AKADEMIA SZTABU GENERALNEGO
im. gen. broni K. Świerczewskiego

INSTYTUT ORGANIZACJI I TECHNIKI DOWODZENIA
ZAKŁAD BADAŃ OPERACYJNYCH

20

płk dr Jerzy SKIBIŃSKI

MODEL ODCHYLEŃ W PRZESTRZENI ROZRZUTU

WARSZAWA LIPIEC 1965

Druk. ASG-O-XV-2736

AKADEMIA SZTABU GENERALNEGO
im. gen. broni K. Świerczewskiego

INSTYTUT ORGANIZACJI I TECHNIKI DOWODZENIA
ZAKŁAD BADAŃ OPERACYJNYCH

20

płk dr Jerzy SKIBIŃSKI

MODEL ODCHYLEŃ W PRZESTRZENI ROZRZUTU

WARSZAWA LIPIEC 1965

Druk. ASG-O-XV-2736

A K A D E M I A   S Z T A B U   G E N E R A L N E G O
im. generała broni Karola Swierczewskiego

INSTYTUT ORGANIZACJI I TECHNIKI DOWODZENIA
Zakład Badań Operacyjnych

Płk. dr Jerzy Skibiński

MODEL ODCHYLEN W PRZESTRZENI ROZRZUTU

REMBERTOW LIPIEC 1 9 6 5

SPIS TRESCI

1. WSTĘP.

Przedmiotem rozważań są współzależności, występujące między elementami statystycznymi, składające się na strukturę losowego odchylenia (czasem nazywanego błędem) punktu osiągniętego (a posteriori) od planowanego (apriori) w układzie kartezjańskim. Wynik analizy doprowadza do sformułowania modelu pozwalającego wyznaczyć parametry odchylenia oraz jego wielkość. Praktyczne aspekty modelu sprowadzają się do konfrontowania wyników uzyskiwanych w procesie realizacji planów takich zamierzeń, których sprawdzanie może mieć miejsce tylko na drodze eksperymentu "analityczno-matematycznego", tj. bez wydatkowania rzeczywistych, niezbędnych sił i środków oraz bez uruchamiania procesu, którego realne skutki były by dla otoczenia zbyt szkodliwe lub kosztowne.

Przykładów tego rodzaju procesów dostarczają sytuacje bojowe (operacyjne), występujące w dynamice działań wojsk, m.in. w postaci różnicy między skutkami planowanego i "faktycznego" użycia wszelkich środków rażenia celów naziemnych przy użyciu artylerii i broni rakietowej. Model oceny odchylenia losowego ma tym większe znaczenie im poważniejszy wpływ wywierają oczekiwane skutki planowanych uderzeń na przebieg działania wojsk i osiągnięcie zamierzonego celu.

2. ZAŁOŻENIA PODSTAWOWE

Rozróżniamy dwa rodzaje punktów trafienia celu :

O - punkt planowany,

Z - punkt "osiągnięty" przez dany środek rażenia.

2.2. Położenie p u n k t u p l a n o w a n e g o (O) w przestrzeni jedno -, dwu- lub trój - wymiarowej, ustalonego a priori określa równocześnie początek układu prostokątnego osi współrzędnych.

3.3. Położenie p u n k t u "o s i ą g n i ę t e g o" (Z) ustala się a posteriori dla odpowiedniej przestrzeni (2.2.) w układzie prostokątnym względem punktu planowanego (O). W ten sposób położenie punktu "osiągniętego" (Z) określi n współrzędnych prostokątnych. Przyjmujemy, że każda współrzędna jest zmienną losową niezależną, posiadającą rozkład Gaussa, wartość oczekiwaną równą zeru oraz wariancję σ^2.

3.4. Odchylenie punktu Z od punktu O, nazywane dalej o d c h y l e n i e m b i e g u n o w y m, określa wektor (O;Z), którego współrzędne prostokątne $(z_1, z_2, \ldots, z_n)$ rzutów $(O,Z_1; O,Z_2; \ldots; O,Z_n)$ są zmiennymi losowymi niezależnymi o rozkładzie normalnym i wariancji względem punktu O równej σ^2.

3.5. Uwzględniając założenia 3.3. i 3.4. ogólny model kształtowania się wartości odchylenia biegunowego dotyczy przestrzeni n-wymiarowej, a z uwagi na jednakową wariancję współrzędnych - opiera się na n-wymiarowym rozkładzie sferycznym Gaussa.

3.6. W przypadku, gdy odchylenia standartowe σ_i' współrzędnych odchylenia biegunowego posiadają różne wartości, występuje model elipsoidalny. Wyrażenie :

$$\sigma \doteq \left(\sigma_1', \sigma_2', \ldots, \sigma_n'\right)^{1/n}$$

stanowi wystarczającą aproksymację, jeśli tylko odchylenia standardowe są adekwantne, a ich wielkości niezbyt różnią się od siebie, przyczym największa z nich jest conajwyżej dwukrotnie większa od najmniejszej.

.7. Rozważana metoda określania punktu Z opiera się na znajomości trzech podstawowych charakterystyk :

1. współrzędne położenia punktu planowanego (O) ;

2. funkcja przebiegu trajektorii pocisku do punktu planowanego ;

3. parametrów przenoszenia pocisku (rodzaju sprzętu ogniowego) ;

.8. Model zagadnienia rozpatruje się w oparciu o układ współrzędnych prostokątnych z początkiem układu w punkcie O .

W przypadkach rozpatrywania modelu w przestrzeniach jedno-dwu - i trójwymiarowych średnie odchylenie biegunowe będzie odpowiednio: odchyleniem liniowo-probabilistycznym, nieliniowo - probabilistycznym oraz przestrzennie probabilistycznym. W celu przekształcenia średniego odchylenia biegunowego w odchylenie standardowe wprowadza się odpowiedni czynnik. Każdą ze współrzędnych, występującą w przestrzeni n-wymiarowej, wybiera się z tabeli liczb losowych Gaussa odpowiednio do odchylenia standardowego.

3. ROZKŁAD ODCHYLENIA BIEGUNOWEGO.

Niech $N(Z;\mu,\sigma^2)$ oznacza, że zmienna losowa Z posiada rozkład normalny, wartość oczekiwaną μ oraz wariancję σ^2 . Funkcja gęstości rozkładu zmiennej losowej Z posiada postać :

$$h(z) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(z-\mu)^2}{2\sigma^2}} \quad . \quad . \quad (1)$$

Niech:

$$k(z) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{z^2}{2}} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (2)$$

$$(-\infty < z < \infty)$$

będzie funkcją gęstości typowej zmiennej losowej Z o rozkładzie normalnym. Oznaczając przez: $\chi^2(Z;n)$, że zmienna losowa Z posiada rozkład "chi-kwadrat" o n stopniach swobody, funkcja gęstości od Z przyjmie postać:

$$q_n(z) = \frac{1}{\Gamma(\frac{n}{2}) \cdot 2^{n/2}} z^{\frac{n}{2}-1} \cdot e^{-\frac{z}{2}} \quad . \quad (3)$$

$$(z \geq 0)$$

Jeśli, zgodnie z założeniem 3.3., przyjmiemy:

$$K(Z_i; 0, \sigma^2), \quad (i = 1,2,...,n)$$

to po podzieleniu przez wielkość odchylenia standardowego (σ), otrzymamy:

$$K(\frac{Z_i}{\sigma}; 0, 1), \quad (i = 1,2,...,n)$$

Ponieważ kwadrat typowej zmiennej losowej o rozkładzie normalnym posiada rozkład "chi-kwadrat" z 1 stopniem swobody, zatem:

$$\chi^2(\frac{Z_i^2}{\sigma^2}; 1), \quad (i = 1,2,...,n) \quad . \quad . \quad (4)$$

