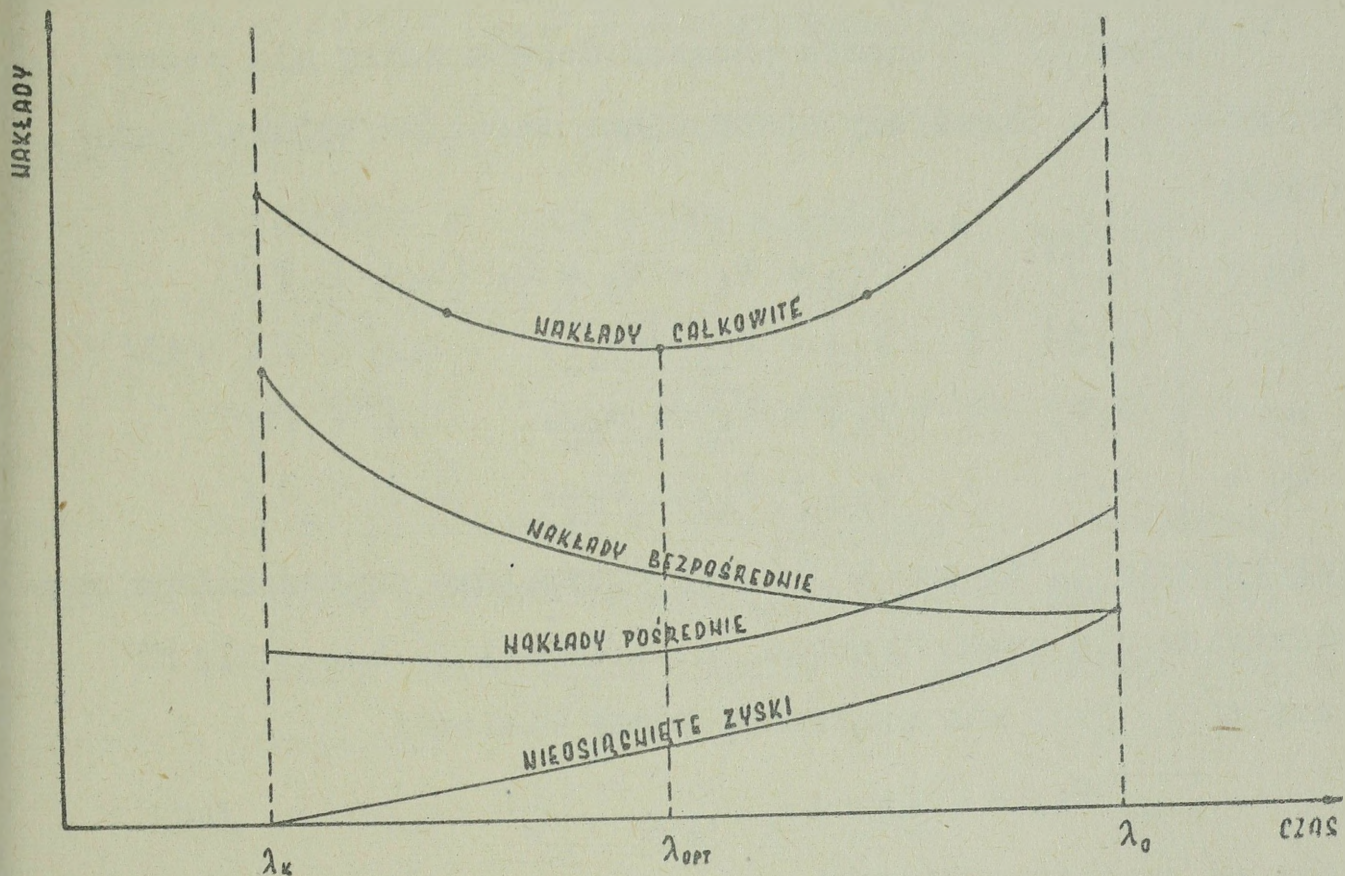
rys. 58. Postępując analogicznie dla różnych wartości  $\lambda$  uzyskamy wystarczającą ilość punktów dla skonstruowania krzywej BA.

Rozwiązanie za pomocą metody simpleksów jest bardzo skomplikowane. Algorytm rozwiązywania podaje np. James E. Kelley. Jest to tzw. Primal - Dual Algorithm. Kelley korzysta przy tym z algorytmu D.R.Fulkersona dla rozwiązania zagadnienia potoku w sieci, tzw. Ford - Fulkerson Flow Algorithm /FFF-Algorithm/. Stosowany aparat matematyczny jest jednak dość skomplikowany, algorytm jest bardzo pracochłonny i bez użycia maszyny matematycznej nie można go zastosować. Jego objaśnienie znajduje się w rozdz. 2.3.2.2.

Dotychczas rozważaliśmy tylko takie nakłady, które wzrastają przy skracaniu czasu realizacji projektu, tj. nakładami bezpośrednimi. W czasie realizacji projektu musimy jednak uwzględniać również inne nakłady, tj. pośrednie albo koszty obsługi i kierowania produkcją /koszty handlowe, płace pracowników administracyjnych, materiał pomocniczy/, które wzrastają w zależności od wzrostu  $\lambda$ . Musimy również liczyć się z tym, że im dłużej trwa realizacja projektu, tym większe są straty zysku uwarunkowane stratami zbytu przy opóźnianiu projektu, straty produkcji, straty dewizowe itp. Trzeba dobrać funkcję, która uwzględniałaby przeciwdziałający wpływ obydwóch rodzajów nakładów. Celem bywa zwykle minimalizacja globalnych nakładów /kosztów/.

Funkcję nakładów globalnych otrzymamy przez dodanie funkcji nakładów bezpośrednich oraz funkcji nakładów pośrednich. Wymagamy, żeby projekt został zrealizowany w czasie

zapewniającym najmniejszą wartość nakładów globalnych. Jest to tzw. optymalny czas trwania i jest przedstawiony na rys. 59.



rys. 59

### 2.3.2.2 Primal - Dual Algorithm Kelley'ego

Zagadnienie wyznaczenia krzywej nakładów zostało już sformułowane. Mamy więc znaleźć minimum funkcji

$$C_P = \sum_{(i,j) \in P} (a_{ij} \cdot y_{ij} + b_{ij}), \quad a_{ij} < 0 \quad /40/$$

Z powodów tylko formalnych oraz dla uproszczenia będziemy rozwiązywać zagadnienie równoważne powyższemu:

Mamy zmaksymalizować formę liniową o współczynnikach dodatnich  $a_{ij}$ :

$$U(\lambda) = \sum_{(i,j) \in P} (a_{ij} \cdot y_{ij} + b_{ij})$$

uwzględniając

$$y_{ij} + t_i - t_j \leq 0 \text{ oraz } 0 \leq d_{ij} \leq y_{ij} \leq D_{ij} < \infty, t_0 = 0, t_n = \lambda$$

/41/

Jest to zadanie parametrycznego programowania liniowego z parametrem  $\lambda$ .

Tutaj  $U(\lambda) = -C_p$  oraz  $a_{ij} > 0$ . /42/

Niech  $(y, t)$  oznacza program dopuszczalny dla czasu trwania  $\lambda$ . Określamy następujące zespoły /zbiory/ czynności:

$$\begin{aligned} Q_1 &= \left\{ (i, j) : y_{ij} + t_i - t_j = 0, (i, j) \in P \right\} \\ Q_2 &= \left\{ (i, j) : y_{ij} = D_{ij} > d_{ij}, (i, j) \in P \right\} /43/ \\ Q_3 &= \left\{ (i, j) : y_{ij} = D_{ij} = d_{ij}, (i, j) \in P \right\} \\ Q_4 &= \left\{ (i, j) : y_{ij} = d_{ij} < D_{ij}, (i, j) \in P \right\} \end{aligned}$$

Twierdzenie 1. Niech  $\{y, t\}$  jest optymalnym dopuszczalnym rozwiązaniem dla czasu trwania  $\lambda$ . Jeżeli  $\sigma_{ij}, (i, j) \in P$  oraz  $\sigma_i$  jest minimalizacją formy liniowej

$$\sum_{(i, j) \in P} a_{ij} \cdot \sigma_{ij} \quad /44/$$

oraz są spełnione warunki

$$\begin{aligned} P_{ij} = \sigma_{ij} + \sigma_i - \sigma_j &\geq 0 \text{ dla każdego } (i, j) \in Q_1 \\ \sigma_{ij} &\geq 0 \text{ dla wszystkich } (i, j) \in Q_1 \cap Q_2 \\ \sigma_{ij} &= 0 \text{ dla każdego } (i, j) \in P - (Q_1 - Q_3) /45/ \\ \sigma_{ij} &\leq 0 \text{ dla każdego } (i, j) \in Q_1 \cap Q_4, \end{aligned}$$

wtedy rozwiązanie  $\{y', t'\}$  określone wzorem

$$y'_{ij} = y_{ij} - \theta \sigma_{ij}, \quad t'_i = t_i - \theta \sigma_i \quad 0 \leq \theta \leq \theta_0 \quad /46/$$

jest optymalnym dopuszczalnym rozwiązaniem dla czasu trwania  $\lambda', \lambda' = \lambda - \theta_0$  oraz

$$\theta_0 = \min(\alpha, \beta, \gamma),$$

gdzie

$$\alpha = \begin{cases} \min_{p_{ij} < 0} (y_{ij} + t_i - t_j) p_{ij}^{-1} \\ +\infty, \text{ jeżeli } p_{ij} \geq 0 \text{ dla każdego } (i,j) \in P \end{cases} \quad /47/$$

$$\beta = \begin{cases} \min_{\sigma_{ij} < 0} (y_{ij} - D_{ij}) \sigma_{ij}^{-1} \\ +\infty, \text{ jeżeli } \sigma_{ij} \geq 0 \text{ dla wszystkich } (i,j) \in P \end{cases}$$

$$\gamma = \begin{cases} \min_{\sigma_{ij} > 0} (y_{ij} - d_{ij}) \sigma_{ij}^{-1} \\ +\infty, \text{ jeżeli } \sigma_{ij} \leq 0 \text{ dla wszystkich } (i,j) \in P. \end{cases}$$

Dowodu twierdzenia 1. nie będziemy przeprowadzać, ale przytoczymy podstawowe myśli, na których się opiera.

Rozważmy następujące zadanie parametrycznego programowania liniowego:

$$Ax = b_0 - \theta b_1, \quad x \geq 0$$

$Cx = \max$                        $\theta$  jest parametrem

Założmy, że znamy rozwiązanie zadania dla  $\theta = 0$ .

$$Ax_0 = b_0, \quad x_0 \geq 0 \quad x_0 \neq 0$$

$Cx_0 = \max.$

Ułożmy program liniowy

$$Ax_1 = b_1 \quad (x_0^i = 0) \Rightarrow (x_1^i \leq 0)$$

$Cx_1 = \min.$

Niech  $x_1$  jest rozwiązaniem powyższego programu liniowego oraz  $0 \leq \theta \leq \theta_0$ , gdzie  $\theta_0$  oznacza największą wartość, dla której spełniona jest nierówność  $x_0 - \theta_0 x_1 \geq 0$  ile takie istnieje/.

Wtedy

$$x_\theta = x_0 - \theta x_1$$

jest rozwiązaniem programu liniowego.

Bardziej szczegółowo można zapoznać się z zagadnieniami parametrycznego programowania liniowego w innych wydawnictwach /zob. spis literatury/.

Za pomocą twierdzenia 1. możemy, znając optymalne rozwiązanie dla maksymalnie dopuszczalnej wartości, znaleźć optymalne rozwiązanie dla pozostałych wartości.

Zadanie minimalizacji nazywa się ograniczonym zagadnieniem sprzężonym. Podamy następnie podstawowe własności funkcji  $U$ :

Twierdzenie 2. Dopuszczalne rozwiązanie  $\{y, t\}$  określone następująco:

$$y_{ij} = D_{ij}, \quad (i, j) \in P \quad /50/$$

$$t_0^* = 0, \quad t_j^* = \max_{(i,j) \in P} (D_{ij} + t_i^*), \quad 1 \leq j \leq n$$

jest dopuszczalnym rozwiązaniem optymalnym dla wartości

$$\lambda = t_n^* = M. \quad /51/$$

Dowód. Natychmiast wynika z faktu, że  $a_{ij} \geq 0$ .

Twierdzenie 3. Dla wszystkich  $\lambda \geq M$  jest  $U(\lambda) = \sum_{(i,j) \in P} (a_{ij} \cdot D_{ij} + b_{ij})$

Sens twierdzenia: algorytm ma sens tylko dla wartości  $\lambda \leq M$ .

Twierdzenie 4. Rozważmy wartości  $y_{ij} = d_{ij}$ , niech

$$\tilde{t}_0 = 0, \quad \tilde{t}_j = \max_{(i,j) \in P} (y_{ij} + t_i), \quad 1 \leq j \leq n, \quad m = \tilde{t}_n. \quad /52/$$

Wtedy  $U(\lambda)$  jest określone dla każdego  $\lambda \geq m$  i tylko dla tych  $\lambda$ .

Z twierdzenia 2,3,4 wynika: Funkcja nakładów  $U(\lambda)$  jest określona w przedziale  $(m, \infty)$  przy czym w przedziale  $(m, \infty)$  jest stałą.

Twierdzenie 5. Rozważmy funkcję  $\varphi(x)$  określoną

$$\varphi(x) = \max \{ c'y : Ay \leq F(x) \}$$

gdzie  $A$  oznacza macierz,  $y, c$  są wektorami kolumnowymi,

$c'$  jest wektorem transponowanym do  $c$ ,  $F(x)$  funkcją wektorową zmiennej wektorowej  $x$ . Niech funkcja  $F(x)$  ma tę własność, że dla każdej pary wektorów  $x_1 \leq x_2$  zachodzi

$$\mu F(x_1) + (1-\mu)F(x_2) \leq F(\mu x_1 + (1-\mu)x_2) \quad /53/$$

gdzie  $0 \leq \mu \leq 1$  dowolne.

Wtedy również zachodzi

$$\mu \varphi(x_1) + (1-\mu)\varphi(x_2) \leq \varphi(\mu x_1 + (1-\mu)x_2) \quad /54/$$

dla każdych  $x_1, x_2$  oraz  $0 \leq \mu \leq 1$ .

Dowód.

$$\varphi(x_1) = \max \{ c'y : Ay \leq F(x_1) \}$$
$$\varphi(x_2) = \max \{ c'y : Ay \leq F(x_2) \}$$

Wiadomo, że można znaleźć wektory  $y_1, y_2$  takie, że

$$\varphi(x_1) = c'y_1, \quad \varphi(x_2) = c'y_2$$

Stąd

$$\mu \varphi(x_1) + (1-\mu)\varphi(x_2) = c'(\mu y_1 + (1-\mu)y_2)$$

Następnie z definicji funkcji  $\varphi(x)$  oraz z (53), (54) wynika, że

$$A(\mu y_1 + (1-\mu)y_2) \leq \mu F(x_1) + (1-\mu)F(x_2) \leq F(\mu x_1 + (1-\mu)x_2)$$

Stąd natychmiast wynika, że

$$\varphi(\mu x_1 + (1-\mu)x_2) = \max \{ c'y : Ay \leq F(\mu x_1 + (1-\mu)x_2) \} \geq$$

$$\geq c'(\mu y_1 + (1-\mu)y_2) = \mu \varphi(x_1) + (1-\mu)\varphi(x_2) \text{ c.b.d.o.}$$

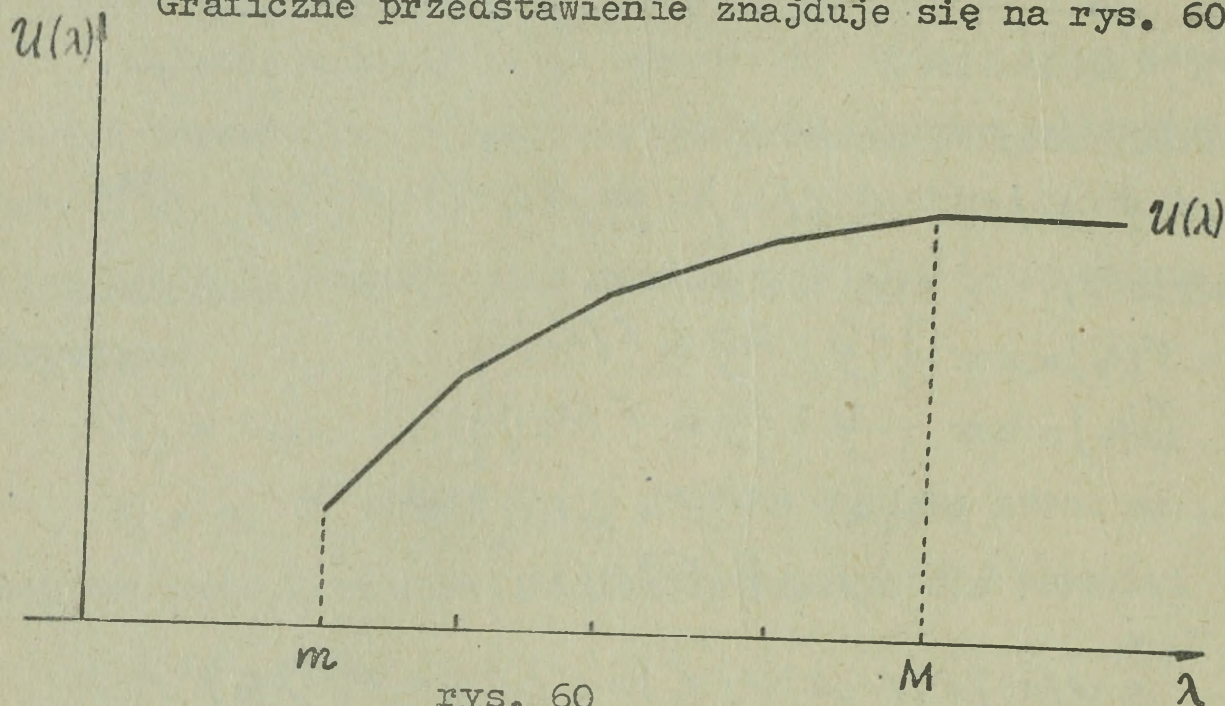
Twierdzenie 6. Funkcja  $U(\lambda)$  jest funkcją ograniczoną, ciągłą, częściami liniową oraz wklęsłą w przedziale  $(-\infty, \infty)$ .

Nie będziemy przeprowadzać dokładnego dowodu twierdzenia. Ograniczoność funkcji  $U(\lambda)$  wynika z tego, że  $d_{ij} \leq y_{ij} \leq D_{ij}$ , wypukłość z tw. 5. To, że funkcja  $U(\lambda)$  jest częściami liniowa, jest

ogólną własnością wartości optymalnych funkcji parametrycznych programów liniowych.

Z ostatniego faktu wynika również ciągłość. Z tego, że funkcja  $U(\lambda)$  jest wklęsła w przedziale  $\langle m, \infty \rangle$  oraz stała w  $\langle M, \infty \rangle$  wynika, że w przedziale  $\langle m, \infty \rangle$  jest nie-  
malejąca.

Graficzne przedstawienie znajduje się na rys. 60



rys. 60

#### Omówienie algorytmu

1. Wychodząc z twierdzenia 2 konstruujemy rozwiązanie optymalne dla  $\lambda = M$ ,  $y_{ij} = D_{ij}$  za pomocą metody CPM. Położymy  $\lambda_0 = M$ .

2. Jeżeli uzyskaliśmy rozwiązanie optymalne dla  $\lambda = \lambda_i$ , konstruujemy następnie zbiory  $Q_k$  oraz ograniczone zagadnienie sprzężone. Jeżeli ograniczone zagadnienie sprzężone posiada dopuszczalne rozwiązanie, przechodzimy do punktu 3; jeżeli nie posiada dopuszczalnego rozwiązania, przechodzimy do punktu 4.

3. Przy rozwiązywaniu ograniczonego zagadnienia sprzężonego konstruujemy na podstawie twierdzenia 1 rozwiązanie

optymalne dla wszystkich  $\lambda$ , dla których  $\lambda_{i+1} \leq \lambda \leq \lambda_i$  gdzie

$$\lambda_{i+1} = \lambda_i - \theta_0 / \theta_0 \quad \text{jest wyznaczone tw. 1/}.$$

Po ukończeniu wracamy do punktu 2.

4. Ograniczone zagadnienie sprzężone nie posiada rozwiązania dopuszczalnego. Wtedy zachodzi  $\lambda_i = m$ ; koniec algorytmu.

Po skończonej ilości kroków dojdziemy do punktu 4.

Dowodu znów nie podajemy, tylko go bliżej objaśnimy. Wektory  $(y_{ij}, t_j, \lambda)$  uzyskane za pomocą algorytmu odpowiadają wektorom ekstremalnym /wierzchołkom/ pewnego ograniczonego wypukłego wielościanu zawartego w wielowymiarowej przestrzeni euklidesowej. Wierzchołków ekstremalnych istnieje tylko skończona ilość /zob. np. VIII/.

#### Rozwiązywanie ograniczonego zagadnienia sprzężonego

Mamy rozwiązać następujące zadanie:

Znaleźć minimum

$$\sum_{(i,j) \in P} a_{ij} \cdot \sigma_{ij}$$

tak, żeby były spełnione warunki

$$p_{ij} = \sigma_{ij} + \delta_i - \delta_j \geq 0 \quad \text{dla każdego } (i,j) \in Q_1 \quad /55/$$

$$\sigma_{ij} \geq 0 \quad \text{dla } (i,j) \in Q_1 \cap Q_2 \quad \sigma_{ij} \leq 0 \quad \text{dla } (i,j) \in Q_1 \cap Q_4$$

$$\sigma_{ij} = 0 \quad \text{dla } (i,j) \in P - (Q_1 - Q_3) \quad \delta_0 = 0, \quad \delta_n = 1.$$

Za pomocą metody opisanej w rozdziale zajmującym się algebrą liniową i programowaniem liniowym sformułujemy zagadnienie sprzężone:

Każdej nierówności /55/ przyporządkujemy zmienną:

$$\mu_{ij} \geq 0 \dots (i,j) \in Q_1 \quad \beta_{ij} \dots (i,j) \in P - (Q_1 - Q_3)$$

$$\alpha_{ij} \geq 0 \dots (i,j) \in Q_1 \cap Q_2 \quad \gamma_{ij} \geq 0 \dots (i,j) \in Q_1 \cap Q_4 \quad /56/$$

zmienna  $\mu_1$  odpowiada równaniu  $\delta'_0 = 0$   $\mu_2$  równaniu  $\delta'_n = 1$ .

Odpowiadające związki liniowe są następujące:

$$\mu_{ij} + \alpha_{ij} = a_{ij} \quad (i,j) \in Q_1 \cap Q_2$$

$$\mu_{ij} + \beta_{ij} = a_{ij} \quad (i,j) \in Q_1 \cap (P - (Q_1 - Q_3)) = Q_1 \cap Q_3$$

$$\mu_{ij} + \gamma_{ij} = a_{ij} \quad (i,j) \in Q_1 \cap Q_4 \quad /57/$$

$$\mu_{ij} = a_{ij} \quad (i,j) \in Q_1 - (Q_2 \cup Q_3 \cup Q_4)$$

/i odpowiada węzłowi wewnętrznemu sieci/.

Powyższe równania możemy zapisać inaczej

$$0 \leq \mu_{ij} \leq a_{ij} \quad (i,j) \in Q_1 \cap Q_2$$

$$0 \leq \mu_{ij} \leq \infty \quad (i,j) \in Q_1 \cap Q_3 \quad /58/$$

$$a_{ij} \leq \mu_{ij} \leq \infty \quad (i,j) \in Q_1 \cap Q_4$$

$$a_{ij} \leq \mu_{ij} \leq a_{ij} \quad (i,j) \in Q_1 - (Q_2 \cup Q_3 \cup Q_4)$$

Warunek optymalizacji

$$\mu_2 = \sum_{(i,n) \in \theta_1} \mu_{jn} = \max \quad /59/$$

jest zadaniem na wyznaczenie maksymalnego potoku w sieci.

Dla  $(i,j) \in P - Q_1$  określamy  $\mu_{ij} = 0$ .

Za pomocą metody opisanej w rozdziale zajmującym się teorią grafów, wyznaczamy maksymalny potok w sieci. Sformułujemy najpierw niniejsze zagadnienie w sensie ogólnej teorii przepływów w sieciach; następnie podamy niektóre podstawowe własności przepływu w sieci.

Oznaczmy przez X zbiór węzłów /zdarzeń/  $\{x_0, \dots, x_n\}$ , gdzie  $x_0$  oznacza wejście i  $x_n$  wyjście.

Tok  $u(x,y)$  jest przyporządkowany przepływowi  $\mu_{ij}$

następująco:

$$\mu(x,y) = \mu_{ij} \text{ jeżeli } x = x_i, y = x_j, (i,j) \in P$$

$$\mu(x,y) = -\mu_{ij} \text{ jeżeli } x = x_j, y = x_i, (i,j) \in P$$

$\mu(x,y) = 0$  w pozostałych przypadkach.

Funkcję ograniczenia określamy następująco:

$$\gamma(x,y) = a_{ij} \dots x = x_i, y = x_j, (i,j) \in (Q_1 \cap Q_2) \cup [Q_1 - (Q_2 \cup Q_3 \cup Q_4)] = Q_1 - (Q_3 \cup Q_4)$$

$$\gamma(x,y) = \infty \dots x = x_i, y = x_j, (i,j) \in (Q_1 \cap Q_3) \cup (Q_1 \cap Q_4) = Q_1 \cap (Q_3 \cup Q_4)$$

$$\gamma(x,y) = -a_{ij} \dots x = x_j, y = x_i, (i,j) \in (Q_1 \cap Q_4) \cup [Q_1 - (Q_2 \cup Q_3 \cup Q_4)] = Q_1 - (Q_2 \cup Q_3)$$

$\gamma(x,y) = 0$  w pozostałych przypadkach.

Jeżeli  $u$  oznacza potok maksymalny oraz  $(R,S)$  prze-

krój minimalny sieci

$$R = \{x_i\}_{i \in I} \quad S = \{x_j\}_{j \in J}$$

$I, J$  są to odpowiadające zbiory wskaźników zdarzeń z  $R$  i  $S$ ,

wtedy zachodzi podstawowy wzór

$$u(R,S) = \gamma(R,S).$$

Na podstawie powyższego wyprowadzimy następujące

Twierdzenie 7

a/ jeżeli  $i \in I, j \in J$ , wtedy

$$\mu_{ij} = a_{ij} \text{ dla } (i,j) \in Q_1 - (Q_3 \cup Q_4)$$

b/ jeżeli  $i \in I, j \in J$ , wtedy

$$\mu_{ij} = a_{ij} \text{ dla } (i,j) \in Q_1 - (Q_2 \cup Q_3)$$

/60/

$$\mu_{ij} = 0 \text{ dla } (i,j) \in Q_1 \cap (Q_2 \cup Q_3)$$

c/ jeżeli  $i \in I, (i,j) \in Q_1 \cap (Q_3 \cup Q_4)$ , wtedy

$j \in J$ .

Dowód. Wzór  $u(R,S) = \gamma(R,S)$  możemy przedstawić w postaci  $u(x,y) = \gamma(x,y)$  dla każdego  $x \in R, y \in S$ . /61/

Ze względu na definicję wartości  $u(x,y), \gamma(x,y)$  rozróżniamy następujące przypadki:

1.  $x = x_i, y = x_j, (i,j) \in Q_1 - (Q_3 \cup Q_4)$

Wtedy  $u(x,y) = u_{ij}, \gamma(x,y) = a_{ij}$ . Stąd wynika część a/.

2.  $x = x_j, y = x_i, (i,j) \in Q_1 - (Q_2 \cup Q_3)$

Wtedy  $u(x,y) = -u_{ij}, \gamma(x,y) = -a_{ij}$ , tj.  $u_{ij} = a_{ij}$ .

3.  $x = x_j, y = x_i, (i,j) \in Q_1 \cap (Q_2 \cup Q_3)$

Wtedy  $\gamma(x,y) = 0, u(x,y) = -u_{ij}$ , więc  $u_{ij} = 0$ .

Z przypadku 2 i 3 wynika część b/ twierdzenia.

4. Żeby udowodnić c/, wystarczy pokazać, że zbiór

$$\tilde{Q} = \left\{ (i,j) \in P : i \in I, j \in J, (i,j) \in Q_1 \cap (Q_3 \cup Q_4) \right\}$$

jest pusty.

Rzeczywiście, gdyby bowiem  $(i,j) \in \tilde{Q}$  oraz  $x = x_i, y = x_j$ , wtedy nie może być spełnione równanie  $u(x,y) = \gamma(x,y)$ , ponieważ przepływ może przyjmować tylko wartości skończone.

Pokażemy teraz, jak możemy skonstruować rozwiązanie optymalne znając przepływ maksymalny.

Położmy

$$c_{ij} = 1, \text{ jeżeli } (i,j) \in Q_1 - (Q_3 \cup Q_4), i \in I, j \in J \quad /62/$$

$$c_{ij} = -1, \text{ jeżeli } (i,j) \in Q_1 - (Q_2 \cup Q_3), i \in I, j \in J$$

$c_{ij} = 0$  w pozostałych przypadkach.

$$\text{Dalej } d_i = 0 \text{ dla } i \in I, d_j = 1 \text{ dla } j \in J. \quad /63/$$

Twierdzenie 8. Wartości podane we wzorach /62/, /63/ stanowią rozwiązanie naszego zadania.

Dowód. Jeżeli  $(i, j) \in Q_1 \cap Q_2$ , to oczywiście  $(i, j) \notin Q_1 - (Q_2 \cup Q_3)$ , więc  $\sigma_{ij} \neq 1$ , tj.  $\sigma_{ij} \geq 0$ .

Jeżeli  $(i, j) \in Q_1 \cap Q_4$ , to oczywiście również  $(i, j) \notin Q_1 - (Q_3 \cup Q_4)$ , zatem  $\sigma_{ij} \neq 1$ , tj.  $\sigma_{ij} \leq 0$ .

Jeżeli  $(i, j) \in P - (Q_1 - Q_3)$ , rozróżniamy dwa przypadki:

1.  $(i, j) \in P - Q_1$ , wtedy  $(i, j) \notin Q_1 - (Q_3 \cup Q_4)$ , zatem  $\sigma_{ij} \neq 1$ ;  $(i, j) \notin Q_1 - (Q_2 \cup Q_3)$ , zatem  $\sigma_{ij} \neq -1$ .  
Stąd  $\sigma_{ij} = 0$ .

2.  $(i, j) \in Q_3$  oraz  $(i, j) \notin P - Q_1$ , tj.  $(i, j) \in Q_1$ . Wtedy  $(i, j) \in Q_1 \cap (Q_3 \cup Q_4)$  oraz  $(i, j) \in Q_1 \cap (Q_2 \cup Q_3)$ , zatem znów  $(i, j) \notin Q_1 - (Q_3 \cup Q_4)$ ,  $(i, j) \notin Q_1 - (Q_2 \cup Q_3)$ , co oznacza, że  $\sigma_{ij} = 0$ .

Dalej jest oczywiste, że  $\delta_0 = 0$ ,  $\delta_n = 1$ .

Pozostaje wykazać, że  $p_{ij} = \sigma_{ij} + \delta_i - \delta_j \geq 0$  dla  $(i, j) \in Q_1$ .

Rozpatrzmy więc następujące przypadki:

	$\sigma_{ij}$	$\delta_i$	$\delta_j$	$p_{ij}$	
$i \in I, j \in I, (i, j) \in Q_1 - (Q_3 \cup Q_4)$	1	0	1	0	
$i \in I, j \in J, (i, j) \in Q_1 \cap (Q_3 \cup Q_4)$	nie może nastąpić /zob. tw. 7/				
$i \in I, j \in J, (i, j) \in Q_1 - (Q_2 \cup Q_3)$	-1	1	0	0	/64/
$i \in J, j \in I, (i, j) \in Q_1 \cap (Q_2 \cup Q_3)$	0	1	0	1	
$i \in I, j \in I, (i, j) \in Q_1$	0	0	0	0	
$i \in J, j \in J, (i, j) \in Q_1$	0	1	1	0	

To kończy dowód. Obliczymy jeszcze wartość  $p_{ij}$  w pozostałych przypadkach:

$$\begin{aligned} ((i,j) \in I) \text{ lub } ((i,j) \in J), & \text{ wtedy } \sigma_{ij} = 0, \sigma_i = \sigma_j, p_{ij} = 0. \\ (i,j) \in P - Q_1, \quad i \in I, \quad j \in J, & \text{ wtedy } \sigma_{ij} = 0, \sigma_i = 0, \sigma_j = 0, p_{ij} = -1 \\ (i,j) \in P - Q_1, \quad j \in I, \quad i \in J, & \text{ wtedy } \sigma_{ij} = 0, \sigma_i = 1, \sigma_j = 0, p_{ij} = 1. \end{aligned}$$

W sumie więc otrzymaliśmy

$$\begin{aligned} p_{ij} &= 1, \text{ jeżeli } j \in I, i \in J \quad (i,j) \in (P - Q_1) \cup Q_2 \cup Q_3 \\ p_{ij} &= -1, \text{ jeżeli } i \in I, j \in J, (i,j) \in P - Q_1 & /65/ \\ p_{ij} &= 0 \text{ w pozostałych przypadkach.} \end{aligned}$$

W każdym kroku algorytmu omówionego na str. 116 i 117 rozwiązujemy w istocie rzeczy ograniczone zagadnienie sprzężone za pomocą maksymalizacji przepływu w pewnej sieci. W rozdziale zajmującym się teorią grafów został omówiony algorytm wyznaczania potoku maksymalnego w sieci przy założeniu, że istnieje potok dopuszczalny.

Rozwiązywanie zagadnienia podzielimy na dwie części. Najpierw pokażemy, że w przypadku  $\lambda = M$  potok dopuszczalny można skonstruować w sposób trywialny. Rzeczywiście dla

$$\lambda = M \text{ rozwiązanie optymalne określają wartości } y_{ij} = D_{ij}.$$

Stąd wynika, że

$$Q_1 - (Q_2 \cup Q_3 \cup Q_4) = Q_1 - P = \emptyset, \quad Q_4 = \emptyset$$

/  $\emptyset$  oznacza zbiór pusty /.

Ograniczenia

$$0 \leq \mu_{ij} \leq a_{ij} \quad \text{dla } (i,j) \in Q_1 \cap Q_2$$

$$0 \leq \mu_{ij} < \infty \quad \text{dla } (i,j) \in Q_1 \cap Q_3$$

$$0 \leq \mu_{ij} \leq 0 \quad \text{dla } (i,j) \in P - Q_1.$$

Stąd wynika, że potok  $\mu_{ij} = 0$  jest dopuszczalny,  $(i,j) \in P$ .

Następne pytanie: Załóżmy, że znaleźliśmy rozwiązanie optymalne dla pewnego  $\lambda = \lambda_k$ . Konstruujemy ograniczone zagadnienie sprzężone oraz odpowiadające zadanie dla potoku. Jakim sposobem można znaleźć potok dopuszczalny dla rozważanej sieci? Odpowiedź podaje następujące

Twierdzenie 9. Jeżeli  $u_{ij}$  jest potokiem maksymalnym w sieci odp. ograniczonemu zagadnieniu sprzężonemu dla  $\lambda = \lambda_k$ , wtedy  $u_{ij}$  jest potokiem dopuszczalnym w sieci odpowiadającej ograniczonemu zagadnieniu sprzężonemu skonstruowanemu dla wartości  $\lambda = \lambda_{k+i}$ .

Dowód pozostawiamy czytelnikowi.

Pozostaje jeszcze jedno pytanie: W punkcie 4 algorytmu może się zdarzyć, że ogr. zagadnienie sprzężone nie posiada rozwiązania dopuszczalnego. Następujące kryterium jest jednym z wyników ogólnej teorii programowania liniowego.

Twierdzenie 10. Jeżeli istnieje potok maksymalny w sieci przyporządkowanej ograniczonemu zagadnieniu sprzężonemu, wtedy również istnieje rozwiązanie ograniczonego zagadnienia sprzężonego /punkt 3/. W odwrotnym przypadku ogr. zagadnienie sprzężone nie posiada rozwiązania dopuszczalnego /punkt 4/

### 2.3.3. Przykłady obliczeń nakładów

Obliczenie optymalnego czasu realizacji można przeprowadzić dwoma sposobami: za pomocą metody Webera albo algorytmu Kelley'ego. Dla każdej czynności musimy znać następujące dane:

- czas normalny trwania czynności oraz odpowiadające mu nakłady;
- najkrótszy czas trwania oraz odpowiadające nakłady dodatkowe;
- "nieosiągnięte zyski", tj. straty spowodowane przez późniejsze wprowadzenie inwestycji w ruch obliczone na jednostkę czasu.

### 2.3.3.1 Metoda Webera

Przy tej metodzie korzystamy z sieci czasowo określonej oraz z pomocniczej tablicy obliczeń.

Dla każdej czynności obliczymy nakłady jednostkowe

$$k_{ij} = \frac{c_{2ij} - c_{1ij}}{D_{ij} - d_{ij}}$$

gdzie  $c_{1ij}$  = nakłady związane z realizacją przy czasie normalnym trwania czynności

$c_{2ij}$  = nakłady związane z realizacją przy najkrótszym czasie trwania czynności

$D_{ij}$  = czas normalny trwania czynności

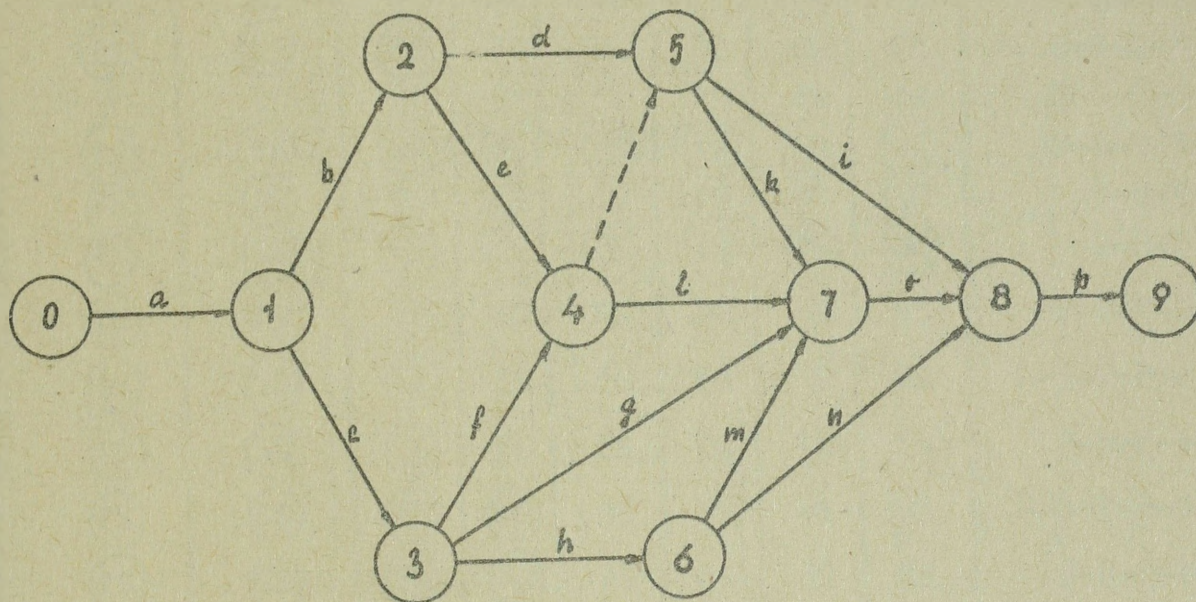
$d_{ij}$  = najkrótszy czas trwania czynności.

Bierzemy pod uwagę wszystkie możliwe "drogi" w sieci, które łączą zdarzenie początkowe z zdarzeniem końcowym. Metoda polega na tym, że spośród wszystkich możliwych dróg wybieramy najdłuższą - ścieżka krytyczna - i dla niej skracamy te czynności, dla których nakłady jednostkowe są najmniejsze. Skracamy o tyle jednostek czasu, ile wynosi różnica pomiędzy drogą krytyczną i drogą, której długość najwięcej zbliża się do długości drogi krytycznej. /Zachodzi: z ilością skró-

ceń rośnie ilość ścieżek krytycznych/.

Metoda jest bliżej objaśniona na przykładzie /rys.

61/:



rys. 61

Rozwiązanie w tablicach 1 i 2.

Oznaczenie czynności		Nakłady		Czas trwania		$k_{ij}$	
		norm.	dodat.	norm.	skrót.		
a	0-1	1,300	1,500	5	3	0,200/2	0,100
b	1-2	0,400	0,420	2	1	0,020/1	0,020
c	1-3	0,200	0,400	4	3	0,200/1	0,200
h	3-6	0,700	0,700	3	3	nieokreślone	
g	3-7	1,100	1,700	8	6	0,600/2	0,300
f	3-4	1,600	1,900	6	4	0,300/2	0,150
e	2-4	0,600	0,900	7	4	0,300/3	0,100
d	2-5	0,600	0,700	3	2	0,100/1	0,100
l	4-7	0,800	1,000	5	3	0,200/2	0,100
m	6-7	2,300	2,300	5	5	nieokreślone	
k	5-7	0,200	0,600	4	2	0,400/2	0,200
n	6-8	1,200	1,400	14	10	0,200/4	0,050
i	5-8	1,700	2,100	9	7	0,400/2	0,200
o	7-8	0,100	0,120	6	5	0,020/1	0,020
p	8-9	0,100	0,300	4	2	0,200/2	0,100
$\Sigma$		12,900	16,040	-	-		

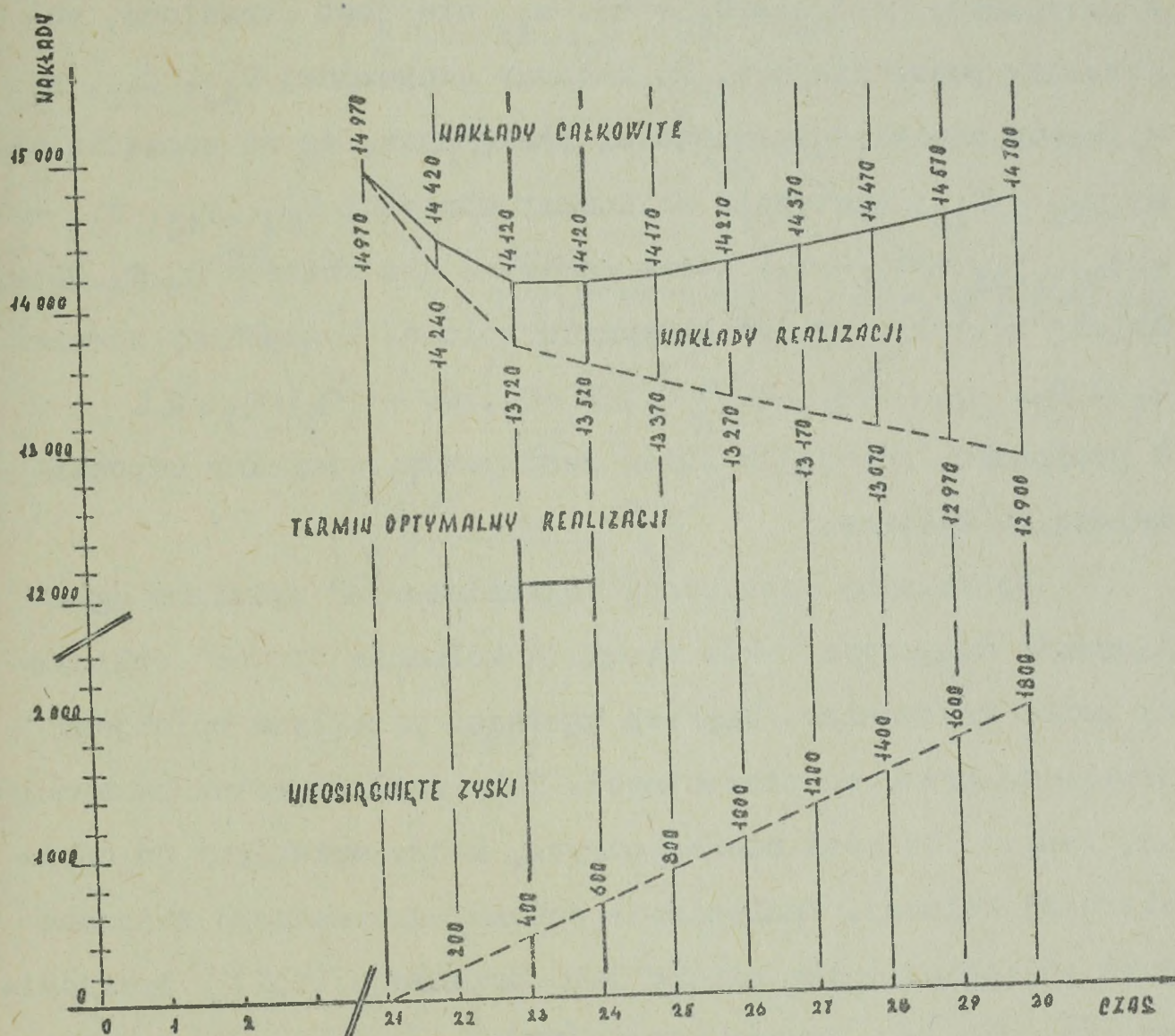
Kolejność skracania czynności	0	1 6-8 7-8	2 0-1	3 8-9	4 4-7 6-8	5 1-3	6 1-2-5-8 3-7-4	7 4-7-6-8 5-7-5-8
0-1-2-5-8-9	23	23	21	19	19	19	18	17
0-1-2-4-7-8-9	29	28	26	24	23	(23)	(22)	(21)
0-1-2-5-7-8-9	24	23	21	19	19	19	18	17
0-1-3-4-7-8-9	(30)	(29)	(27)	(25)	(24)	(23)	(22)	(21)
0-1-3-7-8-9	27	26	24	23	23	22	(22)	(21)
0-1-3-6-8-9	(30)	(29)	(27)	(25)	(24)	(23)	(22)	(21)
0-1-3-6-7-8-9	27	26	24	22	22	21	21	(21)
0-1-2-4-5-7-8-9	28	27	25	23	23	(23)	(22)	(21)
0-1-2-4-5-8-9	27	27	25	23	23	(23)	(22)	(21)
0-1-3-4-5-7-8-9	29	28	26	24	(24)	(23)	(22)	(21)
0-1-3-4-5-8-9	28	28	26	24	(24)	(23)	(22)	(21)

Tabela 2.

Obliczanie nakładów:

$$\begin{aligned} \lambda_{30} &= 12,900 \\ \lambda_{29} &= 12,900 + 1.0,050 + 1.0,020 = 12,970 (\Delta_1 = 0,070) \\ \lambda_{27} &= 12,970 + 2.0,100 = 13,170 (\Delta_2 = 0,200; \quad 0,270) \\ \lambda_{25} &= 13,170 + 2.0,100 = 13,370 (\Delta_3 = 0,200; \quad 0,470) \\ \lambda_{24} &= 13,370 + 1.0,100 + 1.0,050 = 13,520 (\Delta_4 = 0,150; \quad 0,620) \\ \lambda_{23} &= 13,520 + 1.0,200 = 13,720 (\Delta_5 = 0,200; \quad 0,820) \\ \lambda_{22} &= 13,720 + 1.0,020 + 1.0,150 + 1.0,300 + 1.0,050 = 14,240 \\ &\quad (\Delta_6 = 0,520; \quad 1,340) \\ \lambda_{21} &= 14,240 + 1.0,100 + 1.0,050 + 1.0,200 + 1.0,200 = 14,970 \\ &\quad (\Delta_7 = 0,550; \quad 1,890) \end{aligned}$$

Optymalny termin realizacji uzyskamy za pomocą dodania krzywych nakładów na realizację i nieosiągniętych zysków. Graficzne przedstawienie zob. na rys. 62.



rys. 62

### 2.3.3.2 Algorytm Kelley'ego

Dla ilustracji tej metody podamy przykład, który w stosunku do poprzedniego jest trochę zmieniony /brak czynności fikcyjnej/. Czytelnik może porównać obydwie krzywe nakładów.

Schemat obliczania:

Tablica 1: poszczególne wiersze odpowiadają łocom sieci /czynnościom/. Do pierwszej kolumny wpisujemy wskaźniki  $a_{ij}$ ; w przypadku, że  $d_{ij} = D_{ij}$ , tj.  $a_{ij}$  nie jest określone, zostawiamy puste miejsce. Do kolumny oznaczonej  $D_{ij}$ ,  $d_{ij}$ ,  $y_{ij}$  wpisujemy odpowiednie wartości pamiętając, że na początku mamy  $y_{ij} = D_{ij}$ . Następnie obliczamy wartości  $D_{ij} - y_{ij}$ ,  $y_{ij} - d_{ij}$ ,  $y_{ij} + t_i - t_j$ , które są ważne dla zbiorów  $Q_1, Q_2, Q_3, Q_4$ . Zbiory te wpisujemy do następnych kolumn. Wyznamy również  $Q_1 \cap Q_2$ ,  $Q_1 \cap Q_3$ ,  $Q_1 \cap Q_4$ ,  $P - Q_1$ ,  $Q_1 - (Q_2 \cup Q_3 \cup Q_4)$ . W przypadku, gdy jakiś zbiór jest pusty, opuścimy odpowiadającą mu kolumnę.

Do kolumny oznaczonej "ograniczenia" wpisujemy ograniczenia dotyczące łuków sieci. W kolumnie "potok" obliczamy potok maksymalny. Większe wartości przepływu wpisujemy zawsze na prawo od pierwotnych. Żeby znaleźć potok maksymalny, szukamy ścieżek nienasyconych, które wpisujemy do odpowiedniej kolumny. Znalezienie potoku maksymalnego związane jest ze znalezieniem minimalnego przekroju  $(I, J)$ . Wyznamy  $\sigma_{ij}$  i  $p_{ij}$  /wzory (62) i (65) /.

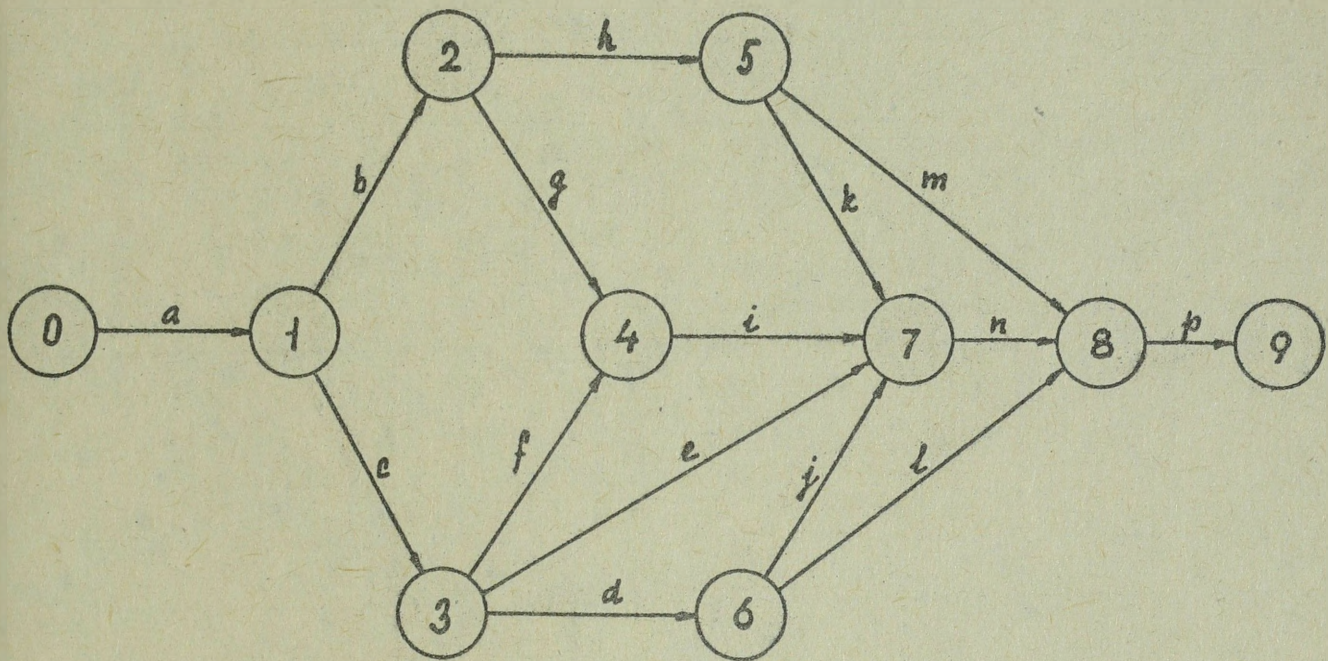
Tablica 2. Do kolumn nieparzystych wpisujemy  $t_i$ , do parzystych  $\delta_i$  ( $\delta_i = 0, i \in I; \delta_j = 1, j \in J$ ). W pierwszej kolumnie obliczamy  $t_i$  za pomocą metody ścieżki krytycznej /Tablica 2/.

Obliczamy wartości  $\alpha, \beta, \gamma$  z wzorów 47. Do następnych kolumn tablicy 1 wpisujemy nowe wartości  $y'_{ij}$ ,  $D_{ij} - y'_{ij}$ ,  $y'_{ij} + t'_j - t'_i$  obliczone za pomocą wzorów (46) i (47).

