AKADEMIA SZTABU GENERALNEGO
im. gen. broni K. Świerczewskiego

ZESPÓŁ CYBERNETYKI WOJSKOWEJ

płk dr Jerzy SKIBIŃSKI

MODEL ZAGADNIENIA TRANSPORTOWEGO W WARUNKACH WIELORAKOŚCI CELÓW

WARSZAWA 1968

AKADEMIA SZTABU GENERALNEGO
im. gen. broni K. Świerczewskiego

ZESPÓŁ CYBERNETYKI WOJSKOWEJ

Nr Egz.
19

płk dr Jerzy SKIBIŃSKI

MODEL ZAGADNIENIA TRANSPORTOWEGO W WARUNKACH WIELORAKOŚCI CELÓW

19

WARSZAWA 1968

A K A D E M I A   S Z T A B U   G E N E R A L N E G O
im.gen.broni K.Świerczewskiego

ZESPÓŁ CYBERNETYKI WOJSKOWEJ

Płk dr Jerzy SKIBIŃSKI

MODEL ZAGADNIENIA TRANSPORTOWEGO W WARUNKACH WIELORAKOŚCI CELÓW

WARSZAWA

1968 r.

SPIS TREŚCI

OZNACZENIA

a_i – stan i – tego punktu nadania; $i = 1,2,\ldots, m$;

b_j – stan j – tego punktu odbioru; $j = 1,2,\ldots,n$;

c_{ij} – koszt dowozu jednostki masy;

s_{ij} – koszt stały dowozu z i do j.

x_{ij} – stan dowozu z punktu i do punktu j;

$K(x)$ – funkcja celu przy $s_{ij} = 0$; $c_{ij} > 0$;

$K(X)$ – funkcja celu przy $s_{ij} > 0$; $c_{ij} > 0$;

$\hat{X} = \|\hat{x}_{ij}\|$ – zbiór stanów masy przewożonej według planu optymalnego;

R – zbiór węzłów /i,j/;

$X = \|x_{ij}\|$ – zbiór stanów masy przewożonej według planu dopuszczalnego tj. $x_{ij} > 0$;

Q_x – koszt stały realizacji planu dopuszczalnego;

R_1 – zbiór węzłów w planie dopuszczalnym dla których $x_{ij} > 0$;

R_2 – zbiór węzłów w planie dopuszczalnym dla których $c_{ij} < 0$;

$\tilde{X} = \|\tilde{x}_{ij}\|$ – plan dopuszczalny /wśród wszystkich planów dopuszczalnych z $x_{ij} > 0$/ z acyklicznym łańcuchem elementów różnych od zera;

$W_{(+)}$ – zbiór węzłów tworzących cykl do których wprowadza się wielkość $z = \min\limits_{(i,j) \in W_{(-)}} x_{ij}$;

$W_{(-)}$ – zbiór węzłów tworzących cykl z których zdejmuje się obciążenie;

$z = \min\limits_{(i,j) \in W_{(-)}} x_{ij}$ – najmniejsza spośród wielkości x_{ij} w cyklu odciążającym węzeł $/i_o j_o/$;

D – łańcuch zawierający $m + n - 1$ węzłów z których każdy $(i,j) \in R \setminus D$ tworzy cykl;

$\varepsilon_{ij} = z\,(c_{ij} - p_i - q_j)$ wartość węzła (i,j) w cyklu;

$\tilde{c}_{ij} = (c_{ij} - p_i - q_j)$ współczynnik określający węzeł i,j w stosunku do potencjałów;

p_i – potencjał wiersza;

q_j – potencjał kolumny.