A więc suma n niezależnych zmiennych losowych o rozkładzie "chi-kwadrat" z 1 stopniem swobody będzie posiadała rozkład "chi-kwadrat" z n stopniami swobody, czyli:

$$\chi^2\left(\frac{1}{\sigma^2}\sum_{i=1}^{n} z_i^2\,;\,n\right), \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (5)$$

Jeżeli przez:

$$S_n^2 = \sum_{i=1}^{n} z_i^2$$

oznaczymy n wymiarową zmienną losową odchylenia biegunowego, to zgodnie z określeniem (4) i (5) można napisać:

$$\chi^2\left(\frac{S_n^2}{\sigma^2}\,;\,n\right)$$

A zatem, zgodnie z (3), funkcja gęstości S_n^2/σ^2 będzie:

$$q_n\left(\frac{s^2}{2}\right) = \frac{1}{\Gamma\left(\frac{n}{2}\right)\cdot 2^{n/2}}\left(\frac{s^2}{\sigma^2}\right)^{\frac{n}{2}-1} e^{-\frac{s^2}{2\sigma^2}} \quad . \quad . \quad (6)$$

W wyniku przekształceń, funkcja gęstości zmiennej losowej S_n otrzyma postać:

$$h_n(s) = \left|\frac{d}{ds}\,\frac{s^2}{\sigma^2}\right| g_n\left(\frac{s^2}{\sigma^2}\right) =$$

$$= \frac{\frac{2s}{\sigma^2}}{\Gamma\left(\frac{n}{2}\right)\cdot 2^{n/2}}\cdot\left(\frac{s^2}{\sigma^2}\right)^{\frac{n}{2}-1} e^{-\frac{s^2}{2\sigma^2}} =$$

$$= \frac{1}{\Gamma\left(\frac{n}{2}\right)\cdot 2^{n/2-1}}\cdot\frac{s^{n-1}}{\sigma^n}\, e^{-\frac{s^2}{2\sigma^2}} \quad . \quad . \quad . \quad (7)$$

Wprowadzając wielkość stałą:

$$a_n = \frac{1}{\Gamma\left(\frac{n}{2}\right) 2^{n/2-1}} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (8)$$

funkcja gęstości (7) przyjmie postać:

$$h_n(s) = \frac{a_n \cdot s^{n-1}}{\sigma^n} \exp\left(- \frac{s^2}{2\sigma^2}\right) . \quad . \quad . \quad . \qquad (9)$$

Ponieważ:

$$\Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = \pi^{1/2}$$

oraz

$$\Gamma(u+1) = u\Gamma(u) \quad \text{przy } u > 0,$$

zatem funkcja gęstości (9) dla poszczególnych $n = 1, 2$ i 3, przyjmie postać:

$$h_1(s) = \frac{1}{\Gamma(\frac{1}{2}) \cdot 2^{1/2}} \cdot \frac{1}{\sigma} \exp - \frac{s^2}{2\sigma^2} =$$

$$= \sqrt{\frac{2}{\pi}} \left(\frac{1}{\sigma}\right) \exp - \frac{s^2}{2\sigma^2}, \quad . \quad . \quad . \qquad (10a)$$

$$h_2(s) = \frac{1}{\Gamma(1)} \cdot \frac{s}{\sigma^2} \exp\left(- \frac{s^2}{2\sigma^2}\right) =$$

$$= \frac{s}{\sigma^2} \exp\left(- \frac{s^2}{2\sigma^2}\right);^{x/} \quad . \quad . \quad . \qquad (10b)$$

$$h_3(s) = \frac{}{\Gamma(\frac{3}{2}) \cdot 2^{1/2}} \cdot \frac{s^2}{\sigma^2} \exp\left(- \frac{s^2}{2\sigma^2}\right) =$$

$$= \sqrt{\frac{2}{\pi}} \left(\frac{s^2}{\sigma^2}\right) \exp\left(- \frac{s^2}{2\sigma^2}\right) . \quad . \qquad (10c)$$

Z kolei wprowadzimy pojęcie rozkładu łącznego zmiennej losowej S_n, a mianowicie:

$$H_n(s) = P(S_n \leq s) = \int_0^s h_n(w)\, dw =$$

$$= \int_0^s \frac{a_n\, w^{n-1}}{\sigma^n} \exp\left(- \frac{w^2}{2\sigma^2}\right) dw \quad . \quad . \quad . \qquad (11)$$

==================

x/ Funkcję gęstości $h_2(s)$ nazywa się czasem rozkładem Rayleigh'a lub funkcją rozkładu normalnego kołowego.

Zakładając:

$$u = \frac{w^2}{2\sigma^2}$$

otrzymamy:

$$H_n(s) = 2^{n/2} a_n \int_0^{\frac{s^2}{2\sigma^2}} u^{\frac{n-2}{2}} e^{-u} du =$$

$$= \frac{2}{\Gamma(\frac{n}{2})} \int_0^{\frac{s^2}{2\sigma^2}} u^{\frac{n}{2}-1} e^{-u} du =$$

$$= \frac{2\Gamma_{\frac{s^2}{2\sigma^2}}(\frac{n}{2})}{\Gamma(\frac{n}{2})} , \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (12)$$

przyczym:

$$\Gamma_u(r) = \int_0^u w^{r-1} e^{-w} dw . \quad . \quad . \quad . \quad (13)$$

jest niezupełną funkcją gamma.

Stąd, otrzymamy rozkład łączny odchylenia biegunowego:

$$H_n(s) = 2 L\left(\frac{s^2}{2\sigma^2} , \frac{n}{2} \right)$$

$$(s \geq o)$$

gdzie:

$$L(u,r) = \frac{\Gamma_u(r)}{\Gamma(r)}$$

wyraża stosunek niezupełnych funkcji gamma.

W szczególności, dla n = 1,2,3 otrzymamy:

$$H_1(s) = 2L\left(\frac{s^2}{2\sigma^2} , \frac{1}{2} \right) ; \quad . \quad . \quad . \quad (15)$$

$$H_2(s) = 2L\left(\frac{s^2}{2\sigma^2} , 1 \right) ; \quad . \quad . \quad . \quad (16)$$

$$H_3(s) = 2L\left(\frac{s^2}{2\sigma^2}, \frac{3}{2}\right) \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (17)$$

Z kolei wprowadzimy wyrażenie na rozkład łączny funkcji zmiehhrj losowej i jej funkcji gęstości. Pozwoli to na łatwiejsze zestawienie odpowiednich tabel i graficzne przedstawienie ich przebiegu.