Nowe wartości w tablicy 2 obliczamy za pomocą wzoru

$$t_i = t_i - \sigma_i \cdot \delta_i$$

/zob. rys. 63/.



rys. 63

Tablica 1

czł. NOSC	$a_{ij}$	$D_{ij}$	$d_{ij}$	$y_{ij}$	$D_{ij} - y_{ij}$	$y_{ij} - d_{ij}$	$y_{ij} + t_i - t_j$	$Q_1$	$Q_2$	$Q_3$	$Q_1 \cap Q_2$	$Q_1 \cap Q_3$	$Q_2 \cap Q_3$	$P - Q_1$	ograniczenie	potok	ścieżka nie-nasycona	$Z_{ij}$	$P_{ij}$
a	0,100	5	3	5	0	2	0	•	•	•	•	•	•	•	0; 0,100	0,050; 0,070	•	0	0
b	0,020	2	1	2	0	1	0	•	•	•	•	•	•	•	0; 0,020			0	0
c	0,200	4	3	4	0	1	0	•	•	•	•	•	•	•	0; 0,200	0,050; 0,070	•	0	0
d		3	3	3	0	0	0	•	•	•	•	•	•	•	0; +∞	0,050	•	0	0
e	0,300	8	6	8	0	2	-3	•	•	•	•	•	•	•	0; 0			0	0
f	0,150	6	4	6	0	2	0	•	•	•	•	•	•	•	0; 0,150	0,020	•	0	0
g	0,100	7	4	7	0	3	-1	•	•	•	•	•	•	•	0; 0			0	0
h	0,100	3	2	3	0	1	0	•	•	•	•	•	•	•	0; 0,100			0	0
i	0,100	5	3	5	0	2	0	•	•	•	•	•	•	•	0; 0,100	0,020		0	0
j		5	5	5	0	0	+3	•	•	•	•	•	•	•	0; 0			0	0
k	0,200	4	2	4	0	2	-6	•	•	•	•	•	•	•	0; 0			0	0
l	0,050	14	10	14	0	4	0	•	•	•	•	•	•	•	0; 0,050	0,050	•	1	0
m	0,200	9	7	9	0	2	-7	•	•	•	•	•	•	•	0; 0			0	1
n	0,020	6	5	6	0	1	0	•	•	•	•	•	•	•	0; 0,020	0,020	•	1	0
p	0,100	4	2	4	0	0	0	•	•	•	•	•	•	•	0; 0,100	0,050; 0,070	•	0	0

1. krok  $Q_0 = 1$

Tablica 1

CZYNNOSCI	$y_{ij}$	$D_{ij} - y_{ij}$	$y_{ij} - d_{ij}$	$y_{ij} + t_i - t_j$	$Q_1$	$Q_2$	$Q_3$	$Q_4$	$Q_1, Q_2$	$Q_1, Q_3$	$Q_1, Q_4$	$Q_1 - (Q_2, Q_3, Q_4)$	$P - Q_1$	ograniczenia	potok	szereżna- nienska	$G_{ij}$	$P_{ij}$
a	5	0	2	0	•	•			•					0; 0, 100	0, 070; 0, 100		1	0
b	2	0	1	0	•	•			•					0; 0, 020			0	0
c	4	0	1	0	•	•			•					0; 0, 200	0, 070; 0, 100		0	0
d	3	0	0	0	•	•	•			•				0; + ∞	0, 050		0	0
e	8	0	2	-3	•	•							•	0; 0			0	0
f	6	0	2	0	•	•			•					0; 0, 150	0, 020; 0, 050		0	0
g	7	0	3	-1	•	•							•	0; 0			0	0
h	3	0	1	0	•	•			•					0; 0, 100			0	0
i	5	0	2	0	•	•			•					0; 0, 100	0, 020; 0, 050		0	0
j	5	0	0	-3			•						•	0; 0			0	0
k	4	0	2	-6			•						•	0; 0			0	0
l	13	1	3	0	•	•						•		0; 0, 50; 0, 050	0, 050		0	0
m	9	0	2	-6			•						•	0; 0			0	0
n	5	1	0	0	•	•				•				0, 020	0, 020; 0, 050		0	0
p	4	0	2	0	•	•			•					0; 0, 100	0, 070; 0, 100		0	0

2. krok  $\theta_0 = 2$

Tablica 1

ЦЗМН НОСО	$y_{ij}$	$D_{ij} - y_{ij}$	$y_{ij} - d_{ij}$	$y_{ij} + t_i - t_j$	$Q_1$	$Q_2$	$Q_3$	$Q_4$	$Q_1 N Q_2$	$Q_1 N Q_3$	$Q_1 - (Q_2 + Q_3 + Q_4)$	$Q_1 N Q_4$	$P - Q_1$	ограничение	поток	$\sigma_{ij}$	$P_{ij}$
a	3	2	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	$0,100; +\infty$	0,100	0	0
b	2	0	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	$0; 0,020$	0,100	0	0
c	4	0	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	$0; 0,200$	0,100	0	0
d	3	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	$0; +\infty$	0,050	0	0
e	8	0	2	-3	0	0	0	0	0	0	0	0	0	$0; 0$	0,050	0	0
f	6	0	2	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	$0; 0,150$	0,050	0	0
g	7	0	3	-1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	$0; 0$	0,050	0	0
h	3	0	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	$0; 0,100$	0,050	0	0
i	5	0	2	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	$0; 0,100$	0,050	0	0
j	5	0	0	3	0	0	0	0	0	0	0	0	0	$0; 0$	0,050	0	0
k	4	0	2	6	0	0	0	0	0	0	0	0	0	$0; 0$	0,050	0	0
l	13	1	3	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	$0; 0,050; 0,050$	0,050	0	0
m	9	0	2	6	0	0	0	0	0	0	0	0	0	$0; 0$	0,050	0	0
n	5	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	$0,020; +\infty$	0,050	0	0
p	4	0	2	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	$0; 0,100$	0,100	1	0

3. krok  $\theta_0 = 2$

Tablica 1

CZYLNOSC	$y_{ij}$	$D_{ij} - y_{ij}$	$y_{ij} - d_{ij}$	$y_{ij} + t_i - t_j$	$Q_1$	$Q_2$	$Q_3$	$Q_4$	$Q_1, N, Q_2$	$Q_1, N, Q_3$	$Q_1, N, Q_4$	$Q_1 - (Q_2 \cup Q_3 \cup Q_4)$	$P - Q_1$	ograniczenia	scieżka intensywność	potok	$G_{ij}$	$R_{ij}$
a	3	2	0	0	•	•	•	•	•	•	•	•	•	0, 100; +∞	•	0, 100; 0, 150	0	0
b	2	0	1	0	•	•	•	•	•	•	•	•	•	0; 0, 020	•		0	0
c	4	0	1	0	•	•	•	•	•	•	•	•	•	0; 0, 200	•	0, 100; 0, 150	0	0
d	3	0	0	0	•	•	•	•	•	•	•	•	•	0; +∞	•	0, 050	0	0
e	8	0	2	-3	•	•	•	•	•	•	•	•	•	0; 0	•		0	-1
f	6	0	2	0	•	•	•	•	•	•	•	•	•	0; 0, 150	•	0, 050; 0, 100	0	0
g	7	0	3	1	•	•	•	•	•	•	•	•	•	0; 0	•		0	0
h	3	0	1	0	•	•	•	•	•	•	•	•	•	0; 0, 100	•		0	0
i	5	0	2	0	•	•	•	•	•	•	•	•	•	0; 0, 100	•	0, 050; 0, 100	1	0
j	5	0	0	-3	•	•	•	•	•	•	•	•	•	0; 0	•		0	1
k	4	0	2	6	•	•	•	•	•	•	•	•	•	0; 0	•		0	1
l	13	1	3	0	•	•	•	•	•	•	•	•	•	0, 050; 0, 050	•	0, 050	1	0
m	9	0	2	6	•	•	•	•	•	•	•	•	•	0; 0	•		0	-1
n	5	1	0	0	•	•	•	•	•	•	•	•	•	0, 020; +∞	•	0, 050; 0, 100	0	0
p	2	2	0	0	•	•	•	•	•	•	•	•	•	0, 100; +∞	•	0, 100; 0, 150	0	0

4. krok  $Q_0 = 2$

Tablica 1

CZYN NOSZ	$y_{ij}$	$D_{ij} - y_{ij}$	$y_{ij} - d_{ij}$	$y_{ij} + z_{ij} - t_{ij}$	$Q_1$	$Q_2$	$Q_3$	$Q_4$	$Q_1 Q_2$	$Q_1 Q_3$	$Q_1 Q_4$	$Q_1 - (Q_2 Q_3 Q_4)$	$P - Q_1$	ograniczenia	potok	szkieletowa miensy- cona	$G_{ij}$	$P_{ij}$
a	3	2	0	0	•	•	•	•	•	•	•	•	•	0,100; +∞	0,150; 0,200	•	0	0
b	2	0	1	0	•	•	•	•	•	•	•	•	•	0; 0,020	0,150; 0,200	•	0	0
c	4	0	1	0	•	•	•	•	•	•	•	•	•	0; 0,200	0,150; 0,200	•	1	0
d	3	0	0	0	•	•	•	•	•	•	•	•	•	0; +∞	0,050	•	0	0
e	8	0	2	-1	•	•	•	•	•	•	•	•	•	0; 0; 0		•	0	0
f	6	0	2	0	•	•	•	•	•	•	•	•	•	0; 0,150	0,100; 0,150	•	0	0
g	7	0	3	-1	•	•	•	•	•	•	•	•	•	0; 0		•	0	-1
h	3	0	1	0	•	•	•	•	•	•	•	•	•	0; 0,100		•	0	0
i	3	2	0	0	•	•	•	•	•	•	•	•	•	0,100	0,100; 0,150	•	0	0
j	5	0	0	-1	•	•	•	•	•	•	•	•	•	0; 0		•	0	0
k	4	0	2	-4	•	•	•	•	•	•	•	•	•	0; 0		•	0	-1
l	11	3	1	0	•	•	•	•	•	•	•	•	•	0,050; 0,050	0,050	•	0	0
m	9	0	2	-4	•	•	•	•	•	•	•	•	•	0; 0		•	0	-1
n	5	1	0	0	•	•	•	•	•	•	•	•	•	0,020; +∞	0,100; 0,150	•	0	0
p	2	2	0	0	•	•	•	•	•	•	•	•	•	0,100; +∞	0,150; 0,200	•	0	0

5. krok  $Q_0 = 1$

Tablica 1

133

CZYNNOŚĆ	$y_{ij}$	$d_{ij} - y_{ij}$	$y_{ij} + z_i - t_j$	$a_1$	$a_2$	$a_3$	$a_4$	$a_1 a_2 a_3$	$a_1 a_2 a_3 a_4$	$a_1 - (a_1 a_2 a_3 a_4)$	$P - a_1$	ograniczenia	potok	ścieżka nienasycona	$G_{ij}$	$P_{ij}$
a	3	2	0	•	•	•	•	•	•	•	•	0,100; +∞	0,200; 0,200	•	0	0
b	2	0	1	•	•	•	•	•	•	•	•	0; 0,020	0,020	•	1	0
c	3	1	0	•	•	•	•	•	•	•	•	0,200	0,200	•	0	0
d	3	0	0	•	•	•	•	•	•	•	•	0; +∞	0,050	•	0	0
e	8	0	2	•	•	•	•	•	•	•	•	0; 0	0,150	•	0	-1
f	6	0	2	•	•	•	•	•	•	•	•	0; 0,150	0,150	•	1	0
g	7	0	3	•	•	•	•	•	•	•	•	0; 0,100	0,020	•	0	0
h	0	0	1	•	•	•	•	•	•	•	•	0; 0,100	0,150; 0,170	•	0	0
i	3	2	0	•	•	•	•	•	•	•	•	0,100	0,150; 0,170	•	0	0
j	5	0	0	•	•	•	•	•	•	•	•	0; 0	0,150; 0,170	•	0	-1
k	4	0	2	•	•	•	•	•	•	•	•	0; 0	0,050; 0,050	•	0	0
l	11	3	1	•	•	•	•	•	•	•	•	0,050; 0,050	0,050	•	1	0
m	9	0	2	•	•	•	•	•	•	•	•	0; 0	0,150; 0,170	•	0	0
n	5	1	0	•	•	•	•	•	•	•	•	0,020	0,150; 0,170	•	0	0
p	2	2	0	•	•	•	•	•	•	•	•	0,100	0,200; 0,200	•	0	0

6. krok  $\theta_0 = 1$

Tablica 1

CZYNNOSĆ	$y_{ij}$	$D_{ij} - y_{ij}$	$y_{ij} - d_{ij}$	$y_{ij} + t_i - t_j$	$Q_1$	$Q_2$	$Q_3$	$Q_4$	$Q_1 Q_2$	$Q_1 Q_3$	$Q_1 Q_4$	$Q_1 - (Q_2 Q_3 Q_4)$	$P - Q_1$	ograniczenia	ścieżka nienasycona
a	3	2	0	0	•			•						0, 100; +∞	•
b	1	1	0	0	•			•						0, 020; +∞	
c	3	1	0	0	•			•						0, 200; +∞	•
d	3	0	0	0	•			•						0; +∞	•
e	8	0	2	0	•	•			•					0; 0, 300	
f	5	1	1	0	•							•		0, 150; 0, 150	
g	7	0	3	0	•				•					0; 0, 100	
h	3	0	1	0	•	•			•					0; 0, 100	
i	3	2	0	0	•			•			•			0, 100; +∞	
j	5	0	0	0	•			•			•			0; +∞	
k	4	0	2	-3					•				•	0; 0	
l	10	4	0	0	•			•						0, 050; +∞	•
m	9	0	2	-3					•				•	0; 0	
n	5	1	0	0	•			•						0, 020; +∞	
p	2	2	0	0	•			•						0, 100; +∞	•

7. krok

$h = +\infty$  z twierdzenia 10 wynika, że nie istnieje rozwiązanie ograniczonego zagadnienia sprzężonego; koniec algorytmu. Podstawiając  $q_{ij} = d_{ij}$  otrzymamy / za pomocą obliczenia czasowego sieci / :

Tablica 2

krok	1	2	3	4	5	6	7	wartości $t_i$ obliczone met. CPM dla $y_{ij} = d_{ij}$
zdarzenie	$t_i$	$t_i$	$t_i$	$t_i$	$t_i$	$t_i$	$t_i$	
0	0	0	0	0	0	0	0	0
1	5	5	3	0	3	0	3	3
2	7	7	5	0	5	0	4	4
3	9	9	7	0	7	0	6	6
4	15	15	13	0	13	1	11	10
5	10	10	8	0	8	0	7	6
6	12	12	10	0	10	1	9	9
7	20	20	18	0	18	1	14	14
8	26	26	23	0	23	2	19	19
9	30	30	27	1	25	1	21	21

Ekonomiczna interpretacja algorytmu Kelley'ego

W każdym kroku przykładu obliczamy wysokość nakładów na realizację.

$$C_{\lambda=30} = 12,900$$

$$C_{\lambda=29} = 12,900 + 1.0,050 + 1.0,020 = 12,970$$

$$C_{\lambda=27} = 12,970 + 1.0,100 = 13,170$$

$$C_{\lambda=25} = 13,170 + 2.0,100 = 13,370$$

$$C_{\lambda=23} = 13,370 + 2.0,100 + 2.0,050 = 13,670$$

$$C_{\lambda=22} = 13,670 + 1.0,200 = 13,870$$

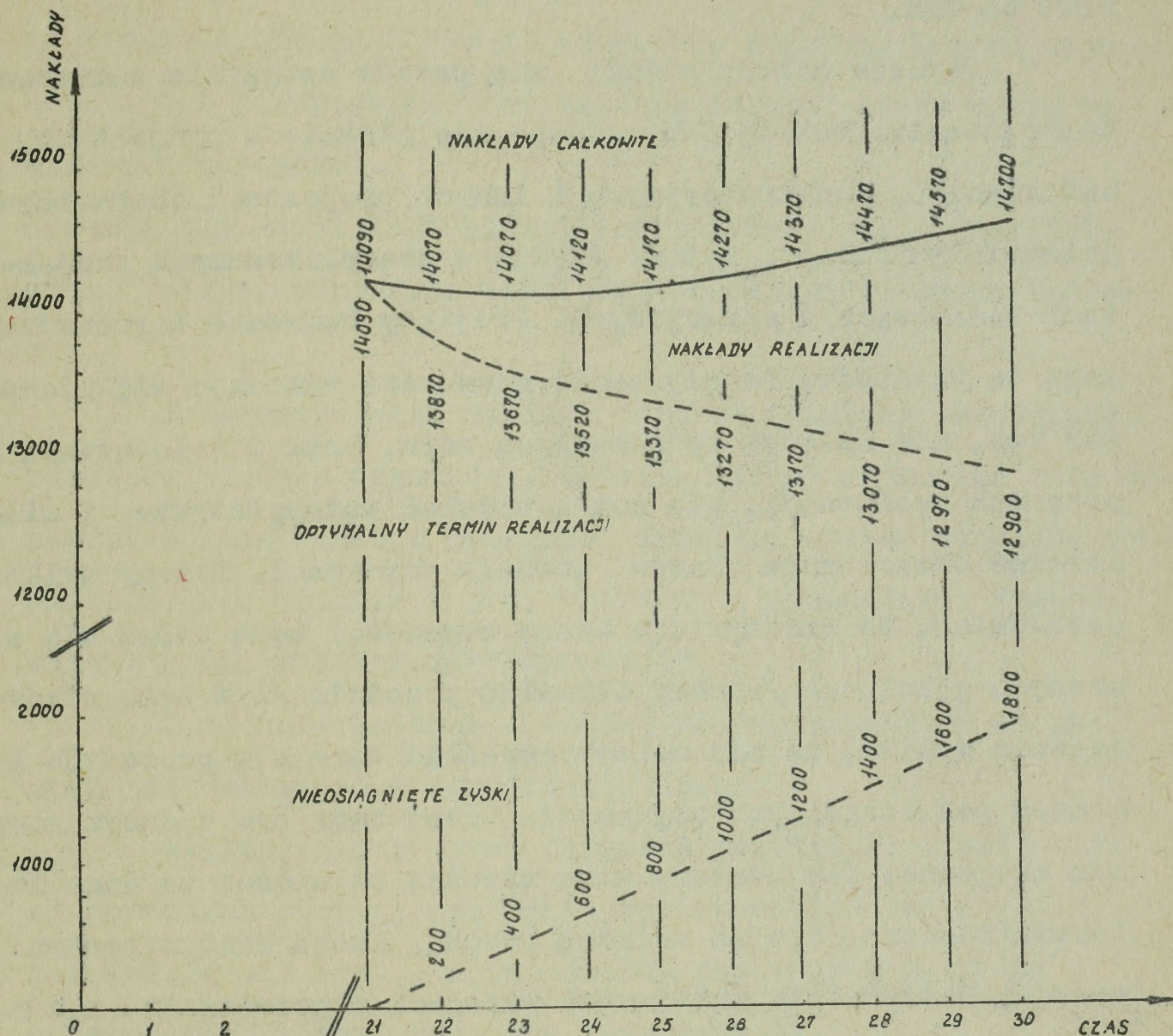
$$C_{\lambda=21} = 13,870 + 1.0,020 + 1.0,150 + 1.0,050 = 14,090$$

Ustalamy nieosiągnięte zyski na jednostkę czasu /0,200/.

Suma nakładów na realizację i nieosiągniętych zysków przedstawia przebieg łącznych nakładów w czasie.

$\lambda=30$	$\lambda=29$	$\lambda=27$	$\lambda=25$	$\lambda=23$	$\lambda=22$	$\lambda=21$
12,900	12,970	13,170	14,370	13,670	13,870	14,090
<u>1,800</u>	<u>1,600</u>	<u>1,200</u>	<u>0,800</u>	<u>0,400</u>	<u>0,200</u>	<u>0,000</u>
14,700	14,570	14,370	14,170	14,070	14,070	14,090

Optymalny czas realizacji wyznaczamy tak, żeby krzywa nakładów /i nieosiągniętych zysków/ osiągała minimum /zob. rys. 64/.



rys. 64

## 2.4 Metoda PERT

W niniejszym rozdziale zapoznamy się z drugą podstawową metodą tzw. Original - PERT.<sup>x/</sup>

x/ Metoda PERT jest rezultatem badań amerykańskiej marynarki. Niezależnie od tego amerykańskie lotnictwo we współpracy z Lockheed Missiks Comp. rozwinęło metodę PEP. Powstały również liczne modyfikacje pierwotnej Original - PERT, np. NASA - PERT, PERTCO - PEPCO, TOPS, PERT /GE, PERT-NAP, PERT-COST, PERTCOM, SUPERT, PROFIT/PERT, PEST itd. O niektórych również uczynimy wzmiankę.

Będziemy się interesować głównie tym, czym odróżnia się PERT od CPM.

Obydwie metody różnią się przede wszystkim zakresem zastosowania. Metodę CPM stosuje się głównie w projektach budowlanych, konstrukcyjnych i innych projektach charakteru deterministycznego, metodę PERT - w skomplikowanych projektach badawczych i rozwojowych. Projekty badawcze i rozwojowe mają tę własność, że większość czynności wykonuje się pierwszy raz, nie ma więc opracowanych norm, brak doświadczenia przy ich realizacji. Nie można uzyskać autorytatywne i niezawodne oszacowania czasów trwania czynności. Możemy tylko powiedzieć, że rzeczywiste czasy czynności będą wahać się w pewnych granicach /możemy określić przedział/. Z tego równocześnie wynika, że nie możemy określić terminów początków i końców poszczególnych czynności. Oceny mogą być w dużym stopniu niepewne. Nie uważamy więc trwania czynności za dane deterministyczne, ale za zmienną losową, która może z pewnym prawdopodobieństwem przyjmować wartości w przedziale  $\langle a, b \rangle$ .

#### Sformułowanie modelu

Podstawą przy zastosowaniu PERT jest również graficzne przedstawienie projektu - sieć. Różnica pojawia się dopiero przy transformacji sieci w model matematyczny. Przy metodzie CPM układamy model deterministyczny, natomiast przy PERT model stochastyczny.

Model PERT możemy określić następująco:

Mamy skończony zbiór P /projekt/ przedstawiony za pomocą sieci o  $n+1$  węzłach /zdarzeniach/ i m czynnościach. W P rozróżniamy dwa zdarzenia - początkowe i końcowe - takie,

że żadna czynność nie poprzedza zdarzenia początkowego i żadna czynność nie nachodzi na zdarzenie końcowe. Każdej czynności jest przyporządkowana zmienna losowa, którą nazywamy trwaniem czynności.

Trwania czynności mają niezależne rozkłady prawdopodobieństwa, każdemu odpowiada skończony przedział wartości zmiennej.

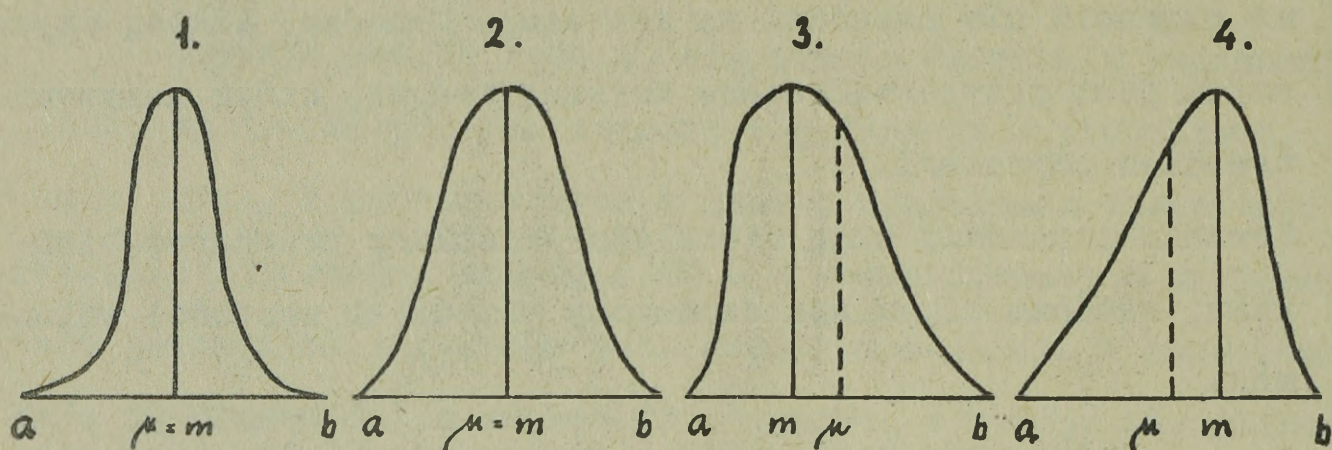
Interesuje nas, jakiego typu są rozkłady prawdopodobieństwa trwania czynności. Ogólnie każdej czynności może odpowiadać inna funkcja rozkładu. Ustalenie typów rozkładu poszczególnych czynności jest w praktyce niemożliwe. Trzeba więc znaleźć rozkład aproksymacyjny.

Zmienność zmiennej losowej charakteryzujemy za pomocą jej wariancji w przedziale  $\langle a, b \rangle$ .

Wariancja zależy od długości przedziału  $\langle a, b \rangle$  oraz od przebiegu krzywej gęstości prawdopodobieństwa  $f(x)$  w przedziale  $\langle a, b \rangle$ . Pole zawarte pod krzywą gęstości prawdopodobieństwa równa się jedności, tj.

$$P = \int_a^b f(x) dx = 1. \quad /67/$$

Dla jednakowo długich przedziałów  $\langle a, b \rangle$  krzywe  $f(x)$  mogą być inne, więc również zmiana zmiennej  $x$  /trwania/ może być różna. Możemy rozróżnić następujące główne przypadki /rys. 65/:



rys. 65

Prawdopodobieństwo, że zostaną zrealizowane czasy  $a$  lub  $b$  jest prawie zerowe. Czas z największą gęstością prawdopodobieństwa /moda  $m$ / może jednak znajdować się w różnych punktach przedziału  $\langle a, b \rangle$ .

Według charakteru zmiennej  $x$  może osiągnąć również wartości graniczne, tj.  $a \equiv m$  lub  $b \equiv m$ . Jeżeli rozkład prawdopodobieństwa jest symetryczny i jednomodalny /przypadek 1 i 2/, moda leży w środku symetrii.

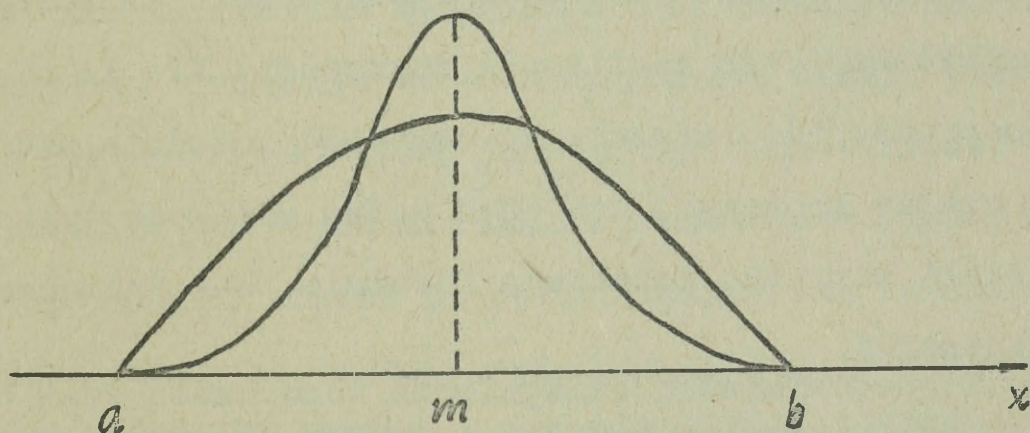
W tym przypadku  $m$  jest identyczne ze średnią arytmetyczną  $\frac{a+b}{2}$  i wartością średnią zmiennej losowej  $\mu$  /nadzieja matematyczna/.

Moda  $m$  może być przesunięta bliżej  $a$  lub  $b$ . Jeżeli rozkład jest lewostronnie asymetryczny /przypadek 3/, moda leży na lewo od średniej arytmetycznej i wartości średniej  $\mu$  /Moda - wartość modalna, wartość najczęstsza, dominanta

$\mu$  ; jeżeli rozkład jest prawostronnie asymetryczny /przypadek 4/, moda leży na prawo od średniej arytmetycznej i wartości średniej  $\mu$  .

Zmienność trwania czynności charakteryzujemy za pomocą wariancji /  $\sigma^2$  / albo odchylenia standardowego /  $\sigma$  /. Jeżeli wartości ich są duże, oczekiwana wariabilność jest wysoka i z dotrzymaniem odpowiedniego czasu wiąże się większa niepewność.

Stałym wartościom  $a$ ,  $m$  i  $b$  mogą więc odpowiadać różne krzywe gęstości rozkładu /rys. 66/:



rys. 66

Najkorzystniejszym byłoby charakteryzować rozkład prawdopodobieństwa poszczególnych czasów bezpośrednio za pomocą funkcji rozkładu. Jednak ich wyznaczenie i obliczenie jest praktycznie niemożliwe. Ograniczamy się więc tylko do oszacowań wartości  $a$ ,  $b$  i  $m$ .

Oszacowania wartości  $a$ ,  $m$  i  $b$  są podstawą metody PERT. Ich oszacowanie nie jest jednak w praktyce proste. Oszacowania te uzyskujemy w postaci ocen czasowych trwania poszcze-

gólnych czynności. Pracownicy odpowiedzialni za realizację różnych czynności wyznaczają czasy potrzebne do wykonania tych czynności przy założeniu najlepszych, najgorszych oraz najbardziej prawdopodobnych /normalnych/ warunków. Ustalimy w ten sposób trzy oceny czasowe:

- 1/ optymistyczna ocena trwania czynności - a
- 2/ pesymistyczna ocena trwania czynności - b
- 3/ najbardziej prawdopodobna ocena trwania czynności - m

Między tymi trzema oszacowaniami zachodzi związek

$$a \leq m \leq b.$$

Podamy teraz związką charakterystyką trzech oszacowań:

- a - najkrótszy czas realizacji czynności. Nie istnieje żadne prawdopodobieństwo, że czynność zostanie ukończona w czasie krótszym. Ten czas można osiągnąć tylko wtedy, jeżeli wszystko przebiega idealnie, bez jakichkolwiek przeszkód. Prawdopodobieństwo osiągnięcia tego czasu jest b.małe. W praktyce dzieje się tak w jednym przypadku na sto
- b - jest to najdłuższy czas realizacji czynności. Podaje, jak długo by trwała realizacja czynności, gdyby wszystkie trudności, które mogą logicznie pojawić się, rzeczywiście wystąpiły /za wyjątkiem obiektywnych niekontrolowanych sytuacji/. Prawdopodobieństwo otrzymania tego czasu jest bardzo małe. Praktycznie jeden przypadek na sto.
- m - najbardziej prawdopodobny czas realizacji czynności przy normalnych zwykłych warunkach. Jest to czas, który występuje najczęściej, jeżeli realizujemy wielokrotnie czynność przy jednakowych warunkach.

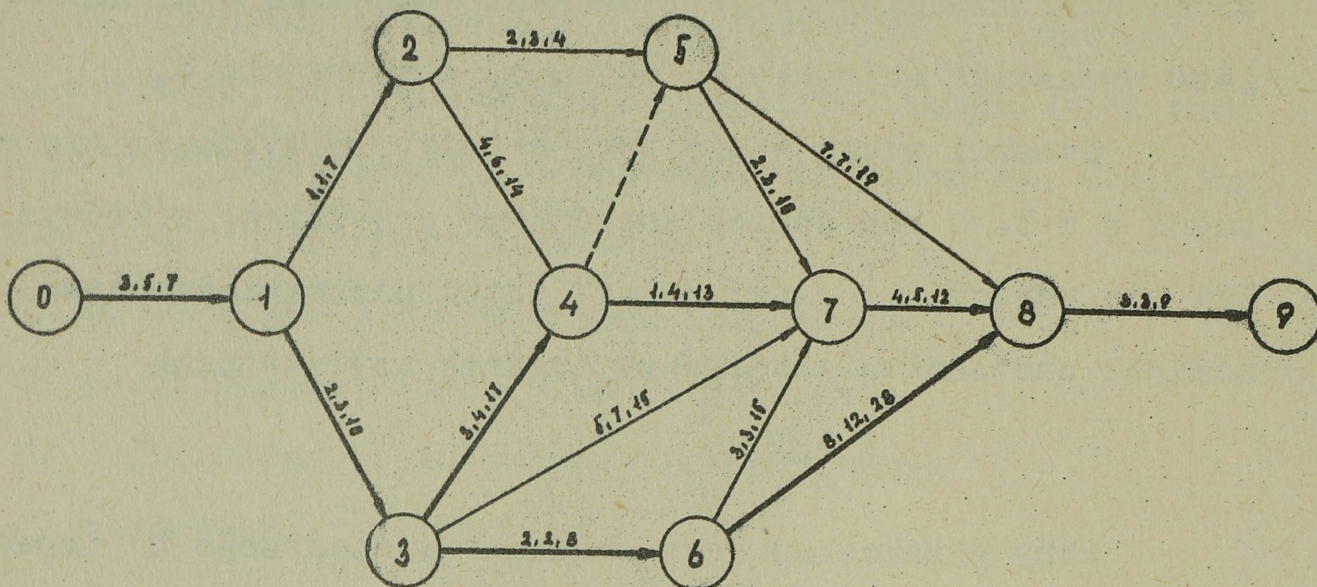
Wyznaczenie oszacowań a i m nie sprawia większych trudności. Trudniejsze jest czasami oszacowanie b. Zalecane jest wyznaczać najpierw m, potem a, a następnie b.

Czasami stosuje się taką metodę, że wyznacza się wartości a i b. W ten sposób znajdziemy przedział, w którym mieści się wartość m. Tutaj jednak grozi niebezpieczeństwo, że zamiast wartości m oszacujemy średnią arytmetyczną

$$\frac{a + b}{2}$$

Przy wyznaczaniu oszacowania największego b trzeba postępować bardzo ostrożnie. Zwłaszcza jeżeli chodzi o projekt badawczy, dla którego jest bardzo trudno uzyskać ocenę czasu, w którym zostanie osiągnięty cel końcowy. Nikt nie może dokładnie wyznaczyć absolutną granicę czasu, która nie zostanie przekroczona. Tutaj trzeba dokładnie określić obiektywne trudności, których nie można przewidzieć /katastrofa żywiołowa, strajk, kryzys itp/. Ich wpływu nie można uwzględnić w oszacowaniach. Ta rzeczywistość wpływa na charakter rozkładu prawdopodobieństwa. Dla większości czynności niepewność rośnie, jeżeli zbliżamy się do oszacowania pesymistycznego, rozkład jest bardziej płaski. Najczęściej spotykany rozkład trwania to rozkład lewostronnie asymetryczny.

Jeżeli dla każdej czynności mamy wyznaczone trzy oszacowania czasu ich trwania, możemy oszacowania te zaznaczyć w sieci. Nasz przykład przybiera teraz następującą postać:



Rys. 67

Trzy oszacowania  $a$ ,  $m$  i  $b$  niewystarczająco charakteryzują typ rozkładu. Trzeba obliczyć dalsze charakterystyki, mianowicie wartość średnią  $\mu$  i wariancję  $\sigma^2$ .

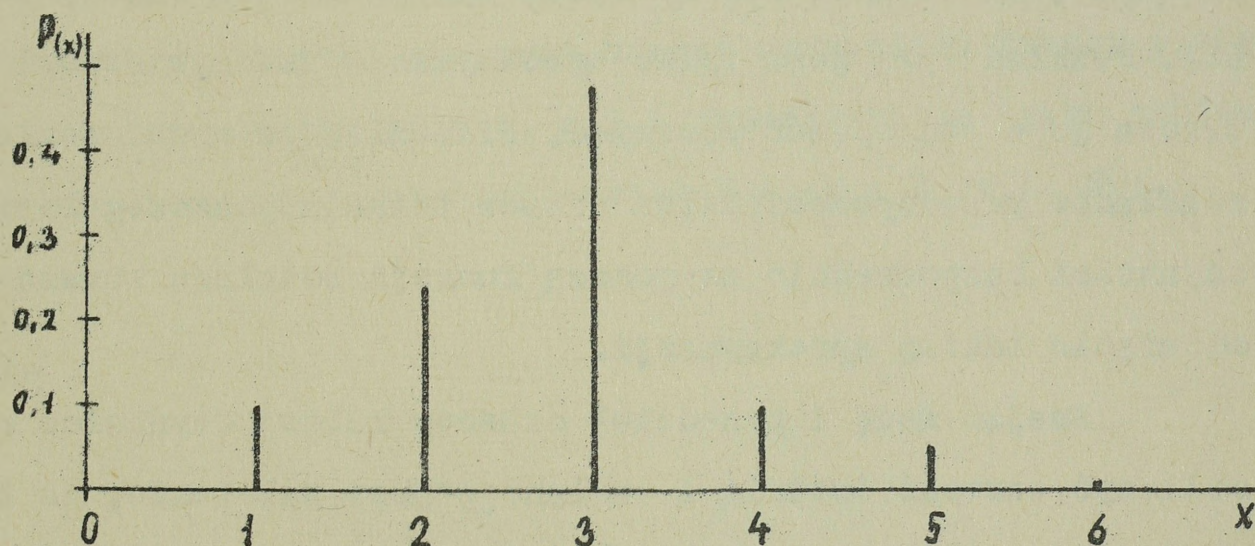
Do obliczeń trzeba wprowadzić jedną wartość dla każdej czynności. Użycie mody oznaczałoby przejście do metody CPM. Lepiej jest użyć wartość średnią danego rozkładu zmiennej losowej, ponieważ rozkład prawdopodobieństwa nie musi być symetryczny i może być bardziej przesunięty w kierunku  $a$  lub  $b$ . Wartość średnia i wariancja wystarczająco charakteryzują zmienną losową.

Trzeba obrać taki rozkład teoretyczny, który najlepiej charakteryzuje przebieg zmiennej losowej i za pomocą którego można przekształcić trzy oszacowania w jedno, tj. średnią wartość obranego rozkładu.

Poprawne postępowanie polegałoby na przeprowadzeniu rozległych badań dużej ilości różnych czynności oraz możliwych czasów trwania przy różnych warunkach. Dla każdego typu czynności trzeba by było wyznaczyć rozkład empiryczny częstości wszystkich możliwych czasów trwania przy wielokrotnym powtarzaniu czynności. Wtedy można skonstruować empiryczny rozkład prawdopodobieństwa poszczególnych czasów trwania danej czynności.

Np. /rys. 68/:

Czas trwania x	1	2	3	4	5	6	7	
P /x/	0,1	0,25	0,5	0,1	0,05	0,00	0,00	$\sum_{i=1}^7 P(x_i)=1$



Rys. 68

Te empiryczne rozkłady skokowe są różne dla różnych typów czynności. Teraz trzeba znaleźć taki teoretyczny rozkład prawdopodobieństwa, który najlepiej określa empiryczny przebieg większości czynności. Za pomocą tego rozkładu trzeba wyrazić jakąkolwiek zmianę związaną z trwaniem. Takie postępowanie jest jednak bardzo pracochłonne i ważność wyników jest ograniczona współczesnym stanem techniki, organizacji

i intensywności pracy.

W pierwotnych badaniach PERT, przy projekcie rakiety Polaris, obrano rozkład bez badań empirycznych. Dla transformacji trzech oszacowań na potrzebne wartości, tj. wartość średnią i wariancję, w badaniach amerykańskich obrano tzw. rozkład  $\beta$ .

Rozkład  $\beta$  nie jest więc wypróbowany empirycznie, ale obrano go z powodu niektórych jego własności: prosty, ciągły, jednomodalny, dowolnie asymetryczny itp. Moda może znajdować się gdziekolwiek w przedziale  $\langle a, b \rangle$ .

Tego, czy rozkład  $\beta$  odpowiada rzeczywistości, nie można teoretycznie udowodnić. Można tylko empirycznie wyznaczyć jego większe lub mniejsze odchylenie od rzeczywistości. Rozkład  $\beta$  jest tylko aproksymacją rzeczywistości i trzeba go w ten sposób rozumieć. Niemożliwość wyznaczania rozkładów prawdopodobieństwa czasów trwania poszczególnych czynności bezpośrednio za pomocą funkcji rozkładu zmusza nas do użycia takiej aproksymacji.

Znając modę i przedział czasowy każdej czynności mamy obliczyć wartość średnią i wariancję przy założeniu, że dla czynności zachodzi rozkład  $\beta$ . Wyprowadzenie tych wartości znajduje się w dodatkach w rozdziale zajmującym się prawdopodobieństwem /3.3.9./.

Wartość średnią  $t_e^{x/}$  rozkładu nazywać będziemy oczekiwanym czasem trwania. Zachodzi równość

---

x/ W teorii prawdopodobieństwa wartość średnią oznacza się zazwyczaj za pomocą symbolu  $\mu$ ,  $E/x/$  itp. W literaturze dotyczącej metody PERT używa się symbolu  $t_e$  /z angielskiego expected time/.

$$t_e = \frac{a + 4m + b}{6} \quad /68/$$

Masę prawdopodobieństwa rozrzuconą w otoczeniu wartości średniej można oszacować z nierówności Czebyszewa według "reguły 66". Wynika stąd, że odchylenie standardowe

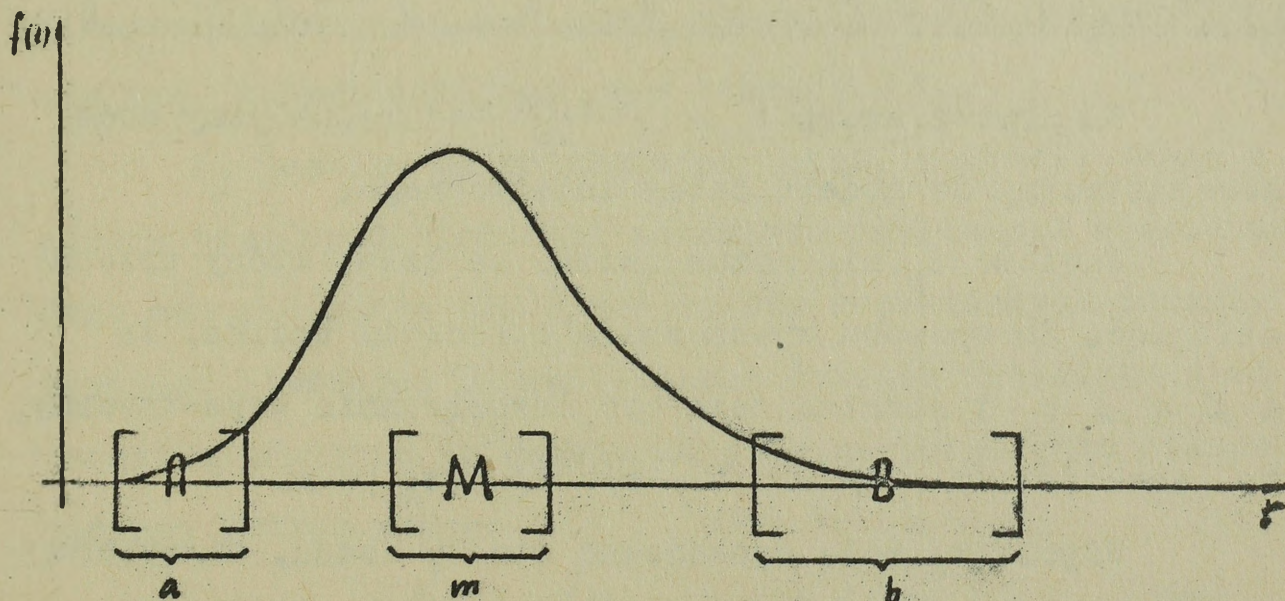
$\sigma_{te}$  powinno równać się  $1/6$  długości przedziału. Prawdopodobieństwo na zewnątrz przedziału  $6\sigma$  jest praktycznie zerowe. Dla wariancji więc zachodzi

$$\sigma_{te}^2 = \frac{(b - a)^2}{36} \quad /69/$$

Dla odchylenia standardowego

$$\sigma_{te} = \frac{b - a}{6} \quad /70/$$

Dla każdej czynności sieci obliczymy teraz za pomocą znanych oszacowań  $a$ ,  $m$  i  $b$  wartości  $t_e$  i  $\sigma_{te}^2$ . Wzory /68/ i /69/ trzeba stosować bardzo ostrożnie. Trzeba pamiętać o tym, że wartości  $a$ ,  $m$  i  $b$  przedstawiają tylko subiektywne oceny rzeczywistych wartości  $A$ ,  $M$  i  $B$  /rys. 69/.



rys. 69

Wtedy również wartości  $t_e$  i  $\sigma_{t_e}^2$  są tylko ocenami rzeczywistych wartości  $T_e$  i  $\sigma_{T_e}^2$ . Rozkład  $a, m$  i  $b$  jest niekoniecznie związany z rzeczywistym rozkładem  $\beta$ . Wariancje  $\sigma_a^2, \sigma_b^2, \sigma_m^2$  nie muszą być związane z rzeczywistą wariancją  $\sigma_{T_e}^2$ .

W metodzie PERT zakładamy, że  $\sigma_a^2 = \sigma_b^2 = \sigma_m^2 = \sigma_{t_e}^2$

Przeprowadzimy obliczenia dla sieci w przykładzie przytoczonym wcześniej.

Czynność	a	m	b	$t_e$	b-a	$\sigma_{t_e}$	$\sigma_{t_e}^2$
0,1	3	5	7	5	4	0,7	0,49
1,2	1	1	7	2	6	1,0	1,00
1,3	2	3	10	4	8	1,3	1,69
2,4	4	6	14	7	10	1,7	2,89
2,5	2	3	4	3	2	0,3	0,09
3,4	3	4	17	6	14	2,3	5,29
3,6	2	2	8	3	6	1,0	0,00
3,7	5	7	15	8	10	1,7	2,89
4,5	0	0	0	0	0	0	0,00
4,7	1	4	13	5	12	2,0	4,00
5,7	2	3	10	4	8	1,3	1,69
5,8	7	7	19	9	12	2,0	4,00
6,7	3	3	15	5	12	2,0	4,00
6,8	8	12	28	14	20	3,3	10,89
7,8	4	5	12	6	8	1,3	1,69
8,9	3	3	9	4	6	1,0	1,00

Za pomocą wzoru  $t_e = \frac{a + 4m + b}{6}$  redukujemy model stochastyczny do modelu deterministycznego.

Wartość  $t_e$  nie można uważać za czas, który trzeba osiągnąć. Ze sposobu wyznaczania oszacowań wynika, że  $a \leq m \leq b$  i rozkład może być lewostronnie asymetryczny, tj. zachodzi  $|m - a| < |b - m|$ , tj.  $t_e > m$ .

Użycie  $t_e$  może spowodować straty czasu, niewykorzystanie sił roboczych oraz maszyn itp.

W stoczni gdańskiej stosują wzór /68/ w następującej postaci:

$$t_e = \frac{W_1 a + W_2 m + W_3 b}{W_1 + W_2 + W_3}, \quad /71/$$

gdzie  $W_1$ ,  $W_2$  i  $W_3$  są wagami. Dla rozkładu  $\beta$   $W_1 = 1$ ,  $W_2 = 4$  i  $W_3 = 1$ . Wybór wag może być różny w zależności od typu projektu i czynności. Dla niektórych typów czynności lepiej jest użyć dwóch oszacowań, gdyż mamy tylko dwa do dyspozycji. Wtedy można skorzystać ze wzorów

$$t_e = \frac{W_1 a + W_1 b}{W_1 + W_2}; \quad t_e = \frac{W_1 a + W_2 m}{W_1 + W_2}; \quad t_e = \frac{W_1 m + W_2 b}{W_1 + W_2}. \quad /72/$$

Następnie wyznaczamy czasy  $T_E$  i  $T_L$ , które są przyporządkowane wszystkim zdarzeniom /węzłom/ sieci.

Praktyczne obliczenie jest analogiczne jak dla metody CPM. W metodzie CPM dla każdej czynności określamy cztery czasy  $t_i / 0 /$ ,  $t_i / \lambda /$ ,  $t_j / 0 /$ ,  $t_j / \lambda /$ . W metodzie PERT obliczamy czasy  $T_E$  i  $T_L$  dla poszczególnych zdarzeń.

#### 2.4.1. Czasowe obliczenia w sieci

Za pomocą kolejnego dodawania wartości  $t_e$  od zdarzenia początkowego do końcowego wyznaczamy dla każdego zdarzenia tzw. najwcześniejszy czas zdarzenia  $T_E$ .

$T_E$  jest to najwcześniejszy czas, w którym można z pewnym prawdopodobieństwem oczekiwać realizacji zdarzenia. Jego wartość równa się sumie czasów oczekiwanych trwania czynności leżących na najdłuższej ścieżce prowadzącej od początku projektu do danego zdarzenia. Obliczenia przeprowadzamy według wzoru:

$$T_{E/j/} = \max_i \left[ T_{E/i/} + t_{e/i,j/} \right] \quad /73/$$

oraz wariancja

$$\sigma_{T_{E/j/}}^2 = \sigma_{T_{E/i/}}^2 + \sigma_{t_{e/i,j/}}^2 \quad /74/$$

Najpóźniejszy czas  $T_L$  obliczamy wychodząc od ustalonego końcowego terminu całego projektu  $T_{PS}$  /analogia parametru  $\lambda$  w metodzie CPM/. Jeżeli taki termin nie jest określony, przy obliczaniu korzystamy z najwcześniejszego czasu zdarzenia końcowego całego projektu  $T_{PE}$ .

Czas ten będziemy uważać za stałą wartość, zatem zachodzi:

$$T_{PS} = T_{PE} = T_{PL} \quad / \sigma_{T_{PE}}^2 = 0/ \quad /75/$$

Za pomocą symbolu  $T_L$  oznaczamy najpóźniejszy czas przyporządkowany danemu zdarzeniu. Jest on równy wartości maksymalnej sumy oczekiwanych czasów trwania czynności tworzących ścieżkę prowadzącą od zdarzenia końcowego sieci do danego zdarzenia. Chodzi więc o najdłuższą ścieżkę zawierającą te zdarzenia. Obliczenia przeprowadzamy według wzoru

$$T_{L/i/} = \min_j \left[ T_{L/j/} - t_{e/i,j/} \right] \quad /76/$$

oraz wariancja

$$\sigma_{T_{L/i/}}^2 = \sigma_{T_{L/j/}}^2 + \sigma_{t_{e/i,j/}}^2 \quad /77/$$

Wartości  $T_E$  i  $T_L$  są jednoznacznie określone za pomocą wartości średnich  $t_e$  niezależnych zmiennych losowych /trwań czynności/ o znanych rozkładach prawdopodobieństwa /rozkład  $\beta$  /. Mówimy, że  $T_E$  i  $T_L$  są funkcjami wartości średnich  $t_e$ .

Czasy zdarzeń uważamy teraz za niezależne zmienne losowe o wartościach średnich  $T_E$  ewentualnie  $T_L$ . Do ich obliczeń zastosowaliśmy twierdzenia o dodawaniu wartości śred-

nich i wariancji niezależnych zmiennych losowych.

Obliczanie wartości  $T_E$  i  $T_L$  pokażemy na naszym przykładzie za pomocą macierzy sprzężonej. Algorytm obliczania jest taki sam, jaki został opisany w rozdziale 2.3.1. Różnica polega tylko na tym, że w macierzy PERT jednocześnie dodajemy odpowiednie wariancje czynności, żeby wyznaczyć rozrzut w otoczeniu wartości  $T_E$  i  $T_L$ . Do poszczególnych pól tablicy wpisujemy  $t_e$  i pod nią odpowiadającą wariancję  $\sigma_{t_e}^2$ .

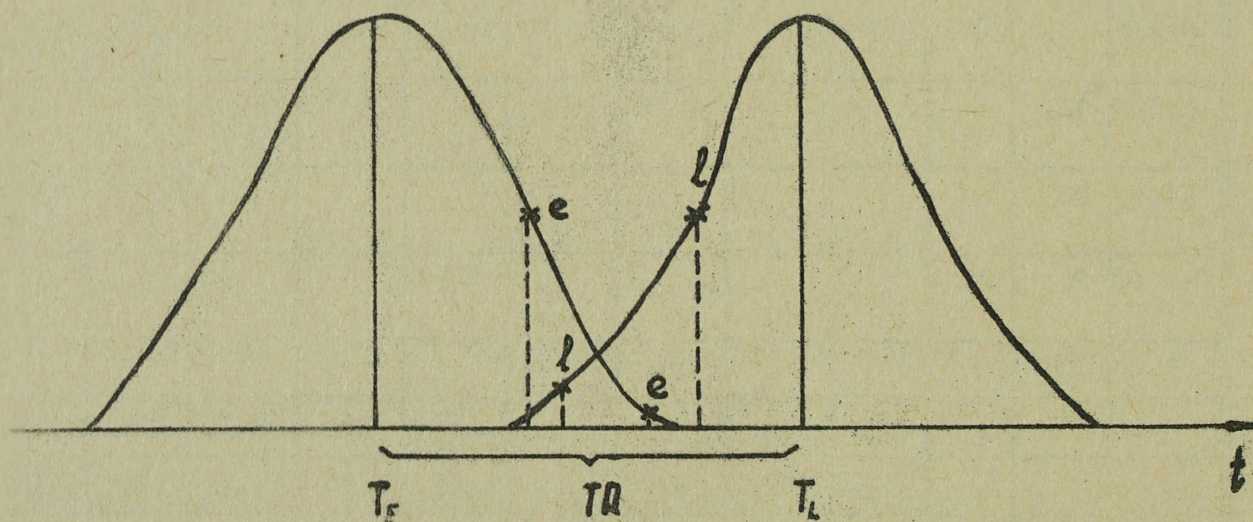
$\sigma_{T_E}^2$	$T_E$	i	j	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	
0,00	0	0			5									
				0,49										
0,49	5	1			2	4								
					1,00	1,69								
1,49	7	2					7	3						
							2,89	0,09						
2,18	9	3							6	8				
									5,29	1,00	2,89			
7,47	15	4							0		5			
									0,00		4,00			
7,47	15	5									4	9		
											1,69	4,00		
3,18	12	6										5	14	
												4,00	10,89	
11,47	20	7											6	
													1,69	
14,07	26	8												4
														1,00
15,07	30	9												
		$T_L$		0	5	8	9	15	16	12	20	26	30	
		$\sigma_{T_L}^2$		15,07	14,58	9,58	12,89	6,69	4,38	11,89	2,69	1,00	0,00	
		$T_L - T_E$		0	0	1	0	0	1	0	0	0	0	

Jaki jest rozkład prawdopodobieństwa zmiennych losowych o wartościach średnich  $T_E$  ewentualnie  $T_L$ ? Na podstawie tw. Lapunowa znanego również pod nazwą centralnego twierdzenia granicznego możemy przy wystarczająco dużej liczbie czynności /praktycznie  $n \geq 10$ / uważać ich rozkład za rozkład asymptotycznie normalny. Założenie to umożliwia różne obliczenia prawdopodobieństwa.

Czasy  $T_E$  i  $T_L$  uważamy więc za średnie dwóch normalnych, stochastycznie niezależnych rozkładów.