0. WSTEP

Model typowego zagadnienia transportowego, dotyczącego przesunięć mas jednorodnych, formułuje się w postaci układu równań obejmujących:

a/ bilans możliwości n $(j = 1,2,\ldots n/$ punktów nadania:

$$\sum_{j=1}^{n} x_{ij} = a_i ; \qquad (i = 1,2,\ldots,m) \qquad 1$$

b/ bilans zapotrzebowań zgłoszonych przez m $/i = 1,2, \ldots,m/$ punktów odbioru;

$$\sum_{i=1}^{m} x_{ij} = b_j ; \qquad /j = 1,2,\ldots,n/ \qquad 2$$

c/ funkcję celu minimalizującą ogólny koszt realizacji planu:

$$K(X) = \sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} c_{ij} x_{ij} \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad 3$$

d/ warunki uzupełniające:

$$x_{ij} \geqslant 0, \quad c_{ij} \geqslant 0, \quad a_i > 0, \quad b_j > 0 \qquad 4$$

1. SFORMUŁOWANIE ZAGADNIENIA TRANSPORTOWEGO NIEJEDNORODNEGO

1.1. Wprowadźmy do układu (1) - (4) warunek dodatkowy mówiący o tym, że wszelkie przesunięcie masy x_{ij} jest związane z pewnym kosztem stałym, tj. określonym dla trasy (i,j) . Niech ten koszt wynosi s_{ij} $(s_{ij} > 0)$. Wtedy, funkcja celu (3) przyjmie postać:

$$K(X) = \sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} y_{ij}(x_{ij});$$

przy czym

$$y_{ij}(x_{ij}) = \begin{cases} 0, & \text{jeśli} \quad x_{ij} = 0 \\ c_{ij} x_{ij} + s_{ij}, & \text{jeśli} \quad x_{ij} > 0 \end{cases} \qquad (5')$$

§1.2. W tym ujęciu zagadnienie można sprowadzić do opracowania planu przesunięcia masy z m punktów nadania do n punktów odbioru, zgodnie z warunkami (1), (2), (4), (5) i (5') /tj. zastępując funkcję celu (3) funkcją (5) z warunkiem (5').

2. POJĘCIA UZUPEŁNIAJĄCE MODEL

§2.1. Wychodząc z pojęcia plan dopuszczalny, tj. wyrażony przez zbiór $X = \| x_{ij} \|$ i spełniający warunki (1), (2), (4), wprowadzamy dodatkowo:

2.2. Df: plan optymalny = zbiór $\hat{X} = \| \hat{x}_{ij} \|$ minimalizujący funkcję (5) przy warunku (5').

§2.3. Df: w ę z e ł = dowolna para /i,j/

§2.4. Df: R = zbiór wszystkich węzłów /i,j/.

§2.5. Df: R_r = ł a ń c u c h = dowolny podzbiór węzłów ze zbioru R.

§2.6. Df: C y k l = łańcuch w postaci węzłów

$$(i_0, j_0), (i_0, j_1), \ldots, (i_\alpha, j_0).$$

§2.7. Plan dopuszczalny (§2.1), nie zawierający cyklu (§2.6) złożonego z elementów $x_{ij} > 0$, nazywamy a c y k l i c z n y m.

§ 2.8. Każdemu planowi dopuszczalnemu $X = \| x_{ij} \|$ (§ 2.1.) odpowiada pewien podzbiór elementów macierzy $\| s_{ij} \|$, określający dla tego planu dodatkowy koszt realizacji, czyli:

$$Q_X = \sum_{(i,j) \in R_1} s_{ij} \qquad 6$$

gdzie R_1 jest zbiorem węzłów /i,j/ dla których $x_{ij} > 0$.

2.9. Twierdzenie. Wśród wszystkich planów dopuszczalnych $X = \| x_{ij} \|$, w których $x_{ij} > 0$ tworzą cykl / 2.6/ istnieje taki plan dopuszczalny $\tilde{X} = \| \tilde{x}_{ij} \|$ z acyklicznym łańcuchem elementów różnych od zera, spełniający nierówność:

$$\sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} c_{ij} \tilde{x}_{ij} + Q_{\tilde{X}} < \sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} c_{ij} x_{ij} + Q_{\tilde{X}} \qquad 7$$

w którym jest mniej elementów różnych od zera niż w planie X.