W przypadku gdy n=1, otrzymamy:

$$H_1(s) = \int_0^s h_1(w)\, dw = \int_0^s \sqrt{\frac{2}{\pi}} \left(\frac{1}{\sigma}\right) \exp\left(-\frac{w^2}{2\sigma^2}\right) dw.$$

Podstawiając wyrażenie:

$$u = \frac{w}{\ }$$

otrzymamy:

$$H_1(s) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^{s/\sigma} \exp\left(-\frac{u^2}{2}\right) du =$$

$$= \sqrt{2\pi}\sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^{s/\sigma} \frac{1-}{\sqrt{2\pi}} \exp\left(-\frac{u^2}{2}\right) du.$$

Zatem, rozkład łączny funkcji od S_1 wyniesie:

$$H_1(s) = 2\, I\left(\frac{s}{\sigma}\right) \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (18)$$

gdzie:

$$I(z) = \int_0^z k(u)\, du.$$

Stąd, funkcja gęsto^s^ci prawdopodobieństwa zmiennej S_1 będzie:

$$h_1(s) = \frac{2}{\sigma}\, k\left(\frac{s}{\sigma}\right) \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (19)$$

W przypadku gdy n=2, otrzymamy:

$$H_2(s) = \int_0^s h_2\,(w)\, dw =$$

$$= \int_0^s \left(\frac{w}{\sigma^2}\right) \exp\left(-\frac{w^2}{2\sigma^2}\right) dw.$$

Ppdstawiając wyrażenie:

$$u = \frac{w^2}{2\sigma^2}$$

otrzymamy:

$$H_2(s) = \int_0^{\frac{s^2}{2\sigma^2}} e^{-u}\, du = -e^{-u}\Big|_0^{\frac{s^2}{2\sigma^2}} = 1 - \exp - \frac{s^2}{2\sigma^2}$$

$$. \quad . \quad . \quad . \quad (20)$$

Zatem, rozkład łączny funkcji od S_2 wyniesie:

$$H_2(s) = 1 - \frac{\sigma^2 h_2(s)}{s} \quad . \quad , \quad . \quad . \quad . \quad (21)$$

Wyrażenie (21) można też przedstawić w postaci:

$$H_2(s) = 1 - \sqrt{2\pi}\; k\left(\frac{s}{\sigma}\right) \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (22)$$

stąd funkcja gęstości prawdopodobieństw zmiennej S_2 będzie:

$$h_2(s) = -\frac{\sqrt{2\pi}}{\sigma}\, k^{(1)}\left(\frac{s}{\sigma}\right) . \quad . \quad . \quad (23)$$

gdzie $k^{(1)}$ oznacza pierwszą pochodną od $k(\;)$.

W przypadku gdy $n=3$, otrzymamy:

$$H_3(s) = \int_0^s h_3(w)\, dw =$$

$$= \int_0^s \frac{2}{\pi} \left(\frac{w^2}{\sigma^-}\right) \exp\left(-\frac{w^2}{2\sigma^2}\right) dw.$$

Podstawiając:

$$u = \frac{w}{\sigma}$$

otrzymamy:

$$H_3(s) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^{s/\sigma} u^2 \exp\left(-\frac{u^2}{2}\right) du.$$

Całkując przez części:

$$H_3(s) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} - u \cdot \exp\left(-\frac{u^2}{2}\right)\Bigg|_0^{\frac{s}{\sigma}} - \int_0^{\frac{s}{\sigma}} \exp\left(-\frac{u^2}{2}\right) d(-u) =$$

$$= \frac{2}{\pi}\left[\left(-\frac{s}{\sigma}\right) \exp\left(-\frac{s^2}{2\sigma^2}\right) + \sqrt{2\pi} \int_0^{\frac{s}{\sigma}} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp\left(-\frac{u^2}{2}\right) du\right] =$$

$$= \sqrt{\frac{2}{\pi}} \sqrt{2\pi} \int_0^{\frac{s}{\sigma}} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp\left(-\frac{u^2}{2}\right) du - \left(\frac{s\sqrt{\frac{2}{\pi}}}{\sigma}\right) \exp\left(-\frac{s^2}{2\sigma^2}\right) .$$

Zatem, rozkład łączny funkcji od S_3 wyniesie:

$$H_3(s) = 2I\,\frac{s}{\sigma} - \frac{\sigma^2 h_3(s)}{s} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (24)$$

Wyrażenie (24) można przedstawić w postaci:

$$H_3(s) = 2I\left(\frac{s}{\sigma}\right) + \sqrt{2\pi}\sqrt{\frac{2}{\pi}}\left(-\frac{s}{\sqrt{2\pi}\cdot\sigma}\right) \exp\left(-\frac{s^2}{2\sigma^2}\right) =$$

$$= 2\left[I\left(\frac{s}{\sigma}\right) - Q_1\left(\frac{s}{\sigma}\right) k\left(\frac{s}{\sigma}\right)\right] ,$$

gdzie $Q_m(u)$ jest wielomianem Hermite'a[x/] m-tego stopnia zdefiniowanym następująco:

$$(-1)^m Q_m(u)\, k(u) = k^{(m)}(u) = \frac{d^m k(u)}{du^m} ,$$

====================

x/ Ściślej: Czebyszewa - Hermite'a ; ogólniejsza postać tego wielomianu :

$$Q_m(u) = (-1)^m e^{u^2} \frac{d^m}{du^m}\left(e^{-u^2}\right) , \qquad m = 0,1,2,\ldots$$

Wielomian ten spełnia równania różniczkowe Cz.-H. : $y^{(2)} - 2uy^{(1)} + 2my = 0$; zachodzą dla nich następujące tożsamości :

$$Q_m'(u) = 2m\, Q_{m-1}(u) \quad ;$$

$$Q_{m+1}(u) = 2u\, Q_m(u) - 2m\, Q_{m-1}(u) \quad .$$

czyli :

$$k^{(1)}(u) = -Q_1(u)\,k(u) .$$

Zatem, rozkład łączny funkcji od S_3 wyniesie :

$$H_3(s) = 2\left[I(\tfrac{s}{\sigma}) + k^{(1)}(\tfrac{s}{\sigma})\right] \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (25)$$

stąd funkcja gęstości prawdopodobieństw zmiennej S_3 będzie:

$$h_3(s) = (\tfrac{2}{\sigma})\left[k(\tfrac{s}{\sigma}) + k^{(2)}(\tfrac{s}{\sigma})\right]. \quad . \quad . \quad . \quad (26)$$

4. WARTOSC OCZEKIWANA I ODCHYLENIE STANDARDOWE ODCHYLENIA BIEGUNOWEGO .

Z kolei wyznaczymy wartość oczekiwaną μ_n i odchylenie standardowe σ_n zmiennej losowej S_n .

Wartość oczekiwana, jako pierwszy moment zwykły, wynosi :

$$E(S_n) = \int_0^\infty s\,h_n(s)\,ds = \int_0^\infty s\,a_n(\frac{s^{h-1}}{\sigma^n})\exp(-\frac{s^2}{2\sigma^2})ds =$$

$$= a_n \int_0^\infty \frac{s^n}{\sigma^n}\exp(-\frac{s^2}{2\sigma^2})\,ds .$$

Podstawiając wyrażenie :

$$u = \frac{s}{2\sigma}$$

otrzymamy :

$$E(S_n) = 2^{\frac{n}{2}+\frac{1}{2}}\sigma a_n \int_0^\infty u^n \exp(-u^2)\,du =$$

$$= \frac{2^{\frac{n}{2}+\frac{1}{2}}\cdot\sigma}{2\Gamma(\frac{n}{2})\cdot 2^{\frac{n}{2}-1}}\cdot\Gamma(\frac{n+1}{2}) =$$

$$2^{\frac{1}{2}}\cdot\frac{\Gamma(\frac{n+1}{2})}{\Gamma(\frac{n}{2})} \quad .$$

Stąd, wartość oczekiwana zmiennej losowej S_n wyniesie :

$$\mu_n = e_n \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (27)$$

przyczym :

$$e_n = 2^{1/2}\ \Gamma(\tfrac{n+1}{2})\ \Gamma(\tfrac{n}{2}) \quad . \quad . \quad . \quad (28)$$

W szczególności dla $n = 1,2,3,$ otrzymamy :

$$\mu_1 = 2^{1/2} \cdot \frac{\Gamma(1)}{(\frac{1}{2})} \sigma = \sqrt{\frac{2}{\pi}}\sigma \doteq 0,7979 \quad ; \ . \ (29)$$

$$_2 = 2^{1/2} \cdot \frac{\Gamma(\frac{3}{2})}{\Gamma(1)} \sigma = \sqrt{\frac{\pi}{2}}\sigma \doteq 1,2533 \quad ; \ . \ (30)$$

$$_3 = 2^{1/2} \cdot \frac{\Gamma(2)}{\Gamma(\frac{3}{2})} \sigma = 2\sqrt{\frac{2}{\pi}}\sigma \doteq 1,5958 \ . \ ; \ . \ (31)$$