Różnicę  $T_L - T_E$  oznaczamy przez  $TR^x$ .

Wartość  $TR$  podaje wielkość zapasu czasu dla poszczególnych zdarzeń /jest on analogią zapasu krytycznego  $ZK$  dla metody CPM/. Jeżeli  $T_E < T_L$ , to  $TR < 0$  oraz zdarzenie posiada tzw. zapas czasowy negatywny. Jeżeli  $T_L = T_E$ , to  $TR = 0$  i zdarzenie leży na ścieżce krytycznej. Oczekiwaną wartość zapasu  $TR$  przestawimy na tys. 70.



rys. 10

x/ Jeżeli do zdarzenia prowadzi więcej czynności, korzystne jest obliczyć również luzy czasowe, tj.

$$TR_{ij} = T_{L/j} - T_{E/i} - t_{e/i,j}$$

Z formy i rozmieszczenia krzywych rozkładu widać, że istnieje pewne prawdopodobieństwo, że rzeczywisty zapas będzie różnić się od zapasu oczekiwanego TR.

Oznaczamy rzeczywisty zapas przez  $TR'$ . Czas  $T_L$  może przyjmować którąkolwiek wartość 1 krzywej rozkładu, ale z różnym prawdopodobieństwem. Tak samo czas  $T_E$  może przyjmować którąkolwiek wartość e leżącą na odpowiedniej krzywej. Rzeczywisty zapas  $TR'$  jest potem określony różnicą między wartościami e i l. Zachodzi  $TR' = 1 - e$ . W przypadku przedstawionym na rys. 70 obydwie krzywe przecinają się, może więc z bardzo małym prawdopodobieństwem zdarzyć się, że powstanie zapas negatywny, tj.  $TR' = e - 1$ , chociaż  $T_L > T_E$ . Jeżeli uważamy czasy za zmienne losowe, trzeba uwzględnić tę możliwość. Rzeczywisty zapas  $TR'$  może być więc większy lub mniejszy od TR.

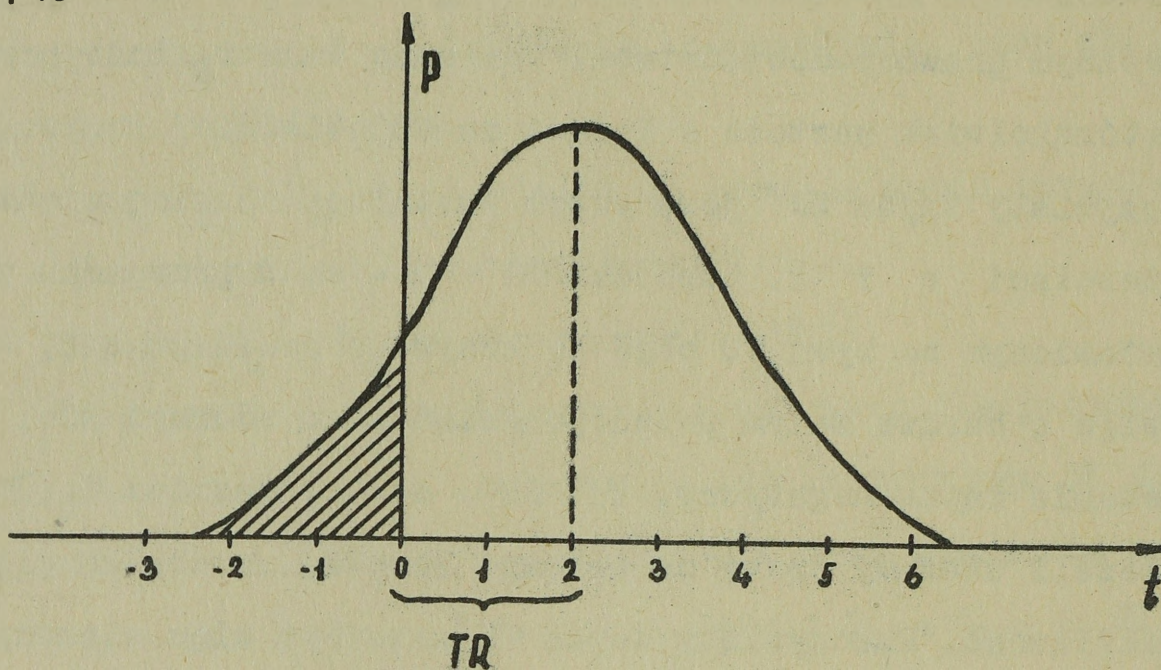
O przebiegu krzywych rozkładów dostarcza informacji wariancja  $\sigma_{T_E}^2$  oraz  $\sigma_{T_L}^2$ . Im większa jest wartość wariancji, tym bardziej płaska jest krzywa. Na odwrót, im bardziej stroma jest krzywa, tym mniejsza jest wartość  $P \{TR \leq 0\}$ . Zmniejsza się bowiem wspólna część obu krzywych i powstanie zapasu negatywnego można oczekiwać z bardzo małym prawdopodobieństwem.

#### 2.4.2. Obliczenie prawdopodobieństwa

Prawdopodobieństwo powstania pewnej wartości zapasu czasu można więc w metodzie PERT oszacować; będzie ono zależne od wielkości oczekiwanego zapasu czasowego, TR oraz od kształtu krzywych gęstości rozkładu normalnego, tj. od wartości  $\sigma_{T_E}^2$  i  $\sigma_{T_L}^2$ .

Ponieważ  $T_E$  i  $T_L$  są średnimi dwóch rozkładów normalnych, również różnicy  $T_L - T_E = TR$  będzie odpowiadać rozkład normalny.

Przebieg gęstości prawdopodobieństwa jest przedstawiony na rys. 71.



rys. 71

Oczekiwana wielkość zapasu czasu  $TR$  posiada większą gęstość prawdopodobieństwa. Wartościom większym oraz mniejszym odpowiada mniejsze prawdopodobieństwo. Na rys. 71 jest  $TR = 2$ . Widzimy, o ile rzeczywisty zapas  $TR'$  różni się od zera i  $TR$  oraz z jakim prawdopodobieństwem. Istnieje pewne prawdopodobieństwo, że  $TR' < 0$  /pole zakreskowane/. Wartości prawdopodobieństw  $TR' < 0$  i  $TR' > 0$  można oszacować następująco:

Jeżeli mamy dwa niezależne rozkłady normalne i wariancje  $\sigma_{T_E}^2$  i  $\sigma_{T_L}^2$ , wtedy dla odchylenia standardowego różnicy  $T_L - T_E = TR$  zachodzi wzór

$$\sigma_{T_L - T_E} = \sqrt{\sigma_{T_L}^2 + \sigma_{T_E}^2} \quad /78/$$

Iloraz

$$t = \frac{T_L - T_E}{\sqrt{\sigma_{T_L}^2 + \sigma_{T_E}^2}} = \frac{-TR}{\sigma_{TR}} \quad /78/$$

podaje o jaką wielokrotność odchylenia standartowego różni się TR od zera. Jeżeli odchylenie wynosi w przybliżeniu  $3 \sigma_{TR}$ , można liczyć się z tym, że zapas czasowy będzie pozytywny. Jeżeli wartość t będzie mniejsza od  $3 \sigma_{TR}$ , będzie również zmniejszać się prawdopodobieństwo powstania zapasu pozytywnego.

Jeżeli obliczamy prawdopodobieństwo powstania zapasu negatywnego, tj.  $P \left\{ TR < 0 \right\}$ , skorzystamy ze wzoru

$$t = \frac{T_E - T_L}{\sqrt{\sigma_{T_L}^2 + \sigma_{T_E}^2}} = \frac{-TR}{\sigma_{TR}} \quad /79/$$

Jeżeli odchylenie to znajduje się w otoczeniu  $-3 \sigma$ , można liczyć się z tym, że zapas czasowy będzie negatywny. Jeżeli t przesuwa się w kierunku zera, prawdopodobieństwo powstania zapasu negatywnego zmniejsza się. Prawdopodobieństwo jest określone za pomocą pola zawartego pod krzywą w przedziale od  $-\infty$  do  $\frac{-TR}{\sigma_{TR}}$ .

Dla wyznaczonych t wartości  $\phi /t/$  rozkładu normalnego podają szukane prawdopodobieństwo. Wartości  $\phi /t/$  można znaleźć w tablicach. Jeżeli  $TR = 0$ , prawdopodobieństwo powstania zapasu pozytywnego ewentualnie negatywnego równa się 50 %.

Można to wyrazić następująco:

Jeżeli zmienna losowa T posiada rozkład normalny o wartości średniej  $E /T/$  i wariancji  $\sigma_T^2$ , wtedy można skonstruować przedziały symetryczne względem  $E /T/$  odpowia-

jące prawdopodobieństwom:

$$P \left\{ \left| T - E / T / \right| \leq t \sigma_T \right\} = \alpha \quad /80/$$

dla  $t=1$   $P \left\{ \left| T - E / T / \right| \leq \sigma_T \right\} \approx 0,0413$

dla  $t=2$   $P \left\{ \left| T - E / T / \right| \leq 2\sigma_T \right\} \approx 0,9772$

dla  $t=3$  prawdopodobieństwo prawie równa się jedności.

W praktyce zwykle zwracamy uwagę na problemy związane z dotrzymywaniem terminów decydujących zdarzeń /etapów/, które mają zasadnicze znaczenie dla osiągnięcia końcowego celu. Są to tzw. główne zdarzenia /milestones/. Najważniejszym z nich jest zdarzenie końcowe. Dla tych zdarzeń zwykle planujemy terminy ich osiągnięcia. Zależą one zazwyczaj od pewnych zewnętrznych warunków, które usiłujemy dotrzymać. Zdarzeniami głównymi mogą być np. dostawy ważnego urządzenia, termin przerwy zimowej, ukończenie całego projektu itp.

Planowany termin pewnego wewnętrznego zdarzenia sieci oznaczymy za pomocą symbolu  $T_S$  /scheduled time/. Planowany termin zdarzenia końcowego, tj. ukończenia całego projektu  $P$  oznaczymy przez  $T_{PS}$ . Te planowane czasy nie są teraz zmiennymi losowymi i ich wariancja równa się zeru. Czasy  $T_E$  i  $T_L$  określają przedział, w którym możemy z pewnym prawdopodobieństwem oczekiwać realizacji planowanych terminów.

Najpierw wyznaczamy prawdopodobieństwo realizacji końcowego terminu całego projektu  $T_{PS}$ , tj.  $P \left\{ T_{PE} \leq T_{PS} \right\}$ , gdzie  $T_{PE}$  oznacza najwcześniejszy czas zdarzenia końcowego. Takie obliczanie prawdopodobieństwa jest tylko szczególnym przypadkiem oszacowania prawdopodobieństwa zapasów czasowych dla  $T_{PL} = T_{PS}$  oraz  $\sigma_{T_{PS}}^2 = 0$ . W tych warunkach wzór na  $t$  możemy dla ostatniego zdarzenia napisać następująco:

$$t = \frac{T_L - T_E}{\sqrt{\sigma_{T_L}^2 + \sigma_{T_E}^2}} = \frac{T_{PS} - T_{PE}}{\sigma_{T_{PE}}} \quad /81/$$

Jeżeli  $t = 0$ , tj.  $T_{PS} = T_{PE}$ , dotrzemy terminu końcowego projektu z prawdopodobieństwem 50%. Jeżeli  $t > 0$ , prawdopodobieństwo dotrzymania wzrasta  $/T_{PE} < T_{PS}/$ . Jeżeli  $t < 0$ , prawdopodobieństwo dotrzymania zmniejsza się  $/T_{PE} > T_{PS}/$ .

Można również obliczać prawdopodobieństwo niedotrzymania, tj. przekroczenia terminu  $T_{PS}$ .

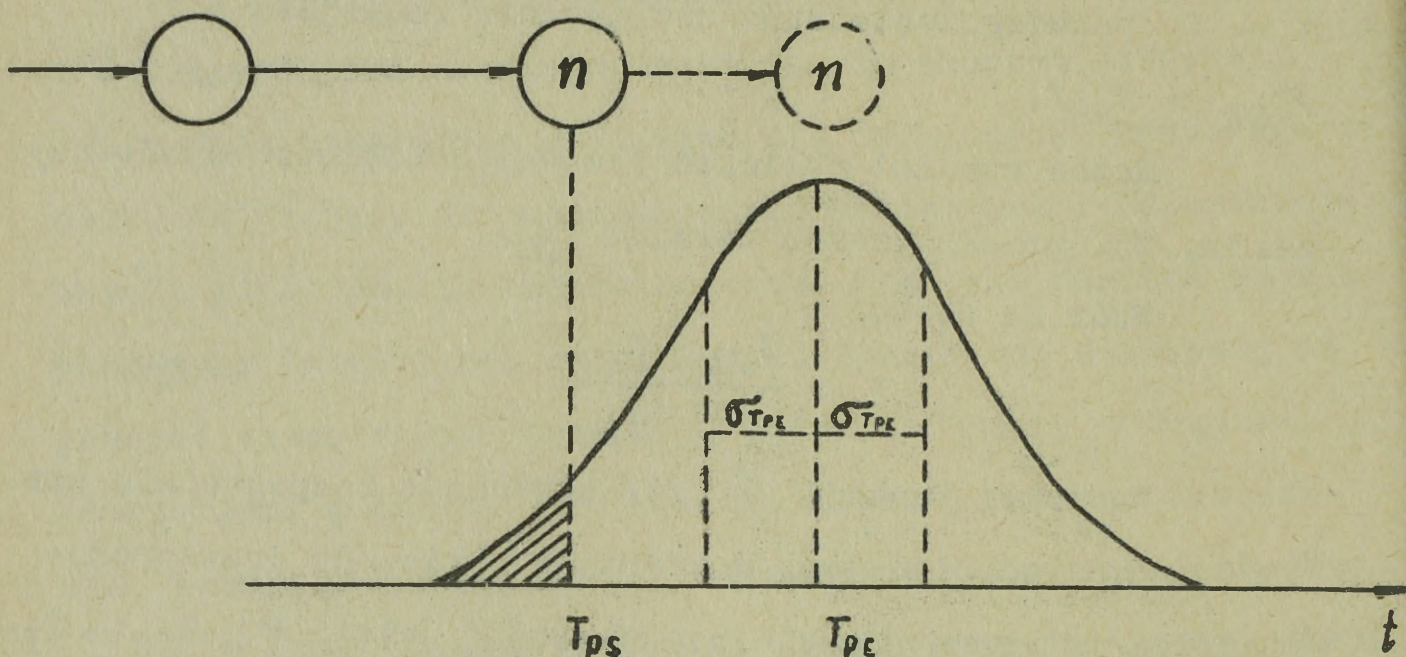
Wzór ma postać

$$t = \frac{T_{PE} - T_{PS}}{\sigma_{T_{PE}}} \quad /82/$$

Wartości funkcji  $\phi$   $/t/$  określają bezpośrednio wartość prawdopodobieństwa. W praktyce obliczone prawdopodobieństwa interpretuje się następująco: jeżeli  $P \left\{ T_{PE} \leq T_{PS} \right\} < 0,25$ , to z wykonaniem planu związane jest zbyt duże ryzyko. Trzeba więc znów zbadać czynności leżące na ścieżce krytycznej oraz zapewnić dotrzymanie  $T_{PS}$  za pomocą użycia dalszych źródeł albo zwiększyć prawdopodobieństwo jego dotrzymania za pomocą przesunięcia planowanego terminu. Jeżeli wartość prawdopodobieństwa znajduje się w granicach od 0,25 do 0,60, to ryzyko związane z dotrzymaniem  $T_{PS}$  jest normalne i użycie środków zostało dobrze zaplanowane. Jeżeli prawdopodobieństwo jest większe niż 0,60, oznacza to, że użyto zbyt dużej ilości środków. Jeżeli użycie środków zostało dobrze zaplanowane, wartość prawdopodobieństwa dotrzymania planowanego terminu znajduje się w przedziale

$$0,25 \leq P \left\{ T_{PE} \leq T_{PS} \right\} \leq 0,60 \quad /83/$$

Jeżeli  $T_{PE} > T_{PS}$  oraz  $P \left\{ T_{PE} \leq T_{PS} \right\} \leq 0,25$ ,  
nie można liczyć się z dotrzymaniem terminu w żadnym wypad-  
ku. Taka sytuacja jest przedstawiona na rys. 72.



rys. 72

Część zakreskowana określa prawdopodobieństwo tego, że zdarzenie  $n$  zostanie zrealizowane w czasie  $T_{PS}$ . Za pomocą przesunięcia  $T_{PS}$  do  $T_{PE}$  prawdopodobieństwo powiększy się do wartości 0,5. Najpierw jednak staramy się zapewnić dotrzymanie planowanego terminu za pomocą wprowadzenia dodatkowych sił i środków. Dopiero wtedy, kiedy nawet takie posunięcia nie dają dobrych rezultatów, przystępujemy do powtórnego zbadania czasów i wyznaczmy nową wartość.

Oszacowanie prawdopodobieństwa dotrzymania planowanego terminu pewnego z wewnętrznych głównych zdarzeń sieci jest analogiczne jak dla zdarzenia końcowego. Obliczamy

prawdopodobieństwo  $P \left\{ T_E \leq T_S \leq T_L \right\}$ , tj. prawdopodobieństwo, z jakim czas  $T_S$  znajdzie się w przedziale  $T_L - T_E$ .

Można jednak również obliczyć prawdopodobieństwo dotrzymania  $T_S$ , tj.  $P \left\{ T_E \leq T_S \right\}$  według wzoru

$$t = \frac{T_S - T_E}{\sigma T_E} \quad /84/$$

albo prawdopodobieństwo nieprzekroczenia najpóźniejszego czasu, tj.  $P \left\{ T_S \leq T_L \right\}$ .

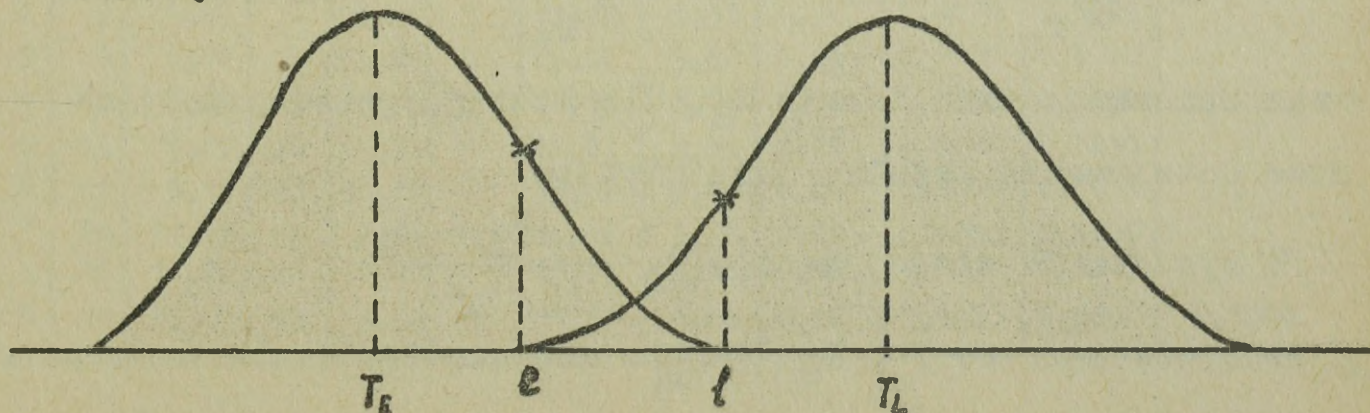
Dla  $P \left\{ T_E \leq T_S \leq T_L \right\}$  zachodzi równość

$$t = \frac{T_L - T_S}{\sigma T_L} - \frac{T_E - T_S}{\sigma T_E} \quad /85/$$

Przeprowadzimy analizę prawdopodobieństw dotrzymania planowanych terminów wewnętrznych głównych zdarzeń,  $T_S$ .

Tutaj rozróżniamy dwa podstawowe przypadki. Jeżeli dla pewnego zdarzenia zachodzi  $T_L \leq T_E$  /negatywny zapas czasowy/, podstawiamy  $T_S = T_L$ . W przypadku, gdy  $T_L \geq T_E$ , wyznaczenie  $T_S$  jest bardziej skomplikowane.

Dla wszystkich możliwych wartości  $T_E$  i  $T_L$ , które mogą wystąpić, oznaczamy je przez  $e$  i  $l$ ,  $T_S$  musi spełniać warunek  $e \leq T_S \leq l$ . Zwracamy przy tym uwagę na kształt krzywych gęstości prawdopodobieństw zmiennych losowych  $T_E$  i  $T_L$ ; zob. rys. 73:



rys. 73

Najpierw wyznaczmy przedział  $\langle e, 1 \rangle$ , dla którego zachodzi:

$$e \leq T_S \leq 1; \quad P \left\{ e \leq T_S \right\} = 0,25; \quad P \left\{ 1 \geq T_S \right\} = 0,50.$$

Teraz obliczymy wartość

$$P \left\{ e \leq \left[ T_E + \frac{T_L - T_E}{2} \right] \leq 1 \right\} \quad /86/$$

Dla jednakowych krzywych gęstości prawdopodobieństwa wartość planowanego terminu zdarzenia będzie równać się:

$$T_S = T_E + \frac{T_L - T_E}{2}$$

Jeżeli jednak wartości  $\sigma_{T_E}^2$  i  $\sigma_{T_L}^2$  różnią się zasadniczo, można spróbować, czy przez zwiększenie lub zmniejszenie wartości  $s$  /możliwej wartości  $T_S$ / nie można osiągnąć większego prawdopodobieństwa. Chodzi o postępowanie iteracyjne celem osiągnięcia większego prawdopodobieństwa dotrzymania  $T_S$ .

Planowany termin  $T_S$  określamy w ten sposób, żeby spełniał on żądane warunki, a jego prawdopodobieństwo było możliwie największe.  $T_S$  będzie więc znajdować się w punkcie maksymalizującym prawdopodobieństwo  $P \left\{ e \leq T_S \leq 1 \right\}$ :

$$P \left\{ e \leq T_S \leq 1 \right\} \approx \max_s \left\{ P(e \leq s); P(1 \geq s) \right\} \quad /87/$$

Dla wartości  $T_S$  wyznaczmy więc wartości  $\phi /t/$  dla

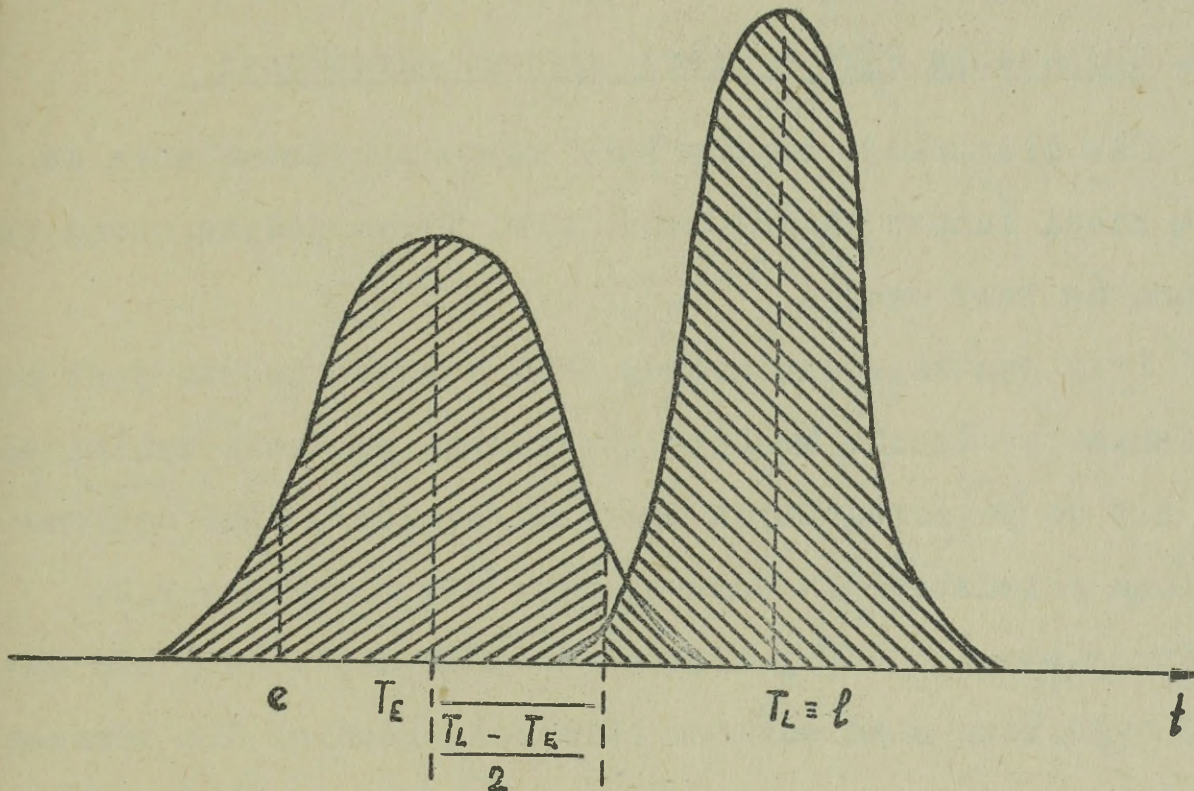
$$t = \frac{T_S - T_E}{\sigma_{T_E}} \quad \text{oraz} \quad t = \frac{T_L - T_S}{\sigma_{T_L}} \quad /88/$$

oraz obierzemy taki termin  $T_S$ , dla którego prawdopodobieństwo dotrzymania terminu jest większe.

Z rysunku 74 widać, że dla  $T_S = \frac{T_L - T_E}{2}$

prawdopodobieństwo  $P \left\{ T_S \geq T_L \right\}$  równa się 0,50, ale

$P \{ T_S \geq T_E \}$  można powiększyć za pomocą przesunięcia  $T_S$  na późniejszy termin względem wymaganego prawdopodobieństwa dotrzymania planowanego terminu danego zdarzenia /rys. 74/.



rys. 74

Przeprowadzimy teraz obliczenia, korzystając z macierzy naszego przykładu i wyniki uporządkujemy w tablicy:

i	$T_E$	$\sigma_{T_E}^2$	$T_L$	$\sigma_{T_L}^2$	TR	$\sigma_{T_E}^2 + \sigma_{T_L}^2$	$\sqrt{\sigma_{T_E}^2 + \sigma_{T_L}^2}$	t	$\Phi(t)$ $P\{TR > 0\}$	$\Phi(t)$ $P\{TR < 0\}$	$P\{T_E \leq T_S\}$
0	0	0,00	0	15,07	0	15,07	3,88	0,00	0,5000	0,5000	
1	5	0,49	5	14,58	0	15,07	3,88	0,00	0,5000	0,5000	
2	7	1,49	8	9,58	1	11,07	3,33	0,30	0,6179	0,3821	
3	9	2,18	9	12,89	0	15,07	3,88	0,00	0,5000	0,5000	
4	15	7,47	15	6,69	0	14,16	3,76	0,00	0,5000	0,5000	
5	15	7,47	16	4,38	1	11,85	3,44	0,29	0,6170	0,3830	
6	12	3,18	12	11,89	0	15,07	3,88	0,00	0,5000	0,5000	
7	20	11,47	20	2,69	0	14,16	3,76	0,00	0,5000	0,5000	
8	26	14,07	26	1,00	0	15,07	3,88	0,00	0,5000	0,5000	
9	30	15,07	30	9,00	0	15,07	3,88	0,00	0,5000	0,5000	0,5000

Ważności prawdopodobieństwa tego, że zapas czasowy będzie mniejszy lub większy od zera wyznaczamy dla wartości  $-t$  i  $t$  z tablicy funkcji  $\phi /t/$  rozkładu normalnego.

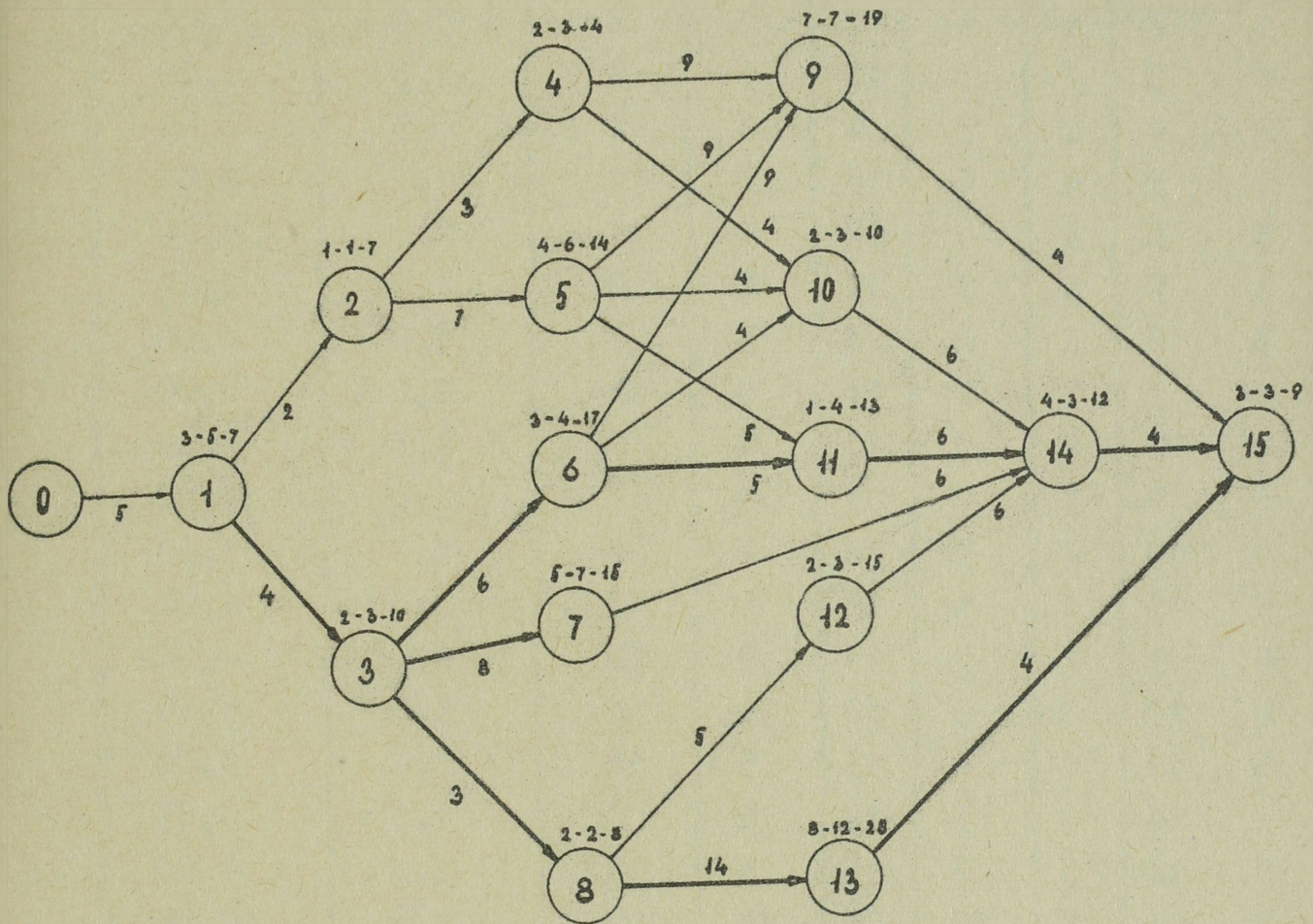
### 2.4.3. Obliczenia PERT w sieci węzłowo określonej

Dla ilustracji metody PERT użyto przedstawienia za pomocą sieci łukowo określonej w CPM. Tylko jedną ocenę zamieniono na trzy oceny.

Przy zastosowaniu metody PERT korzystniejsze jest posługiwanie się siecią węzłowo określoną, ponieważ wyniki odnoszą się do poszczególnych zdarzeń /węzłów/. Sieć węzłowo określona przedstawiona jest na rys. 4 w rozdziale 2.2.

W praktyce stosuje się jednak nieco inną sieć. Żeby móc obliczyć wyjściową sieć węzłowo określoną również dla zdarzeń końcowych, trzeba przed pierwsze zdarzenie wstawić czynność o trwaniu 0 i każdemu powiązaniu /strzałce/ przyporządkować oczekiwany czas trwania następnego zdarzenia.

Wykorzystamy te same oszacowania jak w poprzednim obliczeniu. Weźmy przykładową sieć /rys. 75/:



rys. 75

Czynność 1 będzie poprzedzać zdarzenie pomocnicze 0 o czasie trwania równym zeru. Następnie wyznaczmy dla każdej czynności czas  $t_e$ , tj przekształcamy trzy oceny w jedną. Czasy  $t_e$  poszczególnych czynności przyporządkujemy związkom /strzałkom/, które prowadzą do danego zdarzenia. Przeprowadzimy więc obliczenia dla wszystkich powiązań w sieci:

Nr zdarzeń		a	m	b	$t_e$	b-a	$\sigma_{t_e}$	$\sigma_{t_e}^2$
0	1	3	5	7	5	4	0,7	0,49
1	2	1	1	7	2	6	1,0	1,00
1	3	2	3	10	4	8	1,3	1,69
2	4	2	3	4	3	2	0,3	0,09
2	5	4	6	14	7	10	1,7	2,89
3	6	3	4	17	6	14	2,3	5,29
3	7	5	7	15	8	10	1,7	2,89
3	8	2	2	8	3	6	1,0	1,00
4	9	7	7	19	9	12	2,0	4,00
4	10	2	3	10	4	8	1,3	1,69
5	9	7	7	19	9	12	2,0	4,00
5	10	2	3	10	4	8	1,3	1,69
5	11	1	4	13	5	12	2,0	4,00
6	9	7	7	19	9	12	2,0	4,00
6	10	2	3	10	4	8	1,3	1,69
6	11	1	4	13	5	12	2,0	4,00
7	14	4	5	12	6	8	1,3	1,69
8	12	3	3	15	5	12	2,0	4,00
8	13	8	12	28	14	20	3,3	10,89
9	15	3	3	9	4	6	1,0	1,00
10	14	4	5	12	6	8	1,3	1,69
11	14	4	5	12	6	8	1,3	1,69
12	14	4	5	12	6	8	1,3	1,69
13	15	3	3	9	4	6	1,0	1,00
14	15	3	3	9	4	6	1,0	1,00

Jeżeli wartości  $t_e$  zostały przyporządkowane odpowiednim powiązaniom na rys. 75, przeprowadzimy obliczenia najwcześniejszych i najpóźniejszych czasów  $T_E$  i  $T_L$  oraz odpowiednich wariacji.

Obliczenia przeprowadzimy za pomocą macierzy sprzężonej. Teraz okazuje się, dlaczego ocenialiśmy powiązania

między czynnościami. Gdybyśmy zastosowali pierwotną sieć bez pomocniczego zdarzenia początkowego oraz bez ocen powiązań, byłyby zajęte wszystkie pola na głównej przekątnej i nie moglibyśmy przeprowadzić obliczeń. Ułożymy więc macierze

$\sigma$	$T_E$	$i$	$j$	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	
0,00	0	0	0	0,49																
0,49	5	1		1,69																
1,49	7	2		0,09																
2,18	9	3		5,29																
1,58	10	4		4,00																
4,38	14	5		4,00																
7,47	15	6		4,00																
5,07	17	7																		
3,18	12	8																		
11,4	24	9																		
9,16	19	10																		
11,47	20	11																		
7,18	17	12																		
14,07	26	13																		
13,16	26	14																		
15,07	30	15																		
		$T_L$	0	5	8	9	16	15	15	15	20	12	26	20	20	20	26	26	26	30
		$T_E$	0	5	7	9	10	15	14	15	17	12	24	19	20	17	26	26	26	30
		$T_B$	0	0	1	0	6	1	1	0	3	0	2	1	0	3	0	0	0	0
		$\Sigma T_L$	15,07	14,58	9,58	12,89	5,00	6,69	6,69	6,69	2,69	11,89	1,00	2,69	2,69	2,69	1,00	1,00	1,00	1,00

Obliczone wartości wpisujemy znów do tablicy wyników tak samo jak we wszystkich poprzednich przykładach.

Zdarzenia	$T_E$	$\sigma^2_{T_E}$	$T_L$	$\sigma^2_{T_L}$	TR	$\sigma^2_{T_L} + \sigma^2_{T_E}$	$\sqrt{\sigma^2_{T_L} + \sigma^2_{T_E}}$	t	$\phi$ $P\{TR \geq 0\}$
1	5	0,49	5	14,58	0	15,07	3,88	0,00	0,5000
2	7	1,49	8	9,58	1	11,07	3,33	0,30	0,6179
3	9	2,18	9	12,89	0	15,07	3,88	0,00	0,5000
4	10	1,58	16	5,00	6	6,58	2,56	2,34	0,9893
5	14	4,38	15	6,69	1	11,07	3,33	0,30	0,6179
6	15	7,47	15	6,69	0	14,16	3,76	0,00	0,5000
7	17	5,07	20	2,69	3	7,76	2,78	1,08	0,8643
8	12	3,18	12	11,89	0	15,07	3,88	0,00	0,5000
9	24	11,47	26	1,00	2	12,47	3,53	0,56	0,7257
10	19	9,16	20	2,69	1	11,85	3,44	0,29	0,6179
11	20	11,47	20	2,69	0	14,16	3,76	0,00	0,5000
12	17	7,18	20	2,69	3	9,87	3,14	0,95	0,8413
13	26	14,07	26	1,00	0	15,07	3,88	0,00	0,5000
14	26	13,16	26	1,00	0	14,16	3,76	0,00	0,5000
15	30	15,07	30	0,00	0	15,07	3,88	0,00	0,5000

Widzimy, że przytoczona metoda daje dla PERT bardziej szczegółowe wyniki niż sieć łukowo określona. Porównując wyniki w niniejszej tablicy z tablicą wyników dla metody CPM w rozdz. 2.3.1. widzimy, że zapas czasowy  $T_L$  czynności odpowiada zapasowi całkowitemu tej samej czynności. Np. czynności 4 z zapasem 6 dla metody PERT odpowiada czynność /2,5/ z zapasem całkowitym 6 dla metody CPM.

Dla odróżnienia zapas zasowy  $T_L$  nazywa się często w praktyce PERT luzem. Luz jest to termin dla metody PERT i wyraża on przedział czasowy, w którym można z pewnym prawdopodobieństwem oczekiwać zrealizowania niektórego zdarzenia.

Zapas czasowy jest to termin metody CPM i oznacza przedział czasowy dla czynności pomiędzy dwoma zdarzeniami, w którym ta czynność trwa bez wpływu na ścieżkę krytyczną.

Obliczenia przeprowadzamy analogicznie jak dla metody CPM, za pomocą trzech metod: ręcznie, za pomocą macierzy lub maszyny matematycznej. Wybór jednej z nich zależy od rozległości sieci i tzw. stopnia uwikłania sieci. Stopień uwikłania sieci jest określony liczbą węzłów /zdarzeń/ stopnia większego lub równego 2, tzn. do zdarzenia prowadzą co najmniej dwie drogi. Stopień zdarzenia jest to więc liczba czynności, dla których zdarzenie jest ich zakończeniem. Jeżeli stopień uwikłania sieci jest mały, wtedy stosujemy ręczne obliczenie /zdarzenia posiadają w większości stopień 1/. Jeżeli stopień uwikłania sieci jest duży, wtedy korzystniejsze jest przeprowadzenie obliczeń za pomocą macierzy ewentualnie maszyny.

Stopień uwikłania sieci można ustalić stosunkowo łatwo. Niech  $m$  oznacza liczbę zdarzeń /węzłów/ i  $n$  liczbę łuków zorientowanych w sieci. Sieć jest zorientowana i ciągła, więc zachodzi

$$n \geq m - 1,$$

tzn., aby móc połączyć  $m$  węzłów /zdarzeń/ w ciągłą sieć, potrzeba co najmniej  $m - 1$  łuków. Jeżeli liczba łuków wynosi dokładnie  $m - 1$ , wtedy powstaje sieć ciągła, w której stopień każdego węzła równa się jedności. Każdy następny łuk powiększa stopień uwikłania sieci. Zatem stopień uwikłania sieci  $S$  równa się:

$$S = n - m + 1.$$

Dla obliczanego przykładu prostego projektu można wyznaczyć, że sieć łukowo określona posiada stopień uwikłania  $S = 16 - 10 + 1 = 7$  i sieć węzłowo określona posiada stopień uwikłania  $S = 25 - 16 + 1 = 8$ . Sieć określona węzłowo posiada więc większy stopień uwikłania.

Dla uzupełnienia przytoczymy, że maksymalna liczba  $n$  łuków w sieci zawierającej  $m$  węzłów równa się

$$n = 0,5 \cdot m (m - 1)$$

W macierzy sprzężonej sieci z maksymalną liczbą łuków zostałyby zajęte wszystkie pola nad główną przekątną. Oznacza to, że każdy węzeł sieci połączony jest ze wszystkimi pozostałymi węzłami. Liczba  $n$  łuków w sieci jest więc ograniczona ze względu na ilość  $m$  węzłów następująco:

$$m - 1 \leq n \leq 0,5 \cdot m (m - 1)$$

#### 2.4.4. Wady metody PERT

Dotychczas mówiliśmy tylko o zaletach metody PERT i pozostałych metod analizy sieciowej. Metody te mają jednak również wady, przede wszystkim w teorii metody PERT istnieją często luki.

Podstawowa koncepcja wszystkich metod jest bardzo prosta. To, że są zrozumiałe i proste, nie może ukryć faktu, że rzeczywistość jest bardzo skomplikowana. Modele są tylko uproszczeniem rzeczywistości i CPM i PERT ocenia ją tylko z punktu widzenia czasu ewentualnie nakładów. Złożony proces gospodarczy jest w każdym momencie czasu zależny od dużej ilości zmiennych: czasu, sił roboczych i ich ilości, kwalifikacji, wydajności, psychologii itp., maszyn i ich wydajności, zużycia, ilości itp., materiału itd. Założenie, że pro-

ces jest funkcją czasu, przedstawia więc aproksymację rzeczywistości. Aproksymacja ta jest jednak umotywowana, ponieważ w istocie rzeczy można wszystkie pozostałe zmienne przetransformować na czas, który jest ich wspólnym mianownikiem.

Przytoczmy niektóre wady metod przede wszystkim dlatego, żeby zrozumieć je tylko jako środek pozwalający uzyskać podstawy do decydowania. Żadne metody nie mogą zamienić osoby kierującej i ekonomicznej decyzji człowieka. Ich zastosowanie daje pozytywne rezultaty wtedy, jeżeli znamy nie tylko zalety, ale również ich ograniczenie, tj. to, co można od nich oczekiwać.

W teorii metody PERT nie wyłączamy ewentualnych błędów w oszacowaniach czasów czynności, źródłem których może być:

1/ Nie znamy faktycznego rozkładu prawdopodobieństwa czynności. Można o nim tylko powiedzieć, że jest ciągły, jednomodalny i posiada skończony przedział dodatni. Te warunki spełnia oczywiście dużo typów rozkładów.

Rozkład  $\beta$  obraliśmy z definicji.

Dla trzech jednakowych wartości,  $a$ ,  $m$  i  $b$  można otrzymać zupełnie inny przebieg gęstości prawdopodobieństwa /zob. rys. 66/. Jak duży może być błąd wartości średniej? Ewentualny błąd wartości średniej jest funkcją mody, który może znajdować się gdziekolwiek w przedziale  $\langle a, b \rangle$ . Dla uproszczenia rozważmy przedział  $\langle 0, 1 \rangle$  i  $0 \leq m \leq 1/2$ . Największy błąd /wartość bezwzględna/ wartości średniej wynosi

$$\max \left[ \left| \frac{1}{6} (4m + 1) - \frac{1}{2} \right| ; \left| \frac{1}{6} (4m + 1) - m \right| \right] = \\ = \frac{1}{3} (1 - 2m). \quad /90/$$

Jeżeli moda jest przesunięta bliżej końców przedziału ewent. błąd może być równy  $1/3$ , tj. 33%. Jeżeli moda jest scentralizowana, tj.  $|1 - 2m| \leq 1/6$ , błąd może wynosić 11%. Błąd odchylenia standartowego może maksymalnie równać się  $1/6$ , tj. 17%; nie jest on zależny od mody.

2/ Przy założeniu, że rozkład czynności jest rzeczywiście  $\beta$  rozkładem, wtedy dalsze ewentualne błędy mogą być spowodowane użyciem aproksymacji  $t_e = 1/6 \cdot (a + 4m + b)$  oraz założeniem  $\sigma_{t_e} = 1/6 (b - a)$ , chociaż znamy dokładne wartości  $a$ ,  $b$  i  $m$ . Wartość średnia i odchylenie standartowe są funkcjami parametru  $\alpha$  i mody /zob. dodatki mat./ w przedziale  $\langle 0, 1 \rangle$ :

$$t_e = \frac{\alpha + 1}{\alpha + \gamma + 2}$$
$$\sigma_{t_e}^2 = \frac{(\alpha + 1)(\gamma + 1)}{(\alpha + \gamma + 2)^2 (\alpha + \gamma + 3)}$$
$$m = \frac{\alpha}{\alpha + \gamma}$$

/91/

Największy błąd wartości średniej równa się

$$\left| 1/6 (4m + 1) - \frac{m(\alpha + 1)}{\alpha + 2m} \right|,$$

tj. w przybliżeniu 33%.

Największy błąd odchylenia standartowego wynosi

$$\left| 1/6 - \sqrt{m^2 (\alpha + 1) (\alpha - \alpha m + m) / (\alpha + 2m)^2 (\alpha + 3m)} \right|, /92/$$

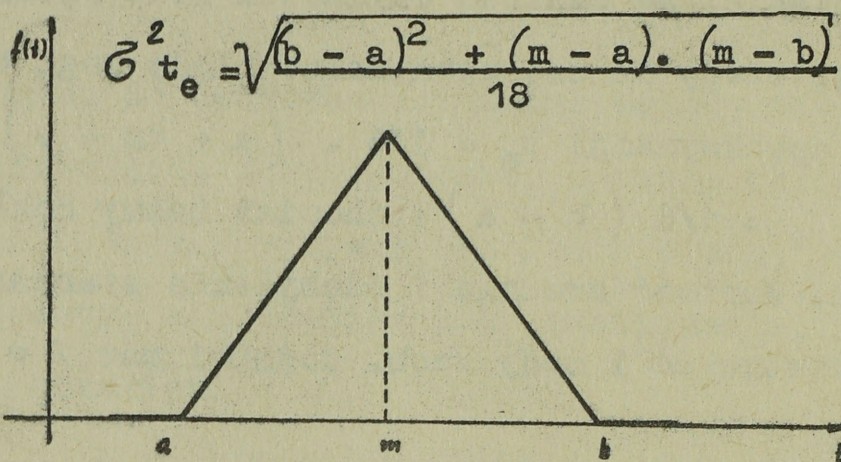
tj. w przybliżeniu 17%. Przy założeniu, że moda jest scentralizowana ( $|1/2 - m| \leq 1/6$ ) oraz dla parametru  $\alpha$  zachodzi  $1 \leq \alpha \leq 6$ , błąd wartości  $t_e$  wynosi około 4% i  $\sigma_{t_e}$  około 7%.

3/ Przypuśćmy, że rozkład  $\beta$  i wzory na wartość średnią oraz wariancję są dokładne. Wtedy błędy wynikają z niedokładnego oszacowania wartości  $a$ ,  $m$  i  $b$ , które mogą w dużym

stopniu różnić się od rzeczywistych wartości A, M i B.

Na podstawie tej analizy L.R.Mc CRIMMON i Ch.A. RYAVEC z Rand Corporation proponują zastosować rozkład trójkątny zamiast rozkładu  $\beta$ . Dla rozkładu trójkątnego można bowiem napisać dokładne wzory na wartość średnią i wariancję:

$$t_e = \frac{a + m + b}{3}$$



1931

rys. 76

Jeżeli za pomocą  $a$ ,  $m$  i  $b$  określimy modę oraz przedział rozkładu trójkątnego, znamy tym samym cały rozkład.

Nie jest to możliwe dla rozkładu  $\beta$ , który jest bardziej elastyczny. Jednak nie korzystamy z tej własności, ponieważ wprowadziliśmy założenie

$$\sigma t_e = 1/6 \cdot (b - a)$$

Na razie przeprowadzaliśmy analizę ewentualnych błędów ocen czasów poszczególnych czynności. Następne błędy mogą powstać przy obliczaniu ścieżek sieci oraz przy szukaniu rozkładu prawdopodobieństwa dla zdarzenia końcowego. Nawet przy założeniu, że wszystkie dane czasowe poszczególnych czynności są poprawnie wyznaczone, nie można uniknąć pewnych błędów w sieci.

Założmy, że sieć zawiera  $n$  różnych ścieżek  $P_1, \dots, P_n$  prowadzących od zdarzenia początkowego do zdarzenia końcowego. Każdej z nich odpowiada zmienna losowa, tzw. czas trwania przedsięwzięcia dla danej ścieżki. Zmienne te oznaczamy za pomocą symboli  $p_1, \dots, p_n$ . Jedną z tych zmiennych losowych

będzie posiadała wartość oczekiwaną większą niż  $(n - 1)$  pozostałych. Ta największa zmienna losowa odpowiada ścieżce krytycznej i jej wartość oczekiwana równa jest  $T_E$ .

W teorii PERT zakłada się /na podstawie tw. Lapunowa/, że czas trwania projektu o wartości średniej  $T_{PE} = E/p_n$  ma rozkład normalny. Dystrybuanta rozkładu normalnego /Gausa/ ma postać

$$\phi(t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^t e^{-\frac{t^2}{2}} dt, \quad /94/$$

gdzie  $t = \frac{\gamma_i - E/p_n}{\sigma \gamma_n}$ .

Wartości funkcji  $\phi(t)$  można znaleźć w tablicach, wyznaczając one prawdopodobieństwo

$$\phi(t) = P \left\{ \max_i p_i \leq \gamma_i \right\}, \quad /95/$$

tj. prawdopodobieństwo tego, że którakolwiek wartość  $p_i$  będzie krytyczną. Prawdopodobieństwo to nazywamy krytycznością ścieżki.

Do wyznaczania ścieżki krytycznej przy metodzie PERT, używa się tylko wartości średnich trwania czynności. Elementu stochastycznego wariacji trwania - nie uwzględniamy. <sup>\*/</sup>

W modelu stochastycznym każda ścieżka posiada prawdopodobieństwo, że będzie ścieżką krytyczną /również zerową/. Prawdopodobieństwo tego, że określona ścieżka jest ścieżką krytyczną, w bardziej rozległych sieciach może być bardzo

-----  
\*/ Tylko wtedy, kiedy istnieje więcej najdłuższych ścieżek, uważamy za krytyczną tę ścieżkę, dla której odchylenie standardowe jest największe.

małe. Najbardziej prawdopodobna ścieżka krytyczna może pojawić się rzadko; <sup>\*/</sup> najbardziej prawdopodobna krytyczna ścieżka i ścieżka krytyczna mogą więc różnić się.

Współczesna metodyka PERT rozważa tylko ścieżkę krytyczną a nie najbardziej prawdopodobną ścieżkę krytyczną. Lepiej jest używać pojęcia czynności krytycznej, ponieważ czynność, dla której prawdopodobieństwo tego, że leży ona na ścieżce krytycznej jest największe nie musi wcale leżeć na najbardziej prawdopodobnej ścieżce krytycznej.

Korzystniej jest obliczyć krytyczność czynności oraz śledzić tzw. krytyczny ciąg czynności, które niekoniecznie tworzą łańcuch od początkowego zdarzenia do końcowego.

Jeżeli jedna ze ścieżek jest dłuższa od pozostałych, wtedy można zastosować centralne twierdzenie graniczne oraz sumować czasy czynności leżących na tej ścieżce. Pozostałe ścieżki nie mają wpływu na rozkład całkowitego czasu czynności.

Im więcej jest równoległych ścieżek, mniej więcej jednakowo długich, tym bardziej wzrasta błąd wartości średniej całkowitego czasu, ponieważ rozkład prawdopodobieństwa ma wpływ na więcej ścieżek.

Połączenia pomiędzy tymi równoległymi ścieżkami /tzw. korelacje/ w pewnym stopniu kompensują błędy. Dla większości sieci istnieje dużo czynności, których prawdopodobieństwo, że będą krytycznymi, można prawie zaniedbać.

---

\*/ Jeżeli rzucamy 1000 razy monetę, najbardziej prawdopodobną liczbą reszek jest 500, ale prawdopodobieństwo tego, że 500 razy otrzymamy reszkę, jest małe.

Dla uproszczenia obliczeń można nie brać pod uwagę tych czynności. Możemy więc przeprowadzić redukcję sieci.

Dwie czynności łączące się szeregowo można uważać za jedną o czasie trwania, który jest sumą czasów trwania obydwóch dróg. Dwie równoległe czynności można uważać za jedną, przy czym za czas jej trwania uważamy czas dłuższej z nich.

Porównamy sumę czasów optymistycznych wszystkich czynności wzdłuż każdej ścieżki prowadzącej do danego zdarzenia z sumą czasów pesymistycznych wszystkich czynności wzdłuż każdej ścieżki prowadzącej do danego zdarzenia. Jeżeli suma czasów minimalnych wzdłuż jednej ścieżki jest większa od sumy czasów maksymalnych wzdłuż ścieżki drugiej, wtedy ścieżka w drugim przypadku nie może wpłynąć na rozkład prawdopodobieństwa określonego zdarzenia i można jej nie uwzględniać przy obliczeniach.

Korzystne jest przeprowadzać obliczenia krytyczności czynności za pomocą metod Monte Carlo. Niektóre aspekty obliczania znajdują się w rozdz. 2.5.4.

Pokazanie niektórych wad metod sieciowych ma na celu zwrócenie uwagi na to, że nie można uważać metodę PERT za "lekarstwo na wszystko". Trzeba pamiętać o tym, że żadne metody, matematyczne albo inne, maszyny matematyczne oraz inne środki techniki obliczeniowej nie mogą dać pozytywnych rezultatów w zastosowaniach, o ile zostaną zastosowane bez głębokiej znajomości danej problematyki oraz bez wszechstronnej analizy naukowej.