W a r i a n c j a , jako drugi moment centralny zmiennej S_n, wynosi :

$$E(S_n^2) = \int_0^\infty s^2 h_n(s)\, ds = \int_0^\infty s^2 a_n \left(\frac{s^{n-1}}{\sigma^n}\right) \exp\left(-\frac{s^2}{2\sigma^2}\right) ds =$$

$$= a_n \int_0^\infty \frac{s^{n+1}}{\sigma^n} \exp\left(-\frac{s^2}{2\sigma^2}\right) ds .$$

Podstawiając wyrażenie :

$$n = \frac{s^2}{2\sigma^2}$$

otrzymamy :

$$E(S_n^2) = 2^{n/2}\sigma^2 a_n \int_0^\infty u^{n/2} e^{-u}\, du = 2^{n/2}\sigma^2 a_n \Gamma(\tfrac{n}{2}+1) =$$

$$= \frac{\sigma^2\, 2^{n/2}}{\Gamma(\frac{n}{2}) \cdot 2^{n/2-1}} \cdot \Gamma(\tfrac{n}{2}+1) =$$

$$= \frac{1}{\Gamma(\frac{n}{2})\ 2^{-1}} (\tfrac{n}{2})\ \Gamma(\tfrac{n}{2})\ \sigma^2 = n\sigma^2 \quad . \ . \ . \quad (32)$$

Warjancja ^2_n zmiennej losowej S_n będzie :

$$V(S_n) = E(S_n^2) - E^2(S_n) = n\sigma^2 - (e_n\sigma)^2 = (n-e_n^2)\sigma^2 ,$$

a oznaczając stosunek σ_n^2 do σ^2 przez ψ, otrzymamy :

$$\sigma_n^2 = \psi_n \sigma^2 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (33)$$

przyczym :

$$\psi_n = n - 2\left\{\frac{\Gamma(\frac{n+1}{2})}{\Gamma(\frac{n}{2})}\right\}^2 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (34)$$

W szczególności dla $n=1,2,3$ otrzymamy :

$$\sigma_1^2 = \left\{1 - 2\left[\frac{\Gamma(1)}{\Gamma(\frac{1}{2})}\right]^2\right\}\sigma^2 = (1 - \frac{2}{\pi})\sigma^2 \doteq 0,3634\sigma^2 ; \quad . \quad . \quad . (35)$$

$$\sigma_2^2 = \left\{2 - 2\left[\frac{\Gamma(\frac{3}{2})}{(1)}\right]^2\right\}\sigma^2 = (2 - \frac{\pi}{2})\sigma^2 \doteq 0,4292\sigma^2 ; \quad .(36)$$

$$\sigma_3^2 = \left\{3 - 2\left[\frac{\Gamma(2)}{\Gamma(\frac{3}{2})}\right]^2\right\}\sigma^2 = (3 - \frac{8}{\pi})\sigma^2 \doteq 0,4535\sigma^2 \quad ...(37)$$

Stąd, odchylenie standardowe zmiennej losowej S_n wyniesie:

$$\sigma_n = d_n \sigma \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (38)$$

gdzie :

$$d_n = \psi_n^{1/2} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (39)$$

W szczególności dla $n = 1,2,3,$ otrzymamy :

$$\sigma_1 = (1 - \frac{2}{\pi})^{1/2} \doteq 0,6028\sigma ; \quad . \quad . \quad . (40)$$

$$\sigma_2 = (2 - \frac{\pi}{2})^{1/2} \doteq 0,6551\sigma ; \quad . \quad . \quad . (41)$$

$$\sigma_3 = (3 - \frac{8}{\pi})^{1/2} \doteq 0,6734\sigma \quad . \quad . \quad . \quad . (42)$$

5. MEDIANA ODCHYLENIA BIEGUNOWEGO

Medianę λ_n zmiennej losowej S_n określimy następująco:

$$P(S_n \leqslant \lambda_n) = H_n(\lambda_n) = \frac{1}{2} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (43)$$

Powyższe równanie rozwiążemy dla $n = 1,2,3$.

R o z p a t r u j ą c p r z y p a d e k $n = 1$ skorzystamy z równania (18), wyznaczającego rozkład łączny funkcji od S_1, czyli :

$$H_1(s) = 2\, I\left(\frac{s}{\sigma}\right) .$$

Stąd :

$$H_1(\lambda_1) = 2\, I\left(\frac{\lambda_1}{\sigma}\right) = \frac{1}{2} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (44)$$

oraz :

$$I\left(\frac{\lambda_1}{\sigma}\right) = \frac{1}{4} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (45)$$

Z tabeli standardowej funkcji rozkładu Gaussa wybierzemy wartość zbliżoną, czyli :

$$\alpha_1 \doteq \frac{\lambda_1}{\sigma} \doteq 0,6745 , \quad . \quad . \quad . \quad (46)$$

a stąd, mediana zmiennej losowej S_1 wyniesie :

$$\lambda_1 = \alpha_1 \cdot \sigma = 0,6745\,\sigma \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (47)$$

R o z p a t r u j ą c p r z y p a d e k $n = 2$ skorzystamy z równania (22), wyrażającego rozkład łączny funkcji od S_2, czyli :

$$H_2(s) = 1 - \sqrt{2\pi}\, k\left(\frac{s}{\sigma}\right) .$$

Stąd :

$$H_2(\lambda_2) = 1 - \sqrt{2\pi}\, k\left(\frac{\lambda_2}{\sigma}\right) = \frac{1}{2} ,$$

a więc :

$$k\left(\frac{\lambda_2}{\sigma}\right) = \frac{1}{2\sqrt{2\pi}} \doteq 0,19947 .$$

Analogicznie, z tabeli standardowej funkcji gęstości rozkładu Gaussa wybieramy wartość zbliżoną, czyli :

$$\alpha_2 \doteq \frac{\lambda_2}{\sigma} \doteq 1,774 \quad . \quad . \quad . \quad (48)$$

a stąd mediana zmiennej losowej S_2 wyniesie :

$$\lambda_2 = \alpha_2 \cdot \sigma = 1,1774\sigma . \quad . \quad . \quad . \quad (49)$$

Gdy zastosować (20) otrzyma się wyrażenie ścisłe w postaci :

$$\lambda_2 = \sqrt{2 \ln 2}\,\sigma . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (50)$$

Wynika stąd, że w przypadku λ_2 funkcja rozkładu łącznego zmiennej losowej S_2 wyniesie :

$$P(S_2 \leqslant s) = H_2(s) = 1 - 2\exp\left(-\frac{s^2}{\lambda_2^2}\right) . \quad . \quad . \quad (51)$$

R o z p a t r u j ą c p r z y p a d e k $n = 3$ skorzystamy z równania (25), wyznaczającego rozkład łączny funkcji od S_3, czyli :

$$H_3(s) = 2\left[I\left(\frac{s}{\sigma}\right) + k^{(1)}\left(\frac{s}{\sigma}\right)\right] .$$

Stąd :

$$H_3(\lambda_3) = 2\left[I\left(\frac{\lambda_3}{\sigma}\right) + k^{(1)}\left(\frac{\lambda_3}{\sigma}\right)\right] = \frac{1}{2}$$

przyczym :

$$I\left(\frac{\lambda_3}{\sigma}\right) + k^{(1)}\left(\frac{\lambda_3}{\sigma}\right) = \frac{1}{4}$$

Z tabeli standardowej funkcji gęstości rozkładu Gaussa wybieramy wartość zbliżoną, czyli :

$$\alpha_3 \doteq \frac{\lambda_3}{\sigma} \doteq 1,5382 \; , \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (52)$$

a stąd, mediana zmiennej losowej S_3 wyniesie :

$$\lambda_3 = \alpha_3 \cdot \sigma = 1,5382\,\sigma . \quad . \quad . \quad . \quad (53)$$

6. STANDARDOWE ODCHYLENIE BIEGUNOWE

Można przyjąć, że w wielu przypadkach jest wygodniej posługiwać się stosunkiem odchylenia biegunowego do odchylenia standardowego Gaussa, niż samym odchyleniem biegunowym. Zastosujemy to podejście.

Niech zmienna losowa:

$$R_n = \frac{S_n}{\sigma}$$

oznacza standardowe odchylenie biegunowe.

Funkcja rozkładu łącznego zmiennej losowej R_n przyjmie postać:

$$G_n(r) = P\left(R_n \leqslant r \right) = P\left(\frac{S_n}{\sigma} \leqslant r \right) =$$

$$= P\left(S_n \leqslant \sigma r \right) = H_n\left(\sigma r \right),$$

a w związku z równaniem (14):

$$G_n(r) = 2\, I\left(\frac{r^2}{2}, \frac{n}{2} \right), \quad (r \geqslant 0) \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (54)$$

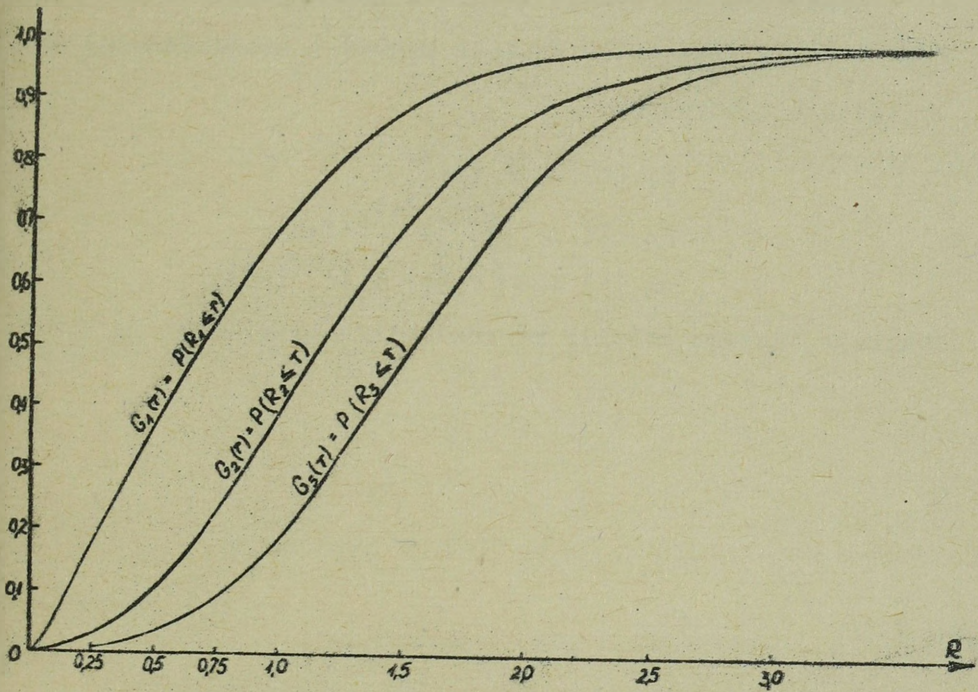
Korzystając z wzorów (18), (22) i (25) możemy określić odpowiednio dla n=1,2,3:

$$G_1(r) = 2\, I\, (r);$$

$$G_2(r) = 1 - \sqrt{2\pi} \cdot k(r) +$$

$$G_3(r) = 2\left[I\, (r) + k^{(1)}(r) \right].$$

Powyższe funkcje rozkładów łącznych przdstawiono graficznie na rys. 1.



Rys. 1 Funkcje rozkładów łącznych standardowego odchylenia biegunowego

Do rys. 1:

Wartość oczekiwana.	Odchylenie standardowe
$E(R_1) = 0,7979$,	$D(R_1) = 0,6028$,
$E(R_2) = 1,2533$,	$D(R_2) = 0,6551$,
$E(R_3) = 1,5958$,	$D(R_3) = 0,6734$.

Funkcja gęstości zmiennej losowej R_n wyniesie:

$$g_n(r) = \left|\frac{ds}{dr}\right| h_n(s) = \left|\frac{d(\sigma s)}{ds}\right| h_n(\sigma s) =$$

$$= \sigma h_n(\sigma s),$$

a wobec tego, uwzględniając wyrażenie (9), otrzymamy:

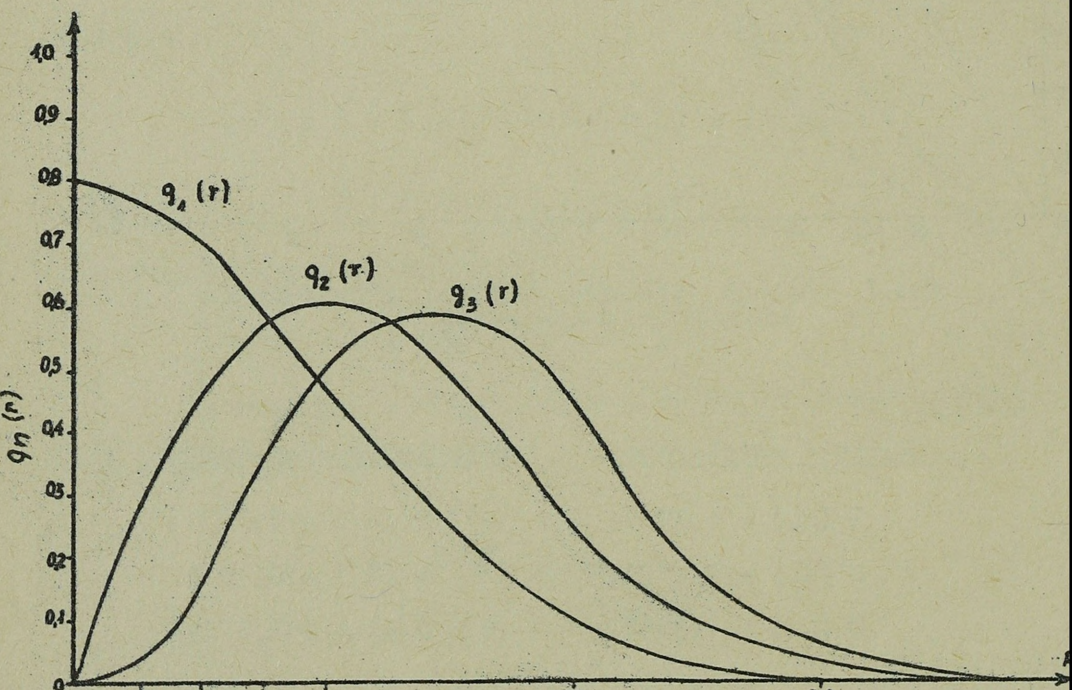
$$g_n(r) = a_n r^{n-1} \exp\left(-\frac{s^2}{2}\right); \quad . \quad . \quad . \quad . \qquad (55)$$

$$(r \geq 0)$$

Wprowadzając funkcje gęstości prawdopodobieństw (19), (23) i (26), wyznaczymy funkcje gęstości standardowego odchylenia biegunowego:

$$g_1(r) = 2k(r),$$
$$g_2(r) = -\sqrt{2\pi}\,k^{(1)}(r),$$
$$g_3(r) = 2\left[k(r) + k^{(2)}(r)\right].$$

Powyższe funkcje zostały przedstawione graficznie na rys.2.