#### Zalety metod analizy za pomocą ścieżki krytycznej /CPA/

Umyślnie interesowaliśmy się wadami metod CPA, szczególnie metody PERT. Zalety metod CPA w porównaniu z metodami

innymi są oczywiste i nie będziemy się nimi bliżej zajmować. Przedstawimy w 10-ciu punktach, jakie możliwości dają metody CPA. Metody te umożliwiają:

- 1/ wprowadzać porządek i harmonię do planowania i kierowania procesami gospodarczymi;
- 2/ rozwiązywać w całości bardzo złożone projekty ze względu czasowego i rzeczowego;
- 3/ wykryć te części projektu, które mają bezpośredni wpływ na zrealizowanie planowanego terminu oraz te, na które trzeba zwrócić uwagę kierowania. Równocześnie wykryć te części, gdzie znajdują się nadmierne środki;
- 4/ automatycznie rozpoznać ewentualne dysproporcje w czasie i nakładach;
- 5/ poprawić pierwotny plan przy stwierdzeniu, że zaplanowane czasy nie odpowiadają rzeczywistości;
- 6/ ustalić optymalny termin trwania projektu ze względu na nakłady albo skrócić czas jego trwania przy najmniejszym wzroście nakładów;
- 7/ kontrolować przebieg realizacji projektu za pomocą wykorzystania potoku informacji, żeby móc zawczasu wydać rozporządzenia dotyczące poprawy planu;
- 8/ obliczyć prawdopodobieństwo wykonania ważnych planowanych etapów oraz całego projektu;
- 9/ dokładnie opisać gospodarczą sytuację w którymkolwiek momencie realizacji projektu;
- 10/ ułożyć harmonogram prac w ten sposób, żeby osiągnąć pełne i ciągle wykorzystanie źródeł /sił roboczych, maszyn, materiałów itp/.

Są to główne zalety metod. Metody te mają jeszcze szereg mniejszych lub większych zalet w zależności od konkretnych warunków zastosowania.

## 2.5. TECHNIKI POKREWNE

### 2.5.1. Uogólnienie metody PERT

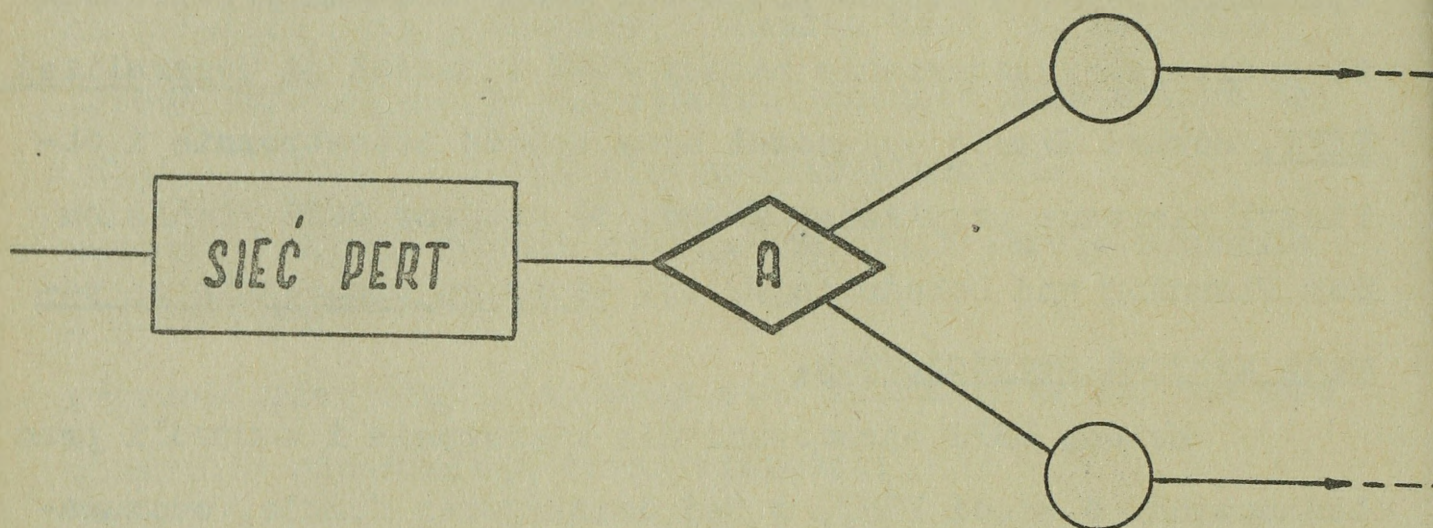
Uogólnienie metody PERT pozwala rozważać alternatywy wykonania pewnych etapów projektu. Raoul Freeman przedstawił tę możliwość rozszerzenia metody PERT i nazwał ją Generalized PERT. Howard Eisner opracował nową metodę teoretycznie i obliczył pierwsze przykłady. Metodę tę nazwano DBPS /Decision Box Planning and Scheduling/, tj. technika planowania za pomocą zdarzeń decydujących.

Metodę DBPS opracowano dla kierowania i kontroli prac badawczych. W sieci PERT, w jej dzisiejszej formie, odczuwamy przede wszystkim brak zadowalającego stopnia swobody. Jeżeli wykorzystujemy metodę PERT do procesów badawczych, mamy do czynienia z podstawowym ograniczeniem - nie uwzględniamy bardzo ważnego aspektu - niepewności.

W planowaniu badań nie wystarczy określić tylko czasy trwania czynności i ich rozrzut, tj. określić czynność statystycznie. Trzeba wprowadzić wystarczający stopień swobody. Charakter czynności badawczych jest inny niż charakter pozostałych czynności. Są to często samodzielne studia, próby dotyczące uzasadnienia istnienia lub nieistnienia pewnych związków lub hipotez, szukanie pewnych faktów itp. Następne czynności są zależne od wyników tych studiów.

W rzeczywistości więc w projekcie badawczym rozpoczęcie pewnej czynności nie zależy tylko od ukończenia czynności poprzednich, ale przede wszystkim od rezultatów tych czynności.

Zakładamy, że w pewnej fazie realizacji projektu zostanie osiągnięte zdarzenie, z którego prowadzą dwie drogi, z których musimy obrać jedną. Takie zdarzenie nazywamy decydującym zdarzeniem /A/. Np. na rys. 77



rys. 77

Wybór dalszego postępowania zależy jest od rezultatów czynności kończących w zdarzeniu A. W naszym przypadku chodzi o dwie alternatywne możliwości, co spotyka się przeważnie w projektach rozwoju nowych produktów. Ogólnie z decydującego zdarzenia może prowadzić więcej alternatywnych dróg.

Dwie drogi prowadzące z decydującego zdarzenia A nazywają się koniunktywnymi, jeżeli do zrealizowania całego projektu potrzebne jest, aby obydwie zostały zrealizowane. W tym przypadku zdarzenie A jest identyczne z pojęciem zdarzenia znanego z teorii metody PERT. Jeżeli można w zależności od re-

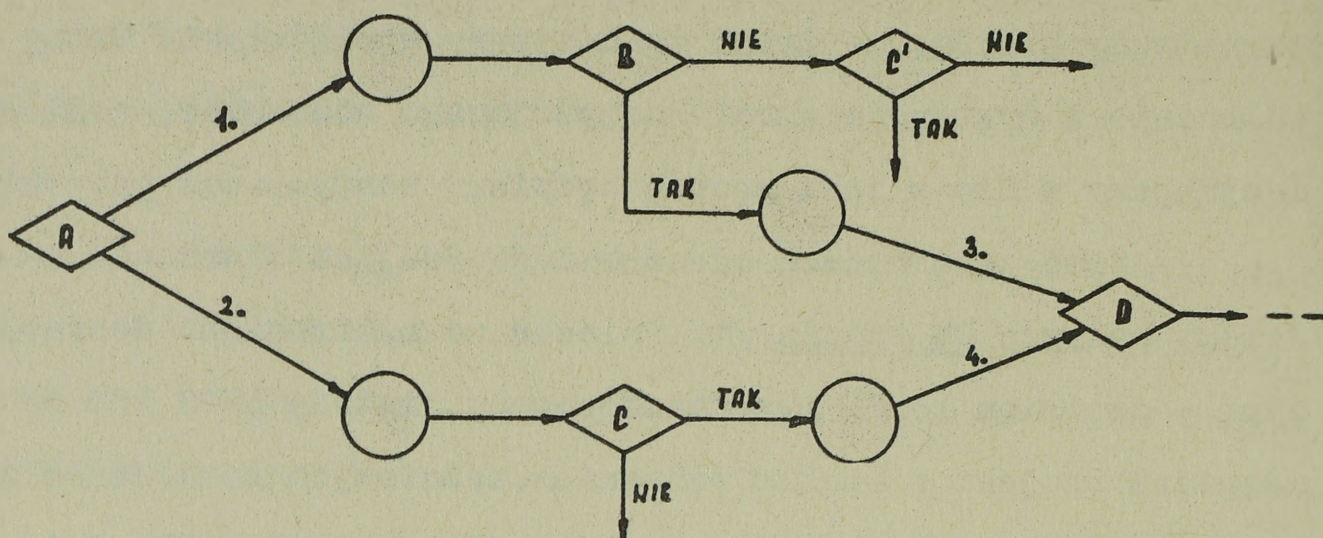
zultatów poprzednich czynności zrealizować tylko jedną z alternatywnych dróg, to drogi te nazywamy rozłącznymi. Tutaj zdarzenie A występuje w roli decydującego zdarzenia, ponieważ decydujemy w nim w jaki sposób będziemy kontynuować projekt.

Sieć zawierającą czasowe i decydujące zdarzenia będziemy nazywać DB-siecią /tj, siecią ze zdarzeniami decydującymi - decision box/. Przy zastosowaniu metody DBPS badamy najpierw projekt z punktu widzenia częściowych rezultatów i logicznych związków czynności. Sporządzimy ogólną DB-sieć, która nie zawiera żadnych czasowych ocen, ale przedstawia możliwe postępowania zależne od poszczególnych zdarzeń decydujących. Zdarzenie decydujące jest to w zasadzie pytanie, które prowadzi do jednej lub większej liczby alternatyw. Jest ono równocześnie punktem kontroli odkrywającym te miejsca projektu, w których oczekujemy ważnych decyzji dotyczących całego projektu. DB-sieć zawiera więc nie tylko drogi koniunktywne, ale również rozłączne. Można powiedzieć, że sieć PERT jest szczególnym przypadkiem ogólnej DB-sieci zawierającym tylko drogi koniunktywne.

W DB-sieci rozróżniamy dwa odrębne typy związków:

1. zależność dróg koniunktywnych
2. punkty spojenia dróg koniunktywnych.

1. Zależność dróg koniunktywnych powstaje wtedy, kiedy czynność leżąca na jednej ścieżce jest zależna od odpowiedzi na pytanie szczególnego zdarzenia decydującego leżącego na ścieżce drugiej. Zob. rys. 78.



rys. 78

Ścieżki 1. i 2. są koniunktywne oraz prowadzą do zdarzeń B i C. Załóżmy, że obydwie ścieżki są zależne w ten sposób, że w przypadku negatywnej odpowiedzi na B kierunek dalszego postępowania będzie zależny od odpowiedzi na C. Sposób przedstawienia tego zagadnienia jest następujący: za B powtarzamy jeszcze raz C w postaci C', a dopiero potem kontynuujemy następne. Skierowanie negatywnej alternatywy z B wprost do C pociąga za sobą fałszywe wnioski. Rezultat B nie warunkuje C, ale C' może nastąpić jednocześnie z C albo później.

2. Drugi związek przedstawiony na rysunku jest wyrażony za pomocą punktu, w którym realizuje się spojenie dwu lub większej liczby koniunktywnych ścieżek. W naszym przypadku jest to zdarzenie D. Do złączenia ścieżek 3. i 4. dochodzi w D i dlatego jest konieczne otrzymać odpowiedzi na B i C przed osiągnięciem D.

Ze względu na istnienie ścieżek rozłącznych jest oczywiste, że nie osiągniemy w rzeczywistości wszystkich możliwych zdarzeń końcowych różnych rozłącznych ścieżek. To oz-

nacza, że nie wszystkie czynności projektu zostaną zrealizowane i nie wszystkie zdarzenia zostaną osiągnięte. Trzeba znaleźć możliwe kombinacje zdarzeń końcowych, tj. określić możliwe rezultaty rozwoju projektu.

Metodę tę zademonstrujemy na uproszczonej DB-sieci, w której dla uproszczenia ominięto wszystkie zdarzenia oprócz decydujących /rys. 79/.

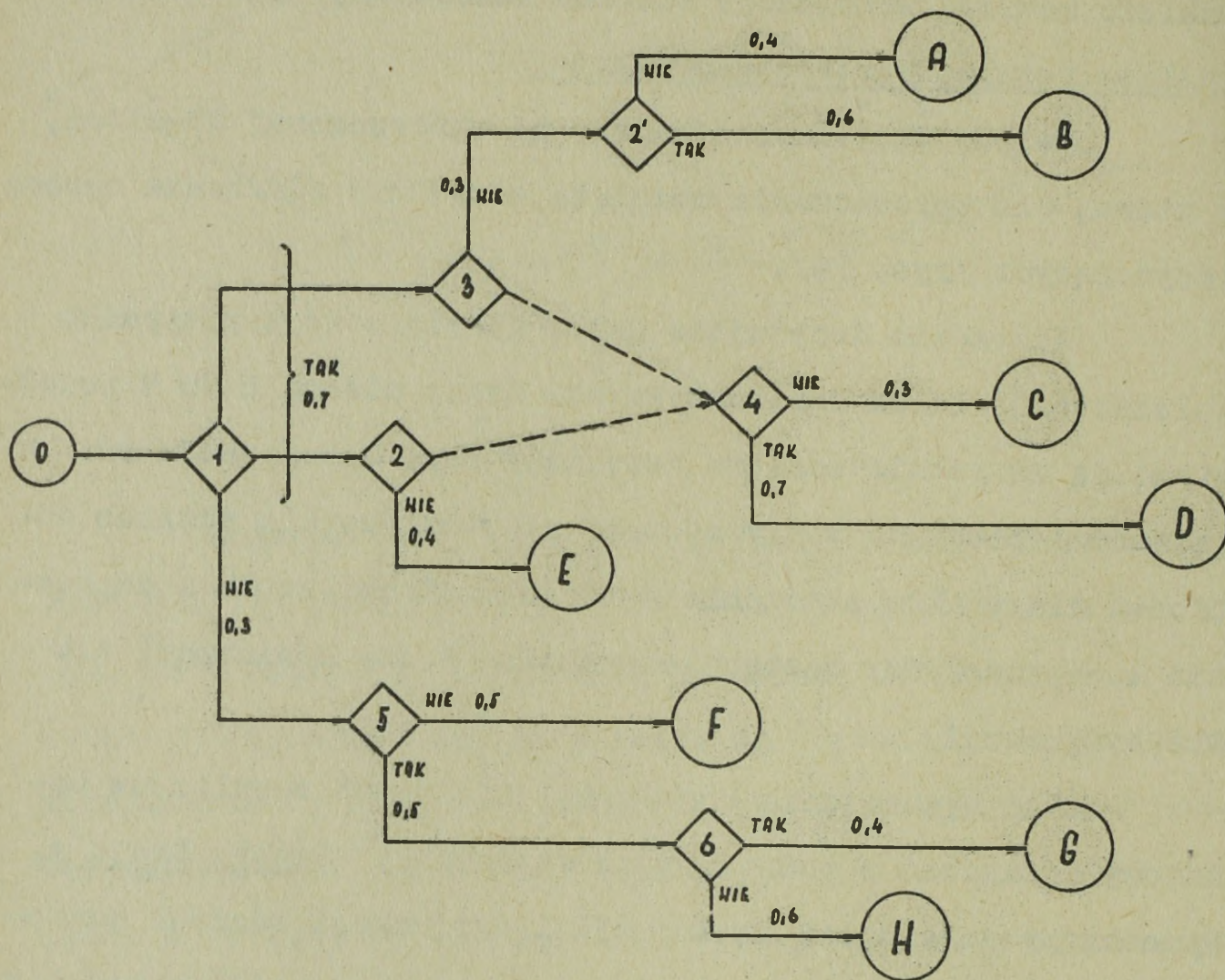
Zdarzenia decydujące 2 i 2' przedstawiają przypadek zależności ścieżek koniunktywnych. Zdarzenia od A do H przedstawiają wszystkie możliwe rezultaty /lub cele/ projektu. Czynności fikcyjne x i y zostały wprowadzone dla potrzeb obliczeń dla punktu złączenia ścieżek koniunktywnych w zdarzeniu 4. Wprowadzimy następnie symbole  $\cap$  dla koniunkcji i  $\cup$  dla dysjunkcji.

Dla wyznaczenia kombinacji możliwych rezultatów będziemy korzystać z podstawowych wiadomości algebry Boole'a. Wyznamy zależności koniunkcji i dysjunkcji zdarzeń końcowych i za pomocą praw łączności i dystrybutywności określimy zbiór możliwych kombinacji<sup>i</sup> rezultatów. W naszym przykładzie zachodzi

$$\left\{ \left[ (A \cup B) \right] \cap (Y \cup E) \right\} \cup \left\{ (G \cup H) \cup F \right\}, \quad /96/$$

gdzie  $X \cap Y = C \cup D$ .

Za pomocą przekształcenia /96/ otrzymamy zbiór możliwych rezultatów:  $(A \text{ i } Y)$ ,  $(A \text{ i } E)$ ,  $(B \text{ i } Y)$ ,  $(B \text{ i } E)$ ,  $(X \text{ i } Y) = (C \text{ lub } D)$ ,  $(X \text{ i } E)$ ,  $G, H \text{ i } F$ .



Rys. 79

Zależność ścieżek koniunktywnych wyznaczona za pomocą zdarzeń 2 i 2' ogranicza zbiór wyników. Wyniki (A i Y) i (B i E) nie są możliwe, ponieważ właściwie dają różne odpowiedzi na jedno decydujące zdarzenie 2. Jeżeli weźmiemy pod uwagę, że (X i Y) jest identyczne z (C lub D), otrzymamy następujący zbiór możliwych wyników:

A i E

B i Y

C

D

X i E

G

H

F

Powstaje pytanie: Dla których z podanych możliwych wyników istnieje największe prawdopodobieństwo ich zrealizowania? Jaki jest przedział czasu, w którym można oczekiwać z pewnym prawdopodobieństwem ich zrealizowania?

Sprawdzimy każde zdarzenie decydujące sici i przyporządkujemy każdej ścieżce rozłącznej albo zbiorom rozłącznym ścieżek koniunktywnych pewne prawdopodobieństwo. Np. planujemy skonstruowanie nowego modelu matematycznego. Znajdziemy się w sytuacji, kiedy trzeba zastanowić się na tym, czy dla modelu istnieje lub nie istnieje wystarczająca ilość danych wejściowych. Na to pytanie odpowiedź powinno dać zdarzenie decydujące. Według przedwstępnych wymagań można wyciągnąć wniosek, że mamy dane do dyspozycji w stosunku 2 : 1. Wtedy określimy prawdopodobieństwo alternatywy "tak" równe 0,67 i alternatywy "nie" równe 0,33. Jeżeli nie możemy zdecydować, czy mamy dane do dyspozycji lub nie, przyporządkujemy każdej alternatywie prawdopodobieństwo 0,5. Czynności prowadzące do tego zdarzenia decydującego przedstawiają obszerne wyznaczenie i znajdowanie danych wejściowych; wynikiem jest odpowiedź zdarzenia decydującego.

Jeżeli prawdopodobieństwo tego, że dla pewnego zdarzenia decydującego jedna ze ścieżek dysjunktywnych nie zostanie zrealizowana, prawie równa się jedności, wyłączamy pozostałe ścieżki rozłączne i zdarzenie decydujące przekształca

się w zwykłe zdarzenie czasowe. Można więc powiedzieć, że sieć PERT jest szczególnym przypadkiem ogólnej DB-sieci, w której ścieżka rozłączna albo zbiór ścieżek rozłącznych ma prawdopodobieństwo równe jedności dla każdego zdarzenia decydującego.

Uzupełnimy teraz sieć wyznaczonymi prawdopodobieństwami. Suma prawdopodobieństw dla każdego zdarzenia decydującego równa się 1. Teraz można wyznaczyć prawdopodobieństwo pojawienia się poszczególnych możliwych wyników

Wyniki	Składowe prawdopodobień- stwa	Wartości	Prawdopo- dobieństwo ostateczne
A a E	$p(A) p(E/A)$	$(0,4) (0,3) (0,7)$ 1	0,0840
B a Y	$p(B) p(Y/B)$	$(0,6) (0,3) (0,7)$ (1)	0,1260
C	$p(C) p(X) p(Y)$	$(0,3) (0,7) (0,6)$ $(0,7)$	0,0882
D	$p(D) p(X) p(Y)$	$(0,7) (0,7) (0,6)$ $(0,7)$	0,2058
X a E	$p(X) p(E/X)$	$(0,7) (0,7) (0,4)$	0,1960
G	$p(G)$	$(0,4) (0,5) (0,3)$	0,0600
H	$p(H)$	$(0,6) (0,5) (0,3)$	0,0900
F	$p(F)$	$(0,5) (0,3)$	0,1500
$\Sigma$			1,0000

Wyniki można uporządkować według wartości prawdopodobieństw. Prawdopodobieństw tych używamy raczej dla porównania niż wyznaczania wyniku na podstawie jego bezwzględnego prawdopodobieństwa. Dla przytoczonego przykładu największe praw-

dopodobieństwo odpowiada wynikowi D. Drugie największe wyniki ( $X$  i  $E$ ), co w rzeczywistości odpowiada tylko  $E$ . Ogólnie prawdopodobieństwa wyników zmniejszają się ze wzrostem długości sieci i liczby zdarzeń decydujących. Przy tych warunkach używamy miary entropii w funkcji miary przedziału, w którym są pewne wyniki bardziej prawdopodobne niż pozostałe:

$$H = - \sum_{i=1}^n p_i \log p_i, \quad /97/$$

gdzie  $H$  entropia,  $p_i$  - prawdopodobieństwo  $i$  - tego wyniku i  $n$  - liczba możliwych końcowych wyników. Np. dla sytuacji dwu alternatyw z prawdopodobieństwami 0,5 jest  $H = 1$  bit. Dla prawdopodobieństw 0 i 1 jest  $H = 0$ . Wiadomo, że wartość maksymalna entropii równa się  $\log n$  przy założeniu, że wszystkie prawdopodobieństwa równają się nawzajem. Miarę względnej niepewności systemu określamy za pomocą entropii względnej  $E$ :

$$E = \frac{H}{H_{\max}} \quad . \quad /redemcacja \quad 1 - \frac{H}{H_{\max}} \quad / \quad /98/$$

Dla naszej sieci  $H_{\max} = \log_2 8 = 3$  bity, entropia

$$H = - \sum_{i=1}^8 p_i \log p_i = 2,88 \text{ bit.} \quad \text{i } E = 0,96 \quad . \quad /99/$$

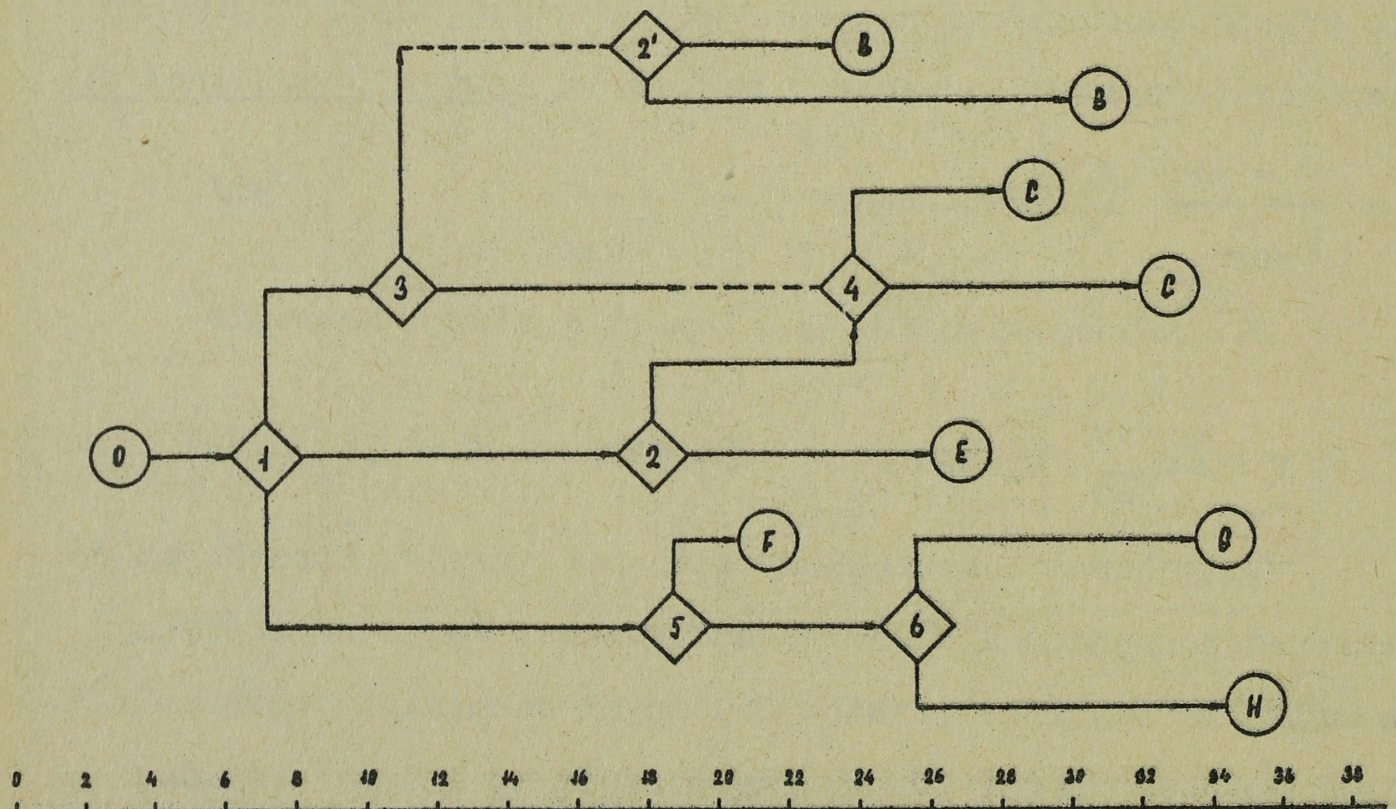
Dotychczas rozważaliśmy sieć bez czasów potrzebnych do realizacji czynności projektu badawczego. Teraz zastosujemy technikę metody PERT ze statystycznymi ocenami i obliczeniami. Dla każdej czynności wyznaczymy wartość  $t_e$  i dołączymy do DB-sieci i jej wyników. DB-sieć bazującą na czasach  $t_e$  wykorzystamy do analizy i kierowania realizacją całego projektu.

Dla przytoczonego przykładu wykorzystamy uzupełnienia np. następującym sposobem:

Czynność	$t_e$	Czynność	$t_e$
0,1	4	2,E	9
1,3	4	4,C	5
1,2	11	4,D	9
3,2'	0	1,5	12
2,A	6	5,F	3
2,B	13	5,6	7
3,4	8	6,G	9
2,4	6	G,H	10

Węzeł 2' nastąpi  
w tym samym czasie  
co 2 /lub później/

Teraz możemy sporządzić DB-sieć w skali czasowej bazującej na czasach  $t_e$  /rys. 80/.



rys. 80

Metoda DBPS dotychczas nie została zastosowana i wypróbowana w praktyce. Jednak napewno również ona, po rozwiązaniu niektórych teoretycznych problemów, znajdzie zastosowanie w kierowaniu projektami badawczymi i rozwojowymi.

#### 2.5.2. Metoda zrównoważenia linii operacyjnych /Line of Balance/

Celem niniejszego rozdziału jest zapoznanie czytelnika z interesującą modyfikacją metod CPA - tzw. LOB, tj. Line of Balance. Zakres zastosowania tej metody nie został jeszcze wyznaczony. Najwięcej LOB stosuje się w zakresie linii montażowych i automatycznych.

Dla problemu zrównoważenia linii operacyjnych szuka się rozwiązania w ciągu 10-ciu lat. Rozwiązanie analityczne przedstawił w 1954 r. Benjamin Brynton - tzw. convergence procedure. W 1956 r. został przez Jamesa R. Jacksona opublikowany wyczerpujący algorytm znajdowania optymalnego rozwiązania.

Dopiero z powstaniem metod CPA i z tym związanym rozwojem analizy sieciowej powstały bardziej skuteczne metody, tzw. systemy heurystyczne. Heurystyczne podejście do rozwiązywania zagadnień kombinatorycznych jest bardziej efektywne niż algorytm. Za pomocą podstawowych reguł logiki, klasyfikacji, oceniania i "zdrowego rozsądku" uzyskamy wystarczająco optymalne rozwiązania.

#### Sformułowanie zagadnienia

Linia operacyjna jest to ogólnie biorąc ciąg stanowisk roboczych /taśma ruchoma/ lub pracowników /operatorów/. Nie chodzi więc tylko o linie zautomatyzowane, ale również o linie

montażowe, w których tylko przekazuje się produkt od jednego pracownika do drugiego.

Cykl jest to czas, w którym produkt znajduje się w każdym stanowisku roboczym linii. Zwykle cykl można określić - taśma ruchoma powinna przesuwać się w jednakowych odcinkach czasu. Iloczyn liczby stanowisk roboczych i długości cyklu określa łączny czas potrzebny do montażu.

Stanowisko robocze jest to miejsce w linii, w którym wykonuje się pewną ilość pracy. Stanowisko robocze obsługuje jeden lub więcej /montaż samochodów/ operatorów. W niektórych przypadkach operator obsługuje większą liczbę stanowisk roboczych.

Zapas zrównoważenia jest to ilość niewykorzystanego czasu na linii spowodowanego nierównomiernym podziałem całości pracy do poszczególnych stanowisk roboczych. LOB ma za zadanie dla określonych warunków zminimalizować zapas zrównoważenia.

W tym celu dzielimy całość pracy w poszczególnych stanowiskach na jednostki robocze. Jednostka robocza jest to zespół elementów roboczych uzyskany na podstawie studiów czasowo-ruchowych.

Element roboczy jest niepodzielny. Może nim być np. wyciągnięcie ręki, uchwycenie narzędzia, wykonanie prostej pracy, zwrócenie narzędzia na miejsce. W praktyce takie elementy uważane są za niepodzielne.\*

---

\*/ F.B.Gilbreth rozłożył działania na elementy tzw. therblig za pomocą metody mikrofotograficznej. Najbardziej gospodarne są takie działania, które zawierają najmniejszą liczbę therbligów. Trzeba więc rozłożyć działanie na elementy i określić, które z nich można ominąć albo jak można element ciąć dalszy na str. 189

Problem można sformułować następująco:

Dla pewnego przedziału czasów jednostek roboczych, ograniczeń ich kolejności /wyznaczonej przez obrany proces technologiczny/ oraz dla danego cyklu  $c$  mamy znaleźć minimalną liczbę  $n$  stanowisk roboczych do wykonania zadania. Albo na odwrót, dla danej liczby  $n$  stanowisk roboczych mamy wyznaczyć najkrótszy cykl. Jeżeli nie mamy określone ani  $c$  ani  $n$ , mamy znaleźć takie  $c$  i  $n$ , żeby zapas zrównoważenia był minimalny. Ogólnie chodzi o wyznaczenie najbardziej korzystnych warunków koniecznych do zrównoważenia danej linii.

Zapas zrównoważenia określa stopień niezrównoważności pracy pomiędzy stanowiskami. Jest to stosunek pomiędzy łącznym niewykorzystanym czasem i łącznym czasem potrzebnym do montażu. Zapas zrównoważenia w procentach wynosi:

$$d = \frac{100 (n \cdot c - \sum t_i)}{n \cdot c} \text{ dla } (nc - \sum_i t_i \geq 0), \quad /100/$$

gdzie  $n$  oznacza liczbę stanowisk,  $c$  cykl,  $t_i$  / $i=1,2,\dots,k$ / czas trwania  $i$ -tej jednostki roboczej i  $T = \sum_i t_i$

łączny czas pracy. Zachodzi

$$t_{\max} \leq c \leq T \quad /101/$$

gdzie  $t_{\max}$  maksymalny czas trwania jednostki roboczej, tj. największa liczba ze zbioru  $t_1, t_2, \dots, t_k$ .

-----  
ciąg dalszy ze str. 188

ty kombinować z innymi. W tym celu Gilbreth stosował diagramy postępowe sporządzone na zasadzie, że każde działanie jest uwarunkowane wszystkimi składowymi pozostałych działań. Badania te opisał w pracy L.M. i F.B. Gilbreth: Podstawy naukowego kierowania pracą, Praga 1924.

Dla każdej liczby stanowisk  $n$  zawsze istnieje cykl minimalny  $c_{\min}$ , z którym mogłaby pracować pewna dopuszczalna kombinacja jednostek roboczych. Wzrost cyklu nad wartość  $c_{\min}$  obniża efektywność linii.

$$E = \frac{100 \cdot T}{n \cdot c} \quad /102/$$

Dla danego  $n$  i  $T$  efektywność linii jest proporcjonalna do  $\frac{1}{c}$  i  $c \geq c_{\min}$ .

Maksymalna liczba stanowisk jest wyznaczona przez maksymalny czas trwania jednostki roboczej na linii  $/t_{\max}/$ :

$$n_{\max} = \frac{T}{t_{\max}} \quad /103/$$

Oznaczmy przez  $c_1$  minimalny cykl dla  $n$  stanowisk.

Zacnodzi:

$$c_1 = \frac{T}{n} = p + \frac{S}{n}, \quad /104/$$

gdzie  $p$  - czas cyklu i  $S$  - reszta we wzorze  $np + S = T$ .

Jeżeli  $S = 0$ , musimy  $c_1$  zaokrąglić do następnej liczby, tj.

$$c_1 = \begin{cases} p & \text{dla } S = 0 \\ p+1 & \text{dla } S \neq 0 \end{cases} \quad /105/$$

Dla  $S = 0$  można otrzymać zrównoważenie doskonałe pomiędzy  $n$  stanowiskami, ponieważ  $T = n \cdot p$ , więc

$$E = \frac{100 \cdot T}{n \cdot p} = 100\% \quad /106/$$

Jeżeli  $S \neq 0$ , zrównoważenie doskonałe jest możliwe.  $c_1$  zostało zaokrąglone do większej liczby. Na linii będzie  $/n - S/$  zapasowych jednostek czasowych, które można przypo-  
rządkować stanowiskom.

Efektywność dla  $S \neq 0$  wynosi:

$$E = \frac{100 \cdot T}{T + /n - S/} \quad /107/$$

Jeżeli został użyty cykl  $c_1$ , otrzymujemy:

$$c_1 \dots \begin{cases} /n - S/ \text{ jednostek zapasowych dla } S \neq 0, \\ 0 \text{ jednostek zapasowych dla } S = 0 \end{cases} \quad /108/$$

dla  $c_2 = c_1 + 1 \dots$   $\begin{cases} /2n - S/ \text{ jednostek zapasowych dla } S \neq 0 \\ n \text{ jednostek zapasowych dla } S = 0, \end{cases}$

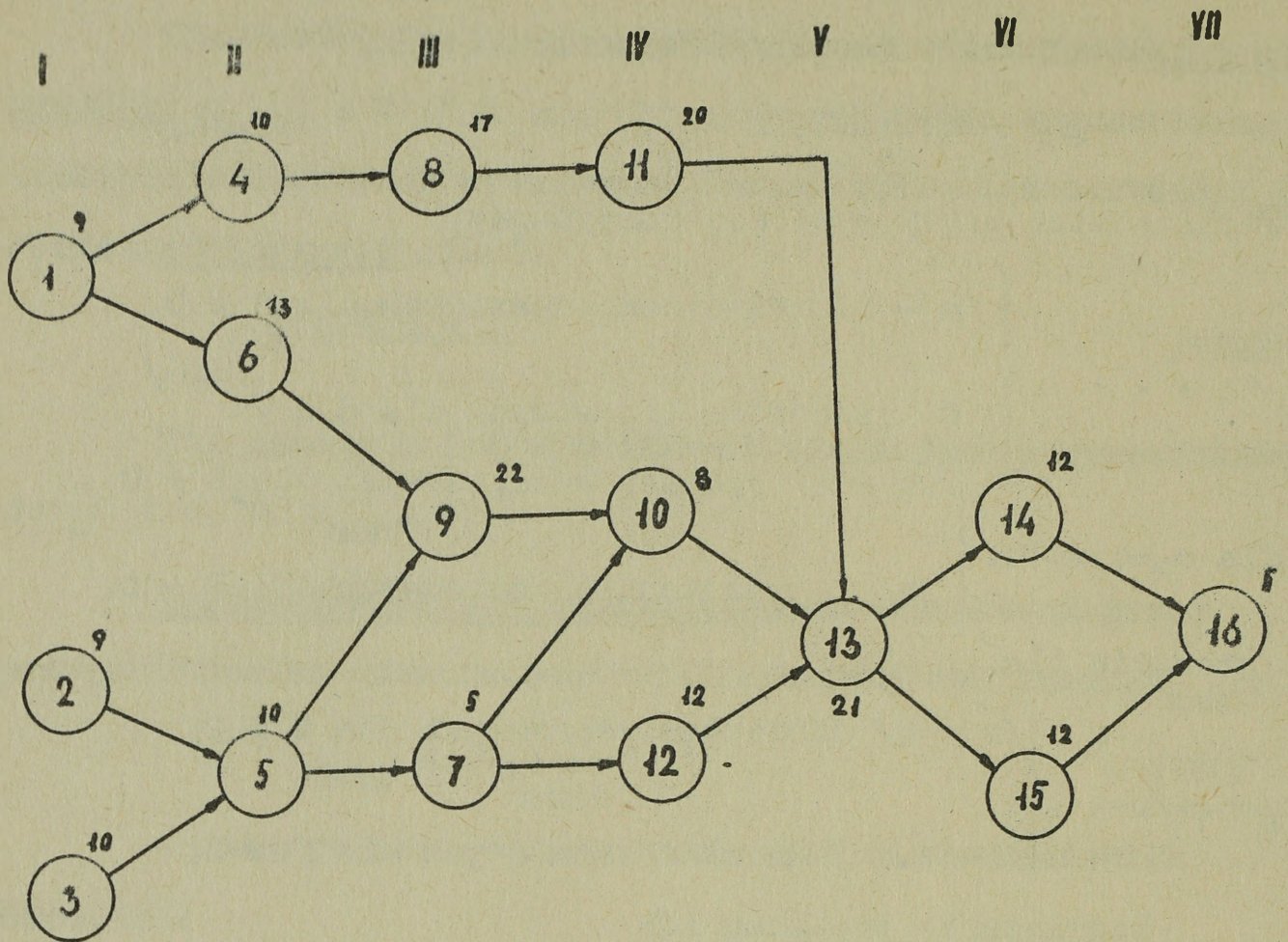
i wreszcie dla

$$c_r = c_1 + /r-1/. \begin{cases} /r \cdot n - S/ \text{ jednostek zapasowych dla } S \neq 0, \\ /r-1/.n \text{ jednostek zapasowych dla } S = 0. \end{cases}$$

#### Rozwiązanie problemu LOB

Kolejność i pierwszeństwo poszczególnych jednostek roboczych są wyznaczone za pomocą technologicznej kolejności montażu, konkretnych urządzeń lub maszyn, które wytwarzają stałe stacje oraz położeniem, w którym obrabia się produkt.

Stosunki można przedstawić graficznie za pomocą macierzy incydencyjnej /+ 1 oznacza "musi poprzedzać"- 1 oznacza "nie może poprzedzać", 0 oznacza "żadny związek"/ lub sieci incydencyjnej /diagram postępowy/. Jako przykład przytoczymy bardzo uproszczoną sieć linii montażowej /rys. 81/.



rys. 81

Chodzi tutaj o sieć węzłowo określoną zawierającą kilka początków oraz precyzyjnie określony cel. Sieć jest przeznaczona dla 16 jednostek roboczych. Liczby przy poszczególnych zdarzeniach oznaczają trwanie odpowiednich jednostek roboczych /w sek, min. itp/. Łuki oznaczają związki kolejności /incydencji/ - nie trwają w czasie.

Sieć przedstawia montaż rozwijający się od strony lewej do strony prawej. W kolumnie I znajdują się wszystkie jednostki robocze, które nie musi poprzedzać żadna inna jednostka robocza. Ogólnie: w kolumnie K / $K \geq II$ / znajdują się wszystkie takie jednostki, które poprzedzają tylko jednostki już zaznaczone w sieci. Strzałki prowadzą od jednostek w

/K - 1/-szej kolumnie do tych jednostek w K, które powinny one poprzedzać.

W sieci bardzo dobrze widać, że jednostki robocze w poszczególnych kolumnach są wzajemnie niezależne i dlatego można je wzajemnie zamieniać dotrzymując ograniczeń. Np. dopuszczalna jest każda z  $3!$  permutacji kolumny I itp. Jednostkę 11 można przenieść do kolumny V równocześnie przesuwając jednostki 4 i 8. Istnieje zatem duża ilość topologicznie **równoważnych** sieci spełniających warunki kolejności.

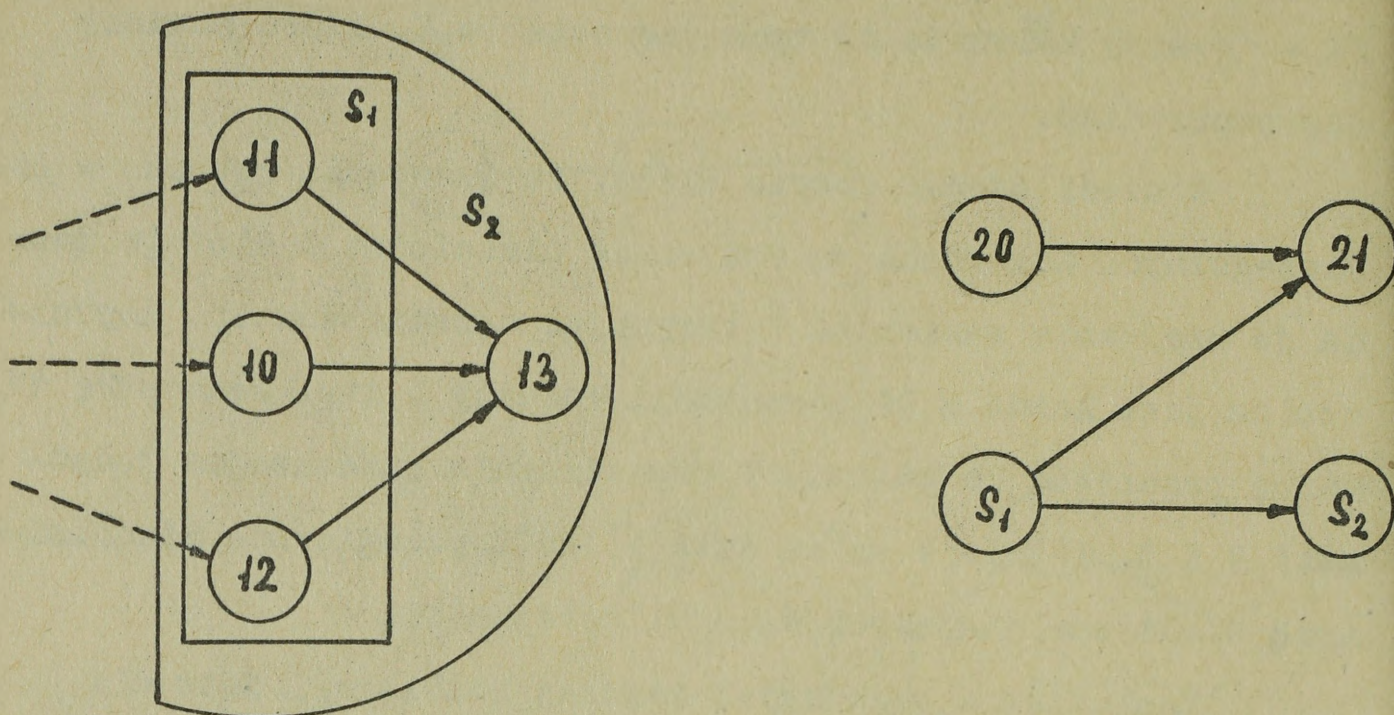
Znalezienie najkorzystniejszej kombinacji jest dla bardziej skomplikowanej linii bardzo trudne. Rozwiązanie analityczne okazało się bardzo pracochłonne, czasami nawet niemożliwym. Heurystyczne podejście jest korzystniejsze. W zasadzie używa się tutaj dwu podstawowych systemów:

1/ Tonge's System

2/ Kilbridge-Wester Heuristic System.

Zapoznamy się z ich zasadami:

ad 1/ Fred Tonge dzieli proces na trzy fazy. W 1-szej fazie usiłuje uprościć wyjściowe sformułowanie problemu za pomocą agregacji sąsiednich jednostek roboczych do jednostek złożonych - agregatów. Rozróżniamy trzy rodzaje agregatów: zespół, łańcuch i tzw. Z-agregat. Ich przedstawienie znajduje się na rys. 82.



rys. 82

Dla jednostek 10, 11 i 12 nie jest określona kolejność. Mają one wspólne poprzedzające i następne zdarzenia. Dlatego można je zamienić złożoną jednostką roboczą, którą nazywamy zespołem  $S_1$ . Uważamy teraz jednostkę złożoną  $S_1$  i jednostkę 13 za łańcuch. Ich kolejność /jedna względem drugiej/ jest w zupełności wyznaczona, można więc zamienić je jednostką złożoną, którą nazywamy łańcuchem -  $S_2$ .

Z-agregat jest to zespół 4 prostych lub złożonych jednostek. W 1-szej fazie zespoły te nastąpiły jednostkami złożonymi. W ten sposób znacznie obniżymy złożoność sieci.

W 2-giej fazie stanowiskom roboczym przydzielimy złożone zadania. Agregaty rozdzielimy tylko wtedy, kiedy okaże się to koniecznością. W 3-ciej fazie przeprowadzimy końcowe zrównoważenie za pomocą przydziału pierwotnych prostych jednostek stanowiskom roboczym.

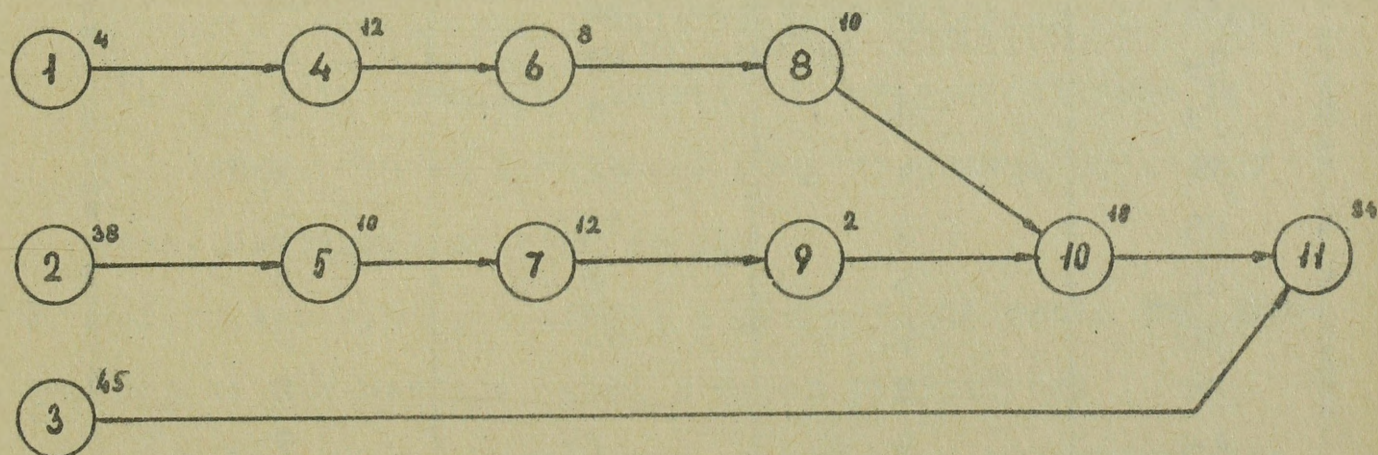
ad 2/ System ten korzysta z dwóch własności jednostek w sieci: z możliwości permutacji w jednej kolumnie oraz

przeniesienia jednostek do innych kolumn. Permutacje w kolumnach umożliwiają wybór jednostek o długościach potrzebnych dla optymalnych zespołów stanowisk roboczych. Umożliwia to przesunąć jednostki robocze do stanowisk linii w ten sposób, żeby jak najlepiej wykorzystać cykl.

Dla sieci przedstawionej na rys. 81  $T = 5,52$  minut. Doskonałe zrównoważenie wynosi więc dla cykli 5,52 /przypadek trywialny/, 2,76, 1,84, 1,38, 0,92 i 0,69 minut. Odpowiadająca liczba stanowisk na linii wynosi 1,2,3,4,6 i 8. Zrównoważenie doskonałe dla 8 stanowisk wymaga cyklu  $0,69 /5,52 : 0,8 = 0,69/$ . Dla każdego stanowiska suma czasów równa się 0,69. Dla innych cykli oprócz sześciu przytoczonych, wiadomo, że nie można osiągnąć zrównoważenia doskonałego.

E.M. Mansoor opracował technikę zrównoważenia jednostek roboczych oraz heurystyczne rozwiązanie zagadnienia. Pokażemy zasady tej metody i obliczymy przykład ponieważ można właśnie na tej metodzie pokazać postępowanie heurystyczne.

Założmy, że udało się uprościć sieć linii montażowej do następującej postaci /rys. 83/.



Rys. 83

Wagę położenia dla którejkolwiek jednostki roboczej uzyskamy przez dodanie jej czasu do czasu wszystkich od niej zależnych operacji /tj. wszystkich jednostek roboczych leżących w sieci na prawo/.

Dla naszej sieci:

Jedn. robocza	Waga położenia W
11	34
10	$10 + W_{11} = 44$
9	$2 + W_{10} = 46$
7	$12 + W_9 = 58$
5	$10 + W_7 = 68$
8	$10 + W_{10} = 54$
6	$8 + W_8 = 62$
4	$12 + W_6 = 74$
1	$4 + W_4 = 78$
2	$38 + W_{4+W_5} - W_{10} = 136$
3	$45 + W_{11} = 79$

Teraz ustawimy jednostki robocze ze względu na zmniejszające się wagi położenia oraz zaznaczymy wszystkie bezpośrednio poprzedzające zdarzenia

Waga położenia	Jedn.robocza	Czas trwania	Bezpośrednio poprzedzające zdarzenie
136	2	38	-
79	3	45	-
78	1	4	-
74	4	12	1, 2
68	5	10	2
62	6	8	4
58	7	12	5
54	8	10	6
46	9	2	7
44	10	10	8, 9
34	11	34	3, 10

Następnie Mansoor opisuje heurystyczne reguły przyporządkowania, które określają regulamin, według którego przyporządkowujemy jednostki robocze stanowiskom roboczym w ten sposób, żeby osiągnąć największą efektywność  $E$  przy spełnieniu wszystkich ograniczeń. Podamy te reguły:

- 1/ Wyznaczyć  $c_{\min}$  odpowiadające każdej liczbie stanowisk, która wchodzi w rachubę.
- 2/ Wybrać jednostkę roboczą z  $W_{\max}$  i przyporządkować ją 1-szemu stanowisku.
- 3/ Obliczyć pozostały /tj. który nie został przyporządkowany/ czas za pomocą łącznego czasu trwania wszystkich dotychczas przyporządkowanych jednostek na stanowisku i odjąć tę sumę od cyklu.
- 4/ Wybrać jednostkę roboczą, której odpowiada największa waga  $W$  i spróbować przyporządkować ją 1-szemu stanowisku po wykonaniu następujących kontroli:
  - a/ jeżeli zdarzenie, które bezpośrednio poprzedza jednostkę roboczą zostało już przyporządkowane, przechodzimy do 4.7, jeżeli nie zostało przyporządkowane, przechodzimy do 5;
  - b/ porównać czas jednostki roboczej z czasem nieprzyporządkowanym. Jeżeli czas jednostki jest mniejszy od czasu nieprzyporządkowanego stanowisku, przyporządkować tę jednostkę roboczą i obliczyć nowy nieprzyporządkowany czas, następnie przejść do 5.
- 5/ Przeprowadzać wybór, kontrolę i przyporządkowanie tak długo, dopóki nie nastąpi jeden z dwóch przypadków:
  - a/ uzyskaliśmy taką kombinację, w której nieprzyporządkowany czas równa się jednostkom zapasowym /wtedy prze-

chodzimy do 8/.

- b/ nieprzyporządkowana jednostka robocza spełnia warunki 4.a/, 4.b/ /przechodzimy do 6/.
- 6/ Usunąć każdą przyporządkowaną jednostkę roboczą oraz zacząć od najniższej wagi W /tj. ostatniej przyporządkowanej/, kierować się następnie 4 i 5 tak długo, dopóki:
- a/ nie zostanie uzyskana kombinacja, w której czas nieprzyporządkowany jest mniejszy albo równy jednostkom zapasowym /przejsć do 8/.
- b/ wszystkie kombinacje mają nieprzyporządkowane czasy większe niż jednostki zapasowe - rozwiązanie nie istnieje /przejsć do 7/.
- 7/ Wybrać cykl o jednostkę większy i przejsć do 2.
- 8/ Przyporządkować nieprzyporządkowaną jednostkę roboczą z największą wagą 2-giemu stanowisku i przejsć do 3.
- 9/ Kontynuować przyporządkowanie jednostek roboczych tak długo, aż każdą przyporządkujemy pewnemu stanowisku.

Za pomocą podanych reguł będziemy teraz rozwiązywać linię na rys. 83:

$$T = 185 \text{ minut}, \quad t_{\max} = 45 \text{ minut.}$$

Maksymalna liczba stanowisk

$$n_{\max} = \frac{T}{t_{\max}} = \frac{185}{45} = 4$$

Problem będziemy rozwiązywać dla  $n = 2$ .

$$c_{\min} = c_1 = 93 \quad \text{jednostki zapasowe} \quad /n - S/ = 1$$

$$E = \frac{100 \cdot T}{n \cdot c} = \frac{185}{2 \cdot 93} \cdot 100 = 99,5\%$$

Jedn.robocza	Czas łączny	Jedn.robocza	Czas łączny
2	38	1	4
3	83	4	16
5	93	6	24
bez nieprzyporządkowanego czasu		7	36
		8	46
		9	48
		10	58
		11	92
		z jedną nieprzyporządkowaną jednostką czasową	

Dla praktycznych obliczeń istnieją opracowane programy na maszyny cyfrowe firmy IBM np. IBM 650, IBM 1401, IBM 1620, IBM 7090 i IBM 704. Inny program istnieje również dla Remington Raud Johuniac.