Rys. 2 Funkcje gęstości standardowego odchylenia biegunowego.

Do rys. 2:

Wartość oczekiwana.	Odchylenie standardowe
$E(R_1) = 0{,}7979$,	$D(R_1) = 0{,}6028$,

$E(R_2) = 1,2533$, $D(R_2) = 0,6551$,

$E(R_3) = 1,5958$, $D(R_3) = 0,673$

Z wyrażenia (27) wyznaczymy wartość oczekiwaną R_n :

$$E(R_n) = e_n \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \qquad (56)$$

Na podstawie (33) i (38) otrzymamy wariancję i odchylenie standardowe dla R_n :

$$V(R_n) = \psi_n \quad , \quad , \quad , \quad , \quad , \qquad (57)$$

$$D(R_n) = d_n \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \qquad (58)$$

Korzystając z (47), (49) i (51) wyznaczymy medianę dla R_n :

$$M(R_n) = \alpha_n \quad . \quad . \quad . \quad . \qquad (59)$$

Otrzymamy więc następujące stałe statystyczne :

n	$e_n = \frac{\mu_n}{\sigma}$	$\psi_n = \frac{\sigma_n^2}{\sigma^2}$
1	0,7979	0,3624
2	1,2533	0,4292
3	1,5958	0,4535

n	$d_n = \frac{\sigma_n}{\sigma}$	$\alpha_n = \frac{\lambda_n}{\sigma}$
1	0,6028	0,6745
2	0,6551	1,1774
3	0,6734	1,5382

Tablica 1. Czynniki statystyczne stałe.

Zestawienie czynników przekształconych, uzależnionych od stałych statystycznych :

$=0{,}7979\,\sigma=1{,}1830\,\lambda_1$	$\mu_2=1{,}2533\,\sigma=1{,}0645\,\lambda_2$	$\mu_3=1{,}5958\,\sigma=1{,}0374\,\lambda_3$
$=0{,}6745\,\sigma=0{,}8453\,\mu_1$	$\lambda_2=1{,}1774\,\sigma=0{,}9394\,\mu_2=$ $=1{,}7456\,\lambda_1$	$\lambda_3=1{,}5382\,\sigma=0{,}9639\,\mu_3=$ $=2{,}2805\,\lambda_1$
$=1{,}4826\,\lambda_1=1{,}2533\,\mu_1$	$\sigma=0{,}8493\,\lambda_2=0{,}7979\,\mu_2$	$\sigma=0{,}6501\,\lambda_3=0{,}6257\,\mu_3$

Tablica 2. Czynniki statystyczne przekształcone.

7. ZASTOSOWANIE W PRAKTYCE CWICZEN SZTABOWYCH .

W świetle przeprowadzonych rozważań punkt 3.7. "Założeń podstawowych" znajdzie odbicie w postaci następujących charakterystyk :

1. położenie punktu planowanego (0) określą współrzędne początku układu współrzędnych prostokątnych w przestrzeni n - wymiarowej, tj. X_1, $X_2, \ldots, X_n$;
2. przebieg trajektorii pocisku do punktu planowanego (0) jest zorientowany wzdłuż jednej osi układu współrzędnych, np. X_1 ; w praktyce ćwiczeń na mapach położenie osi pokrywa się z odpowiednim układem współrzędnych tych map ;
3. każdy rodzaj środka przenoszenia pocisku charakteryzuje określona mediana.

Medianą odchylenia biegunowego jest promień ograniczający tę część przestrzeni n - wymiarowej w której dana broń uzyskuje prawdopodobieństwo trafienia równe 0,5 . Przyjmujemy, że odchylenie biegunowe posiada n - wymiarowy sferyczny rozkład Gaussa ze środkiem w punkcie planowanym (0), jako początku układu współrzędnych i skalowaniem na podstawie odchylenia standardowego σ .

Jak wynika z uprzednich rozważań zależność mediany λ_n od odchylenia standardowego σ wyznacza równanie :

$$\lambda_n = \alpha_n \cdot \sigma \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (60)$$

przyczym α_n jest wielkością stałą i znaną, wyrażającą stosunek λ_n / σ , oraz określoną przez równanie (59) . Ponieważ σ jest odchyleniem standardowym, dotyczącym rozkładu Gaussa w przestrzeni jednowymiarowej, stąd wyrażenie (60) stanowi rozwiązanie pozwalające przy pomocy krzywej Gaussa określić rozkład punktu Z wzdłuż każdej osi X_1 , $X_2, \ldots, X_n$.

Można więc zastosować następujący sposób postępowania. Z tabeli standardowych liczb losowych Gaussa (dla wartości oczekiwanej równej zeru i wariancji równej 1) wybieramy n liczb $z_1, z_2, \ldots, z_n$. Przy $\sigma = 1$ współrzędne $x_1, x_2, \ldots, x_n$ układu prostokątnego będą równe odpowiednio $z_1, z_2, \ldots, z_n$. Z reguły jednak, odchylenie standardowe σ rozkładu Gaussa w przestrzeni jednowymiarowej będzie wielkością stałą, określającą współrzędne punktu osiągniętego (Z) z równania :

$$x_i = \sigma z_i \qquad (i = 1,2,\ldots,n) \; . \; . \; . \; (61)$$

Biorąc pod uwagę zależności (47), (49) i (53), otrzymamy :

$$\lambda_n = \sigma \alpha_n \; ,$$

stąd :

$$\sigma = \frac{\lambda_n}{\alpha_n}$$

a wprowadzając do równania (61) :

$$x_i = \frac{\lambda_n z_i}{\alpha_n} \qquad (i = 1,\ldots,n) \; . \; . \; . \; (62)$$

wyznaczy współrzędne punktu osiągniętego, tj. $x_1, x_2, \ldots, x_n$

Przykład 1.

Dane jest położenie punktu planowanego (0) i ogólny kierunek trajektorii lotu pocisku ze wschodu na zachód. Prawdopodobne odchylenie kołowe (POK) wynosi 620 m. Zadanie rozwiązujemy w przestrzeni dwuwymiarowej (n=2).

Aby wyznaczyć statystycznie punkt osiągnięty (Z) posłużymy się równaniem (60) oraz tabelą 1 z której wybieramy $\alpha_{n=2}$, czyli :

$$\sigma = \frac{\lambda_2}{\alpha_2} = \frac{620}{1,1774} \simeq 527 \text{ metrów} .$$

Z tabeli standardowych liczb losowych Gaussa wybieramy dwie liczby :

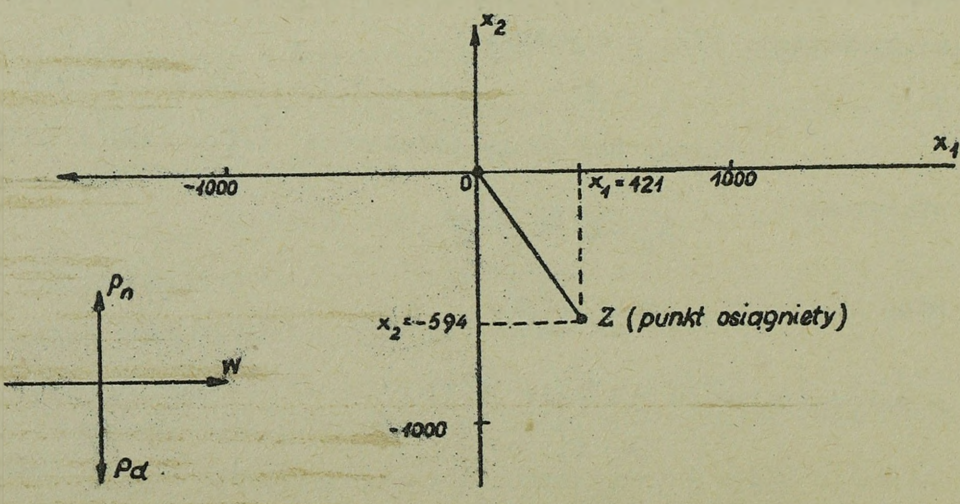
$$z_1 = 0,836 \quad ; \quad z_2 = - 1,128 .$$

Otrzymamy więc :

$$x_1 = \sigma z_1 = 527 \cdot 0,836 \simeq 421 \text{ m.}$$

$$x_2 = \sigma z_2 = 527 \cdot (-1,128) \simeq 594\text{m.}$$

Położenie punktu osiągniętego przedstawiono na rys. 3 .



Rys. 3 Odchylenie biegunowe przy n=2

W przypadku rozpatrywania zadania w którym położenie punktu osiągniętego należy określić w przestrzeni trójwymiarowej (n=3), np. wybuch powietrzny broni atomowej, sposób postępowania jest analogiczny ; w/g (50) i tabl 1 :

$$\sigma = \frac{\lambda_3}{\alpha_3} = \frac{\lambda_3}{1,5382} .$$

Następnie z tabeli standardowych liczb losowych Gaussa wybieramy 3 liczby: z_1, z_2, z_3, które przekształcamy odpowiednio w x_1, x_2, x_3 [stosując wyrażenie (52)]. Uzyskane wielkości wprowadzamy do trójwymiarowego układu współrzędnych z początkiem układu w punkcie planowanym (0) oraz osią X_1 zwróconą w kierunku strzału.

Przykład 2.

Kierunek trajektorii - ze wschodu na zachód. Prawdopodobne odchylenie kołowe (POK) wynosi 930 m ; n=3 .

1. $$= \frac{\lambda_3}{\alpha_3} = \frac{930}{1,5382} \simeq 611$$

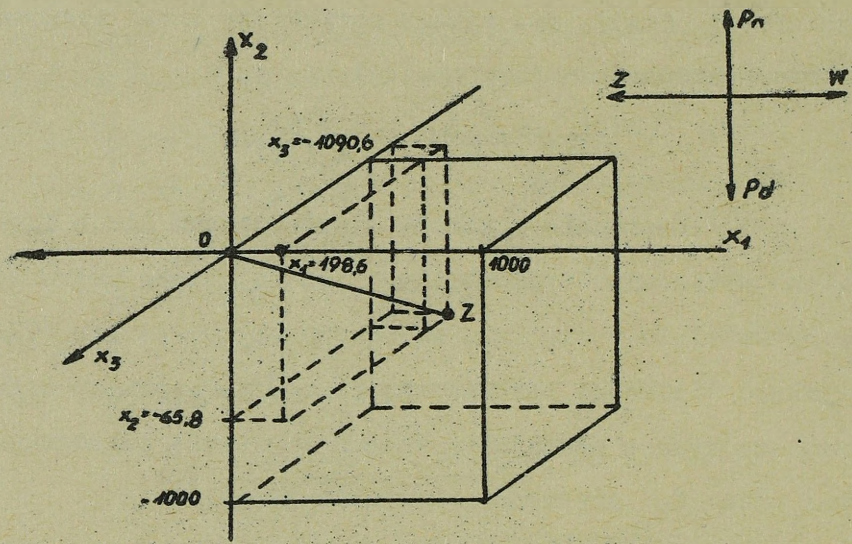
2. $z_1 = 0,325$, $z_2 = -1,075$, $z_3 = -0,786$.

3. $x_1 = 611 \cdot 0,325 = 198,6$ m.

$x_2 = 611 \cdot (-1,075) = -656,8$ m .

$x_3 = 611 \cdot (-1,785) = -1090,6$ m .

Położenie punktu osiągniętego Z przedstawiono na rysunku 4.

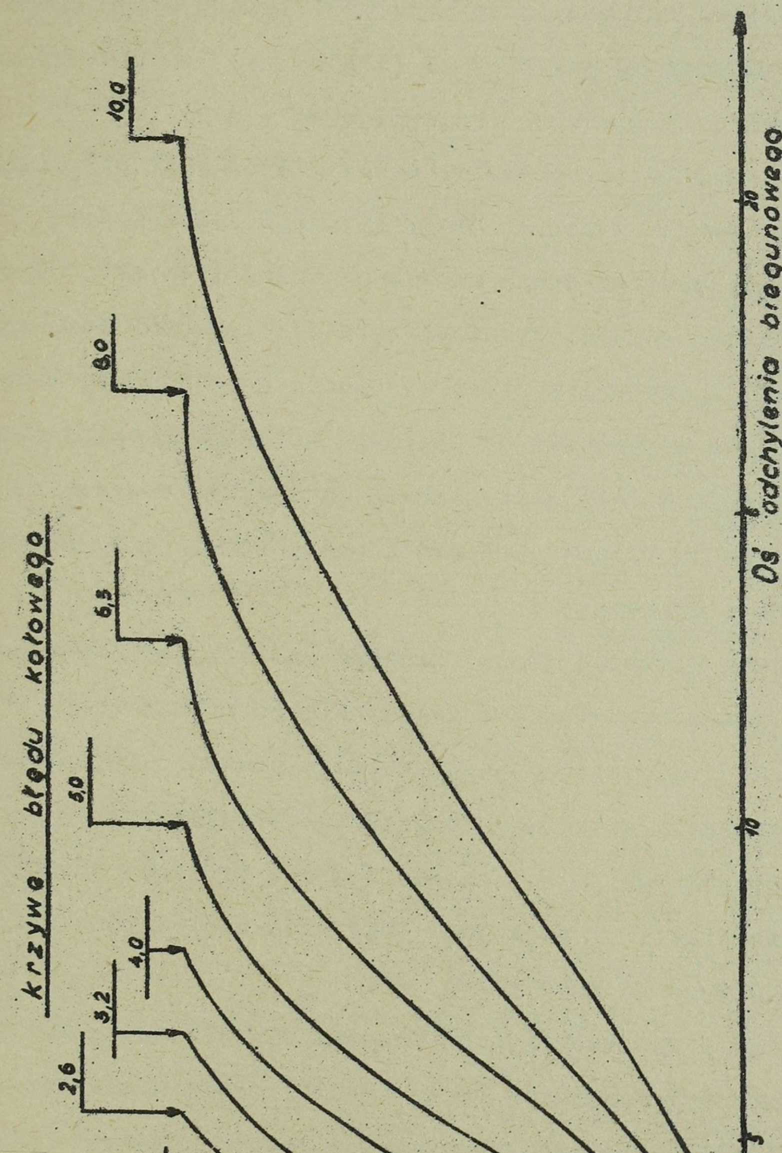


Rys.4 Odchylenie biegunowe przy n = 3

Przy praktycznej ocenie położenia punktu osiągniętego (np. przez kierownictwo ćwiczeń), posługiwanie się powyższą metodą rachunkową mogło by być nieco uciążliwe. Procedurę tę można znacznie uprościć, stosując odpowiedni aparat wyboru odchylenia biegunowego, w zależności od błędu kołowego, właściwego danemu rodzajowi (typowi) sprzętu i odległości strzelania. Poniżej przedstawiamy nomogram, pozwalający określać odchylenie biegunowe punktu osiągniętego (rys. 5) .