### 2.5.3. Zastosowanie metody Monte Carlo do obliczeń sieci PERT

Modelowanie przypadku nazywamy symulacją przypadku lub metodą Monte Carlo.

Dla poszczególnych czynności sieci PERT mogą nastąpić następujące przypadki:

- a/ znamy teoretyczny rozkład prawdopodobieństwa czasu trwania czynności /dystrybuantę, gęstość itp/.
- b/ znamy empirycznie dystrybuantę czynności uzyskaną na podstawie pomiarów statystycznych
- c/ jeżeli nie zachodzi ani a/, ani b/, wtedy wprowadzimy pewne założenia dotyczące dystrybuanty czasu trwania czynności.

W przypadku b/ możemy do oszacowania dystrybuanty zastosować twierdzenie Kołmogorowa /tw. 12 w 3.3.8/.

Zakładamy więc, że dla każdej czynności znamy rozkład prawdopodobieństwa w postaci dystrybuanty albo gęstości prawdopodobieństwa.

Omówienie algorytmu MC:

Załóżmy, że dana jest sieć zawierająca węzły /zdarzenia/  $i=0, 1, \dots, n$  oraz łuki  $/i, j/ \in P$ ; generator liczb losowych /tablice, specjalny program maszyny cyfrowej/ wytwarza ciągi liczb losowych zgodnie z rozkładem czasów poszczególnych czynności  $/i, j/ \in P$ .

Realizacją projektu nazywamy przyporządkowanie liczb łukom /czynnościom/  $/i, j/ \in P$ . Dla każdej czynności możemy obliczyć czasy  $t_i$  poszczególnych etapów, w szczególności czas trwania  $t_n$  całego projektu, wyznaczyć ścieżki krytyczne, czynności krytyczne, zdarzenia oraz pozostałe dane potrzebne dla sieci CPA. W ten sposób uzyskane ciągi liczb dostarczają danych o odpowiednich wielkościach przypadkowych. Za pomocą nich możemy oszacować wartości średnie, rozrzuty oraz inne charakterystyki wielkości przypadkowych /centralne twierdzenie graniczne/ albo oszacować dystrybuantę /twierdzenie Kołmogorowa/.

Bardzo ważny jest problem oszacowania liczby  $N$ , liczby próbek. Rozwiązanie otrzymamy za pomocą zastosowania centralnego twierdzenia granicznego.

Przykład 1. Obliczamy za pomocą metody MC średni czas trwania projektu. Oszacowaniem jest wartość

$$\hat{\mu} = \frac{t_n^{(1)} + \dots + t_n^{(N)}}{N}$$

Niech  $\sigma^2$  oznacza wariancję wielkości losowej  $t_n$  i  $\mu$  jej wartość średnią. Ustalimy  $N$  w ten sposób, żeby

$$P\left\{\mu - \frac{\sigma}{50} < \hat{\mu} < \mu + \frac{\sigma}{50}\right\} = 0,95 \quad /110/$$

Ostatnie wyrażenie można przekształcić następująco

$$P\left\{-\frac{\sqrt{N}}{50} < \frac{\hat{\mu} - \mu}{\sigma} \sqrt{N} < \frac{\sqrt{N}}{50}\right\} \quad /111/$$

$\frac{\hat{\mu} - \mu}{\sigma} \sqrt{N}$  jest to wielkość losowa znormalizowana z rozkładem normalnym. Dlatego można pisać

$$0,95 = P\left\{-\frac{\sqrt{N}}{50} < \frac{\hat{\mu} - \mu}{\sigma} < \frac{\sqrt{N}}{50}\right\} = 2\tilde{\phi}\left(\frac{\sqrt{N}}{50}\right), \quad /112/$$

gdzie 
$$\tilde{\phi}(x) = \frac{1}{2\sqrt{\pi}} \int_0^x \exp\left(-\frac{z^2}{2}\right) dz. \quad /113/$$

Za pomocą tablic rozkładu normalnego otrzymamy

$$\frac{\sqrt{N}}{50} = 1,96 \quad \text{tj. } N = 10000.$$

Dla metody CPM można określić, czy czynność jest krytyczną czy też nie.

W przypadku metody PERT możemy tylko określić prawdopodobieństwo tego, czy czynność jest krytyczna czy nie. Prawdopodobieństwo to nazywamy krytycznością czynności. Analogia do CPM może dla metody PERT prowadzić do niedoceniań stochastycznego charakteru wielkości. Dla metody CPM mają sens wyrażenia: dana czynność, ścieżka lub zdarzenie są krytyczne. Pojęcia te nie muszą mieć sensu dla metody PERT.

Oszacowaniem krytyczności czynności  $p$  jest częstość względna  $\hat{p} = \frac{M}{N}$ , gdzie  $N$  jest liczbą próbek w metodzie Monte Carlo i  $M$  liczbą próbek, dla których czynność  $M$  jest krytyczną.

Przykład 2. Wyznaczymy liczbę próbek  $N$  w ten sposób, żeby dla prawdopodobieństwa 0,95 błąd  $\hat{p}$  nie przewyższał 1%.

Z centralnego twierdzenia granicznego

$$P \left\{ \left| \hat{p} - p \right| < 0,01 \right\} = 0,95$$
$$P \left\{ \frac{0,01 \sqrt{N}}{\sqrt{p(1-p)}} < \frac{(\hat{p} - p) \sqrt{N}}{\sqrt{p(1-p)}} < \frac{0,01 \cdot \sqrt{N}}{\sqrt{p(1-p)}} \right\} = 0,95.$$

Zachodzi  $p \cdot (1-p) \leq \frac{1}{4}$

Otrzymujemy 0,02.  $\sqrt{N} = 1,96$ , stąd  $N = 10000$ .

Za pomocą metody Monte Carlo można oszacować dystrybuantę wielkości przypadkowej za pomocą empirycznej dystrybuanty.

Stosujemy przy tym tw. Kołmogorowa.

Przykład 3. Niech  $t_n$  będzie wielkością przypadkową - czasem trwania całego projektu. Dystrybuantę wielkości  $t_n$  oznaczmy przez  $F(x)$ , niech  $F_N(x)$  jest empiryczną dystrybuantą  $t_n$  odpowiadającą  $N$  próbom M.C.

Określmy  $N$  w ten sposób, żeby

$$P \left\{ \sqrt{N} \cdot D_N \leq Z \right\} = 0,95; \quad D_N = \sup_{-\infty < x < \infty} |F_N - F|$$

Ponieważ dla dużych  $N$

$$P \left\{ \sqrt{N} \cdot D_N \leq Z \right\} = K/Z,$$

za pomocą tablic otrzymujemy  $Z = 1,36$

Stąd

$$\sqrt{N} \cdot 0,01 = 1,36; \quad N = 18500 \text{ prób.}$$

## 2.6. Aspekty obliczania

Jeżeli projekt zawiera większą ilość czynności, opracowanie metod CPM i PERT jest tak obszerne i pracochłonne, że trzeba do obliczeń metod tego typu zastosować maszyny matematyczne.

Przy obliczeniach korzysta się z maszyn cyfrowych. W niektórych państwach zachodnich, w których stosuje się metody CPM i PERT na szerszą skalę, skonstruowano dla danych zadań maszyny specjalistyczne, które sprawdzają dane wejściowe oraz drukują sieć /prawdopodobnie w skali czasowej/ zawierającą dane o czasie trwania poszczególnych czynności i zapasów.

W CSRS można dzisiaj opracowywać metody typu CPM i PERT na maszynach typu NE 803B, ZUSE 23 SIRIUS i LGP 30 za pomocą programów, które zostały już dla każdej z przytoczonych maszyn opracowane, w większości chodzi o standartowe programy bezpośrednio dostarczone przez producenta.

Dla nowo zainstalowanych maszyn - MIŃSK 2, MIŃSK-22, EPOS, ELLIOTT 503 i innych programy dopiero opracowuje się.

Czas obliczania za pomocą maszyny matematycznej jest bardzo krótki, co umożliwia elastyczne kierowanie projektem. Krótki czas obliczania umożliwia również sporządzić więcej wariantów planu. Dla czasu potrzebnego do obliczenia całej sieci, wyprowadzono doświadczalnie wzór

$$t = k \cdot N^3 + h,$$

gdzie  $t$  oznacza czas trwania obliczenia wyrażony w odpowiedniej jednostce pomiarowej,  $N$  liczbę zdarzeń i  $k$  - współczynnik zależny od własności użytej maszyny,  $h$  - wartość stała.

2.6.1. Zwięzła charakterystyka poszczególnych programów  
według typu maszyn matematycznych

2.6.1.1. National Elliott 803 B.

Według dotychczasowych doświadczeń wydaje się, że najlepiej wyposażona jest biblioteka programów standartowych firmy ELLIOTT. Również ze względu na to, że maszyny ELLIOTT 803 B w CSRS są już powszechnie stosowane, w niniejszej pracy najlepiej opisane są jej programy standartowe.

Producent maszyny równocześnie z maszyną dostarcza programy standartowe dla metody CPM IO1 i metody PERT-LO6.

A. Program LO1 /CPM/

Program powinien spełniać następujące ograniczenia:

- a/ obliczenia można przeprowadzać tylko z liczbami całkowitymi;
- b/ ilość czynności powinna być mniejsza od 700 dla starszej wersji programu i dla nowej wersji od 1800;
- c/ wszystkie wprowadzone dane muszą być liczbami całkowitymi, dodatnimi oraz muszą być mniejsze niż 8191;
- d/ długość planowanego projektu powinna być mniejsza od 8191 jednostek czasowych.

Kolejność obliczania:

- a/ do maszyny matematycznej wprowadzamy dane czynności oraz czasy ich trwania
- b/ w pamięci zostaną utworzone dwie tabele - jedna dla wyników, druga dla poszczególnych czynności
- c/ obie tabele ułożone są w ten sposób, że można je badać w kolejności topologicznej;

- d/ oblicza się najwcześniejszy czas każdego zdarzenia, który następnie zostanie ułożony w nowej tabeli zdarzeń
- e/ najpóźniejszy czas każdego zdarzenia ułoży się znów do tabeli zdarzeń
- f/ oblicza się najwcześniejsze i najpóźniejsze początki i końce czynności
- g/ drukuje się wyniki.

#### Wstępne informacje

Korzystne jest pisać dane wejściowe do uprzednio przygotowanych tablic sporządzonych według następującego wzoru:

Początkowe zdarzenie projektu	Czas początku	Przewidywany czas zakończenia
Zdarzenie wyjściowe	Zdarzenie końcowe	Czas trwania czynności

Oznaczenie /nazwa/ projektu może być umieszczone w którymkolwiek miejscu wśród danych. Zawsze jednak musi rozpocząć się od znaku = i kończyć znakiem "blank". Wtedy oznaczenie drukuje się równocześnie z odczytywaniem danych.

#### Postać wyników

Wszystkie wyniki są liczbami całkowitymi wydrukowanymi w tabeli z nagłówkiem objaśniającym. W nagłówkach tablic używa się następujących skrótów:

a/ wersja angielska

E.T = najwcześniejszy termin

L.T = najpóźniejszy termin  
P.E = numer zdarzenia wyjściowego  
S.E = numer zdarzenia następnego  
\* = ścieżka krytyczna

TOTAL FLIOAT zapas całkowity

b/ wersja czeska

MOZ = najwcześniejszy termin  
NUT = najpóźniejszy termin  
POC = zdarzenie wyjściowe  
KON = zdarzenie następnego

#### Wymagania czasowe

Dane wejściowe wczytywane są z szybkością 100 znaków na sek. Wyniki diurowane są z szybkością 95 znaków na sek. Czas obliczania równa się  $\frac{6n}{7}$  [sek] , gdzie n jest liczbą czynności w projekcie. Czas obliczania liczy się łącznie z wprowadzeniem danych i wyprowadzeniem wyników.

Dla zastosowania programu LO1 opublikowano przez wydział programowania NATIONAL ELLIOTT instrukcje, w których znajdują się wszystkie potrzebne dane o programie i jego zastosowaniu. Instrukcje te zostały przetłumaczone na język czeski w Centrum Obliczeniowym Maszyn Biurowych n.p. Praha /Vyzkumne Vypocetni Stredisko Kancelarskych Strojn n.p. Praha/.

#### B. Program LO6 - PERT III

Program musi spełniać następujące ograniczenia:

- a/ ilość czynności powinna być mniejsza od 2950,
- b/ różnica między optymistyczną i pesymistyczną oceną czasu trwania każdej czynności powinna być większa niż 762

połówek dnia /12,5 miesięcy/,

c/ czas trwania całego projektu musi być krótszy niż 8191  
połówek dnia /11 lat/

d/ wszystkie numery zdarzeń powinny znajdować się w przedziale od 0001 do 9999 włącznie

e/ projekt musi posiadać tylko jedno zdarzenie początkowe i tylko jedno zdarzenie końcowe. Jeżeli wystąpi konieczność istnienia kilku zdarzeń początkowych, zdarzenia te musi poprzedzać wspólne zdarzenie fikcyjne, które jest połączone z nimi za pomocą czynności fikcyjnych z czasem trwania równym zeru. Jeżeli potrzebne jest istnienie kilku zdarzeń końcowych, postępujemy analogicznie do poprzedniego przypadku.

#### Kolejność obliczania

1. Do maszyny wprowadza się dane sterujące wyperforowane według formularza danych sterujących;

a/ najmniejszy i największy numer zdarzenia.

b/ data rozpoczęcia projektu,

c/ wagi trwania czynności,

d/ tablice.

2. Do maszyny wprowadza się dane czynności, tj, numery zdarzeń początkowych i końcowych czynności oraz trzy oszacowania czasu trwania każdej czynności.

Informacje o zdarzeniach zostaną wprowadzone do komórek roboczych /komórek zdarzeń/; informacje o czynnościach zostaną umieszczone w komórkach roboczych A /komórkach czynności/.

3. Zostanie utworzony wykaz zdarzeń w kolejności topologicznej i następnie zostanie on włożony do komórek

roboczych E. Pomocnicze wykazy czynności nachodzących na każde zdarzenie zostaną włożone do komórek roboczych A.

4. Dla każdego zdarzenia obliczy się rozrzut oraz miarodajne odchylenie i zostaną one włożone do komórek roboczych E.

5. Zostanie obliczony najwcześniejszy termin każdego zdarzenia oraz zostanie on włączony do spisu zdarzeń.

6. Utworzy się wykaz zdarzeń w odwróconej kolejności topologicznej i najpóźniejszy termin każdego zdarzenia włoży się do komórek roboczych E.

7. Zostanie obliczony zapas czasowy każdej czynności i włoży się go do komórek roboczych A. Po wyzerowaniu pomocniczych wykazów czynności następujących na każde zdarzenie zostaną uporządkowane czasowe zapasy czynności i w komórkach roboczych A zostaną utworzone pomocnicze wykazy czynności poprzedzających każde zdarzenie.

8. Wydrukuje się tablice 1; potrzebne informacje ułożone w pamięci oblicza się przy drukowaniu.

9. Zostanie utworzony wykaz zdarzeń w kolejności topologicznej, pomocnicze wykazy wyzerowanych czynności poprzedzających każde zdarzenie oraz pomocnicze wykazy czynności następujących po każdym zdarzeniu, które zastąpiły wyzerowane czynności.

10. W komórkach E zostanie utworzony wykaz zdarzeń w kolejności najwcześniejszych początków; wykaz pozostaje ciągle w kolejności topologicznej.

11. Jeżeli wystąpi potrzeba, zostanie wydrukowana tablica 2; potrzebne informacje, które nie są umieszczone w pa-

mięci, zostaną obliczone i wydrukowane.

12. Pomocnicze wykazy czynności następujących po każdym zdarzeniu zostaną wyzerowane z pamięci równocześnie z zapasami czasowymi, które były ułożone w komórkach A. Następnie zostaną obliczone najwcześniejsze zakończenia czynności i ułożone do komórek A.

13. Zostaną utworzone pomocnicze wykazy czynności następujących po każdym zdarzeniu oraz zostaną one włożone do komórek A.

14. Jeżeli wystąpi potrzeba, zostanie wydrukowana tablica 3.

15. Jeżeli wystąpi potrzeba, zostanie wydrukowana tablica 4.

#### Informacje wstępne

Perforowanie danych do programu wykonuje się nie według przepisów ważnych dla autokodu lub dla ELLIOTT ALGOL.

Dane trzeba perforować zgodnie z przepisami podanymi w publikacji VVS maszyn biurowych PERT III, nr ew. 803 L06.

Ogólnie dane wejściowe dzielimy na dane sterujące i dane czynności. Oceny czasów trwania muszą być liczbami całkowitymi, jednostką czasu jest połowa dnia. Ze względu na to, że zakładamy 5-cio dniowy tydzień roboczy, można uważać za jednostkę czasu również 0,1 tygodnia.

#### Postać wyników

Czasy trwania, zapasy czasowe i zapasy czasowe niezależne podane są w postaci liczby całkowitej, która podaje ilość połówek dni. Poszczególne długości trwania czynności ułożone są w maszynie w postaci liczb całkowitych podających

ilość połówek dni. Przy drukowaniu zaokrągla się je do całych dni.

Przy obliczaniu rozrzutów i ich sumy pojawiają się błędy powstałe przy zaokrągleniu. Błędy te nie przewyższają 10 %.

Wyjście jest uporządkowane w czterech tablicach.

Pierwsza tablica zawiera porównanie wszystkich czynności ze względu na zdarzenia początkowe oraz zapasy czasowe, wyznacza ścieżkę krytyczną i dla każdej czynności podaje dane najwcześniejszego i najpóźniejszego zakończenia czynności, wartość zapasu czasowego całkowitego i wolnego oraz rozrzutu.

Druga tablica zawiera same dane przy wstępującym uporządkowaniu czynności ze względu na najwcześniejszy początek każdej czynności.

Trzecia tablica jest podobna do poprzedniej, różnica polega na tym, że podaje przegląd najwcześniejszych końców czynności.

Czwarta tablica jest to praktycznie biorąc inwentaryzacyjny przegląd wszystkich czynności uporządkowanych według zdarzeń początkowych oraz zaznaczone są najwcześniejsze rozpoczęcia i ukończenia odpowiednich czynności.

Uporządkowanie poszczególnych tablic jest bardzo praktyczne i przejrzyste. Można powiedzieć, że program L06 jest najbardziej progresywnym programem dostępnym w CSRS dla metody PERT.

Wymagania czasowe

Jeżeli oznaczymy przez A liczbę czynności projektu, to czasy /minuty/ poszczególnych części oraz głównego programu określają w przybliżeniu następujące wzory:

a/ 803 L06 A - kontrola danych:  $\frac{A}{30}$

b/ 803 L06 B - główny program części 1

1. wczytywanie danych:  $\frac{12 A}{4000 - A}$

2. opracowanie:  $\frac{A}{200}$

c/ 803 L06 C - główny program, część 2

1. opracowanie przed dziurkowaniem tablicy 1

$$\frac{A}{170}$$

2. dziurkowanie<sup>x/</sup> tablicy 1:  $\frac{A}{30} + \frac{\lambda A^2}{66000}$

3. opracowanie<sup>xx/</sup> w czasie pomiędzy dziurkowaniem tablicy 1 i tablicy 2:  $2,3 \cdot \sqrt{A}$

4. dziurkowanie<sup>x/</sup> tablicy 2:  $\frac{A}{30} + \frac{\lambda A^2}{66000}$

5. opracowanie<sup>xxx/</sup> pomiędzy dziurkowaniem tablicy 2 i tablicy 3:  $\frac{A}{280}$

6. dziurkowanie<sup>x/</sup> tablicy 3:  $\frac{A}{30} + \frac{\lambda A^2}{66000}$

7. dziurkowanie<sup>x/</sup> tablicy 4:  $A/42 + \frac{\lambda A^2}{66000}$

---

x/ Zachodzi  $0 \leq \lambda \leq 1$ . Wartość  $\lambda$ , która jest zwykle mała, zależy od złożoności grafu siatkowego oraz od porządku odczytywanych danych.

xx/ Czas ten musimy dołączyć do obliczeń czasu, jeżeli mamy dziurkować tablicę 2,3 lub 4.

xxx/ Czas ten musimy dołączyć do obliczeń, jeżeli mamy dziurkować tablicę 3 lub 4.

2.6.1.2. LGP 30

A. Program dla metody CPM

Programy dla metody CPM opracowane przez Instytut dla spraw typizacji w Pradze i Centrum Obliczeniowe Instytutu Ekonomiki i Organizacji Budownictwa w Bratysławie są dostępne w przytoczonym centrum obliczeniowym.

Ich zastosowanie w praktyce jest możliwe tylko na podstawie szczegółowych informacji pracowników centrum obliczeniowego Instytutu Ekonomiki i Organizacji Budownictwa w Bratysławie.

B. Program dla metody PERT

Program dla rozwiązywania zadań za pomocą metody PERT LGP-30 jest to program standartowy opracowany przez prodecunta maszyny.

Dane wejściowe spełniają następujące ograniczenia:

- a/ liczba zdarzeń powinna znajdować się w przedziale od 1 do 511,
- b/ liczba czynności nie może przewyższać 2048,
- c/ dane czasowe /dla jakiegokolwiek obranej jednostki czasu/ poszczególnych czynności nie powinny przekraczać 127 tygodni i miarodajne odchylenie czasu nie może być większe niż 31,
- d/ liczba czynności kończących w jednym zdarzeniu lub rozpoczynających się w nim może maksymalnie równać się 63,
- e/ wartość najwcześniejszego zakończenia powinna być mniejsza lub równa 1023 jednostkom.

Czas obliczania jest proporcjonalny do ilości czynności. 800 czynności zostanie obliczone w ciągu 83 minut, dziurkowanie wyników w ciągu 65 minut, wprowadzenie programu i wyprowadzenie danych 55 minut.

#### 2.6.1.3. ZUSE 23

Dla tej maszyny matematycznej jest dzisiaj do dyspozycji tylko program metody CPM.

Program operuje wartościami całkowitymi. Maksymalna liczba czynności wynosi 800, maksymalny czas trwania 9999 jednostek czasowych /dowolnych/ i nazwy poszczególnych czynności mogą zawierać najwyżej 35 znaków.

Drukowanie wyników jest zredagowane jak następuje:

- a/ nagłówek tablicy /CPM, nazwa zadania, data, właściwy nagłówek dla oznaczenia następnie drukowanych danych/,  
b/ kolejny druk /w jednym wierszu/

- numer zdarzenia początkowego czynności /i/
- numer zdarzenia końcowego czynności /j/
- czas trwania czynności /y/
- nazwa czynności
- termin najwcześniejszego początku czynności
- termin najwcześniejszego ukończenia czynności
- termin najpóźniejszego początku czynności
- termin najpóźniejszego ukończenia czynności
- zapas całkowity
- zapas wolny
- zapas zależny
- zapas niezależny
- oznaczenie czynności leżącej na ścieżce krytycznej.

c/ drukowanie projektu bieżącej doby i drukowanie danych pomocniczych /jak w punkcie b/.

#### 2.6.1.4. SIRIUS

Dla maszyny SIRIUS został opracowany przez firmę FERRANTI program metody CPM.

Dla programu wymagany jest zapis diagramu sieciowego w szczególnej postaci, przydatnej do formularzy wyjściowych. Wszystkie czynności drukuje się potem w tej kolejności, w której wstępowały do zadania, drukowanie zawiera również najwcześniejszy i najpóźniejszy początek i koniec każdej czynności oraz zapasy: całkowity, wolny i niezależny.

Program standartowy SIRIUS można zastosować do projektów zawierających 1000 zdarzeń /węzłów/ i 1400 czynności, można go jednak dostosować do projektów zawierających 2000 zdarzeń i 2800 czynności. Maksymalne trwanie czynności nie może przewyższać 9999 jednostek czasowych. Każdą czynność można opisać za pomocą najwyżej 25 znaków /bitów/.

#### 2.6.1.5. Tabelator T 320

Ze względu na różnicę między maszynami i tabelatorem opiszemy szczegółowo obliczanie za pomocą tabelatora T 320.

Dla obliczenia ścieżek krytycznych za pomocą T 320 trzeba przygotować trzy rodzaje kart. Wychodzimy z sieci powiązań, która przedstawia wszystkie czynności oraz powiązania pomiędzy nimi.

Pierwszy zespół kart tworzą karty podstawowe, na które zostanie wydziurkowany

a/ numer zdarzenia początkowego czynności

- b/ numer zdarzenia końcowego czynności
- c/ czas trwania czynności
- d/ wartości  $y_{ij}$  /trwania/ przesyłane do rejestru;  
potrzebne do obliczania maksimum i minimum
- e/ tekst, który jest komentarzem odpowiedniej czynności.

Drugim zespołem kart są karty programowe, na które zostanie wydziurkowany:

- a/ numer obydwu zdarzeń
- b/ numer karty programowej
- c/ dziurkowanie, które kieruje czynnością rejestrów przy porównywaniu wartości i dziurkowaniu sumarycznych kart.

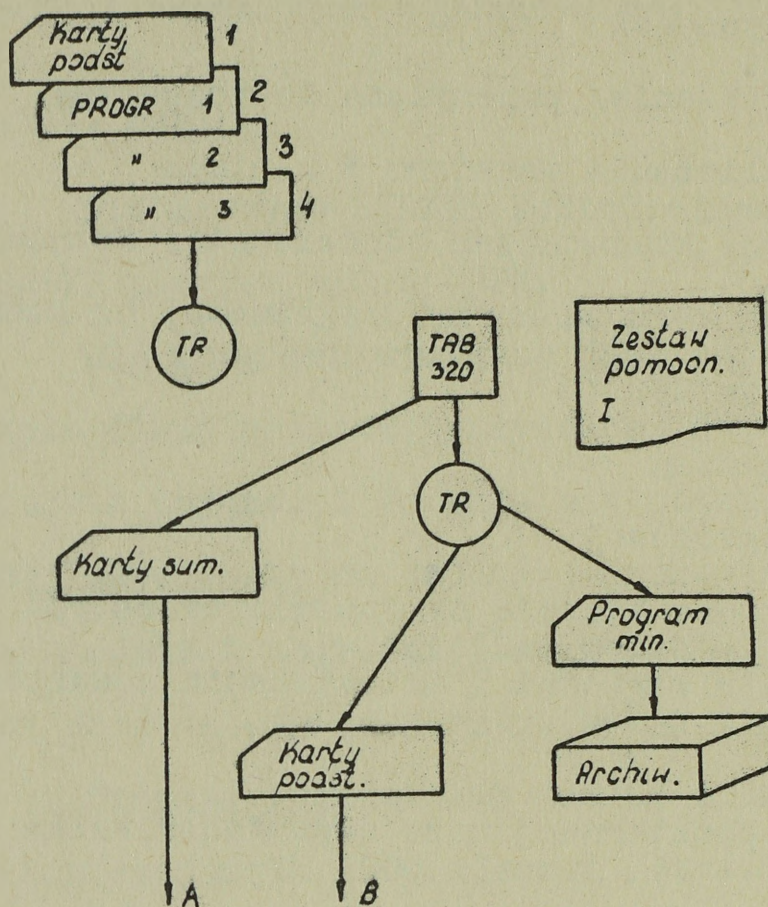
Jednej karcie podstawowej może odpowiadać kilka kart programowych.

Trzeci zespół kart tworzą karty sumaryczne, które są rezultatem przekształcenia kart podstawowych i programowych. Karty sumaryczne dziurkuje się w dwóch fazach:

1. przy obliczaniu minimum dziurkuje się
  - numery obydwu zdarzeń
  - wartość  $y_{ij}$  /trwanie/
  - wartość początkową i końcową minimum
  - teksty.
2. przy obliczaniu maksimum dziurkuje się początkową i końcową wartość maksymalną.

Karty podstawowe tablicuje się dwa razy, za każdym razem inaczej uporządkowane. Obliczenie różnic pomiędzy minimum i maksimum /ścieżkę krytyczną/ przeprowadza się dopiero przy tablicowaniu kart sumarycznych, kiedy mamy do dyspozycji tablicę wszystkich wartości oraz opis wszystkich tekstów.

Procedura klasyfikacji i tablicowania



Rys.I

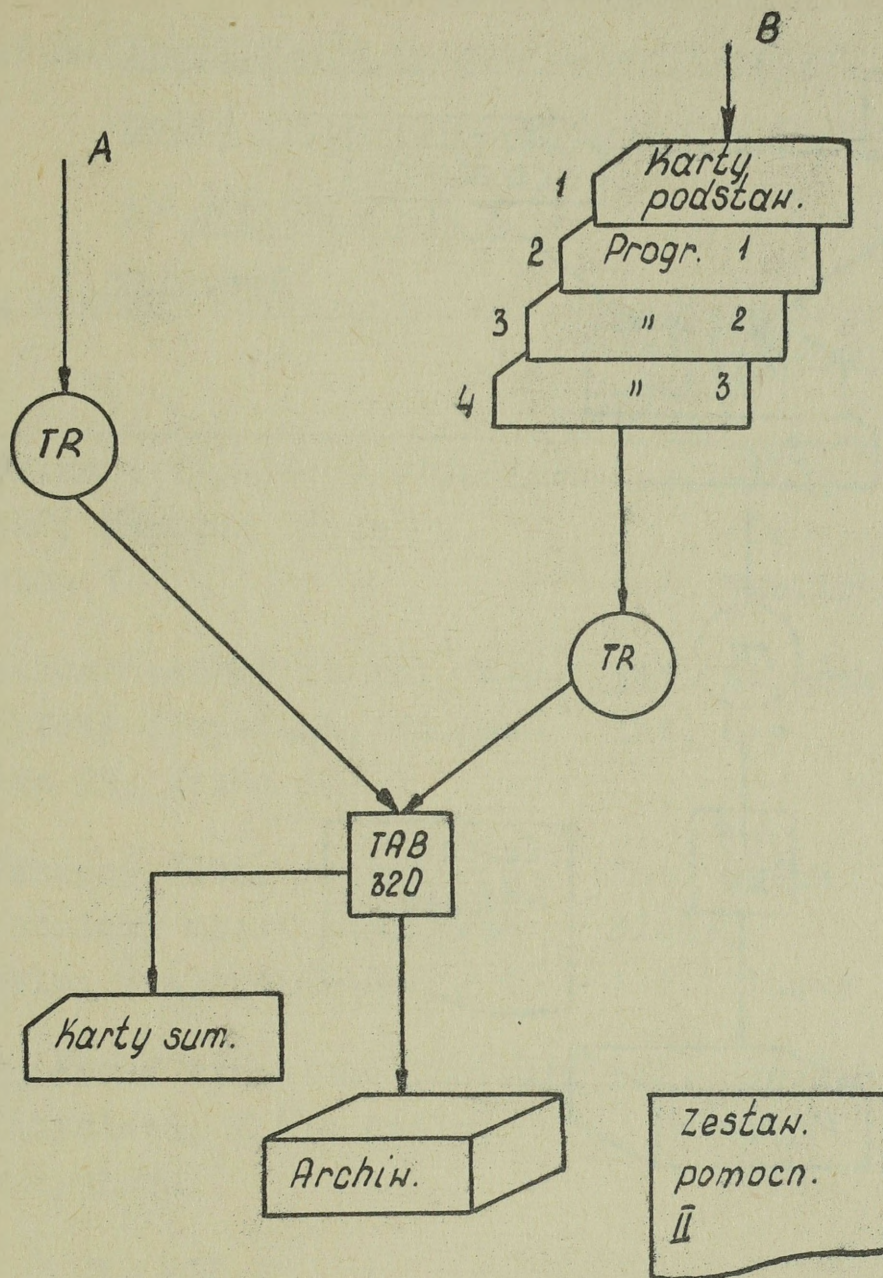
Karty uporządkujemy w następujący sposób:

- |                     |                            |
|---------------------|----------------------------|
| 1. karty podstawowe |                            |
| 2. karty programowe | 1. dla obliczenia minimum  |
| 3. karty programowe | 2. dla obliczenia minimum  |
| 4. karty programowe | 3. dla obliczenia minimum. |

Porządkujemy według numerów zdarzeń.

Tablicujemy z włączonym wyłącznikiem V 1, V 4, V 9 - V 14 oraz z sumatorowym dziurkaczem.

Po tablicowaniu uporządkujemy karty programowe dla obliczenia minimum.



Rys. II

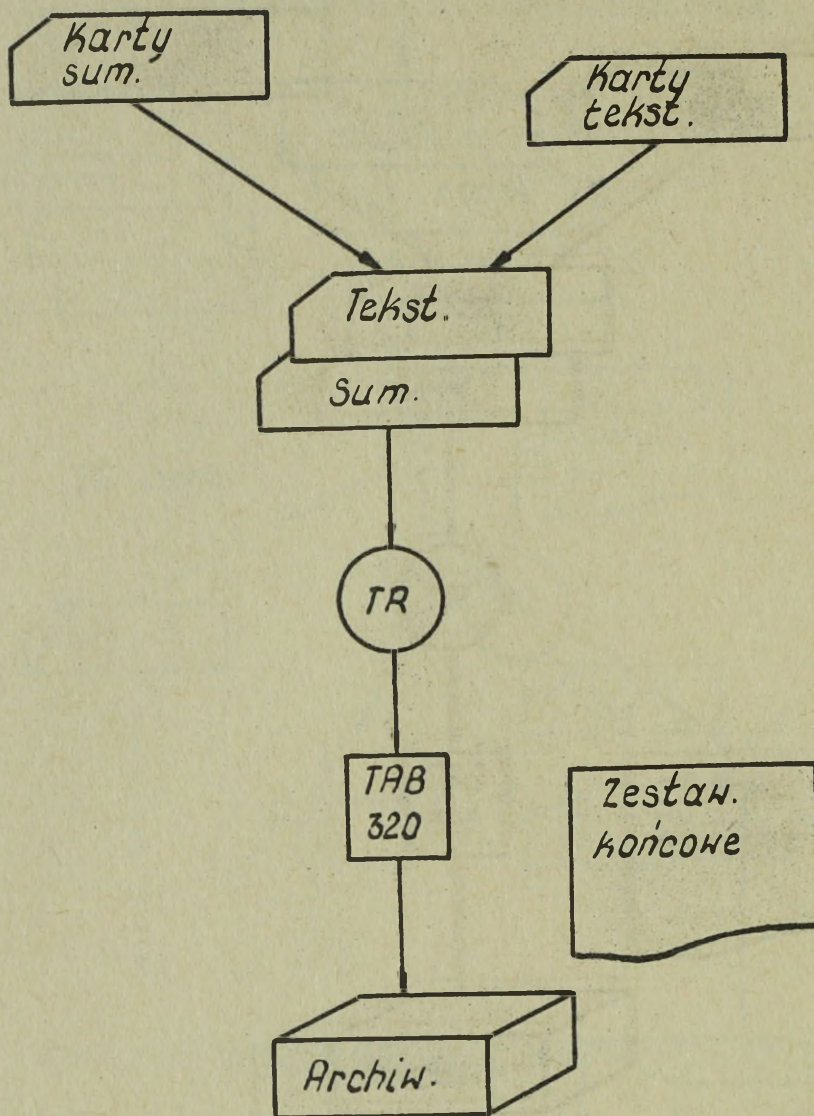
Do kart podstawowych dołączamy karty programowe dla maksimum oraz uporzędkujemy następująco:

1. karty podstawowe
2. karty programowe 1. dla maksimum
3. karty programowe 2. dla maksimum
4. karty programowe 3. dla maksimum

Porządkujemy zastępująco

Tablicujemy z włączonym V 1, V 4, V 7, V 9 - V 14;

sumatorowy dziurkacz dodziurkować do kart sumarycznych.



Rys. III

Karty sumaryczne i tekstowe ułożymy w ten sposób, że układ jest

1. tekstowy
2. sumaryczny oraz uporządkowany według numerów zdarzeń.

Tablicujemy z włączonym V 4 - uzyskujemy końcowe zestawienie.

Ograniczenia i czas wykonania trzeba ustalić dla każdego projektu oddzielnie.

2.6.2. Lokalizacja maszyn matematycznych w CSRS, na których  
można opracowywać metody CPM i PERT /stan na 1.1.65r./

A/ NATIONAL 803 B

Adres centrum obliczeniowego	Nazwisko odpowiedzialnego pracownika	Telefon	Uwagi
1. Výzkumné výpočtové středisko KSNP; Národní třída 19, Praha 1	tow. Sloup POS inž. Vseticka	234656	
2. Československý státní energetický dispečink; Jungmannova 29, Praha 1	inž. Kolařík inž. Šíp	247645	
3. Výzkumný ústav technickoekonomický chemického průmyslu; Štěpánská, Praha 1	inž. Bláha Blažek inž. Kluson	244641	
4. Výpočetní středisko SLOVNAFT Bratislava; Vlčie Hrdle, Bratislava	inž. Horváth		

B. LGP 30

Adres centrum obliczeniowego	Nazwisko odpowiedzialnego pracownika	Telefon	Uwagi
1. Centrum numerické matematiky UK, Malostranské, náměstí 25, Praha 1	Pokorná CSC Vlach		CNM nie przeprowadza obliczeń dla organizacji gosp. 532 132-8
2. Ustředna mechanické evidence, Nekázanka 5, Praha 1	dr Holý	225 1168	

3. Vypočtové středisko ÚEOS Vlček  
Bratislava
4. Východoslovenské železářny, prom.mat. 25 501-5  
Koszyce Novický 25 601-5
5. Laborator počítačích stroju Novák  
VVT, Třída obráncu Miru 21,  
Brno

C. ZUSE 23

Adres centrum obliczeniowego	Nazwisko pracownika	Telefon Uwagi
1. Výpočetní středisko n.p.ČKD, inž. Malir U Kolbenky 159, Praha - Vysočany		86, wewn. 2047
2. SOKD - výpočetní středisko Ostrava I	inž. Brandejs	
3. Státní výzkumny ústav tepelné techniky; Husova 8 Praha 1	inž. Osvald	247751-5

D. SIRIUS

Adres centrum obliczeniowego	Nazwisko pracownika	Telefon Uwagi
1. Výzkumný ústav hutnictví a železa, Konradova 14, Praha - Vysočany	prom.mat. Blazek	

2.6.3. Przegląd zagranicznych programów

Dla możliwości porównania w jakiej skali stosuje się metody CPM i PERT w państwach zachodnich, przytoczymy spis najbardziej znanych programów.

numer	Program dla maszyny	Metoda	Ograniczenia	U w a g i
1.	BURROUHGS 220	PERT	500 czynności 300 zdarzeń	
2.	BURROUHGS 220	CPM	400 czynności	Data kalendarzowa, dowolne numerowanie czynności
3.	CONTROL DATA 6-15	CPM PERT	863 czynności 431 czynności	Bez dat kalendarzowych oraz numerowych opisów
4.	CONTROL DATA 6-20	PERT I	150-2000 czynności	
5.	CONTROL DATA 6-20	PERT II	150-2000 czynności	
6.	CONTROL DATA 1604	PERT	3000 czynności	
7.	GE-225	PERT CPM	21000 czyn. 1000 zdarzeń	Dowolne numerowanie zdarzeń; optymalizacja nakładów nazywa się: "CRITICAL PATH METHOD PRGR" i "PROJECT MONITOR AND CONTROL METHOD /PROMOCOM/
8.	HONEYWELL 400 lub 1400	PERT	1400-3000 czynności	
9.	HONEYWELL 800 lub 1800	PERT	nieograniczona ilość	Obliczanie zapasów wewnętrznych planowanych danych
10.	IBM-650	CPM	999 zdarzeń	Nazwa "LESS"; optymalizacja nakładów

Numer	Program dla maszyny	Metoda	Ograniczenia	U w a g i
11.	IMB-650 lub 1620	CPM	999 zdarzeń	Do "LESS" dołączono planowanie sił roboczych według 10 kategorii
12.	IBM-704 lub 7090	CPM		Optymalizacja nakładów
13.	IBM-1401	PERT	nieograniczenie	Kilka programów dla sprawdzenia danych wejściowych przez zastąpienie APL/JHO wersji NASA PERT "B" programu dla IBM 7090
14.	IBM-1401	CPM	985-2125 zdarzeń	
15.	IBM-1410	CPM	1000 zdarzeń 3397 zdarzeń i czynności	CPM posiadająca niektóre cechy metody PERT; prawdopodobieństwo i planowane dane
16.	IBM-1620	PERT CPM	999 zdarzeń	z optymalizacją nakładów
17.	IBM-1620	CPM		Przypadkowe numerowanie zdarzeń i kolejność czynności
18.	IBM-1620	PERT		
19.	IBM-770 i 1401	PERT		Kombinacja orientacji czynności i zdarzeń
20.	IBM-7090	PERT	13500 zdarzeń	
21.	IBM 7090	PERT III	12000 czynności w szczegółowej sieci	PERT operująca z czynnościami lub zdarzeniami; graficzne wyjście; nazwa PERT III

Numer	Program dla maszyny	Metoda	Ograniczenia	U w a g i
22.	IBM-7090	PERT	5120 czynności w szczegółowej sieci	PERT połączona z kontrolą na- kładów; zagęsz- czenie sieci; graficzne wyj- ście; kilka po- ziomów sumy na- kładów
23.	IBM-7090	CPM	8000 czynności	CPM połączona z rozplanowaniem sił roboczych /99 branż/ do sieci; maksymal- nie 6 branż na jedną czynność
24.	IBM 7090/94 C-E-I-R	CPM	700 czynności	Nazwa "RAMPS"; rozplanowuje ograniczone źró- dła wśród konku- rujących czynno- ści; 700 czynno- ści do 3 projek- tów i 20 źródeł
25.	IBM 7090/94		1000 czynności	Nazwa "NAP" /Net- work Automated Printing/
26.	IBM 7090/94	PERT	7500 czynności	PERT z optymaliz- acją nakładów i kontrolą. 7 po- ziomów sumy, Nazwa PERT/COST.
27.	IBM 7090/94	PERT	7168 czynności	PERT, tylko jed- na czasowa ocena; sumowanie według MILES/TONES; nazwa NASA PERT B
28.	IBM 7090	PERT	4000 czynności w szczegółowej sieci 125 podrzęd- nych sieci lub 50000 czynności	Wyjście graficz- ne drukowanie sieci. Nazwa: "DOUGLAS" PERT MARK IV SYSTEM".

Numer	Program dla maszyny	Metoda	Ograniczenia	U w a g i
29.	NCR 304 lub NRC 315	PERT	5000 czynności	
30.	PHILCO 2000	PERT	750 czynności	Nazwa "WCC PERT"
31.	RECOMP II	CPM	703 czynności	3 czasowe oceny oraz wielokrotne zdarzenia zewnętrzne; kilka możliwych wyjść /nazwa "SCHEDULE CRITICAL PATH"/
32.	RCA 301	PERT	16000 czynności 900 zdarzeń	Różne typy kodów; dowolna jednostka czasu.
33.	RCA 301		24000 czynności	Planowanie do 50 różnych źródeł; analiza nakładów; wyjścia graficzne.
34.	RCA 501	PERT	2000 czynności 1000 zdarzeń	
35.	RCA 501 lub RCA 301			Nazwa "APEX" system łączący podejście bilansowe z kontrolą projektu.
36.	UNIVAC 1107	PERT	12000 czynności 12000 zdarzeń	Kontrola nakładów; nazwa "UNIVAC" 1107 PERT COST, system spełnienia sprawozdania DOD/NASA; zagęszczenie sieci i łączenie.

### 3. DODATKI MATEMATYCZNE

=====

#### 3.1. Wprowadzenie do teorii grafów

Dla ilustracji pojęcia grafu /wykresu/ rozpatrzmy teraz kilka przykładów.

##### Przykład 1.

Rozważmy mechanizm, który może znajdować się w skończonej ilości stanów, np. pięć stanów A, B, C, D, E. Przy tym działanie mechanizmu polega na tym, że podczas jednej fazy może przechodzić z jednego stanu w drugi. Załóżmy, że podczas jednej fazy roboczej przechodzi z jednego stanu do drugiego według następujących zasad:

Ze stanu A można podczas jednej fazy przejść do stanu B,

z B do C

z C do D

z D do E

z E do A.

Określamy przekształcenie przejścia od jednego stanu do drugiego następująco:

$$f_A = B$$

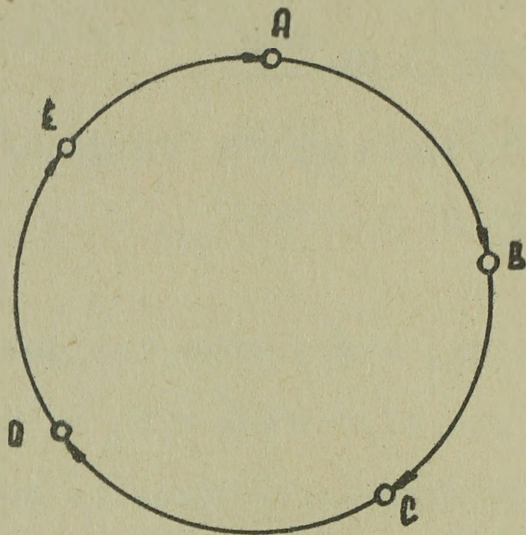
$$f_C = D$$

$$f_B = C$$

$$f_D = E$$

$$f_E = A$$

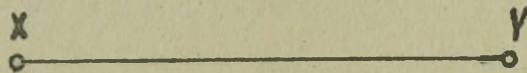
Daną sytuację można przedstawić graficznie za pomocą rysunku /rys. 84/:



Rys. 84

Poszczególnym stanom mechanizmu przyporządkowujemy punkty na płaszczyźnie.

Jeżeli  $\sqrt{x = y}$ , gdzie  $x, y$  oznaczają ogólnie stany mechanizmu, rysujemy krzywą zorientowaną, która łączy punkt przyporządkowany stanowi  $x$  z punktem przyporządkowanym stanowi  $y$ .



rys. 85

Przykład 2. /uogólnienie przykładu 1/

Rozważmy znów mechanizm, który może znajdować się w stanach A, B, C, D, E. Niech zachodzi:

1. ze stanu A przechodzi do stanu B z prawdopodobieństwem  $1/2$  i do C również z prawdopodobieństwem  $1/2$ .

2. ze stanu B do A z prawdopodobieństwem  $1/2$  i pozostaje w stanie B z prawdopodobieństwem  $1/2$ .

3. z C do D z prawdopodobieństwem  $1/4$  i do E z prawdopodobieństwem  $1/2$  oraz pozostaje w stanie C z prawdopodobieństwem  $1/4$ .

4. z D do A z prawdopodobieństwem  $1/3$ , do B z prawdopodobieństwem  $1/3$  oraz z prawdopodobieństwem  $1/3$  pozostaje w D.

5. ze stanu E mechanizm przechodzi do stanów A, B, C, D z prawdopodobieństwami równymi  $1/4$ .

Oznaczmy przez  $\Gamma$  przekształcenie następujące:

$\Gamma$  przyporządkuje każdemu stanowi  $x$  zbiór wszystkich stanów  $y$ , dla których zachodzi: ze stanu  $x$  można przejść podczas jednego taktu do stanu  $y$  z prawdopodobieństwem różnym od zera. Związek ten będziemy zapisywać następująco:  $y \in \Gamma x$ .  $\Gamma x$  jest zbiorem wszystkich elementów  $y$ , dla których zachodzi  $y \in \Gamma x$ .

Jeżeli elementy tego zbioru oznaczymy  $y_1, y_2, \dots, y_m$ , wtedy można napisać

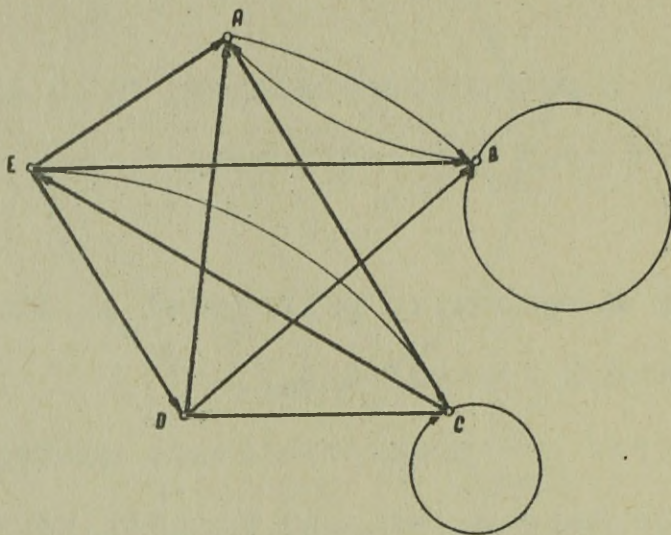
$$\Gamma x = \{ y_1, y_2, \dots, y_k \}$$

W naszym przypadku przekształcenie  $\Gamma$  jest określone następująco:

$$\begin{aligned} \Gamma A &= \{ B, C \} \\ \Gamma B &= \{ A, B \} \\ \Gamma C &= \{ C, D, E \} \\ \Gamma D &= \{ A, B, D \} \\ \Gamma E &= \{ A, B, C, D \} \end{aligned}$$

Widzimy, że w przykładzie 2 przekształcenie jest wieloznaczne, przekształcenie w przykładzie 1 było jednoznaczne.

Przekształcenie zbioru  $\{A, B, C, D, E\}$  w siebie możemy znów przedstawić za pomocą następującego schematu:



rys. 86

Przykład 3 /Proces łańcuchowy/

Proces łańcuchowy można opisać za pomocą zbiorów czynności i etapów. Niech  $A, B, C, D, E$  są etapami oraz mamy zbiór czynności  $a, b, c, d, e, f, g$ .

Jeżeli  $X, Y$  są dwoma etapami i  $x$  czynnością, będziemy mówić, że  $X$  jest etapem początkowym czynności  $x$ , jeżeli czynność  $x$  może rozpocząć się tylko w etapie  $X$  oraz będziemy mówić, że  $Y$  jest etapem końcowym czynności  $x$ , jeżeli bezpośrednio przez realizację etapu  $Y$  trzeba wykonać czynność  $x$ .

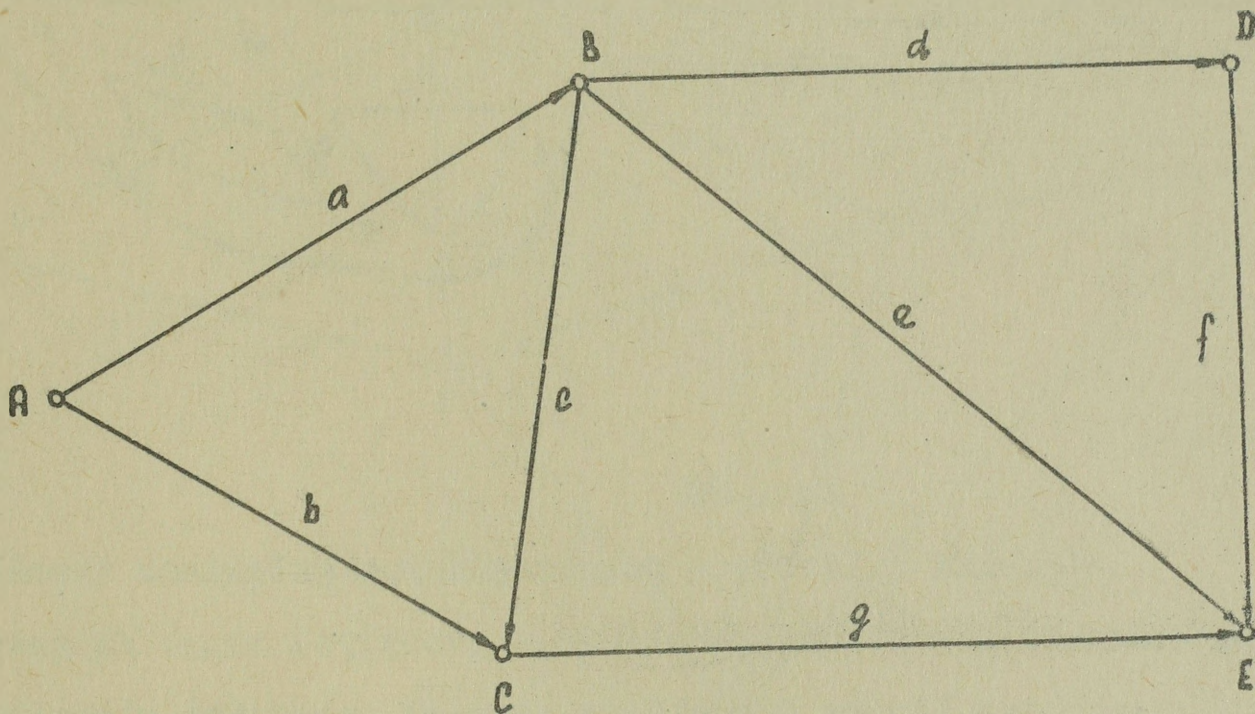
Jeżeli  $X$  jest etapem początkowym i  $Y$  etapem końcowym czynności  $x$ , wtedy używamy zapisu  $x = /X, Y/$ .