Sposób korzystania z powyższego nomogramu. Przed wyznaczeniem odpowiedniego punktu należy :

1. ustalić :
   - typ sprzętu (nosiciele pocisku) ;
   - kierunek strzelania i odległość do celu ;



Rys. 5 Mechanizm wyznaczania punktu osiągniętego

- rodzaj wybuchu (naziemny, powietrzny),a tym samym wymiarowość przestrzeni (linia: n=1 ; powierzchnia: n=2 ; przestrzeń trójwymiarowa : n=3) ;

2 . na podstawie odpowiednich tabel (instrukcji strzelania i tp) wybrać wielkość błędu kołowego lub mniejszą wartość spośród dwóch uchyleń : wgłąb i wszerz, odpowiadającą danemu typowi sprzętu i odległości do celu ;

3. należy sprawdzić w jakim położeniu znajduje się elipsa rozrzutu w stosunku do kierunku strzelania np. jeśli uchylenie wszerz jest większe od uchylenia wgłąb to dłuższa oś elipsy jest prostopadła do kierunku strzelania i odwrotnie ;

4. wybraną wielkość błędu kołowego lub uchylenia pomnożyć przez odpowiedni współczynnik (w granicach od 1 do 4), zależnie od postulowanego prawdopodobieństwa osiągnięcia celu; np. zamierzając osiągnąć cel z prawdopodobieństwem 0,8 , należy wybraną wielkość pomnożyć przez 3,2 ; w praktyce przyjmuje się wartość tego współczynnika jako równą 4 .

5. wybrać z wykresu (rys.5) krzywą, odpowiadającą wielkości obliczonej w punkcie 4 ; jeśli powyższa wielkość znajduje się w granicach między dwiema krzywymi należy zastosować interpolację (np. dla wielkości 2900 m - posłużyć się przestrzenią między krzywymi dla błędów: 2,6 i 3,2 ;

6. stosując odpowiedni mechanizm losowy (np. tabelę liczb losowych lub inny) określić, które liczby losowe (na osi pionowej) zostały wybrane ; ilość wybranych liczb

zależy od stopnia wymiarowości przestrzeni, tj. od n ;

7. przeprowadzić, z powyżej wybranych (losowo) punktów, odpowiednie równoległe do "osi odchylenia biegunowego" i odczytać na niej wielkości odchyleń ;

8. przy pomocy ustalonego mechanizmu przyporządkować każdemu odchyleniu odpowiednio znak "plus" lub "minus" .

9. wrysować ustalony punkt "0" w stosunku do punktu celowania.

Przykład .

Z instrukcji strzelania wiadomo, że dla danego typu sprzętu, strzelającego na rozpatrywaną odległość do obiektu naziemnego (celu), uchylenie wgłąb wynosi 460 m, a uchylenie wszerz - 720 m. określić odchylenie biegunowe punktu osiągniętego.

Ad 1 : ustalamy - punkt osiągnięty znajduje się na płaszczyźnie - n=2 ;

ad 2 : wybieramy do obliczeń wielkość mniejszą, tj. w danym przypadku uchylenie wgłąb, wynoszące 460 m ;

ad.3 : elipsa rozrzutu jest prostopadła do kierunku strzału;

ad 4 : wielkość błędu kołowego osiągnięcia celu z prawdopodobieństwem 0,9 wyniesie 460 • 9 = 4,140 metrów ;

ad 5 : wartości odchylenia biegunowego znajdują się na obszarze między krzywymi dla 4,0 i 5,0 ; ściślej - 6 1,4 części odcinku odciętej między obu krzywymi, licząc od krzywej dla 4,0 w prawo ;

ad.6 : z tabeli liczb losowych wybieramy dwie liczby (n=2) dwucyfrowe, określające punkty na osi pionowej rys. 5 ; np. 26 i 74 ;

ad 7 : wartości bezwzglę spółrzędnych odchyleń biegunowych, odpowiadające w/w punktom przy krzywej 4,0 , odczytywane na osi poziomej, wynoszą odpowiednio :

- na osi strzału, tj. dla liczby 26 - 340 metrów ;
- na osi prostopadłej do kierunku strzału, tj. dla liczby 74 - 520 metrów ;

ad 8 : ustalamy losowo znaki dla w/w wartości : np. odpowiednio "-" i "+" ;

ad 9 : współrzędne punktu osiągniętego Z wynoszą :

$$x_1 = -340 \text{ m} \quad ; \quad x_2 = 520 \text{ m} .$$

Jak można zauważyć, stosowanie powyższej metody w praktyce (ćwiczeń na mapach) wymaga znajomości błędu kołowego lub uchyleń wgłąb i wszerz. Dane te można z łatwością przedstawić w postaci prostego nomogramu w którym odpowiednie krzywe dla różnych rodzajów sprzętu będą wyznaczały zmiany uchyleń zależnie od odległości do celu. Dane te mają z reguły charakter tajny i stąd nie zostały zamieszczone .

O Z N A C Z E N I A

O – – punkt planowany ;

Z – punkt osiągnięty ;

n – wymiar przestrzeni położenia celu ;

z_i – i-ta współrzędna w układzie prostokątnym $i=1,2,3,\ldots,n$;

Z_i – i-ta współrzędna (losowa) ; wektor odchylenia ;

σ^2 – wariancja zmiennej losowej Z

σ_i' – odchylenie standardowe i-tej współrzędnej w przypadku modelu elipsoidolnego ;

$h_n(s)$ – funkcja gęstości odchylenia biegunowego S_n ; (9) ;

$k(z)$ – standardowa funkcja gęstości Gaussa ; (2) ;

$k^{(r)}(z)$ – r-ta pochodna funkcji $k(z)$;

$q_n(z)$ – funkcja gęstości "chi-kwadrat" o n stopniach swobody ; (3) ;

μ – wartość oczekiwana zmiennej losowej Z ;

μ_n – wartość oczekiwana zmiennej losowej S_n ; (27) ;

S_n – odchylenie biegunowe zmiennej losowej ;

σ_n^2 – wariancja zmiennej losowej S_n ; (33) ;

a_n – stała normalizacja funkcji $h_n(s)$; (8) ;

$D(\ )$ – odchylenie standardowe ;

$K(Z;\mu,\sigma^2)$ – zmienna losowa Z o rozkładzie Gaussa, wartości oczekiwanej μ i wariancji σ^2

$\Gamma(u)$ – funkcja gamma ;

$\Gamma_u(r)$ – niezupełna funkcja gamma ;

s – zmienna sztuczna ;

w – zmienna sztuczna ;

r – zmienna sztuczna ;

$u = \frac{w}{\sigma}$	- zmienna sztuczna ;
R_n	- standardowe odchylenie biegunowe zmiennej losowej ;
$H_n(s)$	- rozkład łączny odchylenia biegunowego ; (14)
e_n	- stosunek μ_n do σ ; (28) ;
$E(\ )$	- wartość oczekiwama ;
d_n	- stosunek σ_n do σ ; (33) ; (39) ;
λ_n	- mediana względem S_n ; (60) ;
α_n	- stosunek λ_n do σ ; (59) ;
γ_n	- stosunek σ^2 do σ ; (34) ;
x_i	- iloczyn σ przez z_i ; (61) ;
$I(z)$	- całka funkcji $k(u)$ w przedziale od 0 do
$Q_m(u)$	- wielomian Hermite'a rzędu m ;
$L(u,r)$	- stosunek funkcji gamma ;
$G_n(r)$	- funkcja rozkładu łącznego standardowego odchylenia biegunowego R_n ; (54) ;
$g_n(r)$	- funkcja gęstości standardowego odchylenia bi biegunowego R_n ; (55) ;

Wykonano w 50 egz.
Egz. nr 1 - 50 Bibl.Jawna
Wyk. płk dr Jerzy SKIBINSKI
Druk MJ, dn. 3 9.65r.
nr ks. 2192/WW.