Niech w naszym przypadku:

$a = (A, B)$	$e = (B, E)$
$b = (A, C)$	$f = (D, E)$
$c = (B, C)$	$g = (C, E)$
$d = (B, D)$	

Sytuację tę można przedstawić w sposób następujący

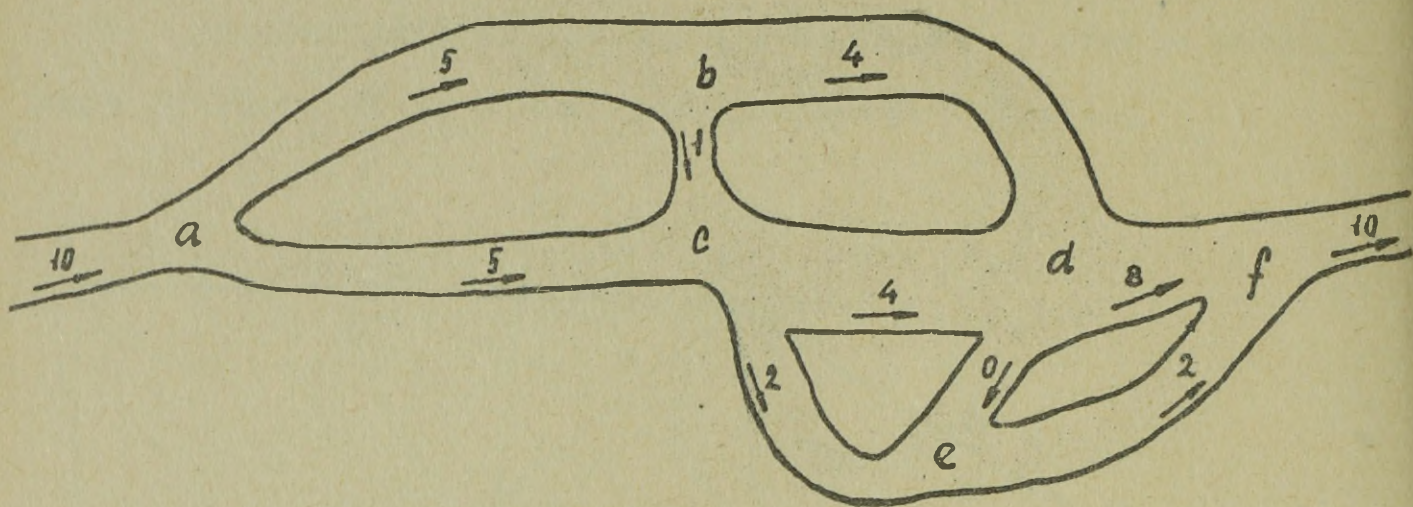
/rys. 87/



rys. 87

Przykład 4 /sieć wodna/

Założmy, że mamy sieć wodną przedstawioną za pomocą planu  
/rys. 88/:



rys. 88

Strzałki i liczby w poszczególnych gałęziach określają kierunki i szybkość /w hl/min./ przepływu wody. /W gałęzi oznaczonej liczbą 0 mogliśmy również narysować strzałkę - w odwrotnym kierunku/.

Poszczególne gałęzie rozchodzą się albo zbiegają się:

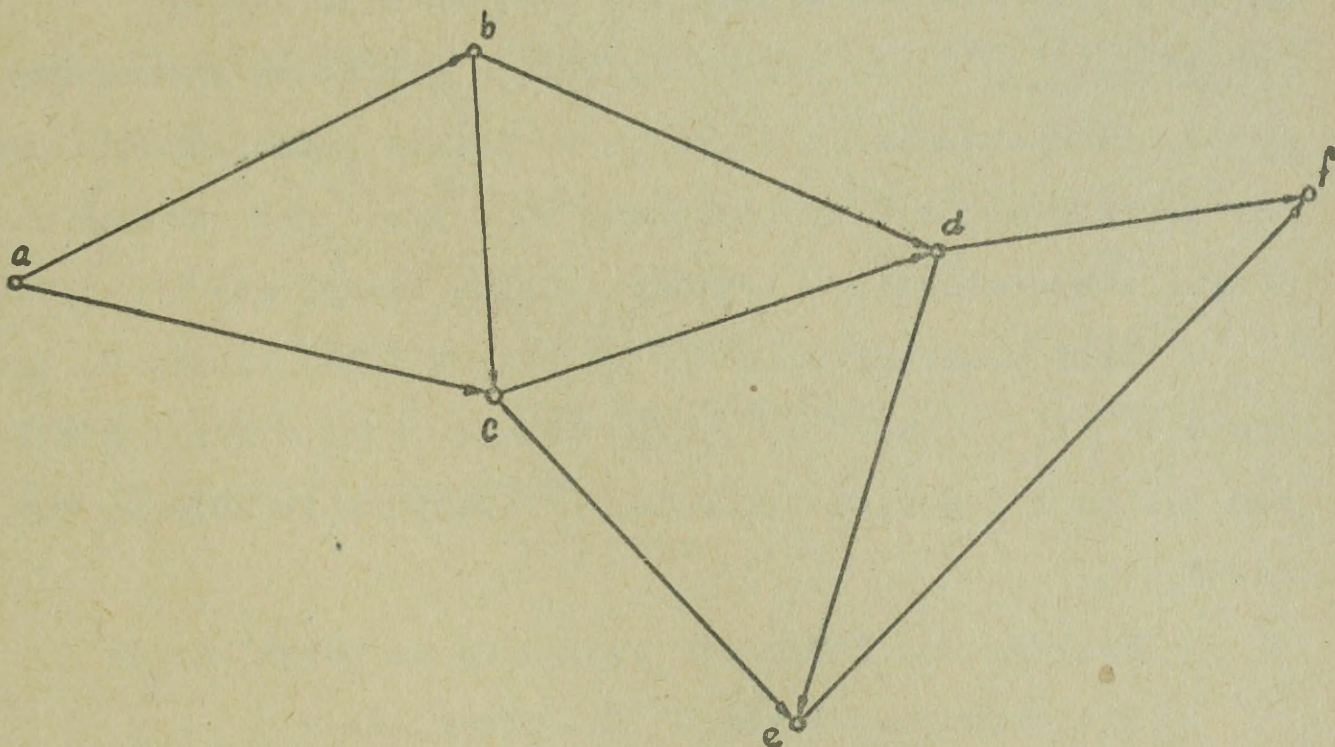
Oznaczmy rozgałęzienia i spływy przez a, b, c, d, e, f /zobacz rysunek/ oraz wprowadzimy oznaczenia dla poszczególnych gałęzi:

$$\begin{array}{lll}
 \tilde{a} = (a, b) & \tilde{d} = (b, d) & \tilde{g} = (d, e) \\
 \tilde{b} = (a, c) & \tilde{e} = (c, d) & \tilde{h} = (d, f) \\
 \tilde{c} = (b, c) & \tilde{f} = (c, e) & \tilde{i} = (e, f)
 \end{array}$$

Np. zapis  $\tilde{a} = (a, b)$  oznacza, że gałąź a wychodzi z a i wchodzi do b. Tablica określa związki pomiędzy poszczególnymi gałęziami i węzłami sieci wodnej. Przy tym nie zwracamy uwagi na takie problemy, jaki jest kształt poszczególnych

gałęzi, charakter brzegów itd.

Sytuację można zilustrować za pomocą następującego planu /rys. 89/.



rys. 89

Przechodzimy następnie do ogólnej definicji grafu.

Graf jest to uporządkowana para  $(X, \Gamma)$ , gdzie  $X$  jest zbiorem skończonym i  $\Gamma$  przekształcenie /na ogół wieloznaczne/ zbioru  $X$  w siebie.

$$x \xrightarrow{\Gamma} X,$$

Elementy zbioru  $X$  nazywamy węzłami. Widzimy bezpośrednio, że przykłady 1 i 2 przedstawiają grafy.

Żeby móc stwierdzić, że również przykłady 3 i 4 można uważać za pewne grafy, podamy następnie inną definicję grafu równoważną z poprzednią. W tym celu wprowadzimy pojęcie łuku: łuk jest to uporządkowana para węzłów  $u = (x, y)$ .

Węzeł  $x$  nazywamy węzłem początkowym łuku  $u$ , węzeł  $y$  nazywamy węzłem końcowym łuku  $u$ .

Równoważna definicja grafu:

Grafem nazywamy uporządkowaną parę zbiorów  $(X, U)$ , gdzie  $X$  jest zbiorem węzłów i  $U$  jest zbiorem łuków,

Twierdzenie 1. Wyżej podane definicje grafów są równoważne.

Dowód. Przekształceniu  $\Gamma$  można wzajemnie jednoznacznie przyporządkować zbiór  $U$  następująco:  $y \in \Gamma x/y$  jest obrazem  $x$  przy przekształceniu  $\Gamma$  /wtedy i tylko wtedy, gdy  $(x, y) \in U$ .

Graf będziemy oznaczać za pomocą dużej litery  $G$ . Zapis  $G = (X, \Gamma)$  lub  $G = (X, U)$  oznacza graf określony zbiorem węzłów  $X$  i przekształceniem  $\Gamma$  ewentualnie zbiorem łuków  $U$ .

Przytoczoną definicję objaśnimy na przykładach:

Skonstruujemy zbiór  $U$  dla przykładu 1

$$U = \left\{ (A, B), (B, C), (C, D), (D, E), (E, A) \right\}.$$

Skonstruujemy następnie przekształcenie  $\Gamma$  dla przy-

kładu 4

$$\begin{array}{lll} \Gamma a = \{ b, c \} & \Gamma c = \{ d, e \} & \Gamma e = \{ f \} \\ \Gamma b = \{ c, d \} & \Gamma d = \{ e, f \} & \Gamma f = \{ \emptyset \} \end{array}$$

Symbol  $\emptyset$  oznacza zbiór pusty.

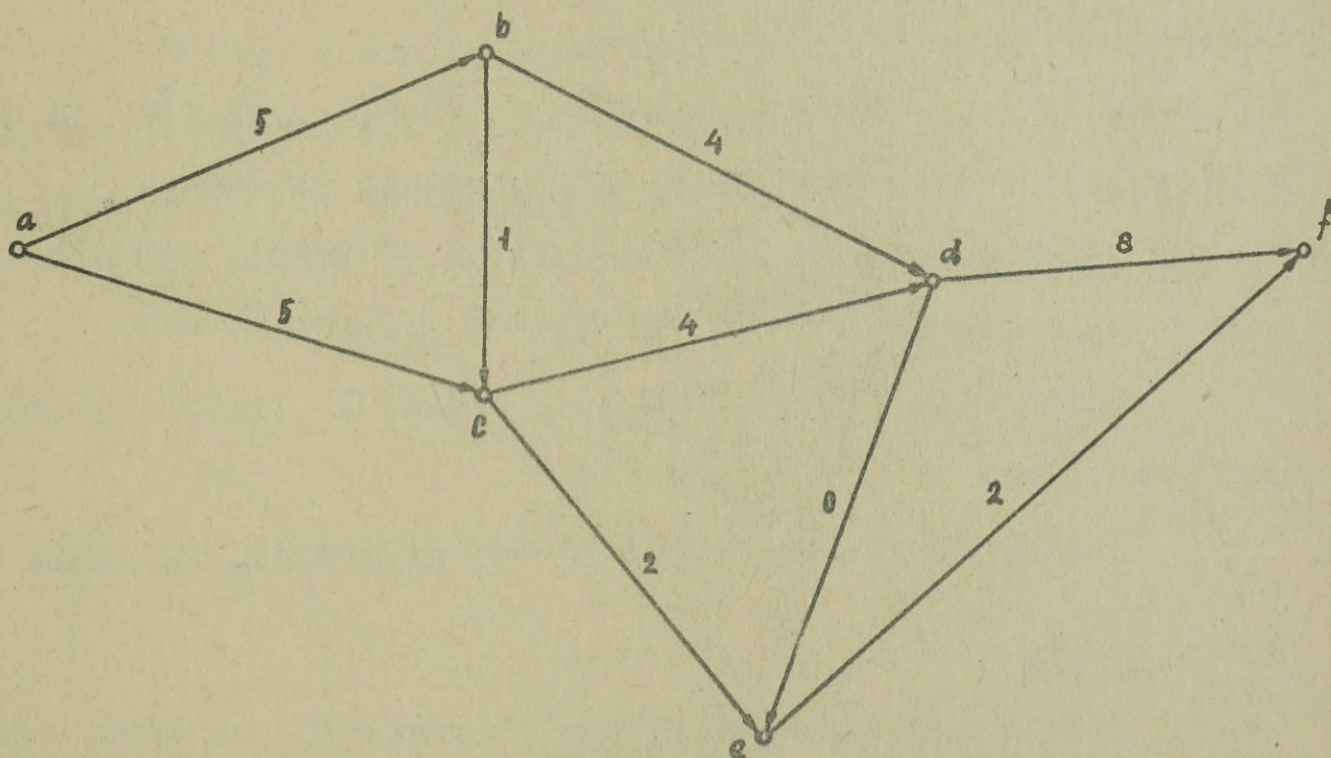
Definicja. Funkcję  $\varphi$ , która przyporządkowuje każdemu łukowi  $u = (x, y)$  grafu  $G$  liczbę rzeczywistą  $\varphi(u) = \varphi(x, y)$  nazywamy określeniem łukowym grafu.

Definicja. Graf z określeniem łukowym grafu nazywamy grafem łukowo określonym.

W przykładzie 4 mamy graf, który wyznacza związki między poszczególnymi gałęziami i węzłami sieci wodnej. W niektórych zadaniach ważna jest znajomość szybkości przepływu w poszczególnych gałęziach. Graf łukowo określony otrzymamy w ten sposób, że wprowadzimy funkcję  $\varphi$ , która każdemu łukowi przyporządkowuje odpowiadającą jej szybkość przepływu:

$$\begin{array}{lll} \varphi(a,b) = 5 & \varphi(b,d) = 4 & \varphi(d,e) = 0 \\ \varphi(a,c) = 5 & \varphi(c,d) = 4 & \varphi(d,f) = 8 \\ \varphi(b,c) = 1 & \varphi(c,e) = 2 & \varphi(e,f) = 2 \end{array}$$

Graf łukowo określony przedstawiamy graficznie w ten sposób, że do każdego łuku dopisujemy wartość funkcji  $\varphi(u)$ . Dla przykładu 4 otrzymamy więc /rys. 90/:



rys. 90

Oczywiście, że każdemu łukowi grafu można przyporządkować kilka wartości.

Wprowadzimy następnie kilka pojęć z teorii grafów.

Łańcuchem grafu  $(X, U)$  nazywamy ciąg łuków z  $U$   
 $\{u_1, u_2, \dots, u_k\}$  postaci  $u_i = (x_{i-1}, x_i)$ ;  $i = 1, 2, \dots, k$ .  
 $x_0$  nazywamy węzłem początkowym łańcucha,  $x_k$  węzłem końcowym łańcucha.

Łańcuch, dla którego  $(i \neq j) \Rightarrow (x_i \neq x_j)$  nazywamy ścieżką /drogą/. Ścieżka jest więc szczególnym przypadkiem łańcucha każdy węzeł występuje tylko raz/.

Jeżeli  $\{u_1, \dots, u_k\}$  jest ścieżką,  $u_i = (x_{i-1}, x_i)$ ,  
wtedy ciąg łuków  $\{u_1, \dots, u_k, (x_k, x_0)\}$  nazywamy pętlą.  
Łuk  $(x, x)$  jest również pętlą.

Dla ilustracji wprowadzonych pojęć przytoczymy przykłady:

Ciąg łuków  $\{(E, D), (D, B), (B, B), (B, A), (A, C)\}$   
z przykładu 2 jest łańcuchem, ale nie jest ścieżką.

Ciągi łuków  $\{(E, D), (E, A)\}$  i  $\{(E, D), (C, C)\}$   
nie są łańcuchami.

Ciąg łuków  $\{(E, D), (D, B), (B, A), (A, C), (C, E)\}$   
jest okręgiem.

Liczbę łuków łańcucha nazywamy długością łańcucha.

### 3.1.1. Sieci

Graf  $G$  nazywamy acyklicznym, jeżeli nie zawiera żadnej pętli.

Rozważmy graf  $G = (X, \Gamma)$ , w którym zostały wybrane dwa węzły  $x_0, z$  ( $x_0 \neq z$ ) ( $x_0$  nazywamy węzłem wejściowym,

$z$  - węzłem wyjściowym/. Załóżmy, że zachodzi:

1/  $G$  jest acykliczny

2/ dla każdego węzła  $x \in X$  istnieje co najmniej jedna ścieżka o początku  $x_0$  i końcu  $z$  przechodząca przez węzeł  $x$ .

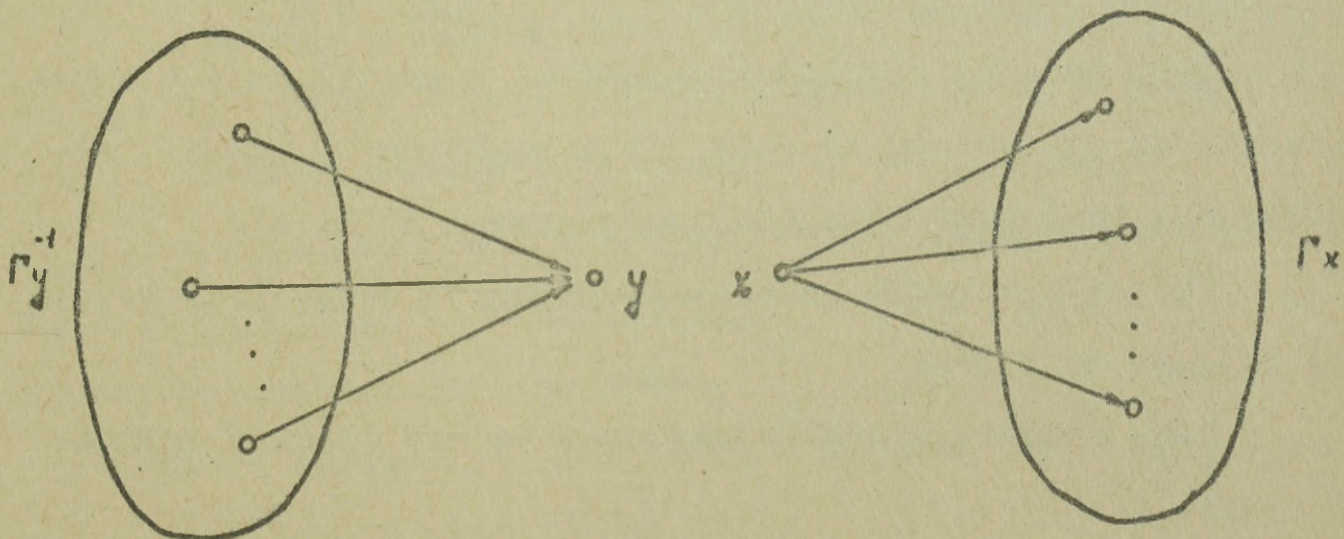
Graf spełniający te założenia nazywamy siecią. Każdy węzeł  $x_0 \neq x \neq z$  nazywamy węzłem wewnętrznym sieci.

Jeżeli w przykładzie 4 za  $x_0$  wybierzemy  $a$ , za  $z$  wybierzemy  $f$ , graf będzie oczywiście siecią.

Przy każdym innym wyborze tych dwu węzłów graf nie będzie siecią. /Wykażemy później ogólnie, że węzły wejściowy i wyjściowy są określone jednoznacznie/. Tak samo graf z przykładu 3 będzie siecią przy wyborze  $A$  za węzeł wejściowy i  $E$  za węzeł wyjściowy. Grafy z przykładów 1 i 2 nie mogą być sieciami, ponieważ zawierają okręgi.

Wróćmy teraz do przekształcenia  $\Gamma$  z definicji grafu. Wprowadzimy pojęcie przekształcenia odwrotnego  $\Gamma^{-1}$  do przekształcenia  $\Gamma$  następująco:  
 $x \in \Gamma^{-1}y$ , jeżeli  $y \in \Gamma x$  dla dowolnej pary węzłów  $x, y \in X$ .

Schemat wygląda następująco /rys. 91/:



rys. 91

Przekształcenie  $\Gamma^{-1}$  konstruujemy w przykładzie 3 następująco:

$$\begin{aligned} \Gamma^{-1}A &= \emptyset & \Gamma^{-1}C &= \{A, B\} & \Gamma^{-1}E &= \{B, C, D\} \\ \Gamma^{-1}B &= \{A\} & \Gamma^{-1}D &= \{B\} & & \end{aligned}$$

Twierdzenie 2 /charakterystyka węzłów sieci/.

Niech  $G$  - sieć,  $x_0$  - węzeł wejściowy,  $z$  - węzeł wyjściowy,  $x$  - węzeł wewnętrzny sieci.

$$\text{Wtedy } \Gamma^{-1}x_0 = \Gamma z = \emptyset, \Gamma x \neq \emptyset, \Gamma^{-1}x \neq \emptyset.$$

Dowód jest oczywisty.

Wniosek z twierdzenia 2. Węzły wejściowy i wyjściowy są określone jednoznacznie.

### 3.1.2. Zadanie optymalizacji potoku w sieci

Wychodzimy z przykładu 4. Żeby bardziej zbliżyć się do rzeczywistości, trzeba wziąć pod uwagę, że szybkość przepływu w poszczególnych gałęziach jest ograniczona. W naszym przypadku ograniczenie szybkości przepływu w poszczególnych gałęziach wyrażają wartości /hl/min/:

$$\begin{aligned} f(a,b) &= 6 & f(b,d) &= 5 & f(d,e) &= 2 \\ f(a,c) &= 10 & f(c,d) &= 5 & f(d,f) &= 9 \\ f(b,c) &= 2 & f(c,e) &= 4 & f(e,f) &= 5 \end{aligned}$$

Przy podanej szybkości przepływu w przykładzie 4 ograniczenia są wystarczająco duże, żeby zapobiec wylewowi. Całkowita objętość przepływającej wody wynosi 10 hl/min.

Chcemy wyznaczyć maksymalny przepływ wody, przy którym nie dojdzie do wylewu.

Dane zadanie sformułujemy ogólnie dla sieci z ograniczeniami.

Definicja. Siecią z ograniczeniami nazywamy uporządkowaną parę: sieć  $(X, \Gamma, x_0, z)$  i funkcję nieujemną  $f$  określoną w zbiorze łuków sieci  $f(x,y)$ , gdzie  $y \in \Gamma_x$  nazywamy przepustowością łuku  $(x,y)$ . W dalszym ciągu będziemy zamiast "sieć z ograniczeniami" mówić "sieć".

Potokiem na sieci nazywamy funkcją nieujemną  $\varphi(x,y)$  określoną w zbiorze łuków sieci  $(y \in \Gamma_x)$  spełniającą warunki:

$$1/ \sum_{y \in \Gamma_x} \varphi(x,y) = \sum_{y' \in \Gamma'_x} \varphi(y', x)$$

dla każdego wężła wewnętrznego sieci

2/  $\varphi(x,y) \leq f(x,y)$  /potok dopuszczalny na łuku  $(x,y)$  jest ograniczony liczbą  $f(x,y)$  /.

Pracą potoku  $\varphi$  nazywamy liczbę  $\sum_{y \in \Gamma_{x_0}} \varphi(x_0, y)$ .

Zadanie: Znaleźć potok  $\varphi$  z maksymalną pracą /potok maksymalny/.

W przykładzie 4 mamy  $\varphi(a,b) = 5$ ,  $\varphi(a,c) = 5$  itd. Praca potoku równa się  $\varphi(a,b) + \varphi(a,c) = 10$ . Potok w przykładzie 4 nie jest maksymalny.

Uogólnimy teraz pojęcie sieci i potoku na sieci.

Definicja. Siecią nazywamy uporządkowaną trójkę  $\{X, x_0, z\}$ , gdzie  $X$  jest zbiorem skończonym,  $x_0 \neq z$ ,  $x_0 \in X$ ,  $z \in X$ . Elementy zbioru  $X$  będziemy nazywać węzłami.

Siecią z ograniczeniami nazywamy czwórkę  $(X, x_0, z, f)$ , gdzie  $x_0$  jest wejściem,  $z$  jest wyjściem,  $X (x \neq x_0, x \neq z)$  nazywamy węzłem wewnętrznym sieci,  $(X_0, x_0, z)$  jest siecią i

$f$  funkcją rzeczywistą określoną w zbiorze par  $(x,y)$ , przy czym  $f(x,x) = 0$  dla każdego  $x$ .

W dalszym ciągu będziemy zamiast sieć z ograniczeniami mówić sieć.

Określamy następnie pojęcie potoku w sieci.

Definicja. Potokiem w sieci nazywamy funkcję rzeczywistą  $\varphi(x,y)$  spełniającą następujące warunki:

$$1^{\circ} \varphi(x,y) + \varphi(y,x) = 0, \quad x \in X, \quad y \in X$$

$$2^{\circ} \sum_{y \in X} \varphi(x,y) = 0 \quad \text{dla } x_0 \neq x \neq z \text{ /"potok całkowity" wężła}$$

wewnętrznego równa się 0, węzeł wewnętrzny nie jest ani źródłem potoku, ani potoku nie zużywa/

$$3^{\circ} \varphi(x,y) \leq \varphi(y,x) \quad \text{dla } x \in X, \quad y \in X.$$

• W dalszym ciągu będziemy zakładać, że zawsze istnieje funkcja spełniająca warunki  $1^{\circ}$ ,  $2^{\circ}$ ,  $3^{\circ}$  /potok dopuszczalny/.

Pokażemy, że dla każdej sieci /w sensie pierwszej definicji/  $(X, \Gamma, x_0, z, \gamma, \varphi)$  można łatwo skonstruować sieć  $(X, x_0, z, \tilde{\gamma}, \tilde{\varphi})$  z ograniczeniem  $\tilde{\gamma}$  i potokiem  $\tilde{\varphi}$  w ten sposób, że istnieje wzajemnie jednoznaczna odpowiedniość pomiędzy obydwoimi sieciami oraz różnym potokiem  $\varphi$  na sieci pierwotnej odpowiadają różne potoki  $\tilde{\varphi}$  nowej sieci. Pokażemy więc, że nowy model sieci jest uogólnieniem modelu pierwotnego.

Rzeczywiście: jeżeli  $(X, x_0, z, \gamma)$  jest siecią, określamy sieć w ogólniejszym sensie następująco:

Zbiorem węzłów jest zbiór  $X$ , wejściem znów  $x_0$ , wyjściem  $z$ , funkcję  $\tilde{\gamma}(x,y)$  określamy następująco:

$$\tilde{\gamma}(x,y) = \begin{cases} \gamma(x,y) & \text{dla } y \in \Gamma x \\ 0 & \text{dla } y \notin \Gamma x \end{cases}$$

Jeżeli  $\varphi$  jest potokiem określonym na sieci  $(X, \Gamma, x_0, z, \delta)$  określamy potok  $\tilde{\varphi}$  następująco:

$$\tilde{\varphi}(x,y) = \begin{cases} \varphi(x,y) & \text{dla } y \in \Gamma x \\ -\varphi(y,x) & \text{dla } x \in \Gamma y \\ 0 & \text{w pozostałych przypadkach.} \end{cases}$$

Objasnimy powyższe na przykładzie 4 /zamiast  $\varphi$  piszemy  $\varphi$ , zamiast  $\delta, \delta$

Skonstruujemy funkcje  $\chi(x,y)$  i  $\varphi(x,y)$ .

	a	b	c	d	e	f
a	0	6	10	0	0	0
b	0	0	2	5	0	0
c	0	0	0	5	4	0
d	0	0	0	0	2	9
e	0	0	0	0	0	5
f	0	0	0	0	0	0

Tabl. 1

	a	b	c	d	e	f
a	0	5	5	0	0	0
b	-5	0	1	4	0	0
c	-5	-1	0	4	2	0
d	0	-4	-4	0	0	8
e	0	0	-2	0	0	2
f	0	0	0	-8	-2	0

Tabl. 2

Tablice określają funkcje  $\chi(x,y)$  i  $\varphi(x,y)$  następująco: wartość  $\chi(x,y)$  znajduje się w polu określonym przecięciem wiersza odpowiadającego  $x$  i kolumny odpowiadającej  $y$ .

Następnie będziemy się zajmować ogólnymi własnościami potoku na sieci.

Niech  $A$  i  $B$  są dowolnymi zbiorami węzłów ( $A \subset X, B \subset X$ ) Oznaczmy przez  $\varphi(A,B) = \sum_{x \in A, y \in B} \varphi(x,y)$ , tj.  $\varphi(A,B)$  oznacza całkowity potok "przepływający ze zbioru  $A$  do zbioru  $B$ ".

Jeżeli w przykładzie 4 jest  $A = \{a, c, d\}$ ,  $B = \{a, b, e\}$ , wtedy  $\varphi(A,B) = \varphi(a,a) + \varphi(a,b) + \varphi(a,e) + \varphi(c,a) + \varphi(c,b) + \varphi(c,e) + \varphi(d,a) + \varphi(d,b) + \varphi(d,e) = -3$ .

Analogicznie określamy  $\mathcal{J}(A,B) = \sum_{x \in A, y \in B} \mathcal{J}(x,y)$ , tj.  $\mathcal{J}(A,B)$  jest "całkowite ograniczenie potoku przy przepływie ze zbioru A do zbioru B". W naszym przykładzie  $\mathcal{J}(A,B) = 12$ . Widzimy, że zachodzi  $\varphi(A,B) \leq \mathcal{J}(A,B)$ .

Nierówność ta jest prawdziwa ogólnie. W następującym twierdzeniu podamy szereg prostych własności funkcji  $\varphi(A,B)$  i  $\mathcal{J}(A,B)$ .

Twierdzenie 3. Niech  $A, B \subset X$ . Wtedy zachodzi:

1°  $\varphi(A,B) + \varphi(B,A) = 0, \varphi(A,A) = 0.$

2° Jeżeli  $x$  jest węzłem wewnętrznym sieci, wtedy

$$\varphi(x,X) = \varphi(X,x) = 0.$$

Jeżeli  $A$  jest jakimś zbiorem węzłów wewnętrznych sieci /tj.  $x_0 \notin A, z \notin A$ /, wtedy

$$\varphi(A,X) = \varphi(X,A) = 0.$$

3°  $\varphi(A,B) \leq \mathcal{J}(A,B)$ .

4° Niech  $A, B, C$  są zbiorami węzłów,  $A \cap B = \emptyset$  /tj. zbiory  $A$  i  $B$  nie mają elementu wspólnego/. Wtedy

$$\varphi(A \cup B, C) = \varphi(A, C) + \varphi(B, C)$$

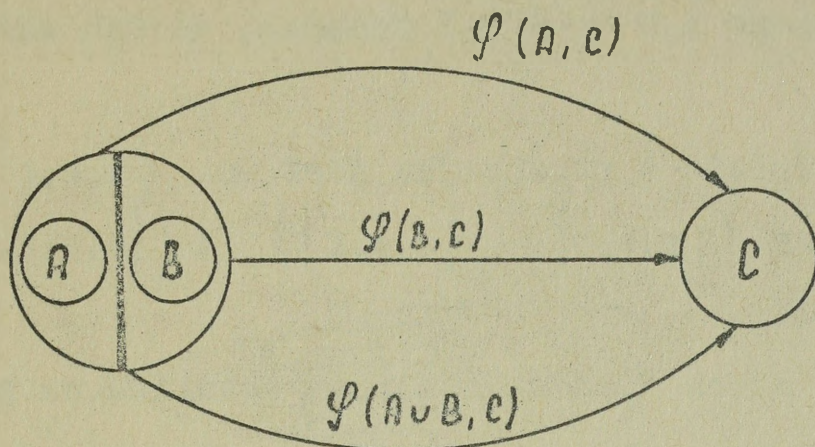
$$\varphi(C, A \cup B) = \varphi(C, A) + \varphi(C, B)$$

Jeżeli  $A \subset B \subset X$ , to

$$\varphi(B \setminus A, C) = \varphi(B, C) - \varphi(A, C).$$

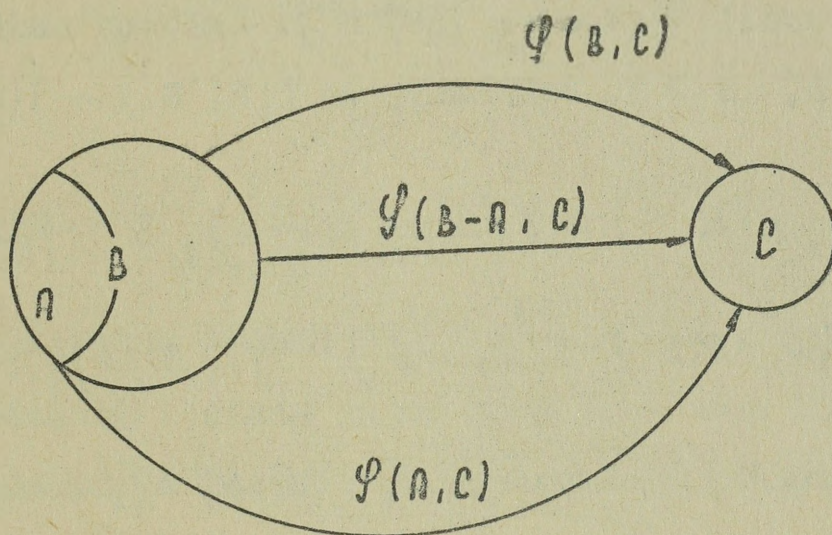
Dowód pozostawiamy czytelnikowi. Własności 4° i 5° można przedstawić za pomocą rysunków:

4°



rys. 92

5°



rys. 93

Twierdzenie posiada jasny sens fizyczny. Będziemy z kolei interesować się "objętością potoku przepływającego przez sieć". Wprowadzimy pojęcie przekroju sieci. Przekrojem sieci nazywamy rozkład zbioru węzłów  $X$  na dwa zbiory  $R$  i  $S$  taki, że

$$R \cap S = \emptyset, \quad R \cup S = X, \quad x_0 \in R, \quad z \in S.$$

$R$  nazywamy dolną częścią przekroju,  $S$  częścią górną przekroju. Zapis  $R \cap S = \emptyset$  oznacza, że zbiory  $R$  i  $S$  nie mają

elementu wspólnego i  $R \cup S = X$  oznacza, że ich sumą jest cały zbiór  $X$ .

W przykładzie 4 przekrojem jest np.  $\{a,b,c\}, \{d,e,f\}$   
Na odwrót zbiory  $(\{a,b,c\}, \{c,e,f\})$  i  $(\{d,e,f,b\}, \{a,c,d\})$   
nie są przekrojem.

Twierdzenie 4. Niech  $\varphi$  jest dowolnym potokiem na sieci. Wtedy wartość  $\varphi(R,S)$  nie zależy od tego, który przekroj  $(R,S)$  wybierzemy.

Dowód. Mamy pokazać, że dla dowolnych przekrojów  $(R,S)$  i  $(R',S')$  zachodzi  $\varphi(R,S) = \varphi(R',S')$ . Załóżmy najpierw, że zachodzi  $R \subset R', S \supset S'$ . Pokażemy, że  $\varphi(R',S') - \varphi(R,S) = 0$ .

Rzeczywiście

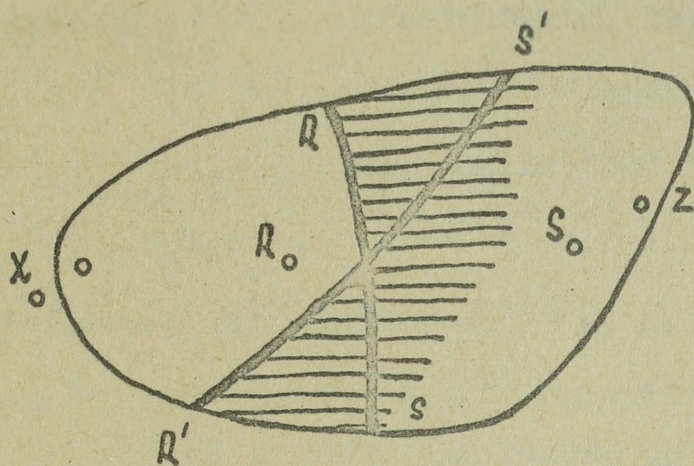
$$\begin{aligned} \varphi(R',S') - \varphi(R,S) &= \varphi(R \cup (R'-R), S') - \varphi(R, (S-S') \cup S) \\ &= \varphi(R, S') + \varphi(R'-R, S') - \varphi(R, S-S') - \varphi(R, S') = \varphi(R'-R, S') - \\ &\quad - \varphi(R, R'-R) = \varphi(R'-R, S') + \varphi(R'-R, R) = \varphi(R'-R, R \cup S') = \\ &= \varphi(R'-R, X - (R'-R)) = \varphi(R'-R, X) - \varphi(R'-R, R'-R) = 0 \end{aligned}$$

Polecamy czytelnikowi narysować rysunek. W ogólnym przypadku wykażemy równość  $\varphi(R',S') = \varphi(R,S)$  w ten sposób, że sprowadzimy to do poprzedniego. Niech  $(R,S), (R',S')$  będą dwoma przekrojami, skonstruujemy nowy przekrój  $(R_0, S_0)$  następująco:

$$R_0 = R \cap R', \quad S_0 = S \cup S'$$

Wtedy oczywiście zachodzi

$$\begin{aligned} R_0 \subset R, & \quad R_0 \subset R' \\ S_0 \supset S, & \quad S_0 \supset S'. \end{aligned}$$



rys. 94

z poprzedniego zatem wynika  $\varphi(R, S) = \varphi(R_0, S_0) = \varphi(R; S)$

Uwaga. Twierdzenie posiada jasny sens fizyczny. Wystarczy zauważyć, że wartość  $\varphi(R, S)$  podaje wartość potoku przepływającego w sieci.

Definicja. Wspólną wartość  $\varphi(R, S)$  nazywamy pracą potoku.

Zadanie 1. Znaleźć potok z pracą maksymalną /potok maksymalny/.

Definicja. Jeżeli  $(R, S)$  jest przekrojem, wtedy wartość  $\gamma(R, S)$  nazywamy przepustowością przekroju.

Zadanie 2. Znaleźć przekrój z minimalną przepustowością /przekrój minimalny/.

Zadania 1 i 2 nazywamy dualnymi.

Twierdzenie 5. Jeżeli  $\varphi$  jest dowolnym potokiem na sieci i  $(R, S)$  dowolnym przekrojem sieci, wtedy zachodzi  $\varphi(R, S) \leq \gamma(R, S)$ . Stąd wynika: Jeżeli dla pewnego potoku  $\varphi$

i przekroju  $(R,S)$  zachodzi  $\varphi(R,S) = \gamma(R,S)$ , wtedy potok  $\varphi$  jest maksymalny i przekrój  $(R,S)$  - minimalny.

Omówimy następnie pewien proces interakcyjny. Potok  $\varphi$  na sieci określa graf zorientowany  $(X, \Gamma_\varphi)$  następująco:

$$y \in \Gamma_\varphi x, \text{ jeżeli } \varphi(x,y) < \gamma(x,y)$$

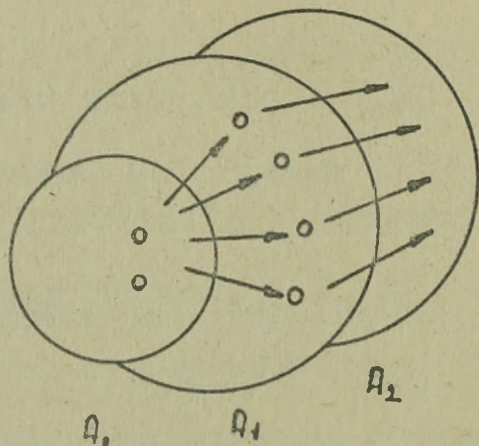
Z tablicy od razu widać, że

$$\begin{array}{ll} \Gamma_\varphi a = \{b, c\} & \Gamma_\varphi d = \{b, c, e, f\} \\ \Gamma_\varphi b = \{a, c, d\} & \Gamma_\varphi e = \{c, f\} \\ \Gamma_\varphi c = \{a, b, d, e\} & \Gamma_\varphi f = \{d, e\} \end{array}$$

Określimy ciąg podzbiorów zbioru węzłów

$$A_0 = \{x_0\}, \quad A_1 = \Gamma_\varphi A_0 \setminus A_0, \dots, \quad A_j = \Gamma_\varphi A_{j-1} \setminus (A_0 \cup \dots \cup A_{j-1})$$

Skonstruujemy w ten sposób skończony ciąg zbiorów  $A_0, A_1, \dots, A_k$ , gdzie  $k$  jest najmniejszą liczbą taką, że zachodzi  $z \in A_k$  lub  $A_{k+1} = \emptyset$ .



rys. 95

Skonstruujemy ciąg  $A_0, A_1, \dots, A_k$  dla przykładu 4.

$$A_0 = \{a\} \quad A_1 = \{b, c\} - \{a\} = \{b, c\}$$

$$A_2 = (\Gamma_\varphi b \cup \Gamma_\varphi c) - \{a, b, c\} = \{d, e\}$$

$$A_3 = (\Gamma_\varphi d \cup \Gamma_\varphi e) - (A_0 \cup A_1 \cup A_2) = (\{b, c, e, f\} \cup \{c, f\}) - \{a, b, c, d, e\} = \{f\}.$$

Ogólnie mogą wystąpić dwa przypadki:

a/ w procesie interakcyjnym został osiągnięty węzeł z,

b/ węzeł z nie został osiągnięty.

W przypadku a/ pokażemy, że potok jeszcze nie jest maksymalny i pokażemy metodę jego powiększenia.

W przypadku b/ potok jest maksymalny /koniec algorytmu/.

Określamy ciąg węzłów  $x_0, x_1, x_2, \dots, x_k$

$$x_k = z, \quad x_{k-1} \in \Gamma_\varphi^{-1} x_k \cap A_{k-1}$$

$$x_{k-2} \in \Gamma_\varphi^{-1} x_{k-1} \cap A_{k-2}$$

⋮

$$x_0 \in \Gamma_\varphi^{-1} x_1 \cap A_0$$

/2/

Każdy zbiór  $\Gamma_\varphi^{-1} x_i \cap A_{i-1}$  jest niepusty; z każdego zbioru wybieramy po jednym elemencie.

Definicja. Ścieżką nienasyconą nazywamy ciąg węzłów sieci

$x_0, x_1, \dots, x_r$  taki, że zachodzi

$$x_i \neq x_j \quad \text{dla } i \neq j \quad \text{i} \quad \varphi(x_{i-1}, x_i) < \delta(x_{i-1}, x_i).$$

Wartość  $k = \min [\delta(x_{i-1}, x_i) - \varphi(x_{i-1}, x_i)]$  nazywamy wskaźnikiem nienasyconości ścieżki  $x_0, x_1, \dots, x_r$ .

Ścieżka skonstruowana w /2/ jest ścieżką nienasyconą prowadzącą od  $x$  do  $z$ . Jest oczywiste, że takich ścieżek może istnieć kilka.

Skonstruujemy ścieżkę nienasyconą w przykładzie 4.

$$\begin{aligned} x_3 = f, \quad \Gamma_{\varphi}^{-1} f &= \{d, e\}, \quad \Gamma_{\varphi}^{-1} f \cap A_2 = \{d, e\}; \\ x_2 = d \quad x_1 &= b \in (\Gamma_{\varphi}^{-1} d) \cap A_1 = \{b, c\}; \quad x_0 = a. \end{aligned}$$

Skonstruowaliśmy ścieżkę nienasyconą  $a, b, d, f$ ,

$$\begin{aligned} k &= \min [\gamma(a, b) - \varphi(a, b), \gamma(b, d) - \varphi(b, d), \gamma(d, f) - \varphi(d, f)] \\ &= \min [6-5, 5-4, 9-8] = 1. \end{aligned}$$

Ogólnie: Jeżeli  $x_0, x_1, \dots, x_k$  jest ścieżką nienasyconą od  $x_0$  do  $z$  i wskaźnikiem nienasyconości jest  $k$ , skonstruujemy funkcję  $\tilde{\varphi}$

$$\tilde{\varphi}(x, y) = \begin{cases} \varphi(x, y) + k, & \text{jeżeli } x = x_{i-1}, \quad y = x_i \\ \varphi(x, y) - k, & \text{jeżeli } x = x_i, \quad y = x_{i-1} \\ \varphi(x, y) & \text{w pozostałych przypadkach.} \end{cases}$$

Jest oczywista, że  $\tilde{\varphi}(x, y)$  jest również potokiem w sieci  $(X, x_0, z, \gamma)$ , przy czym praca toku  $\tilde{\varphi}$  równa się  $\tilde{\varphi}(R, S) = \varphi(R, S) + k$ .

W naszym przykładzie potok  $\tilde{\varphi}$  określamy następująco:

co:

$$\tilde{\varphi}(a, b) = -\tilde{\varphi}(b, a) = 6$$

$$\tilde{\varphi}(b, d) = -\tilde{\varphi}(d, b) = 5$$

$$\tilde{\varphi}(d, f) = -\tilde{\varphi}(f, d) = 9$$

$$\tilde{\varphi}(x, y) = \varphi(x, y) \quad \text{we wszystkich pozostałych przypadkach.}$$

Praca potoku powiększyła się o jednostkę,

Nowy potok  $\tilde{\varphi}$  określa  $\tilde{f}_{\tilde{\varphi}}$  i graf  $(X, \tilde{f}_{\tilde{\varphi}})$ . Powtarzamy proces iteracyjny konstrukcji zbiorów  $A_i$ . W przypadku a/ konstruujemy następnie ścieżkę nienasyconą i "powiększamy" potok. Można udowodnić /dowód pozostawiamy czytelnikowi/, że po skończonej liczbie kroków algorytmu dojdziemy do przypadku b/. Udowodnimy, że w tym przypadku potok jest maksymalny, koniec algorytmu.

Twierdzenie 6. Połóżmy  $R = A_0 \cup A_1 \cup \dots \cup A_k$  w przypadku b/, tj.  $z \notin R$ . Wtedy  $R$  jest zbiorem wszystkich węzłów  $x \in X$  takich, że istnieje ścieżka nienasycona od  $x_0$  do  $x$ .

Dowód jest oczywisty.

Twierdzenie 7. Niech  $A_0, A_1, \dots, A_k$  jest ciągiem /1/, przy czym  $z \notin R = A_0 \cup \dots \cup A_k$ .

Wtedy potok  $\varphi$  jest maksymalny i przekrój  $(R, S)$  - minimalny.

Dowód. Na podstawie twierdzenia 5 wystarczy udowodnić, że

$\varphi(R, S) = \chi(R, S)$  ; gdyby bowiem  $\varphi(R, S) < \chi(R, S)$ , wtedy istniałaby para węzłów  $(x, y)$ ,  $x \in R$ ,  $y \in S$  taka, że  $\varphi(x, y) < \chi(x, y)$ . Wtedy z założenia  $x \in R$ ,  $\varphi(x, y) < \chi(x, y)$  wynika, że  $y \in R$ . To jest jednak sprzeczne z tym, że  $y \in S$ .

Wyznaczymy potok maksymalny w sieci z przykładu 4.

	a	b	c	d	e	f
a	0	5,6	5,7,8	0	0	0
b	-5,-6	0	1	4,5	0	0
c	-5,-7,-8	-1	0	4,5	2,4	0
d	0	-4,-5	-4,-5	0	0,1	8,9
e	0	0	-2,-4	0,-1	0	2,4,5
f	0	0	0	-8,-9	-2,-4,-5	0

Tablica 3.

Suma ostatnich wartości pola w każdym wierszu i kolumnie macierzy określa "całkowitą wartość potoku przepływającego z odpowiedniego węzła sieci do pozostałych węzłów".

Sumy odpowiadające wewnętrznym wierszom lub kolumnom tablicy równają się 0. Dla wierszy lub kolumn brzegowych sumy równają się /w wartości bezwzględnej/ pracy potoku. Powiększone wartości potoku wpisujemy do poszczególnych pól tablicy zawsze na prawo od wartości starych.

Pierwszy krok w przykładzie 4 już został wykonany. Znaleźliśmy potok z większą pracą. Wynik wpisujemy teraz do tablicy. Wartości potoku dla tych łuków, dla których nie powstały żadne zmiany, pozostawiamy. Po pierwszym kroku praca potoku równa się 11.

Drugi krok: konstruujemy zbiory  $A_0, A_1, \dots$

$$\begin{aligned}
 A_0 &= \{a\} & A_2 &= \{b, d, e\} \\
 A_1 &= \{c\} & A_3 &= \{f\}.
 \end{aligned}$$

Następnie konstruujemy

$$e \in \Gamma_{\varphi}^{-1} \{f\} \cap A_2 = \{e\} \cap A_2$$

$$c \in \Gamma_{\varphi}^{-1} \{e\} \cap A_1$$

$$a \in \Gamma_{\varphi}^{-1} \{c\} \cap A_0.$$

Dla lepszego zrozumienia polecamy użyć graficznego przedstawienia sieci:

$$\min [\gamma(a,c) - \varphi(a,c), \gamma(c,e) - \varphi(c,e), \gamma(e,f) - \varphi(e,f)] = 2.$$

Do tablicy wpisujemy "powiększony" potok.

Trzeci krok:

$$A_0 = \{a\} \qquad A_3 = \{e\}$$

$$A_1 = \{c\} \qquad A_4 = \{f\}$$

$$A_2 = \{b,d\}$$

Konstruujemy ścieżkę nienasyconą  $a,c,d,e,f$ .

Wskaźnik nienasyconości równa się 1.

Do tablicy wpisujemy większy potok. Konstruujemy zbiory nienasyconych węzłów:

$$A_0 = \{a\}, \quad A_1 = \{c\}, \quad A_2 = \{b\}, \quad A_3 = \emptyset, \quad R = \{a,b,c\}$$

$$S = \{d,e,f\}.$$

$(R,S)$  jest przekrojem minimalnym.  $\gamma(R,S)$  jest sumą wartości  $\gamma(x,y)$  dla węzłów  $x = a,b,c$  i  $y = d,e,f$ , tj. sumą wartości prawych górnych pól tablicy 1.

$$\varphi(R,S) = \gamma(R,S) = 14.$$

Twierdzenie 8. Omówiony algorytm skończy się po skończonej liczbie kroków.

### 3.1.3. Sieć z nieskończonymi ograniczeniami.

Zastosujemy środki teorii sieci do sieci z nieskończonymi ograniczeniami. Siecią z nieskończonymi ograniczeniami nazywamy sieć z ograniczeniem  $\gamma(x,y)$ , które może przyjmować również wartość nieskończoną  $+\infty$ .

Działania na liczbach nieskończonych są określone następująco:  $a + \infty = +\infty + \infty = +\infty$ ,  $\min(a, +\infty) = a$ ,  $\min(+\infty, +\infty) = +\infty$ .

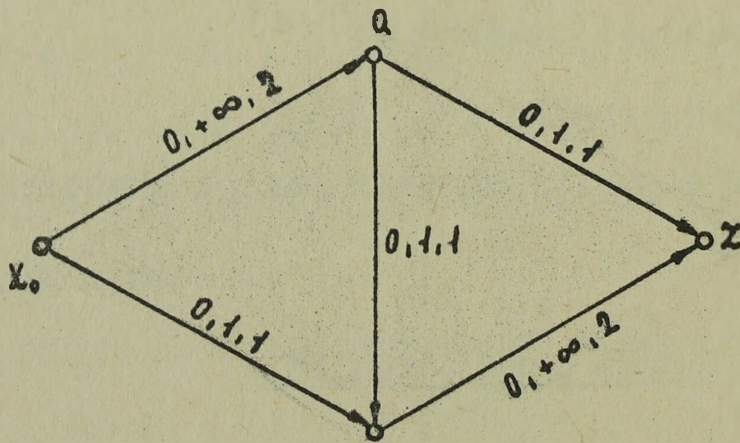
Potok w sieci z nieskończonymi ograniczeniami określamy również za pomocą własności 1,2,3; w szczególności  $\varphi(x,y)$  może przyjmować tylko wartości skończone.

Dla sieci z nieskończonymi ograniczeniami ważne są wszystkie wyniki poprzedniego paragrafu, za wyjątkiem tw. 8.

Dla sieci z nieskończonymi ograniczeniami zachodzi następujące:

Twierdzenie 9. Albo algorytm kończy się po skończonej liczbie kroków, albo w jednym kroku skonstruujemy ścieżkę nienasyconą od  $x_0$  do  $z$ , której odpowiada nieskończony wskaźnik nienasyconości. W pierwszym przypadku otrzymujemy potok maksymalny, w drugim przypadku istnieją potoki z dowolnie dużą pracą i każdy przekrój sieci posiada przepuszczalność  $+$ .

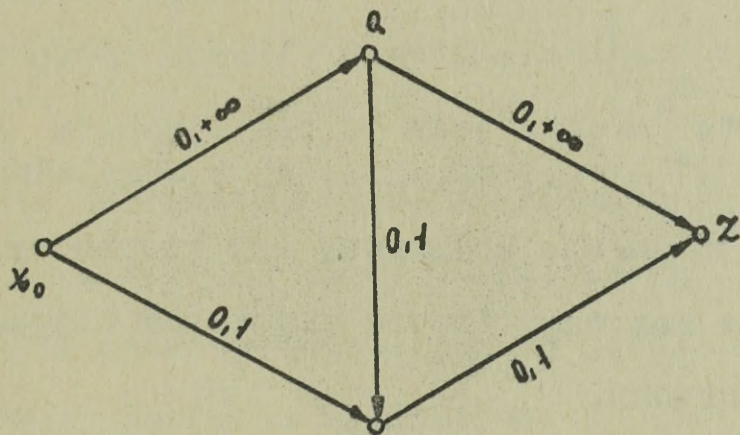
Ostatnie twierdzenie zilustrujemy na przykładzie. Sieć na rys. 96 posiada potok maksymalny.



rys. 96

/Pierwsze liczby odpowiadające łukom sieci określają ograniczenie od dołu, następne ograniczenie od góry i wreszcie ostatnie - potok maksymalny/.

Z drugiej strony, sieć przedstawiona na rys. 97 dopuszcza dowolnie duże potoki /potoki z dowolnie dużą pracą/.



rys. 97

### 3.2. Podstawowe pojęcia algebry liniowej i algebry macierzy.

#### 3.2.1. Wektory.

1/ Wektorami /w sensie algebraicznym/ nazywamy uporządkowane ciągi utworzone z  $n$  liczb.  $n$ -wymiarową przestrzenią wektorową nazywamy zbiór wszystkich ciągów utworzonych z  $n$  liczb. Liczby określające wektor nazywamy współrzędnymi

wektora: wektor  $n$ -wymiarowy posiada  $n$  współrzędnych /mogą to być liczby dodatnie, ujemne lub zero/. Wektory oznaczamy w ten sposób, że ich współrzędne piszemy w określonej kolejności w kolumnach

$$a = \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ a_n \end{bmatrix}$$

lub w wierszach  $a' = [a'_1, a'_2, \dots, a'_n]$  w zależności od tego czy chodzi o wektor kolumnowy czy wierszowy.

- 2/ Wymiarem wektora nazywamy liczbę elementów ciągu, z którego został utworzony.
- 3/ Dwa wektory  $a = (a_1, a_2, \dots, a_n)$ ,  $b = (b_1, b_2, \dots, b_n)$  równają się  $a = b$ , jeżeli odpowiednie współrzędne są jednakowe, tj. jeżeli  $a_1 = b_1$ ,  $a_2 = b_2, \dots, a_n = b_n$ . Wektorem odwrotnym do  $a$  nazywamy wektor  $-a = (-a_1, -a_2, \dots, \dots, -a_n)$ .
- 4/ Dodawać lub odejmować można tylko wektory, które mają jednakowy wymiar  $s = a + b$ ,  $s = a - b$  i działania te wykonujemy w ten sposób, że dodajemy lub odejmujemy odpowiadające współrzędne obydwóch wektorów.
- 5/ Wektor można mnożyć przez liczbę /skalar/ w ten sposób, że przez liczbę mnożymy po kolei poszczególne współrzędne wektora

$$p \cdot [a_1, a_2, \dots, a_n] = [pa_1, pa_2, \dots, pa_n]$$

### 3.2.2. Macierze

1/ Macierz jest to zbiór liczb uporządkowanych następująco:

$$A = \begin{matrix} & \begin{matrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{matrix} \\ \begin{matrix} \text{wiersze} \\ \\ \\ \end{matrix} & \left[ \begin{matrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{matrix} \right] & A = \begin{matrix} \left[ a_{ik} \right] & n \text{ kolumn} \\ & m \text{ wierszy} \end{matrix} \\ & \text{kolumny} & \end{matrix}$$

/Uwaga! Macierz nie jest liczbą, ale jest to uporządkowany zbiór liczb/. Powyższa macierz zawiera  $m$  wierszy i  $n$  kolumn, jest to więc macierz stopnia  $m, n$ .

2/ Wektor wierszowy  $n$ -wym. można uważać za macierz stopnia  $1, n$  i wektor kolumnowy  $m$ -wym. za macierz stopnia  $m, 1$ .

3/ Na ogół może zachodzić  $m \neq n$ ; jeżeli  $m = n$  to macierz nazywamy macierzą kwadratową.

4/ Macierz zerowa jest to taka macierz, która zawiera tylko zera.

5/ Macierz przekątna /diagonalna/ jest to taka macierz kwadratowa, dla której wszystkie elementy nie leżące na głównej przekątnej równają się zeru.

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & a_{21} & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & a_{nm} \end{bmatrix}$$

6/ Macierz jednostkowa jest to taka macierz kwadratowa, w której wszystkie elementy leżące na głównej przekątnej równają się jedności i wszystkie pozostałe zeru. Zwykle oznaczamy ją przez  $E$ .

$$E = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 \end{bmatrix}$$

7/ Macierz trójkątna górna /dolna/ jest to taka macierz kwadratowa, w której wszystkie elementy leżące nad /pod/ główną przekątną równają się zero.

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ 0 & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & a_{nn} \end{bmatrix}$$

8/ Podstawowe działania na macierzach:

a/ Równość dwóch macierzy

Dwie macierze są sobie równe, jeżeli mają jednakową ilość elementów i odpowiadające elementy równają się, np. /porównać można zatem tylko macierze tego samego stopnia/

$$A = [a_{ij}]$$

$$B = [b_{ij}]$$

powinno zachodzić  $a_{ij} = b_{ij}$ .

b/ Dodawanie i odejmowanie macierzy:

macierze dodajemy /odejmujemy/ w ten sposób, że dodajemy /odejmujemy/ odpowiadające elementy:

$$C = A + B$$

$$C = B + A$$

Dodawać można tylko macierze tego samego stopnia

$$A = [a_{ij}] ; \quad B = [b_{ij}] ; \quad C = [c_{ij}]$$

$$c_{ij} = a_{ij} \pm b_{ij}$$

Przykład:

$$A \begin{bmatrix} 3 & 3 & -1 \\ 0 & -2 & 4 \\ 4 & -3 & 0 \end{bmatrix} + B \begin{bmatrix} -2 & 1 & 0 \\ -2 & 4 & 7 \\ 6 & 4 & 3 \end{bmatrix} = C \begin{bmatrix} 1 & 4 & -1 \\ -2 & 2 & 11 \\ 10 & 1 & 3 \end{bmatrix}$$

c/ Mnożenie macierzy przez liczbę

$$A = [a_{ij}]$$

$$B = k \cdot A$$

$$B = A \cdot k$$

$$B = [b_{ij}]$$

$$b_{ij} = a_{ij} \cdot k$$

k jest dowolną liczbą.

Przykład

$$\begin{bmatrix} 2 & 4 & -4 \\ 7 & 6 & 1 \\ -5 & 0 & 3 \end{bmatrix} \cdot 2 = \begin{bmatrix} 4 & 8 & -4 \\ 14 & 12 & 2 \\ -10 & 0 & 6 \end{bmatrix}$$

d/ Mnożenie macierzy

Twierdzenia o mnożeniu macierzy:

1. Mnożenie nie jest przemienne:

$$A \cdot B \neq B \cdot A$$

2. Dwie macierze można mnożyć tylko wtedy, kiedy pierwsza macierz zawiera tyle kolumn ile wierszy zawiera macierz druga

$$A \cdot B = C$$

$$A \begin{pmatrix} mn \end{pmatrix} \cdot B \begin{pmatrix} nr \end{pmatrix} = C \begin{pmatrix} mr \end{pmatrix}$$

3. Iloczynem dwóch macierzy jest macierz określona następująco: i-ty element j-tej kolumny macierzy C równa się iloczynowi i-tego wiersza macierzy A i j-tej kolumny macierzy B. Iloczyn wiersza i kolumny równa się sumie iloczynów elementów wiersza i kolumny w tej kolejności, w której znajdują się w macierzy

Przykład

i-ty wiersz macierzy A  $\begin{bmatrix} 1 & 3 & -4 & 2 \end{bmatrix}$

j-ta kolumna macierzy B

$$\begin{bmatrix} 2 \\ 6 \\ 4 \\ 3 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 3 & -4 & 2 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 2 \\ 6 \\ 4 \\ 3 \end{bmatrix} = 1 \cdot 2 + 3 \cdot 6 + -4 \cdot 4 + 2 \cdot 3 = 10$$

$$c_{ij} = 10$$

Przykład:

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 & 3 \\ -2 & 4 & 5 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 2 & -5 \\ -3 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -7 & -5 \\ -5 & -20 \\ -5 & -20 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 2 & 3 \\ -2 & 4 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & 6 \\ -6 & 8 \end{bmatrix}$$

ale

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 2 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ -2 & 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ -6 & 5 \end{bmatrix}$$

Iloczyn macierzy i wektora

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 & 3 \\ -2 & 4 & 5 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 2 \\ 3 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 6 \\ 13 \end{bmatrix}$$

e/ Macierztransponowana

Macierz transponowaną do macierzy otrzymamy w ten sposób, że zamienimy wiersze za kolumny i na odwrót.

Przykład

$$A = \begin{bmatrix} 3 & 2 & 0 \\ 4 & 5 & 1 \end{bmatrix} \quad A^T = \begin{bmatrix} 3 & 4 \\ 2 & 5 \end{bmatrix}$$

f/ Odwrócenie macierzy.

Zasadnicze twierdzenia:

1. Definicja: Macierzą odwrotną do macierzy kwadratowej

A nazywamy macierz  $A^{-1}$ , dla której zachodzi

$$A \cdot A^{-1} = E; \quad A^{-1} \cdot A = E$$

2. Iloczyn macierzy z macierzą odwrotną jest przemienny.

3. Twierdzenie o istnieniu macierzy odwrotnej:

Jeżeli wyznacznik macierzy A jest różny od zera, to istnieje macierz odwrotna do macierzy A

Jeżeli wyznacznik macierzy A równa się zeru, to macierz odwrotna  $A^{-1}$  do macierzy A nie istnieje.

Przykład odwracania macierzy za pomocą metody Gaussa:

Żeby uzyskać macierz odwrotną  $A^{-1}$ , postępujemy następująco: Mamy macierz A i macierz jednostkową E. Obydwie macierze jednocześnie przekształcamy za pomocą przekształceń elementarnych w ten sposób, żeby otrzymać w końcu z macierzy A macierz jednostkową E. Wtedy macierz E przechodzi na macierz odwrotną  $A^{-1}$ . Przekształceniami elementarnymi nazywamy

A/ zamianę dwóch wierszy /lub kolumn/ macierzy

B/ mnożenie wiersza /lub kolumny/ macierzy przez liczbę

C/ dodanie jednego wiersza do drugiego /lub jednej kolumny do drugiej/.

Odwracanie macierzy za pomocą metody Gaussa dopuszcza tylko jeden rodzaj przekształceń elementarnych - operujemy tylko z wierszami albo z kolumnami.

Mamy macierz kwadratową  $A = \begin{bmatrix} 3 & -1 & 0 \\ -2 & 1 & 1 \\ 2 & -1 & 4 \end{bmatrix}$   
i szukamy dla niej macierzy odwrotnej.

	A			E			Przekształce- nia element.
①	3	-1	0	1	0	0	
②	-2	1	1	0	1	0	
③	2	-1	4	0	0	1	
④	1	-1/3	0	1/3	0	0	1/3 · ①
⑤	0	1/3	1	2/3	1	0	② + 2 · ④
⑥	0	-1/3	4	-2/3	0	1	③ - 2 · ④
⑦	1	0	1	1	1	0	④ + ⑤
⑧	0	1	3	2	3	0	3 · ⑤
⑨	0	0	5	0	1	1	⑥ + ⑤
⑩	1	0	0	1	4/5	-1/5	⑦ - ⑫
⑪	0	1	0	2	12/5	-3/5	⑧ - 3 · ⑫
⑫	0	0	1	0	1/5	1/5	1/5 · ⑨

$$A^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 4/5 & -1/5 \\ 2 & 12/5 & -3/5 \\ 0 & 1/5 & 1/5 \end{bmatrix} \quad A \cdot A^{-1} = E$$

Macierz odwrotna do macierzy przekątnej jest również macierzą przekątną, dla której wartości elementów na głównej przekątnej są odwrotnościami elementów macierzy wyjściowej.

### 3.2.3. Sformułowanie zagadnienia programowania liniowego

Za pomocą programowania liniowego rozwiązuje się zagadnienie znajdowania ekstremów /maksimum lub minimum/ funkcji liniowej wielu zmiennych przy dotrzymaniu warunków ograniczających wyrażonych za pomocą równań lub nierówności liniowych.

Ze względu na to, że nierówności liniowe można prostym sposobem przekształcić w równania liniowe o większej liczbie zmiennych można, przy założeniu, że mamy  $n$  zmiennych i  $m$  ograniczeń, zagadnienie programowania liniowego sformułować następująco:

Znaleźć rozwiązanie układu  $m$  równań liniowych o  $n$  niewiadomych:

$$\begin{aligned} a_{11} x_1 + a_{12} x_2 + \dots + a_{1n} x_n &= b_1 \\ a_{21} x_1 + a_{22} x_2 + \dots + a_{2n} x_n &= b_2 & /3/ \\ \dots & \\ a_{m1} x_1 + a_{m2} x_2 + \dots + a_{mn} x_n &= b_m \end{aligned}$$

takie, żeby wszystkie  $x_i \geq 0$  dla  $i = 1, 2, \dots, n$  /4/

oraz funkcja celu

$$F = c_1 x_1 + c_2 x_2 + \dots + c_n x_n \quad /5/$$

osiągała maksimum lub minimum.

Inaczej:

Znaleźć maksimum /minimum/ funkcji celu /5/ w zbiorze wszystkich rozwiązań /3/ i /4/.

Zapis macierzowy problemu PL: jeżeli oznaczymy przez

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{bmatrix}$$

$$X = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ x_n \end{bmatrix} \quad b = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ b_m \end{bmatrix} \quad c = [c_1 \ c_2 \ \dots \ c_n]$$

wtedy można pisać

$$A X = b$$

$$X \geq 0$$

$$F = c \cdot X$$

Dla każdego zagadnienia programowania liniowego istnieje zagadnienie dualne. Przy tym rozwiązanie jednego zagadnienia wynika z rozwiązania zagadnienia drugiego, nie trzeba więc obydwu zagadnień rozwiązywać oddzielnie.

Ogólne sformułowanie zagadnienia dualnego:

Mamy zagadnienie pierwotne

$$A \cdot X = b$$

$$X \geq 0$$

$$F = c \cdot X \stackrel{!}{=} \max$$

$$\begin{bmatrix} A \end{bmatrix} \begin{matrix} n \\ m \end{matrix}$$

Zagadnienie dualne ma postać:

$$Y \cdot A \geq c \quad \left[ \begin{array}{c} n \\ m \end{array} \right] A$$
$$G = Y \cdot b \stackrel{!}{=} \min.$$

/Przy tzw. niesymetrycznym zagadnieniu dualnym nie wymagamy, żeby zmienne były nieujemne/.

Związek między zagadnieniami pierwotnym i dualnym ustalają następujące twierdzenia:

Jeżeli jedno zagadnienie posiada skończone optymalne rozwiązanie, to również drugie zagadnienie posiada skończone optymalne rozwiązanie.

Wartości optymalne obu funkcji celu są jednakowe.

Jeżeli wartości funkcji celu jednego zagadnienia mogą nieograniczenie wzrastać, zagadnienie dualne nie posiada rozwiązania dopuszczalnego.

Najbardziej znaną metodą rozwiązywania zadań programowania liniowego jest metoda simpleks. Zasada metody simpleks polega na tym, że wyznaczymy najpierw jedno rozwiązanie /rozwiązanie początkowe/, które kolejno przybliży się do rozwiązania optymalnego. To znaczy, że według ustalonych reguł przechodzimy kolejno do rozwiązania, któremu odpowiada korzystniejsza wartość funkcji celu. Po pewnej skończonej liczbie kroków dojdziemy do rozwiązania optymalnego /o ile zagadnienie posiada rozwiązanie/.

Metody programowania liniowego używa się do optymalizacyjnych obliczeń modeli strukturalnych oraz można je zastosować do obliczeń grafów sieciowych.

### 3.3. Podstawy rachunku prawdopodobieństwa i statystyki matematycznej

#### 3.3.1. Definicja prawdopodobieństwa

Podamy ogólną definicję przestrzeni prawdopodobieństwa i zilustrujemy ją na przykładach.

1/ Rozważmy zbiór  $\Omega$  zawierający dowolne elementy. Elementy zbioru  $\Omega$  nazywać będziemy zdarzeniami elementarnymi.

##### Przykład

Rzucamy kostką do gry, ścianki której ponumerowane są liczbami 1, 2, ..., 6. Kładziemy  $\Omega = \{1, 2, 3, \dots, 6\}$ .

Element  $\omega = 3$  oznacza zdarzenie elementarne: "przy rzucie otrzymaliśmy trójkę".

2/ Rozważmy system wszystkich podzbiorów zbioru  $\Omega$ , oznaczamy go przez  $\exp \Omega$ . W naszym przykładzie  $\exp \Omega = \{ \emptyset, \{1\}, \{2\}, \dots, \{6\}, \{1, 2, 3\}, \dots, \{1, 2, 3, 4\}, \dots, \{1, 2, 3, 4, 5, 6\} \}$ .

Zbiór  $\exp \Omega$  zawiera  $2^6 = 64$  elementów.  $\emptyset$  oznacza zbiór pusty.

3/ Rozważmy podzbiór  $\mathcal{F} \subset \exp \Omega$  ( $\mathcal{F}$  jest to więc jakiś system podzbiorów  $\Omega$ ), dla którego zachodzi:

Jeżeli  $A \in \mathcal{F}$ ,  $B \in \mathcal{F}$ , wtedy również  $A \cup B \in \mathcal{F}$ ,  $A \cap B \in \mathcal{F}$ ,  
 $\Omega - A \in \mathcal{F}$ .

Jeżeli  $A_1, \dots, A_n, \dots \in \mathcal{F}$ , wtedy  $A_1 \cup \dots \cup A_n \cup \dots \in \mathcal{F}$   
oraz  $A_1 \cap \dots \cap A_n \cap \dots \in \mathcal{F}$

$\mathcal{F}$  nazywamy  $\mathcal{G}$  - algebrą zbiorów.

##### Przykład

Jeżeli w rozpatrywanej sytuacji położymy  $\mathcal{F} = \exp \Omega$ , wtedy  $\mathcal{F}$  jest oczywiście  $\mathcal{G}$  - algebrą zbiorów. Np.

$A = \{1, 3\}$ ,  $B = \{1, 5, 6\}$ ,  $A \cup B = \{1, 3, 5, 6\} \in \exp \Omega$

$A \cap B = \{1\} \in \exp \Omega$ ,  $\Omega - A = \{2, 4, 5, 6\} \in \exp \Omega$

Przypadek ciągu nieskończonego  $A_1, A_2, \dots, A_n, \dots$  zbiorów nie może nastąpić, gdyż  $\exp \mathcal{P}$  jest to zbiór skończony.

W naszym przykładzie możemy również określić inną  $\sigma$ -algebrę  $\mathcal{F}_1 = \{ \emptyset, \{1,2\}, \{3,4\}, \{5,6\}, \{1,2,3,4\}, \{1,2,5,6\}, \{3,4,5,6\}, \{1,2,3,4,5,6\} \}$ .

$\mathcal{F}_1$  składa się z  $2^3 = 8$  elementów i  $\mathcal{F}_1$  jest podalgebrą  $\mathcal{F}$ . Dowód ostatniego faktu pozostawiamy czytelnikowi. Np.  $\emptyset \in \mathcal{F}_1, \Omega \in \mathcal{F}_1$ . Wraz ze zbiorami  $\{1,2\}$  i  $\{3,4\}$  zbiór zawiera również ich sumę, iloczyn itd. W naszej interpretacji wybór np. zbioru  $\{1,2,3,4\} \in \mathcal{F}_1$  oznacza zdarzenie: przy rzucie otrzymamy co najmniej jednej z liczb 1,2,3,4.

Elementy zbioru  $\mathcal{F}$  nazywamy zdarzeniami.

Zdarzenie  $\emptyset$  nazywamy niemożliwym, zdarzenie  $\Omega$  pewnym.

4/ Rozważmy funkcję  $P(A)$  określoną dla każdego  $A \in \mathcal{F}$ , która spełnia następujące warunki:

1° Dla każdego  $A \in \mathcal{F}$  jest  $0 \leq P(A) \leq 1$

2° a/ jeżeli  $A, B \in \mathcal{F}$  oraz  $A \cap B = \emptyset$ , wtedy  $P(A \cup B) = P(A) + P(B)$

b/ jeżeli  $A_1, A_2, \dots, A_n, \dots \in \mathcal{F}$  oraz  $A_i \cap A_j = \emptyset$  dla każdego  $i \neq j$ , wtedy  $P(A_1 \cup A_2 \cup \dots) = P(A_1) + P(A_2) + \dots$

3°  $P(\emptyset) = 0$

4°  $P(\Omega) = 1$

5° Jeżeli  $A \subset B$ , to  $P(A) \leq P(B)$

6° Jeżeli  $A_1 \supset A_2 \supset \dots \supset A_n \supset \dots$  oraz  $A = A_1 \cap A_2 \cap \dots$  wtedy  $P(A) = \lim_{n \rightarrow \infty} P(A_n)$ .

Funkcję  $P$  nazywamy prawdopodobieństwem lub miarą prawdopodobieństwa. Własność  $2^{\circ}$  a/ nazywamy addytywnością prawdopodobieństwa.  $2^{\circ}$  b/ jest uogólnieniem  $2^{\circ}$  a/ w przypadku ciągów nieskończonych.

Własność  $3^{\circ}$  oznacza: prawdopodobieństwo zdarzenia niemożliwego jest zerowe.

$4^{\circ}$  ..... prawdopodobieństwo zdarzenia pewnego równa się jedności.

Własności  $5^{\circ}$  i  $6^{\circ}$  można wyprowadzić z poprzednich własności.

Własność  $6^{\circ}$  nazywamy ciągłością miary.

W naszym przykładzie określamy prawdopodobieństwo elementów zbioru  $\mathcal{F} = \exp \Omega$  np. następująco:

Niech  $|A|$  oznacza liczbę elementów  $A$ ; kładziemy

$$P(A) = \frac{|A|}{|\Omega|} = \frac{|A|}{6}$$

Czytelnik może łatwo sprawdzić, że tak określone prawdopodobieństwo spełnia wszystkie aksjomaty  $1^{\circ}$  do  $6^{\circ}$ . Np. własność

$2^{\circ}$  a/: niech  $A = \{1, 3\}$ ,  $B = \{2, 5\}$ , wtedy  $A \cup B = \{1, 2, 3, 5\}$ ,  
 $A \cap B = \emptyset$ ,  $P(A \cup B) = \frac{4}{6} = \frac{2}{3}$

$P(A) = P(B) = \frac{2}{6} = \frac{1}{3}$ , itd.

Podsumujemy teraz wszystkie wstępne rozważania i podamy definicję przestrzeni prawdopodobieństwa.

#### Definicja 1.

Przestrzenią prawdopodobieństwa nazywamy trójkę  $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ , gdzie  $\Omega$  jest zbiorem /przestrzenią/ zdarzeń elementarnych,

$\mathcal{F}$  - algebra zbiorów  $(\mathcal{F} \subset \exp \Omega)$  i  $P$  miarą prawdopodobieństwa /prawdopodobieństwem/ na  $\mathcal{F}$ .

Elementy zbioru  $\Omega$  nazywamy zdarzeniami elementarnymi, elementy zbioru  $\mathcal{F}$  zdarzeniami.

Definicja 2.

Mówimy, że miara prawdopodobieństwa  $P$  określona w zbiorze  $\mathcal{F}$  jest zupełna, jeżeli z tego, że  $A \in \mathcal{F}$  oraz  $P(A) = 0$  wynika, że dla każdego podzbioru  $B \subset A$  jest również  $B \in \mathcal{F}$ ; zatem  $P(B) = 0$  /z własności 5<sup>o</sup>/.

W naszym przykładzie z kostką do gry powyższe jest oczywiście spełnione, ponieważ zbiorem z prawdopodobieństwem zerowym jest tylko zbiór pusty.

Przytoczmy jeszcze jeden przykład

$$\mathcal{R} = \{x : 0 \leq x \leq 1\}, \quad \text{exp } \mathcal{R} = \{A : A \in \mathcal{R}\}$$

$\mathcal{R}$  jest to przedział  $\langle 0, 1 \rangle$ ,  $\text{exp } \mathcal{R}$  jest zbiorem wszystkich podzbiorów  $\mathcal{R}$ . Położmy  $\mathcal{F} = \text{exp } \mathcal{R}$  i następnie określamy

$$P(A) = \begin{cases} 0 & \text{jeżeli } 1/2 \notin A, \\ 1 & \text{jeżeli } 1/2 \in A, \end{cases} \quad A \in \mathcal{F}$$

Jest oczywiste, że  $\mathcal{F}$  jest  $\sigma$ -algebrą zbiorów i  $P$  jest zupełną miarą prawdopodobieństwa na  $\mathcal{F}$ . Np.  $P(\emptyset) = 0$ ,  $P(\mathcal{R}) = 1$ ,  $1/2 \notin \emptyset$ ,  $1/2 \in \mathcal{R}$ .

Miarą prawdopodobieństwa jest również addytywna:

Niech bowiem  $A \cap B = \emptyset$ , jeżeli  $1/2 \notin A$ ,  $1/2 \notin B$ , wtedy

$$P(A) = P(B) = P(A \cup B) = 0$$

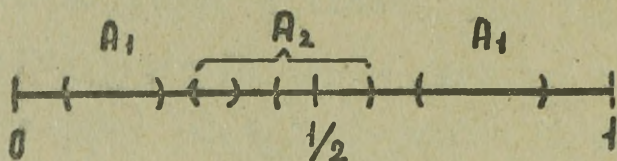
jeżeli  $1/2 \in A$ ,  $1/2 \notin B$ , wtedy

$$P(A) = P(A \cup B) = 1, \\ P(B) = 0.$$

Przypadek  $1/2 \notin A$ ,  $1/2 \in B$  analogicznie do poprzedniego.

Przypadek  $1/2 \in A$ ,  $1/2 \in B$  nie może nastąpić, ponieważ

$$A \cap B = \emptyset.$$



rys. 98

### 3.3.2. Pojęcie prawdopodobieństwa jako obiektywnych własności zdarzeń.

Za pomocą zdarzenia można opisać stosunki lub przedmioty rzeczywistości, o których ma sens powiedzieć, czy wystąpiły lub nie wystąpiły /wystąpią lub nie wystąpią/.

Np. zdania "Dzisiaj pada deszcz".

"Nakłady na czynność nie przewyższają 1000 zł" oznaczają zdarzenia.

Zadaniem nauki jest zbadać stosunki między poszczególnymi zdarzeniami, zbadać warunki, przy których zdarzenie wystąpi lub nie wystąpi.

Bardzo często stosowanym i wystarczająco prostym schematem określania tych prawd jest następujące:

Mamy zespół warunków  $K$  i zdarzenie  $A$ . Badamy, czy zdarzenie  $A$  wystąpi lub nie wystąpi przy każdym spełnieniu zespołu warunków  $K$ .

#### Przykład

Przy doświadczeniu fizycznym  $K$  jest zespołem wszystkich warunków doświadczenia,  $A$  jest rezultatem doświadczenia.

Mogą zaistnieć następujące przypadki:

- 1/ przy każdym spełnieniu K nastąpi zdarzenie A
- 2/ zdarzenie A nie wystąpi przy żadnym spełnieniu K
- 3/ przy spełnieniu K zdarzenie A może wystąpić lub nie wystąpić.

W przypadku 1/ zdarzenie A nazywamy pewnym, w przypadku 2/ niemożliwym, w przypadku 3/ zdarzenie A nazywamy losowym /stochastycznym/.

Przypadek 3/ nie dostarcza wystarczających informacji o związkach pomiędzy zdarzeniem A i zespołem warunków K. Okazuje się jednak, że istnieje szeroka klasa zdarzeń i zespołów warunków, dla których przy wielokrotnym powtarzaniu zespołu K, stosunek między liczbą realizacji zespołu K, dla których wystąpiło zdarzenie A i liczbą wszystkich realizacji zespołu K bardzo rzadko różni się od pewnej wartości  $p$ ,  $0 \leq p \leq 1$ . Jest więc naturalne obrać wartość  $p$  za prawdopodobieństwo zdarzenia A.

Takie prawa nazywamy stochastycznymi.

Główne zasady definicji prawdopodobieństwa w konkretnych przypadkach są następujące:

- 1/ Klasyczna definicja prawdopodobieństwa korzysta z założenia jednakowej możliwości wystąpienia dwóch różnych zdarzeń. Powyższe objaśnimy na przykładzie z kostką do gry. Przy założeniu, że kostka jest jednorodna i regularna zakładamy, że każdą liczbę 1,2,3,4,5,6 będziemy otrzymywać przy wystarczająco dużej liczbie prób z częstością, która w przybliżeniu równa się  $1/6$ . Zakładamy więc, że rozważane prawdopodobieństwo równa się  $1/6$ .

Prawdopodobieństwo każdego innego zdarzenia, np. zdarzenia  $\{1,3,5\}$  /otrzymamy co najmniej jedną z liczb 1,3,5/ określamy na podstawie prawdopodobieństw poszczególnych zdarzeń elementarnych.

Zdarzenia elementarne nazywamy również w klasycznej definicji prawdopodobieństwa przypadkami możliwymi. Zakładamy, że wszystkie zdarzenia elementarne występują z jednakowym prawdopodobieństwem. Mamy  $n$  zdarzeń ponumerowanych  $1, 2, \dots, n$ ; niech zdarzenie  $A$  polega na tym, że wystąpi chociaż jeden z przypadków

$$i_1, i_2, \dots, i_m; \quad 1 \leq i_1 < \dots < i_m \leq n; \quad 0 \leq m \leq n$$

Przypadki  $i_1, i_2, \dots, i_m$  nazywamy sprzyjającymi zdarzeniu  $A$ . /Zdarzeniu niemożliwemu odpowiada zbiór pusty przypadków sprzyjających/. Kładziemy  $P(A) = \frac{m}{n}$ , tj. iloraz liczby przypadków sprzyjających zdarzeniu  $A$  i liczby wszystkich możliwych przypadków.

2/ W statystycznej definicji prawdopodobieństwa zakłada się, że rozważane zdarzenie  $A$  posiada prawdopodobieństwo; oznaczamy go przez  $p$ . Dyskusja o tym założeniu należy do zakresu filozofii i nie będziemy się tym problemem interesować,

Przez próbkę rozumiemy realizację danego zespołu warunków. Przeprowadzimy "wystarczająco dużą" liczbę próbek, powiedzmy  $n$ . Załóżmy, że zdarzenie  $A$  wystąpiło w  $m$  próbkach, w  $n-m$  nie wystąpiło. Wtedy iloraz  $\frac{m}{n}$  określa względną częstość występowania zdarzenia  $A$  w  $n$  niezależnych próbkach. Eksperymentalnie można sprawdzić, że wartość  $\frac{m}{n}$  bardzo rzadko różni się od wartości  $p$  przy założeniu, że liczba próbek jest wystarczająco duża.

### 3.3.3. Zmienne losowe. Charakterystyki zmiennej losowej.

Nawiązując do 3.3.1 wprowadzimy kilka pojęć z teorii prawdopodobieństwa. Został wprowadzony symbol  $P(A)$  - prawdopodobieństwo zdarzenia  $A$ . Określimy teraz zbiór  $A$

$$A = \{\omega \in \Omega : \Pi(\omega)\}, \quad \Pi - \text{ pewien predykat.}$$

Zapis  $\Pi(\omega)$  oznacza, że  $\omega$  ma własność  $\Pi$ . Niech następnie  $A \in \mathcal{F}$ . Wtedy prawdopodobieństwo jest określone następująco:  $P(A) = P(\{\omega : \Pi(\omega)\})$ . Prawdopodobieństwo to będziemy oznaczać przez  $P(\Pi(\omega) = P(\Pi))$ .

wartość  $P(\Pi(\omega))$  określa prawdopodobieństwo zdarzenia polegającego na tym, że wystąpi  $\Pi$ . Pożyteczność ostatniego zapisu okaże się niedługo oczywista.

Definicja. Zmienna losowa nazywamy funkcję  $X(\omega)$ , która przekształca przestrzeń  $\Omega$  w zbiór liczb rzeczywistych  $(-\infty, +\infty)$  oraz dla każdego  $x, -\infty < x < \infty$  zachodzi:  
zbiór  $\{\omega : X(\omega) \leq x\} \in \mathcal{F}$ . /6/

Zmienna losowa  $X(\omega)$  zależy od  $\omega \in \Omega$ , oznaczamy ją dla uproszczenia  $X$ . Prawdopodobieństwo  $P(\{\omega \in \Omega : X(\omega) \leq x\})$  jest więc na podstawie /6/ określone i oznaczamy go

$$P(\{\omega \in \Omega : X(\omega) \leq x\}) = F(x)$$

Funkcję  $F(x)$  nazywamy dystrybuantą zmiennej losowej.

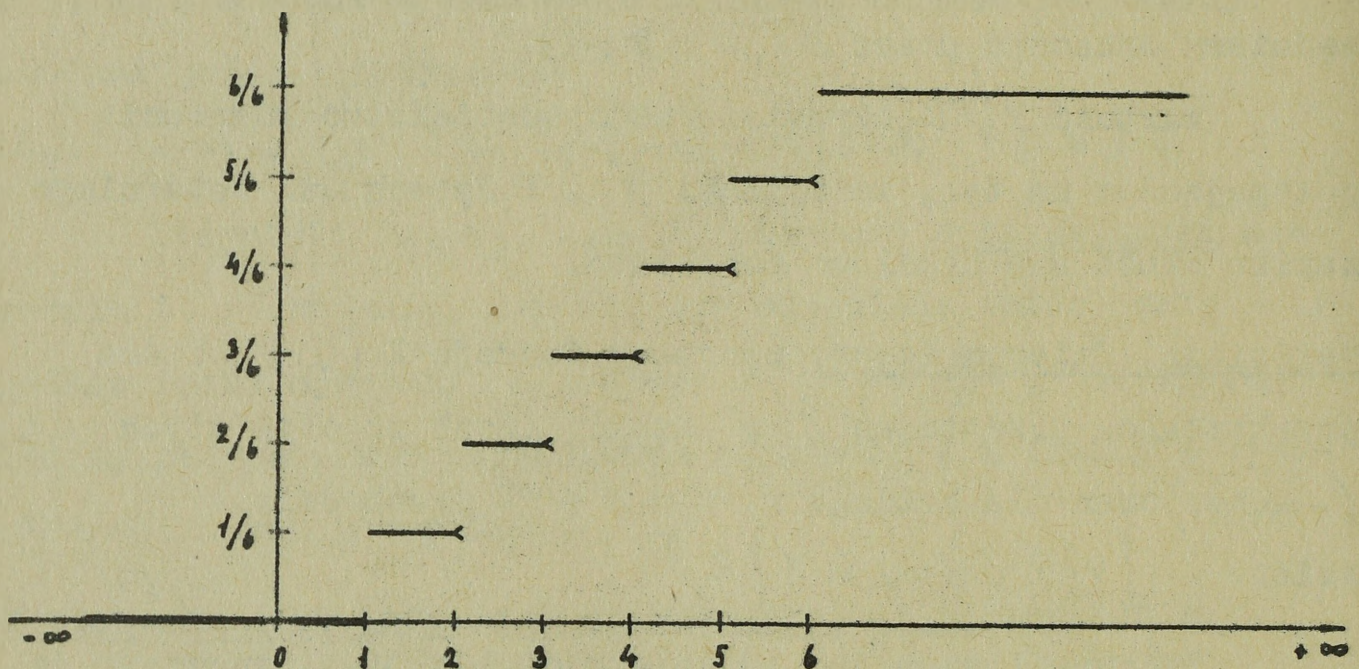
Przytoczymy przykład z kostką do gry.

Położymy  $X = \omega$

Skonstruujemy funkcję  $F_x(x)$ .

Jeżeli  $-\infty < x < 1$ , wtedy  $\{\omega : X \leq x\} = \emptyset, F(x) = 0$   
 $1 \leq x \leq 2$   $\{\omega : X \leq x\} = \{1\}, F(x) = \frac{1}{6}$   
.  
.  
 $6 \leq x < +\infty$   $\{\omega : X \leq x\} = \Omega, F(x) = 1$

Narysujemy wykres funkcji  $F$   $x$  na rys. 99.



rys. 99

Twierdzenie 1. /własności dystrybuanty/.

a/ Jeżeli  $x \leq y$ , wtedy  $F(x) \leq F(y)$ ,  $F$  jest niemalejąca

b/  $0 \leq F(x) \leq 1$

c/  $\lim_{x \rightarrow \infty} F(x) = 1, \lim_{x \rightarrow -\infty} F(x) = 0$

a/  $\lim_{x \rightarrow x_0^+} F(x) = F(x_0)$ ,  $F(x)$  jest w każdym punkcie prawostronnie ciągła

Dowód może przeprowadzić czytelnik samodzielnie lub wystarczy ilustracja na rysunku.

Zachodzi również twierdzenie odwrotne:

Twierdzenie 2. Jeżeli  $F(x)$  jest funkcją spełniającą warunki twierdzenia 1, wtedy istnieje zmienna losowa  $X$  taka, że  $F(x)$  jest jej dystrybuantą.

W praktyce najczęściej spotykamy dwa rodzaje zmiennych losowych.

### 1/ Zmienne losowe typu skokowego

Zmienna losowa skokowa przyjmuje tylko wartości

$x_1, x_2, \dots, x_n, \dots$  ( $x_i \neq x_j$  dla  $i \neq j$ ) pewnego

skończonego lub nieskończonego ciągu liczbowego. Skonstruujemy dystrybuantę zmiennej losowej skokowej.

$$F(x) = P\{X \leq x\} = \sum P\{X = x_i\}$$

Oznaczmy  $p_i = P\{X = x_i\}$

Wtedy zachodzi  $F(x) = \sum_{i=1,2,\dots} p_i$ ,

$p_i$  jest prawdopodobieństwem zdarzenia  $\{X = x_i\}$ .

Z własności dystrybuanty wynika, że

$$\sum_{i=1,2,\dots} p_i = 1.$$

Jeżeli liczb  $x_i$  jest tylko skończona ilość, to funkcja  $F(x)$  jest schodkowa /częściami stała/.

### 2/ Zmienne losowe typu ciągłego

Niech  $X$  będzie zmienną losową,  $F(x)$  jej odpowiadającą dystrybuantą. Jeżeli istnieje nieujemna funkcja całkowna

$f(x)$  spełniająca równanie

$$F(x) = \int_{-\infty}^x f(x) dx$$

to  $X$  nazywamy zmienną losową typu ciągłego.

Funkcję  $f(x)$  nazywamy gęstością prawdopodobieństwa.

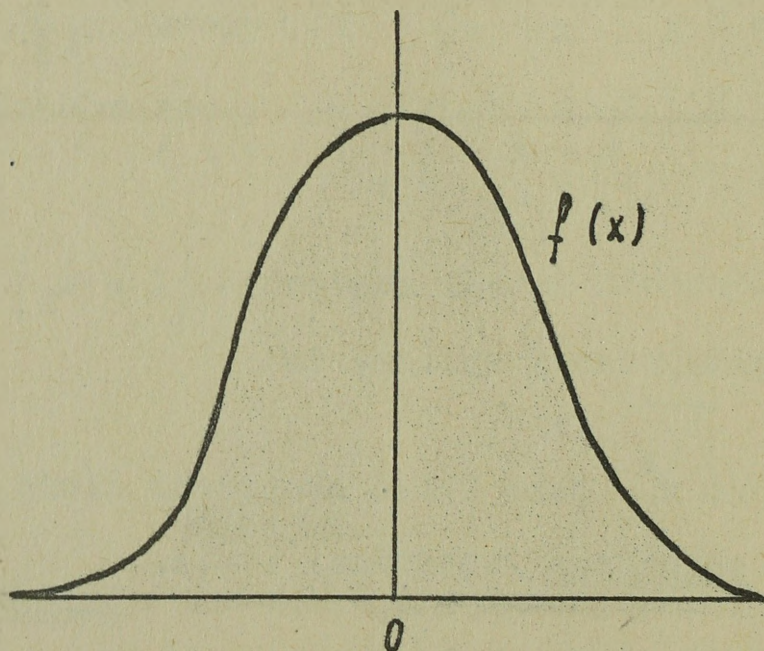
Zachodzi:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(z) dz = 1$$

Przykład: Rozkładowi normalnemu odpowiada gęstość prawdopodobieństwa

$$f(x) = C \cdot e^{-\frac{(x-a)^2}{2}} \quad , \text{gdzie } C = \frac{1}{\sigma \sqrt{2\pi}}$$

Jeżeli przeprowadzimy pomiary jakiejś wielkości fizycznej, wyniki są obciążone błędami. Wynik pomiarów można uważać za zmienną losową, której odpowiada rozkład normalny.



rys. 100

### 3.3.4. Najważniejsze charakterystyki zmiennej losowej.

1/ Wartość średnia /wartość oczekiwaną lub nadzieję matematyczną/ określamy za pomocą całki Lebesgue'a - Stieltjesa następującym wzorem:

$$E X = E (X) = \int_{\Omega} X(\omega) P(d\omega).$$

Rozpatrzmy bliżej dwa przypadki:

a/ skokowy rozkład prawdopodobieństwa. Z ogólnej definicji wynika:

$$\begin{aligned} E (X) &= x_1 \cdot p_1 + x_2 \cdot p_2 + \dots + x_n \cdot p_n + \dots = \\ &= \sum_{i=1,2,\dots} x_i \cdot p_i . \end{aligned}$$

Wartość średnia zmiennej losowej z przykładu z kostką do gry równa się:

$$E (X) = \sum_{i=1}^6 \frac{i}{6} = \frac{6 \cdot (6 + 1)}{2 \cdot 6} = 3,5$$

b/ Wartość średnia zmiennej losowej ciągłej jest określona następująco /z definicji/

$$E (X) = \int_{-\infty}^{+\infty} x \cdot f(x) dx.$$

W przykładzie z rozkładem normalnym otrzymujemy:

$$E (X) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} x e^{-\frac{(x-a)^2}{2\sigma^2}} dx.$$

Obliczymy całkę po prawej stronie.

Będziemy więc rozważać całkę

$$1 = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{(x-a)^2}{2\sigma^2}} dx.$$

Po pomnożeniu przez  $a$  otrzymujemy

$$a = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} a e^{-\frac{(x-a)^2}{2\sigma^2}} dx.$$

Następnie odejmując mamy

$$E(x) - a = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} (x-a) e^{-\frac{(x-a)^2}{2\sigma^2}} dx.$$

Wykres funkcji znajdującej się pod znakiem całki jest symetryczny względem punktu  $[a, 0]$ , zatem ostatnia całka równa się 0. Zachodzi więc  $E(X) = a$ . W literaturze wartość średnią oznaczamy również przez  $\mu$

Czytelnik łatwo może sprawdzić, że zachodzi następujące twierdzenie:

Niech  $X_1, X_2, \dots, X_n$  są zmiennymi losowymi o skończonych wartościach średnich,  $d_1, d_2, \dots, d_n$  są liczbami rzeczywistymi. Wtedy  $d_1 X_1 + \dots + d_n X_n$  jest również zmienną losową, przy czym

$$E(d_1 X_1 + \dots + d_n X_n) = d_1 E(X_1) + \dots + d_n E(X_n).$$

2/ Wariancja /dyspersja/ zmiennej losowej

$$D(X) = DX = E(X - EX)^2$$

Wariancja podaje najbardziej prawdopodobne odchylenie kwadratowe zmiennej losowej od jej wartości średniej. Wariancję można również wyrazić następująco:

$$\begin{aligned} DX &= E\left(X^2 - 2(EX) \cdot X + (EX)^2\right) = \\ &= EX^2 - 2(EX)^2 + (EX)^2 = EX^2 - (EX)^2 \end{aligned}$$

Wariancję oznacza się też za pomocą symbolu  $\sigma^2$ ,  $\sigma \geq 0$ .

Rozpatrzmy bliżej dwa przypadki:

a/ Zmienna losowa skokowa

$$DX = \sum_{i=1,2,\dots} (x_i - \mu)^2 \cdot p_i ; \quad \mu = EX.$$

W przykładzie z kostką do gry mamy

$$\begin{aligned} EX &= 3,5 \quad (EX)^2 = 12,25 \quad EX^2 = \sum_{i=1}^6 \frac{i^2}{6} = \\ &= \frac{6 \cdot (6+1) \cdot (2 \cdot 6 + 1)}{6 \cdot 6} = 15,17 \end{aligned}$$

Mamy więc  $DX = 2,92$

b/ Zmienna losowa ciągła:

$$DX = \int_{-\infty}^{+\infty} (x - \mu)^2 \phi(x) dx = \int_{-\infty}^{+\infty} x^2 \phi(x) dx - \left[ \int_{-\infty}^{+\infty} x \phi(x) dx \right]^2$$

W przypadku rozkładu normalnego

$$DX = \frac{1}{\sigma \sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} (x - a)^2 e^{-\frac{(x-a)^2}{2\sigma^2}} dx.$$

Całkując przez części otrzymujemy

$$DX = \sigma^2.$$

3/ W przypadku zmiennej losowej ciągłej wprowadzamy pojęcie mody. Jeżeli gęstość rozkładu ciągłego osiąga maximum

$$f(m) = \max_{-\infty < x < \infty} f(x)$$

oraz  $m$  jest wyznaczone jednoznacznie, wtedy wartość  $m$  nazywamy modą zmiennej losowej.

Oprócz już przytoczonych charakterystyk używa się jeszcze innych wielkości, np. odchylenie standardowe, momenty rzędu n-tego itp.

Ochylene standardowe zmiennej losowej  $X$  określamy

wzorem

$$X' = \frac{X - EX}{\sqrt{DX}}.$$

Zachodzi równość

$$EX' = 0, \quad DX' = 1.$$

Zmienną losową  $X'$ , dla której zachodzi  $EX' = 0, DX' = 1$  będziemy nazywać zmienną losową unormowaną.

Momentem rzędu  $n$ -tego nazywamy wyrażenie  $EX^n$ ;  $n = 1, 2, \dots$  gdzie  $X$  jest zmienną losową.

### 3.3.5. Niezależność

1/ Niezależność zdarzeń. Zdarzenia  $A, B$  nazywamy niezależnymi, jeżeli

$$P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B).$$

W przykładzie z kostką do gry położmy

$$A_1 = \{2, 4, 6\} \quad B_1 = \{3, 6\}.$$

Zdarzenie  $A_1$  polega na wyrzuceniu liczby parzystej, zdarzenie  $B_1$  na wyrzuceniu liczby podzielnej przez trzy.

$$A_1 \cap B_1 = \{6\}, \quad P(A_1) = \frac{1}{2}, \quad P(B_1) = \frac{1}{3}, \quad P(A_1 \cap B_1) = \frac{1}{6}$$

tj. zdarzenia  $A_1$  i  $B_1$  są niezależne.

Zdarzenia  $A_2 = \{2, 3, 5\}, B_2 = \{2, 4, 5\}$  nie są niezależne.

Niezależność zdarzeń można określić również dla dowolnego skończonego lub nieskończonego ciągu zdarzeń.

Niech  $A_1, A_2, \dots, A_n, \dots$  będzie ciągiem zdarzeń.

Zdarzenia  $A_1, A_2, \dots, A_n, \dots$  nazywamy niezależnymi, jeżeli zachodzi następująca implikacja:

jeżeli  $A_{i_1} \cap A_{i_2} \cap \dots \cap A_{i_k} \cap \dots$  jest dowolnym skoń-

czonym lub nieskończonym podciągiem ciągu  $A_1, A_2, \dots$ , to

$$P(A_{i_1} \cap A_{i_2} \cap \dots \cap A_{i_k} \cap \dots) = P(A_{i_1}) \cdot P(A_{i_2}) \cdot \dots \cdot P(A_{i_k}) \cdot \dots$$

W przypadku ciągu nieskończonego chodzi oczywiście o iloczyn nieskończony.

Położmy w przykładzie z kostką do gry

$$A_1 = \mathbb{P}, \quad A_2 = \{1, 2, 3, 4\}, \quad A_3 = \{1, 2, 5\}.$$

Zdarzenia  $A_1, A_2, A_3$  są oczywiście niezależne.

## 2/ Niezależność zmiennych losowych

Zmienne losowe  $X_1, X_2, \dots, X_n$  nazywamy niezależnymi, jeżeli dla każdego ciągu  $n$  liczb rzeczywistych  $x_1, x_2, \dots, x_n$  zdarzenia  $\{\omega | X_1 \leq x_1\}, \dots, \{\omega | X_n \leq x_n\}$  są niezależne, tj. dla każdego ciągu  $i_1, \dots, i_k; 1 \leq i_1 < \dots < i_k \leq n$  zachodzi

$$P \{ X_{i_1} \leq x_{i_1}, X_{i_2} \leq x_{i_2}, \dots, X_{i_k} \leq x_{i_k} \} = P \{ X_{i_1} \leq x_{i_1} \} \dots P \{ X_{i_k} \leq x_{i_k} \}.$$

W szczególności dla dwóch zmiennych losowych  $X_1, X_2$  niezależność określamy następująco:

$$P \{ X_1 \leq x_1, X_2 \leq x_2 \} = F_{X_1}(x_1) \cdot F_{X_2}(x_2).$$

Przykład. Powrócimy do naszego przykładu z kostką do gry.

Każde  $\omega \in \mathbb{P}$  wyrażamy za pomocą relacji  $\omega = (\alpha, \beta)$  według tabeli

$$\begin{aligned} 1 &= (1, 1) \\ 2 &= (2, 1) \\ 3 &= (3, 1) \\ 4 &= (1, 2) \\ 5 &= (2, 2) \\ 6 &= (3, 2) \end{aligned}$$

Określamy dalej  $X_1(\omega) = \alpha, X_2(\omega) = \beta$

Łatwo można pokazać, że  $X_1$  i  $X_2$  są niezależnymi zmiennymi losowymi.

$$\text{Np. } P \{ X_1(\omega) \leq 2 \} = P(\{1, 2, 4, 5\}) = \frac{2}{3}$$

$$P \{ X_2(\omega) \leq 1 \} = P(\{1, 2, 3\}) = \frac{1}{2}$$

$$P \{ X_1(\omega) \leq 2 \quad X_2(\omega) \leq 1 \} = P(\{1, 2\}) = \frac{1}{3}$$

Dla zmiennych losowych niezależnych zachodzą następujące twierdzenia:

Twierdzenie 3. Niech  $X_1, X_2, \dots, X_n$  są niezależnymi zmiennymi losowymi. Wtedy  $X_1 \cdot X_2 \dots X_n$  jest również zmienną losową oraz  $E(X_1 \cdot X_2 \dots X_n) = E(X_1) \cdot E(X_2) \dots E(X_n)$ .

Twierdzenie 4. Niech  $X_1, X_2, \dots, X_n$  są niezależnymi zmiennymi losowymi,  $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$  liczbami rzeczywistymi. Wtedy  $\alpha_1 X_1 + \dots + \alpha_n X_n$  jest zmienną losową oraz

$$D(\alpha_1 X_1 + \dots + \alpha_n X_n) = \alpha_1^2 DX_1 + \dots + \alpha_n^2 DX_n$$

Twierdzenie 3 zilustrujemy na przykładzie 5:

$$EX_1 = 1 \cdot \frac{1}{3} + 2 \cdot \frac{1}{3} + 3 \cdot \frac{1}{3} = 2$$

$$EX_2 = 1 \cdot \frac{1}{2} + 2 \cdot \frac{1}{2} = \frac{3}{2}$$

Zmienna  $X_1 \cdot X_2$  przyjmuje wartości 1, 2, 3, 4, 6 z prawdopodobieństwem kolejnego  $\frac{1}{6}, \frac{1}{3}, \frac{1}{6}, \frac{1}{6}, \frac{1}{6}$ ; jest więc  $E(X_1 \cdot X_2) = 3$ .

Dowód twierdzenia 4 wynika natomiast z twierdzenia 3; ograniczymy się do przypadku

$$n = 2, \quad \alpha_1 = \alpha_2 = 1$$

$$\begin{aligned} D(X_1 + X_2) &= E(X_1 + X_2)^2 - [E(X_1 + X_2)]^2 = \\ &= EX_1^2 + 2EX_1 \cdot EX_2 + EX_2^2 - (EX_1)^2 - 2EX_1 \cdot EX_2 - (EX_2)^2 = \\ &= DX_1 + DX_2. \end{aligned}$$

### 3.3.6. Prawo wielkich liczb.

Zarówno w praktyce jak i w ogólnych teoretycznych rozważaniach dużą rolę odgrywają zdarzenia, prawdopodobieństwo których jest bliskie jedności lub zeru. Przy tym największe znaczenie mają zdarzenia, które powstają w wyniku superpozycji dużej ilości niezależnych albo tylko w bardzo małej mierze zależnych czynników. Jednym z najbardziej ważnych praw w tym zakresie jest prawo wielkich liczb.

Matematycznym sformułowaniem prawa wielkich liczb zajmowało się wielu matematyków. Podamy następnie niektóre sformułowania.

Twierdzenie 5 /Czebyszew/. Niech  $X_1, X_2, \dots, X_n, \dots$  będzie ciągiem niezależnym zmiennych losowych o skończonych wariancjach ograniczonych wspólną stałą

$$DX_i \leq C \quad \text{dla } i = 1, 2, \dots, n, \dots$$

Wtedy dla każdej liczby  $\varepsilon > 0$  zachodzi

$$\lim_{n \rightarrow \infty} P \left\{ \left| \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n X_k - \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n EX_k \right| < \varepsilon \right\} = 1,$$

tj. prawdopodobieństwo zdarzenia

$$\left\{ \omega \mid \left| \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n X_k - \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n EX_k \right| < \varepsilon \right\}$$

jest dla  $n \rightarrow \infty$  zbieżne do jedności.

Szczególnym przypadkiem twierdzenia Czebyszewa jest:

Twierdzenie 6 /Bernoulli/. Niech  $m$  jest liczbą zdarzeń sprzyjających zdarzeniu  $A$  w  $n$  niezależnych próbkach i  $p$  jest prawdopodobieństwem zdarzenia  $A$  w każdej próbce.

Wtedy zachodzi:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} P \left\{ \left| \frac{m}{n} - p \right| < \varepsilon \right\} = 1$$

Podamy jeszcze jeden wynik dotyczący twierdzeń o prawie wielkich liczb.

Twierdzenie 7 /Chinczyn/. Jeżeli zmienne losowe  $X_1, X_2, \dots, X_n, \dots$  są niezależne oraz istnieją dla nich skończone wartości średnie  $EX_n$  przyjmujące wspólną wartość  $a = EX_n$ , wtedy

$$\lim_{n \rightarrow \infty} P \left\{ \left| \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n X_k - a \right| < \varepsilon \right\} = 1$$

/W twierdzeniu Chinczyna nie ma założenia wspólnej ograniczoności  $DX_n$ /.

### 3.3.7. Centralne twierdzenie graniczne

W poprzednim paragrafie badaliśmy zachowanie się odchylenia

$$\frac{1}{n} \sum_{k=1}^n (X_k - EX_k).$$

Przytoczymy teraz twierdzenia, za pomocą których można wyrazić graniczną funkcję rozkładu rozważanego odchylenia.

Twierdzenie 8 /Lapunow/. Niech  $X_1, X_2, \dots, X_n, \dots$  będzie ciągiem niezależnych zmiennych losowych. Niech następnie dla dowolnej liczby  $\varepsilon > 0$  ciąg ten spełnia warunek Linderbergera

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{D(\sum_{k=1}^n X_k)} \sum_{k=1}^n \int_{|x - EX_k| > \varepsilon \sqrt{D(\sum_{k=1}^n X_k)}} (x - EX_k)^2 dF_k(x) = 0.$$

Wtedy dla  $n \rightarrow \infty$  zachodzi

$$P \left\{ \frac{1}{\sqrt{D(\sum_{k=1}^n X_k)}} \sum_{k=1}^n (X_k - EX_k) < x \right\} \rightarrow \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^x e^{-\frac{z^2}{2}} dz$$

jednostajnie ze względu na  $x$ .

Objaśnimy bliżej warunek Linderbergera. Można pokazać, że dla każdego  $\mathcal{F}$ ,  $\mathcal{F} > 0$

$$P\left\{\max_{1 \leq k \leq n} |X_k - EX_k| \geq \mathcal{F} \sqrt{D(\sum_k X_k)}\right\} \leq \frac{\sum_{k=1}^n \int_{|x-EX_k| > \mathcal{F} \sqrt{D(\sum_k X_k)}} (x-EX_k)^2 dF_k(x)}{\mathcal{F}^2 D(\sum_k X_k)}$$

Z nierówności wynika, że wartości  $|X_k - EX_k|$  muszą dla  $n \rightarrow \infty$  być jednostajnie małymi z prawdopodobieństwem bliskim jedności. Przy tym założeniu dystrybuanta zmiennej losowej

$$\frac{1}{\sqrt{D(\sum_k X_k)}} \sum_{k=1}^n (X_k - EX_k)$$

dla  $n \rightarrow \infty$  jest zbieżna do dystrybuanty rozkładu normalnego

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^x e^{-\frac{z^2}{2}} dz.$$

Niech  $X_1, X_2, \dots$  są niezależnymi zmiennymi losowymi o wspólnym rozkładzie  $F_n(x) = F(x)$  dla  $n = 1, 2, \dots$ , przy czym  $DX_i = \sigma^2$  jest skończone dla  $i = 1, 2, \dots$

Oznaczmy przez  $m = EX_1$ . Zbadamy, czy jest spełniony warunek Linderbergera:

$$D\left(\sum_{k=1}^n X_k\right) = n\sigma^2$$

$$\sum_{k=1}^n \int_{|x-m| > \mathcal{F} \sqrt{n}\sigma} (x-m)^2 dF(x) = n \int_{|x-m| > \mathcal{F} \sqrt{n}\sigma} (x-m)^2 dF(x).$$

Warunek Linderbergera oznacza

$$\frac{1}{\sigma^2} \int_{|x-m| > \mathcal{F} \sqrt{n}\sigma} (x-m)^2 dF(x) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0.$$

Z twierdzenia Lapunowa otrzymujemy:

Twierdzenie 9. Niech  $X_1, X_2, \dots$  są niezależnymi zmiennymi losowymi o wspólnym rozkładzie;

$$EX_i = m \text{ dla } i = 1, 2, \dots; \quad DX_i = \sigma^2 \text{ dla } i = 1, 2, \dots$$

Wtedy

$$P\left\{\frac{1}{\sqrt{n}\sigma} \left(\sum_{k=1}^n X_k - n \cdot m\right) < x\right\} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^x e^{-\frac{z^2}{2}} dz$$

jednostajnie ze względu na  $x$ .

Ostatnie wyrażenie możemy zapisać nieco odmiennie

$$P\left\{\frac{\sqrt{n}}{\sigma} \left(\frac{\sum_k X_k}{n} - m\right) < x\right\} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^x e^{-\frac{z^2}{2}} dz.$$

jednostajnie ze względu na  $x$ .

Powyższe twierdzenie można zinterpretować następująco:

$X_1, X_2, \dots, X_n$  są wynikami pomiarów jakiejś wielkości  $X$ ;

$\frac{X_1 + \dots + X_n}{n}$  jest średnią arytmetyczną.

Za rzeczywistą wartość wielkości można uważać wartość średnią  $EX = m$ . Twierdzenie podaje prawdopodobieństwo zdarzenia: wartość  $\frac{X_1 + \dots + X_n}{n}$  różni się od  $EX$  o mniej niż poprzednio ustalona liczba  $\epsilon$ .

Rzeczywiście z twierdzenia wynika

$$P\left\{-\epsilon < \frac{\sqrt{n}}{\sigma} \left(\frac{\sum_k X_k}{n} - m\right) < \epsilon\right\} = \int_{-\epsilon}^{\epsilon} e^{-\frac{z^2}{2}} dz.$$

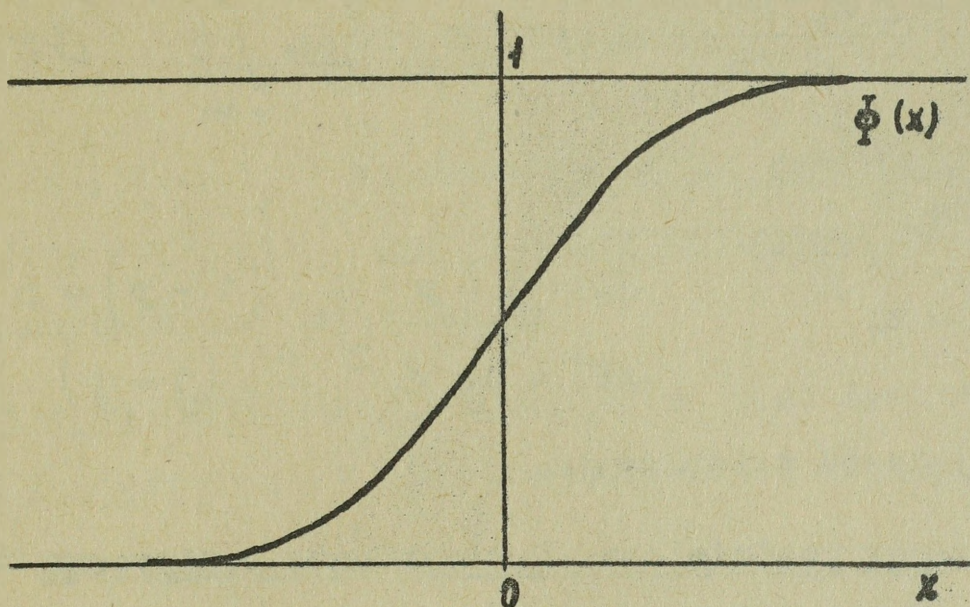
Oznaczmy

$$\phi(x) = \int_{-\infty}^x e^{-\frac{z^2}{2}} dz, \quad \tilde{\phi}(x) = \int_0^x e^{-\frac{z^2}{2}} dz.$$

Ostatnią równość można również zapisać

$$P\left\{-\epsilon < \frac{\sqrt{n}}{\sigma} \left(\frac{\sum_k X_k}{n} - m\right) < \epsilon\right\} = \phi(\epsilon) - \phi(-\epsilon) = 2\tilde{\phi}(\epsilon).$$

Wartości funkcji  $\phi(x)$ , częściej  $\tilde{\phi}(x)$ , znajdują się w tablicach. Wykres funkcji  $\phi(x)$  jest następujący:



rys. 101

Uwaga. Wprowadźmy w twierdzeniu 8 oznaczenie:

$$\bar{X}_n = \frac{1}{\sqrt{D(\sum X_k)}} \sum_{k=1}^n (X_k - EX_k).$$

Zauważmy, że zachodzi  $EX_n = 0$ ,  $D\bar{X}_n = 1$ .  $\bar{X}_n$  jest więc unormowaną zmienną losową.

Twierdzenie 10. Niech A jest zdarzeniem z prawdopodobieństwem p. W w niezależnych próbkach zdarzenie A wystąpiło, w n-m nie wystąpiło. Wtedy

$$P\left\{ \frac{m - np}{\sqrt{np(1-p)}} < x \right\} \implies \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^x e^{-\frac{z^2}{2}} dz$$

$\implies$  oznacza zbieżność jednostajną ze względu na x/.

Dowód. Rozważmy zmienną losową X określoną następująco:

$$X(\omega) = 1 \quad \text{dla } \omega \in A$$

$$X(\omega) = 0 \quad \text{dla } \omega \notin A.$$

Jako wynik  $n$  próbek otrzymujemy  $n$  zmiennych losowych  $X_1, \dots, X_n$  /realizacją zmiennej losowej  $X(\omega)$ . Wtedy z twierdzenia 9.

$$P\left\{\frac{\sum X_k - nEX}{\sigma\sqrt{n}} < x\right\} \longrightarrow \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^x e^{-\frac{z^2}{2}} dz.$$

Oczywiście

$$\sum_{k=1}^n X_k = m,$$

$$EX = 1 \cdot p + 0 \cdot (1 - p) = p$$

$$EX^2 = p, \quad \sigma^2 = p(1 - p)$$

To kończy dowód twierdzenia.

### 3.3.8. Szereg rozdzielczy. Dystrybuanta empiryczna

Przy badaniu statystycznym jakiejś zmiennej losowej  $X$  wychodzimy z zespołu  $n$  obserwacji, dla których zmienna  $X$  przyjmuje wartości  $x_1, x_2, \dots, x_n$ . W poprzednich paragrafach wyznaczaliśmy za pomocą obserwacji oszacowania wartości średnich zmiennych ewent. wariancji, tj. liczbowych charakterystyk zmiennej losowej.

Takie oszacowania nie muszą być jednak w praktyce wystarczające. Zmienna losowa jest ogólnie wyznaczona za pomocą dystrybuanty. Podamy metodę oszacowania dystrybuanty  $F_X$ .

Jeżeli  $x_1^* \leq x_2^* \leq \dots \leq x_n^*$  są wynikami doświadczeń /wartośći zmiennej losowej  $X$ / uporządkowanymi według wartości, to określamy funkcję:

$$F_n(x) = \begin{cases} 0 & \text{dla } x < x_1^* \\ \frac{k}{n} & \text{dla } x_k^* \leq x < x_{k+1}^* \\ 1 & x_n^* \leq x \end{cases}$$

Ciąg  $x_1^*, x_2^*, \dots, x_n^*$  nazywamy szeregiem wariacyjnym /rozdzielczym/,  $F_n(x)$  dystrybuantą empiryczną zmiennej  $X$ .  
Zachodzą następujące twierdzenia:

Twierdzenie 11 /Gliwienko/. Niech  $F(x)$  jest dystrybuantą zmiennej losowej  $X$  i  $F_n(x)$  - dystrybuantą empiryczną.

Wtedy

$$P \left\{ \sup_{-\infty < x < \infty} | F_n(x) - F(x) | \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0 \right\} = 1.$$

Sens twierdzenia: Zdarzenie polegające na tym, że dystrybuanta empiryczna jest jednostajnie zbieżna do /teoretycznej/ dystrybuanty - ma prawdopodobieństwo równe jedności.

Dla ciągłej dystrybuanty zachodzi mocniejsze twierdzenie.

Twierdzenie 12 /Kołmogorow/. Jeżeli  $F(x)$  jest ciągła, to dla  $n \rightarrow \infty$

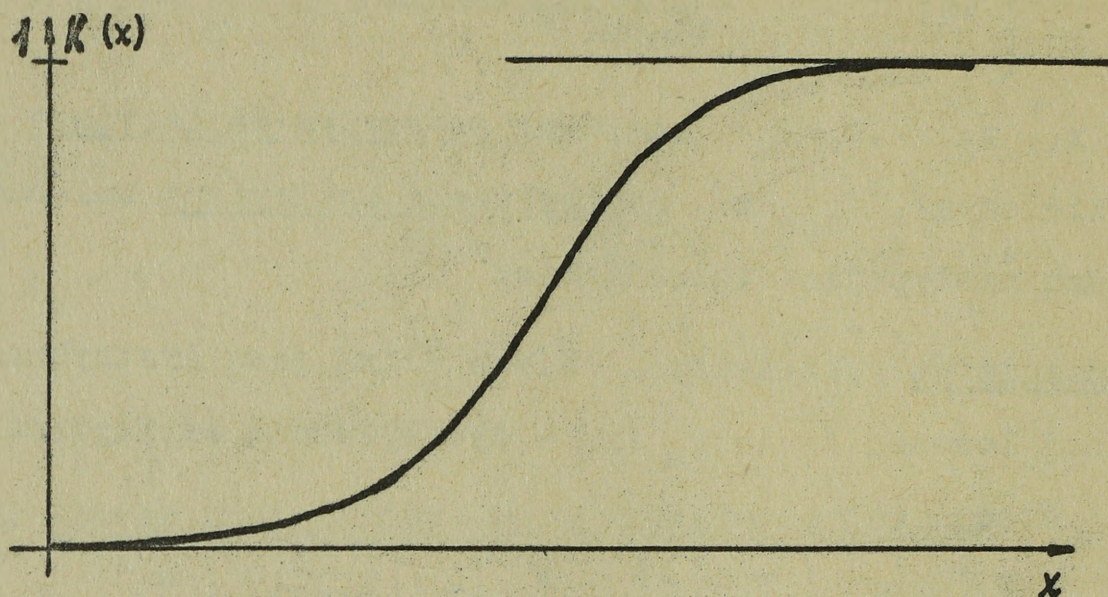
$$P \left\{ \sqrt{n} D_n < z \right\} \rightarrow K(z),$$

gdzie

$$D_n = \sup | F_n(x) - F(x) |;$$

$$K(z) = \begin{cases} 0 & \text{dla } z \leq 0 \\ \sum_{k=-\infty}^{\infty} (-1)^k e^{-2k^2 z^2} & \text{dla } z > 0 \end{cases}$$

Wartości funkcji  $K(z)$  można znaleźć w tablicach, zob. np. IX.



rys. 102

### 3.3.9. Rozkład $\beta$

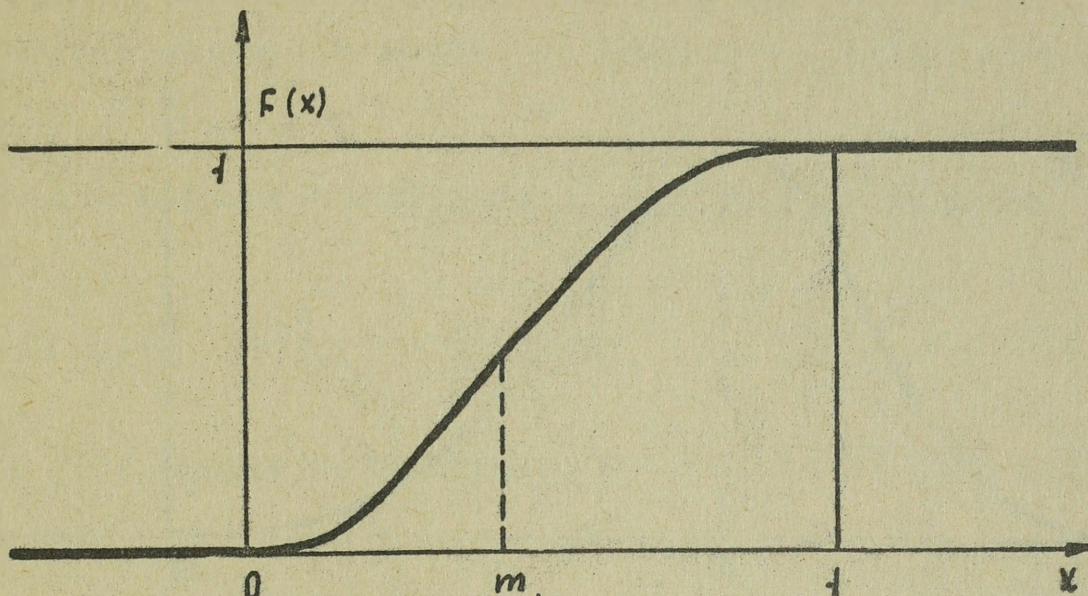
W teorii PERT wprowadziliśmy założenie, że zmiennej losowej - trwaniu czynności - odpowiada rozkład prawdopodobieństwa  $\beta$ . Oceny  $a$ ,  $m$  i  $b$  określają przedział  $\langle a, b \rangle$  i modę  $m$  zmiennej losowej. Dla zupełności trzeba obliczyć wartość średnią oraz wariancję. Ogólne wyprowadzenie wzorów dla obydwóch charakterystyk znajduje się w następnej części.

Rozkład  $\beta$  jest określony za pomocą całki parametrycznej z parametrami  $p > 0$  i  $q > 0$ ; dystrybuanta rozkładu  $\beta$  ma postać

$$F(x) = B_x(p, q) = \int_0^x \frac{1}{\beta(p, q)} x^{p-1} (1-x)^{q-1} dx$$

171

W przedziale  $\langle 0, 1 \rangle$  funkcję  $F(x) = B_x(p, q)$  można przedstawić w przybliżeniu następująco:



rys. 103

Zachodzi:

$$B_x(p, q) = 0, \quad \text{jeżeli } x \leq 0$$

$$B_x(p, q) = 1, \quad \text{jeżeli } x \geq 1.$$

Wyrażenie  $B_x(p, q)$  nazywa się też niezupełną  $\beta$ -funkcją.

Spełnia ona równanie:

$$B_{1-x}(p, q) = 1 - B_x(q, p)$$

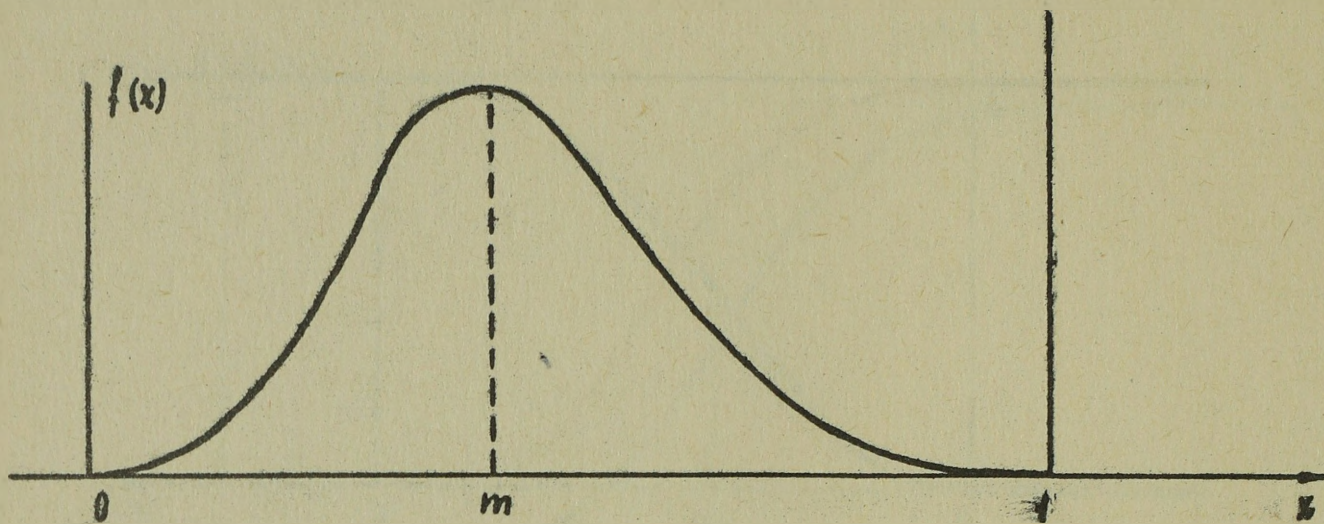
Wyrażenie  $\beta(p, q)$  pod całką dystrybuanty /7/ nazywamy  $\beta$ -funkcją.

Naszym zadaniem jest obliczyć główne charakterystyki rozkładu  $\beta$  /tj. wartość średnią i wariancję/ ewent. momenty.

Funkcja gęstości prawdopodobieństwa rozkładu  $\beta$  jest określona wzorem

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{\beta(p, q)} x^{p-1} \cdot (1-x)^{q-1} & \text{dla } 0 \leq x \leq 1 \\ 0 & \text{dla } x < 0 \text{ i } x > 1 \end{cases} \quad /8/$$

Krzywa funkcji  $f(x)$  ma najczęściej następujący przebieg:



rys. 104

Jest to funkcja nieujemna, która zeruje się na końcach przedziału, jeżeli  $p > 1$  i  $q > 1$ . Jeżeli  $0 < p < 1$  lub  $0 < q < 1$ , wtedy  $f(x)$  w lewym lub prawym końcu przedziału dąży do nieskończoności. Za pomocą odpowiedniej zamiany współrzędnych można osiągnąć to, żeby rozkład był określony w dowolnym przedziale  $< a, b >$ .

Dla  $p \leq 0$  lub  $q \leq 0$  rozkład nie istnieje.

Pole zawarte pod krzywą  $f(x)$  równa się 1, ponieważ

$$\int_0^1 f(x) dx = \frac{\beta(p, q)}{\beta(p, q)} = 1. \quad /9/$$

Wynika to z definicji  $\beta$ -funkcji, która jest określona za pomocą całki oznaczonej

$$\beta(p, q) = \int_0^1 x^{p-1} (1-x)^{q-1} dz \quad \text{dla } q > 0, \quad p > 0. \quad /10/$$

Podstawiając /10/ do /8/ otrzymujemy /9/.

Przy wyprowadzeniu momentów rozkładu  $\beta$  skorzystamy z niektórych własności  $\beta$ -funkcji, które następnie przytoczymy.

Przede wszystkim można  $\beta$ -funkcję wyrazić za pomocą funkcji  $\Gamma$  <sup>\*/</sup>.

Podamy bez dowodu najważniejsze związki między funkcją

$\Gamma$  i  $\beta$ :

$$\beta(p, q) = \frac{\Gamma(p) \cdot \Gamma(q)}{\Gamma(p + q)} \quad /11/$$

Z /11/ wynika natychmiast, że funkcja  $\beta$  jest symetryczną, tj.

$$B(p, q) = B(q, p). \quad /12/$$

Jeżeli  $p$  i  $q$  są liczbami całkowitymi, to funkcję  $\beta$  można wyrazić za pomocą silni /zob. <sup>\*/</sup>/, ponieważ

$$\Gamma(p) = (p - 1)! \quad \text{oraz} \quad \Gamma(q) = (q - 1)! \quad /13/$$

Następnie zachodzi równość

$$\Gamma(x + 1) = x \cdot \Gamma(x). \quad /14/$$

Korzystając z poprzedniego możemy teraz wyprowadzić momenty rozkładu  $\beta$ .

Moment rzędu  $r$ -tego zmiennej losowej  $x$  względem punktu  $a$

$$\nu_r(a) = \int_{-\infty}^{+\infty} (x - a)^r dF(x) \quad /15/$$

gdzie  $F$  jest dystrybuantą, tj. zachodzi

$$F(x) = \int_{-\infty}^x f(x) dx,$$

<sup>\*/</sup> Funkcja  $\Gamma$  jest określona za pomocą całki Eulera drugiego rodzaju:

$$\Gamma(x) = \int_0^x e^{-t} t^{x-1} dt \quad \text{dla} \quad x > 0$$

$B_x(p, q)$  jest to tzw. całka Eulera pierwszego rodzaju/.

Jeżeli  $x$  jest liczbą naturalną, to  $\Gamma(x + 1) = x!$

gdzie  $f(x)$  jest gęstością prawdopodobieństwa danego rozkładu.

Jeżeli w /15/  $a = 0$ , otrzymamy moment względem początku:

$$\nu_r(0) = \int_{-\infty}^{+\infty} x^r dF(x) \quad *$$

Jeżeli  $a = E(x)$  /tj. wartości średniej/, wtedy moment nazywamy centralnym i oznaczamy  $\mu_r$ . Z /16/ widać, że moment pierwszego rzędu względem początku równa się wartości średniej  $E(x)$ . Centralny moment rzędu drugiego jest wariancją  $var(x)$ . Mamy więc obliczyć  $\nu_1$  i  $\mu_2$  dla rozkładu  $\beta$ . Między obydwoma momentami zachodzi związek

$$\mu_2 = \nu_2 - \nu_1^2 \quad \text{przy} \quad \nu_r(0) = \nu_r. \quad /17/$$

Dla rozkładu  $\beta$  można napisać, korzystając z /16/ i /8/

$$\nu_r = \int_{-\infty}^{+\infty} x^r \frac{1}{\beta(p,q)} x^{p-1} (1-x)^{q-1} dx = \frac{1}{\beta(p,q)} \int_{-\infty}^{+\infty} x^{r+p-1} (1-x)^{q-1} dx.$$

Następnie z /10/

$$\nu_r = \int_{-\infty}^{+\infty} x^r \frac{1}{\beta(p,q)} x^{r+p-1} (1-x)^{q-1} dx = \frac{\beta(r+p,q)}{\beta(p,q)}. \quad /18/$$

Teraz możemy obliczyć wartość średnią, tj.  $\nu_r$  dla  $r = 1$ .

Z /11/ i /14/

$$\nu_1 = \frac{\beta(p+1,q)}{\beta(p,q)} = \frac{\Gamma(p+1) \cdot \Gamma(q)}{\Gamma(p+q+1)} \cdot \frac{\Gamma(p+q)}{\Gamma(p) \cdot \Gamma(q)} = \frac{p}{p+q}. \quad /19/$$

x/ Ogólnie jest to tzw. całka Stieltjesa  $\int_a^b g(x) dF(x)$ , którą można jednak przekształcić w całkę Riemanna przy założeniu, że  $f(x) = \frac{dF(x)}{dx}$

$$\text{Zachodzi} \quad \int_a^b g(x) dF(x) = \int_a^b g(x) f(x) dx.$$

Obliczmy następnie  $\mu_2$ , tj. wariancję. Do tego potrzebny jest moment drugiego rzędu względem początku dla  $r = 2$ , korzystając z /18/, /11/ i /14/, mamy

$$\begin{aligned} \nu_2 &= \frac{\beta(p+2, q)}{\beta(p+q)} = \frac{\Gamma(p+2)\Gamma(q)}{\Gamma(p+q+2)} \cdot \frac{\Gamma(p+q)}{\Gamma(p)\Gamma(q)} = \\ &= \frac{(p+1)\Gamma(p+1)\Gamma(q)}{(p+q+1)\Gamma(p+q+1)} \cdot \frac{\Gamma(p+q)}{\Gamma(p)\Gamma(q)} = \\ &= \frac{(p+1)p\Gamma(p)\Gamma(q)}{(p+q+1)(p+q)\Gamma(p+q)} \cdot \frac{\Gamma(p+q)}{\Gamma(p)\Gamma(q)} = \frac{p(p+1)}{(p+q)(p+q+1)}. \end{aligned}$$

Skorzystamy następnie z /17/ i /19/ i piszemy

$$\begin{aligned} \mu_2 &= \nu_2 - \nu_1^2 = \frac{p(p+1)}{(p+q)(p+q+1)} - \frac{p^2}{(p+q)^2} = \\ &= \frac{p(p+1)(p+q) - p^2(p+q+1)}{(p+q+1)(p+q)^2} = \frac{pq}{(p+q+1)(p+q)^2} \quad /20/ \end{aligned}$$

Obliczyliśmy więc:

$$E(x) = \frac{p}{p+q} \quad \text{oraz} \quad \text{var}(x) = \frac{pq}{(p+q+1)(p+q)^2}$$

Obie charakterystyki są funkcjami parametrów  $p, q$ , których nie znamy. Mamy jednak oceny parametrów  $a, m, b$ . Trzeba zastosować transformacje współrzędnych rozkładu w przedziale  $\langle a, b \rangle$  z modą  $m$ . W tym celu położymy

$$\begin{aligned} p-1 &= \alpha & E(x) &= K_1 \\ q-1 &= \beta & \text{var}(x) &= K_2 \end{aligned}$$

Dla obu głównych momentów otrzymamy

$$K_1 = \frac{\alpha+1}{\alpha+\beta+2} \quad \text{oraz} \quad K_2 = \frac{(\alpha+1)(\beta+1)}{(\alpha+\beta+2)^2(\alpha+\beta+3)}$$

oraz zmienną losową  $x$  przekształcimy w nową zmienną  $t$  za

pomocą wzoru

$$t = a + (b - a) \cdot x \quad x = \frac{t - a}{b - a} \quad /21/$$

gdzie  $a$  i  $b$  są końcami przedziału  $\langle a, b \rangle$ ,  $t$  dowolną czasową wartością w tym przedziale.

Funkcję gęstości prawdopodobieństwa /8/ piszemy w postaci

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{\beta(\alpha+1, \gamma+1)} x^\alpha (1-x)^\gamma & \text{dla } 0 \leq x \leq 1 \\ 0 & \text{dla } x < 0; x > 1, \end{cases}$$

którą można za pomocą /21/ przedstawić następująco:

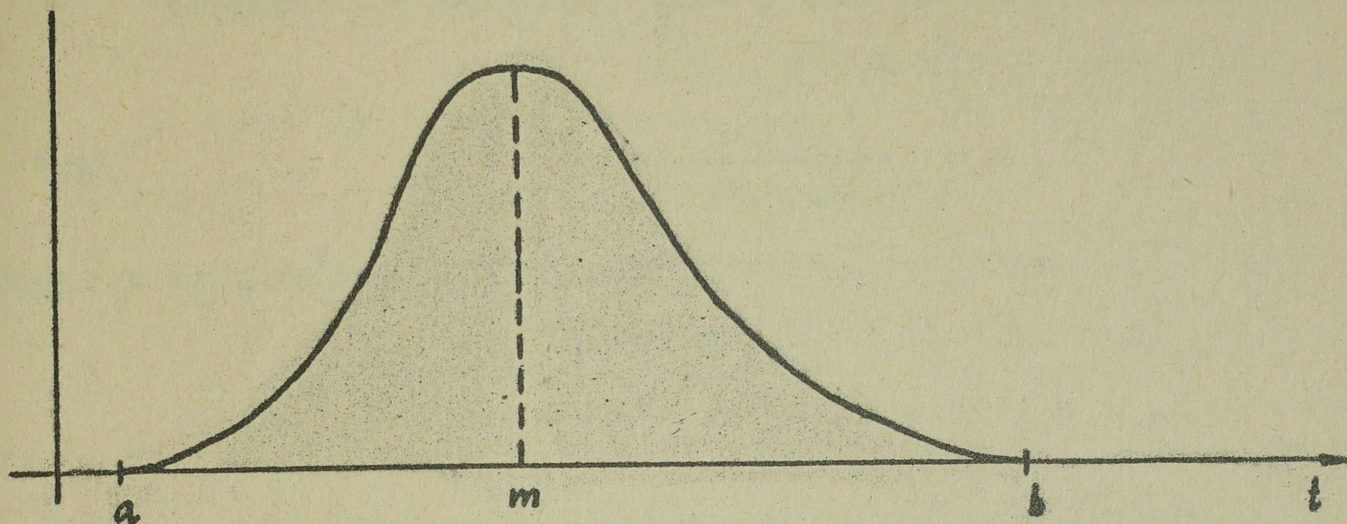
$$\begin{aligned} f(t) &= \frac{1}{\beta(\alpha+1, \gamma+1)} \left(\frac{t-a}{b-a}\right)^\alpha \cdot \left(1 - \frac{t-a}{b-a}\right)^\gamma = \\ &= \frac{1}{\beta(\alpha+1, \gamma+1)} \left(\frac{t-a}{b-a}\right)^\alpha \cdot \left(\frac{b-t}{b-a}\right)^\gamma = \\ &= \frac{1}{(b-a)^{\alpha+\gamma+1} \beta(\alpha+1, \gamma+1)} \cdot (t-a)^\alpha \cdot (b-t)^\gamma \end{aligned}$$

Nowa funkcja gęstości prawdopodobieństwa rozkładu  $\beta$  ma teraz postać

$$f(t) = \begin{cases} \frac{1}{(b-a)^{\alpha+\gamma+1} \beta(\alpha+1, \gamma+1)} (t-a)^\alpha (b-t)^\gamma & \text{dla } a < t < b \\ 0 & \text{w pozostałych przypadkach,} \end{cases} \quad /22/$$

gdzie  $\alpha, \gamma > -1$ .

Wykres funkcji gęstości prawdopodobieństwa rozkładu jest przedstawiony na rys. 105



rys. 105

Funkcja przyjmuje maksimum w jednym punkcie, którego dotychczas jeszcze nie znaleźliśmy. Jest on funkcją zmiennych  $\alpha$  i  $\gamma$  oraz wartości  $a$  i  $b$ . Rozrzut czasów trwania w pobliżu wartości średniej jest funkcją długości przedziału rozważanych wartości  $[b - a]$ . Rozkład prawdopodobieństwa jest symetryczny ze względu na maksimum /modę  $m$ /, jeżeli  $\alpha = \gamma$ .

Najpierw trzeba znaleźć wartość funkcji w punkcie  $m$ , tj. szukamy maksimum funkcji /22/. Obliczymy najpierw jej pochodną, którą przyrównamy do zera. Punkt, w którym pierwsza pochodna równa się zero jest punktem, w którym funkcja osiąga maksimum.

$$\begin{aligned} \phi'(t) &= \frac{1}{(b-a)^{\alpha+\gamma+1} \beta(\alpha+1, \gamma+1)} \left[ \alpha(t-a)^{\alpha-1}(b-t)^{\gamma} - \gamma(b-t)^{\gamma-1}(t-a)^{\alpha} \right] \\ &= \frac{1}{(b-a)^{\alpha+\gamma+1} \beta(\alpha+1, \gamma+1)} (t-a)^{\alpha-1}(b-t)^{\gamma-1} [\alpha(b-t) - \gamma(t-a)]. \end{aligned}$$

Jeżeli  $f'(t) = 0$  dla  $t = m$ , to z /23/ otrzymujemy

$$d(b - m) - \gamma(m - a) = 0$$

$$m = \frac{\gamma a - \alpha b}{d + \gamma}$$

/24/

Za pomocą przekształcenia /21/ można również wyrazić  $E(t)$  i  $\text{var}(t)$  dla  $f(t)$ :

$$K_1 = a + (b - a) \cdot \left[ \frac{d + 1}{d + \gamma + 2} \right]$$

$$K_2 = (b - a)^2 \cdot \frac{(\alpha + 1)(\gamma + 1)}{(d + \gamma + 3)(d + \gamma + 2)^2} \cdot \quad /25/$$

Wartość średnią z /25/ można również napisać w postaci

$$K_1 = \frac{a\gamma + bd + b + a}{d + \gamma + 2}$$

Z /24/ otrzymujemy

$$K_1 = \frac{a + b + (d + \gamma)m}{d + \gamma + 2}$$

/26/

Wzór ten zachodzi dokładnie dla rozkładu  $\beta$  spełniającego warunek, że wartości parametrów  $p + q = 6$ , tj.

$d + \gamma = 4$ . Ze wzoru /26/ dla wartości

$$\alpha = 2 + \sqrt{2}, \quad \gamma = 2 - \sqrt{2}$$

$$\text{albo } \alpha = 2 - \sqrt{2}, \quad \gamma = 2 + \sqrt{2}$$

otrzymamy tzw. oczekiwany czas trwania

$$t_e = \frac{a + 4m + b}{6}$$

/27/

Ernst Breitenberg<sup>x/</sup> badał momenty rozkładu  $\beta$  i z /24/ i /25/ wyprowadził, że dla wartości średniej i wariancji zachodzą następujące związki:

$$(d + \gamma + 2)K_1 = (d + \gamma)m + (a + b), \quad /28/$$

---

x/ E. Breitenberg: Development Projects as Stochastic Processes, Dahlgren 1959.

gdzie  $m$  jest modą. Dowód /28/ wynika z definicji rozkładu  $\beta$ :

$$D. \quad a = 0; \quad b = 1; \quad m = \frac{d}{d+j} \quad K_1 = \frac{d+1}{d+j+2}$$

Dla wariancji Breitenberg wyprowadził:

$$(d+j+3)K_2 = (a+b)K_1 - ab - K_1^2 \quad /29/$$

$$D. \quad a = 0; \quad b = 1$$

$$(d+j+3)K_2 = K_1 - K_1^2 = K_1(1-K_1) = \frac{d+1}{d+j+2} \left( \frac{d+j+2-d-1}{d+j+2} \right)$$

$$K_2 = \frac{(d+1)(j+1)}{(d+j+3)(d+j+2)^2}$$

Dla /28/ można dalej pisać:

$$(d+j+2)K_1 = (d+j+2)m + a + b - 2m \quad /30/$$

$$tj. \quad K_1 = m + \frac{2}{d+j+2} \left[ \frac{a+b}{2} - m \right]$$

$$K_1 - m = \frac{2}{d+j+2} \left[ \frac{a+b}{2} - m \right] \quad /31/$$

Analogicznie dla /29/

$$(d+j+3)K_2 = \frac{(b-a)^2}{4} - \frac{(d+j)^2}{(d+j+2)^2} \left[ \frac{a+b}{2} - m \right]^2 \quad /32/$$

Momenty wyższych rzędów obliczamy ze wzoru

$$(d+j+2+n)K_{n+1} = n(a+b)K_n - n \left[ K_1 K_n + \binom{m+1}{1} K_2 K_{n-1} + \dots + K_n K_1 \right] \quad /33/$$

Otrzymaliśmy więc główne momenty rozkładu  $\beta$  /31/ i /32/ wyrażone za pomocą  $a$ ,  $m$  i  $h$  przy danym  $d+j$ . Na

początku rozwoju PERT znaleziono empirycznie wartość

$\alpha + \beta = 4$ . Dla  $\alpha + \beta = 4$  można wyrazić momenty z /33/ następująco:

$$6 K_1 = (a + b) + 4m$$

$$7 K_2 = (a + b) K_1 - ab - K_1^2$$

$$4 K_3 = (a + b) K_2 - 2K_1 K_2 \quad /34/$$

$$3 K_4 = (a + b) K_3 - 2 K_1 K_3 + K_2^2 \text{ itd.}$$

Dla wartości średniej więc z /34/ otrzymujemy

$$t_e = \frac{a + 4m + b}{6} \quad /35/$$

oraz wariancję z /25/

$$\sigma_{t_e}^2 = (b - a)^2 \frac{(\alpha + 1)(\beta + 1)}{(\alpha + \beta + 2)^2(\alpha + \beta + 3)} \quad *$$

Powyższy wzór aproksymujemy w praktyce warunkiem, żeby odchylenie standardowe równało się 1/6 długości przedziału. Według "reguły 6  $\sigma$ " z nierówności Czebyszewa prawdopodobieństwo na zewnątrz przedziału jest prawie równe zeru.

Piszemy więc

$$\sigma_{t_e}^2 = \frac{(b - a)^2}{36} ; \sigma_{t_e} = \frac{b - a}{6} \quad /36/$$

Żeby wzór /36/ zachodził dokładnie trzeba, żeby

$\alpha + \beta = 4$  oraz odległość mody od środka przedziału  $\frac{a + b}{2}$  równała się  $-\frac{1}{2\sqrt{2}} (b - a)$ , tj. około 35 % długości.

$$\text{*/ Z /34/ otrzymujemy: } K_2 = \frac{(b-a)^2}{28} - \frac{4}{63} \left[ \frac{a+b}{2} - m \right]^2$$

$$\text{W przypadku symetrycznym } m = E(t) = \frac{a + b}{2}$$

Wzór /35/ można przepisać według wzoru /30/

$$t_e = \frac{1}{3} \cdot \left( 2m + \frac{a+b}{2} \right) \quad /37/$$

Stąd wynika, że  $t_e$  jest średnią ważoną mody i środka przedziału z wagami 2 i 1. To oznacza, że  $t_e$  znajduje się w  $1/3$  długości od mody do środka przedziału.

Dla uproszczenia obliczeń można wzór na  $t_e$  wyrazić następująco:

$$t_e = \frac{b - \left[ \frac{(m-a) + m}{6} \right]}{6} + m. \quad /38/$$

L I T E R A T U R A

1. ATHAN, P. and CORD, M.: RITE, SCANS, PERT. Aerospace Management 5/1962/4, pp.52-53.
2. AVOTS, Ivars: The Management Side of PERT. California Management Review 4/1962/2, pp. 16-27.
3. BACKER, F., Jr., BARKSON, A,W, and FRISHBERG, M.C.: Least-Cost Estimating and Scheduling. Oil and Gas Journal 59/1961/46.
4. BIGELOW, Clifford, George: Bibliography on Project Planning and Control by Network Analysis: 1959-1961. Operations Research 10/1962/5, pp. 728-731.
5. BOULANGER, David, G.: Program Evaluation and Review Technique. A Case Study Application With Analysis. Advanced Management 26/1961/7, pp. 7-12.
6. BREU, Max: Netzplantechnik im Terminwesen. Industrielle Organisation 31/1962/,10, s. 297-306.
7. BRYANT, M.R.: Pert in Nike-Zeus. Aerospace Management 6/1963/1, pp. 20-24.
8. BUDIL, Werner: Die Praxis der Netzplantechnik. Industrielle Organisation 32/1963/11, S. 373; 33/1964/8.
9. BILDSON, R.A., and GILLESPIE, J.R.: Critical Path Planning-Pert Integration. Operations Research, 10/1962/6.
10. BURGESS, A.R., and KILLEBREW, James. E.: Variation in Activity Level on Acyclical Arrow Diagram. The Journal of Industrial Engineering 13/1962/2, pp. 76-83.
11. C-E-I-R Inc.: RAMPS - Resource Allacation and Multi-Project Scheduling System. Training Text. Washington 1962.
12. CHARNES, COOPER, W.W.: A Network Interpretation and Directed Subdual Algorithm for Critical Path Scheduling. The Journal of Industrial Engineering 13/1962/4, pp.213-219.

13. CHARNES, A., COOPER, W.W., and THOMPSON, G.L.: Critical Path Analyses Via Chance Constrained and Stochastic Programming. Operations Research 12/1964/3, pp.460-480.
14. CLARK, Charles E.: The optimum Allocation of Resources among the Activities of a Network. The Journal of Industrial Engineering 12/1961/1, pp. 11-17.
15. CLARK, Charles E.: The PERT Model for the Distribution of an Activity Time. Operations Research 10/1962/3, pp. 405-406.
16. COSINUKE, Walter: The Critical Path-Technique for Planning and Scheduling. Chemical Engineering 69/1962/13, pp 113-118.
17. DEAN, Joel: Cost Structure of Enterprises and Break-Even Charts. The American Economic Review 38/1948/2.
18. Department of the Navy, Bureau of Naval Weapons, Special Project Office: PERT - Program Evaluation Research Task. Summary Report Phase 1 and Phase 2. July - September 1958. Washington: U.S. Government Printing Office 1962.
19. DOGRUSOZ, Halim: Developmont Programming. Operations Research 9/1961/5, pp. 753-755.
20. DUDEK, Richard, A., and TEUTON, Ottis, F., Jr.: Development of M - Stage Decision Rule for Scheduling Jobs through M Machines. Operations Research 12/1964/3, pp. 471-497.
21. EISNER, Howard: A Generalized Network Approach to the Planning and Scheduling of a Research Project. Operations Research 10/1962/1, pp.115-125.
22. FAZAR, Willard: Planning Implementation and Appraisal through PERT. Bussiness Budgeting, 10/1962/3, pp. 4-11.
23. FORD, L.R., Jr., and FULKERSON, D.R.: A Simple Algorithm for Finding Maximal Network Flows and an Application to the Hitchcock Problem. Canadian Journal of Mathematics 9/1957/2, pp. 210-218.

24. FORD, L.R., and FULKERSON, D.R.: Flows in Networks. Princeton Jersey, Princeton University Press 1962.
25. FREEMAN, Raoul, J.: Quantitative Methods in R D Management. California Management Review, 2/1964/4, pp. 34-44.
26. FULKERSON, D.R.: A Network Flow Computations for Project Cost Curves. Management Science 7/1962/6, pp. 168-178.
27. FREEMAN, Raoul, J.: A Generalized PERT. Operations Research 8/1962/2, pp. 281.
28. FULKERSON, D.R.: Expected Critical Path Lengths in PERT Networks. Operations Research 10/1962/6, pp. 168-178.
29. GLASER, M.B., and YOUNG, R.M.: Critical Path Planning and Scheduling Application to Engineering and Construction. Chemical Engineering Progress 57/1961/11, pp.60-65.
30. GOLDBERG, Charles R.: An Algorithm for the Sequential Solution of Schedule Networks. Operations Research 12/1964/3, pp. 399-502.
31. GRUBBS, Frank E.: Attempts to Validate Certain PERT Statistics. Operations Research 10/1962/6, p. 912.
32. HEALY, Thomas L.: Activity Subdivision and PERT Probability Statements. Operations Research 9/1961/3, pp. 341-348.
33. HELGESON, W.B., and BIRNIE, D.P.: Assembly Line Balancing Using the Ranked Position Weigh Technique. The Journal of Industrial Engineering 12/1961/6.
34. HELLER, J.: An Algorithm for the Construction and Evaluation of Feasible Schedules. Management Science 8/1962/2.
35. KAUFMANN, A., et MALGRANGE, Y.: Recherche des chemins et circuits Hamiltoniens d'un graph. Revue Francaise de recherche operationelle 7/1963/2, pp. 61-73.

36. KELLEY, James E.: Parametric Programming and Primal - Dual Algorithm. Operations Research 7/1959/3, pp. 327-334.
37. KELLEY, James E.: Critical - Path Planning and Scheduling: Mathematical Nasis. Operations Research 9/1961/3, pp. 296-320.
38. KELLEY, James E., Jr., WILSON, L.D., and BERMAN, H.: Using Critical Path Method Programming. Automation 9/1962/11, pp. 90-95.
39. KILBRIDGE, M.D., and WESTER, L.: Rewiev of Analytical Systems of Line Balancing. Operations Research 19/1962/5 pp. 626-638.
40. KILBRIDGE, M.D., and WESTER, L.: Heuristic Method of Assembly Line Balancing. The Journal of Industrial Engineering 12/1961/4.
41. KLEE, Victor: A String Algorithm for Shortest Path in Directed Networks. Operations Research 12/1964/3, pp. 428-432.
42. KLEIN, Monton: On Assembly Line Balancing. Operations Research 11/1963/2.
43. LEVY, F.K., THOMPSON, G.L., and WIEST, J.D.: Multiship, Multishop, Workload-Smoothing Program. Naval Research Logistic Quarterly 9/1962/1, pp. 37-44.
44. LEVY, F.K., THOMPSON, G.L., and WIEST, J.D.: Critical Path Method - A New Tool for Management. Carnegie Institute of Technology, November 1961.
45. LYNCH, Charles J.: Plan Project Scientifically with Critical Path Scheduling. Product Engineering 32/1961/37, pp. 92-96.
46. MALCOLM, D.G., ROSEBOOM, J.H., CLARK, C.E., and FAZAR, W.: Application of a Technique for Research and Programm Evaluation. Operations Research 7/1959/5, pp. 646-669.
47. MANSOOR, E.M.: Assembly Line Balancing - An Improvement on the Ranked Positional Weight Technique. The Journal of Industrial Enginnering 15/1964/2.

48. MAUCHLY, John W.: Critical Path Scheduling. Chemical Engineering 69/1962/8, pp. 139-154.
49. MAYNES, W.: What's Wrong with PERT. Aerospace Management 5/1962/4.
50. MILLER, Norman C., Jr.: PERT and Critical Path: Management by Chart. Management Review 50/1961/11, pp. 49-51.
51. MILLER, Robert W.: How to Plan and Control with PERT. Harvard Business Review 40/1962/2, pp. 93-104.
52. MUELLER, M.W., and MINTZ, S.W.: Cost, Time and Probability in the Technique Management. Operations Research 8/1960/5.
53. MUIR, A.: PERT ? CPM ? RAMPS ? Time and Motion Study, April 1963, pp. 22-27.
54. NUTTALL, J.F., and JEANES, R.E.: The Critical Path Method 1 - its Value in Building Design and Construction. The Builder 1963, vol. 205, June 21.
55. NUTTALL, J.F., and JEANES, R.E.: The Critical Path Method 2 - Detailed Methods of Use. The Builder 1963, vol. 205, June 21.
56. Office of the Secretary of Defense and National Aeronautics and Space Administration: DOD and NASA Guide PERT /COST Systems Design. June 1962. Washington: U.S. Government Printing Office 1962.
57. PHELPS, H. Sheldon: What your Key People Should Know about PERT. Management Review 51/1962/10, pp. 44-51.
58. PHILLIPS, Cecil R.: Fifteen Key Features of Computer Programs for CPM and PERT. The Journal of Industrial Engineering 15/1964/1.
59. PICKUP, J.S., and THWAITES, D.A.: Networks-A Path to Success. The Manager 30/1962/12, pp. 31-37.
60. POCOCK, J.W.: PERT as an Analytical Aid for Programme Planning - its Pay - off and Problems. Operations Research 19/1962/6, pp. 893-903.

61. PRAGER, William: A Structural Method of Computing Project Cost Polygons. Management Science 9/1963/3, pp. 394-405.
62. ROPER, Don E.: Critical Path Scheduling. The Journal of Industrial Engineering 15/1964/2.
63. SCHWINN, Rolf: Maximale und Minimale Wagniszahlen in Netzen. Industrielle Organisation 33/1964/6.
64. SOBCZAK, Thomas W.: Networks Planning - a Bibliography. Journal of Industrial Engineering 13/1962/6, pp.507-511.
65. STILIAN, Gabriel N., and others: PERT - A New Management Planning and Control Technique. New York: American Management Association 1962 - AMA Management Reports.
66. SZWARC, W.: Solutions of the Akers - Fridman Scheduling Problem. Operations Research 8/1960/6, Baltimore, pp. 782-788.
67. TAYLOR, R.B.: Hoffman gets HEPP. Aerospace Management 5/1962/77, pp. 31-33.
68. TATHAM, L.: The Many Ways of PERT. Data and Control 1/1963/2, pp. 30.
69. TEBO, K.M.: PERT - A Technique for Management. Design News 18/1963/3.
70. TONHE, F.M.: Summary of Heuristics Line Balancing Procedure. Management Science 7/1960/1.
71. TONKA, Lajos: Simulationsbeispiel aus der Netzplantechnik. Industrielle Organisation 34/1964/8.
72. Van SLYKE, Richard M.: Monte Carlo Methods and the PERT. Problem. Operations Research 11/1963/5.
73. WEBER, Karl: Planung mit den Critical Path Method /CPM/ Industrielle Organisation 32/1963/1.
74. WEBER, Karl: Planung mit der Program Evaluation and Review Technique /PERT/. Industrielle Organisation 32/1963/2.

75. WEBER, Karl: Planung mit CPM und PERT /Weiterentwicklungen/. Industrielle Organisation 33/1964/6.
76. WEBER, Karl: Planung mit CPM und PERT. Zürich 1963.
77. WIEST, Jerome D.: Some Properties of Schedules for Large Projects with Limited Resources. Operations Research. Operations Research 12/1964/3, pp. 395-418.
78. WOOD, K.R., and ZAGORSKI, H.J.: How to Schedule by Computer - Use MAPS. Aerospace Management 5/1962/2, pp. 36-37.
79. YARNOLD, Kenneth W., and NEHNEVAJSA, Jiri: Analytical Methods for Determination Requirements. Operations Research 9/1961/4.

S P I S   T R E Ś C I

=====

	str.
Przedmowa	2
Wstęp	10
1. DOTYCHCZASOWE ŚRODKI PLANOWANIA I KIEROWANIA	13
1.1. Hamonogramy	13
1.2. Cyklogramy	18
1.2.1. Metoda kolejnego wykonywania robót	18
1.2.2. Metoda jednoczesnego wykonywania robót	19
1.2.3. Metoda potokowa /równomierna/ wykonywania robót	20
1.3. Związek pomiędzy cyklogramem i harmonogramem	24
1.4. Podstawowe związki pomiędzy harmonogramem i siecią powiązań	25
1.5. Modele strukturalne	34
2. METODY ANALIZY ZA POMOCĄ ŚCIEŻKI KRYTYCZNEJ	42
2.1. Warunki powstania metod analizy sieciowej i ich miejsce w badaniach operacyjnych	42
2.1.1. Historia powstania	49
2.2. Wykres procesu złożonego - sieć	52
2.3. Metoda CPM	67
2.3.1. Czasowe planowanie za pomocą metody CPM	67
2.3.1.1. CPM/GE	91
2.3.1.2. Kierowanie procesem realizacji projektu i jego kontrola	96
2.3.1.3. Zastosowanie metody CPM przy koordynacji większej liczby projektów	99
2.3.2. Rozszerzenie metody CPM uwzględniając nakłady	105
2.3.2.1. Sformułowanie zagadnienia	105
2.3.2.2. Primal - Dual Algorithm Kelley'ego	111

2.3.3.	Przykłady obliczeń nakładów	123
2.3.3.1	Metoda Webera	124
2.3.3.2	Algorytm Kelley'ego	127
2.4.	Metoda PERT	137
2.4.1.	Czasowe obliczenia w sieci	149
2.4.2.	Obliczenie prawdopodobieństwa	153
2.4.3.	Obliczenia PERT w sieci węzłowo określonej	162
2.4.4.	Wady metody PERT	169
2.5.	Techniki pokrewne	177
2.5.1.	Uogólnienie metody PERT	177
2.5.2.	Metoda zrównowazania linii operacyjnych	187
2.5.3.	Zastosowanie metody Monte Carlo do obliczeń sieci PERT	199
2.6	Aspekty obliczania	203
2.6.1.	Zwięzła charakterystyka poszczególnych programów według typu maszyn matematycznych	204
2.6.1.1	National Elliott 803 B	204
2.6.1.2	LGP 30	212
2.6.1.3	ZUSE 23	213
2.6.1.4	SIRIUS	214
2.6.1.5	Tabelator T 320	214
2.6.2	Lokalizacja maszyn matematycznych/w CSRS/ na których można opracowywać metody CPM i PERT	219
2.6.3.	Przegląd zagranicznych programów	221
3.	DODATKI MATEMATYCZNE	225
3.1.	Wprowadzenie do teorii grafów	225
3.1.1	Sieci	234
3.1.2.	Zadanie optymalizacji potoku w sieci	236
3.1.3.	Sieć z nieskończonymi ograniczeniami.	249

3.2.	Podstawowe pojęcia algebry liniowej i algebry macierzy	251
3.2.1.	Wektory	251
3.2.2.	Macierze	253
3.2.3.	Sformułowanie zagadnienia programowania liniowego	259
3.3.	Podstawy rachunku prawdopodobieństwa i statystyki matematycznej	262
3.3.1.	Definicja prawdopodobieństwa	262
3.3.2.	Pojęcie prawdopodobieństwa jako obiektywnych własności zdarzeń	266
3.3.3.	Zmienne losowe. Charakterystyki zmiennej losowej	269
3.3.4.	Najważniejsze charakterystyki zmiennej losowej	273
3.3.5.	Niezależność	276
3.3.6.	Prawo wielkich liczb	279
3.3.7.	Centralne twierdzenie graniczne	280
3.3.8.	Szereg rozdzielczy. Dystrybuanta empiryczna	284
3.3.9.	Rozkład beta.	286
	Literatura	298

Wykonano w 100 egz.

Egz.nr 1-100 bibl.jawna

Wyk. ppłk Ciechanowicz

Druk. OH, dn. 9.2.67r.

Nr ks. 3707/WW

Kor. S.H.

Druk. ASG-O-XV-3260