D o w ó d. Oznaczmy przez W zbiór węzłów tworzących cykl, przy czym takich w których odpowiednie $x_{ij} > 0$. Jeśli dowolny węzeł z tego cyklu oznaczymy znakiem (+), a kolejne, zgodnie z ruchem wskazówki zegara, naprzemian znakami (-) i (+) to $W_{(-)}$ i $W_{(+)}$ będą odpowiednio zbiorami tych węzłów.

Przyjmiemy, że wtedy może wystąpić nierówność:

$$\sum_{(i,j) \in W_{(+)}} c_{ij} \leqslant \sum_{(i,j) \in W_{(-)}} c_{ij} \qquad 8$$

lub

$$\sum_{(i,j)\in W_{(-)}} c_{ij} \leqslant \sum_{(i,j)\in W_{(+)}} c_{ij} \qquad 8$$

Niech $\min\limits_{(i,j)\in W_{(-)}} x_{ij} = z$. Wtedy nowe rozwiązanie dopuszczalne

$$\tilde{x}_{ij} = \begin{cases} x_{ij}+z, & \text{jeśli } (i,j)\in W_{(+)}\,; \\ x_{ij}-z, & \text{jeśli } (i,j)\in W_{(-)}\,; \\ x_{ij}, & \text{jeśli } (i,j)\in R \setminus W_{(+)} \cup W_{(-)}\,; \end{cases} \qquad 9$$

przy czym może mieć miejsce przypadek, że $x_{ij} = z$ wystąpi w pewnej liczbie węzłów.

Niech $x_{i_\varkappa j_\varkappa} = z \quad (\varkappa = 1, \dots, \varkappa_1)$ oraz $(i_\varkappa, j_\varkappa)\in W_{(-)}$. Wtedy:

$$\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} c_{ij}\tilde{x}_{ij} = \sum_{(i,j)\in R\setminus W_{(+)}\cup W_{(-)}} c_{ij}x_{ij} + \sum_{(i,j)\in W_{(+)}} c_{ij}(x_{ij}+z) +$$

$$+ \sum_{(i,j)\in W_{(-)}} c_{ij}(x_{ij}-z) + Q_x - \sum_{\varkappa=1}^{\varkappa_1} s_{i_\varkappa j_\varkappa} =$$

$$= \sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} c_{ij}x_{ij} + z\Big(\sum_{(i,j)\in W_{(+)}} c_{ij} - \sum_{(i,j)\in W_{(-)}}\Big) + Q_x - \sum_{\varkappa=1}^{\varkappa_1} s_{i_\varkappa j_\varkappa}$$

Biorąc pod uwagę niewówność /8/ oraz warunek

$$\sum_{\varkappa=1}^{\varkappa_1} s_{i_\varkappa j_\varkappa} > 0\,;$$

otrzymamy

$$\sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} c_{ij} \tilde{x}_{ij} + Q_{\tilde{x}} < \sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} c_{ij} x_{ij} + Q_x \qquad 10$$

§ 2.10. Ponadto w planie dopuszczalnym $\tilde{X} = \| \tilde{x}_{ij} \|$ będzie przynajmniej o jeden element $\tilde{x}_{ij} > 0$ mniej niż w planie $X = \| x_{ij} \|$. Gdyby w planie dopuszczalnym $X = \| x_{ij} \|$ występowała pewna ilość cykli zawierających $x_{ij} > 0$, wtedy stosując proponowaną metodę można cykle te kolejno usuwać. Odpowiadająca temu rozwiązaniu wartość funkcji celu będzie więc mniejsza od

$$K = \sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} c_{ij} x_{ij} + Q_x \qquad 11$$

A zatem, plan optymalny będzie występował wśród planów acyklicznych.

§ 2.11. Plany optymalne posiadają następujące własności.

1. Zbiór węzłów /i,j/, dla których $x_{ij} > 0$, spełnia nierówność:

   $$n < V \leq m + n - 1 \qquad (m \leq n)$$

2. W łańcuchu D, zawierającym $m + n - 1$ węzłów, każdy węzeł $(i,j) \in R \setminus D$ tworzy jeden i tylko jeden cykl.

3. Włączając do łańcucha D węzeł $(i,j) \in R \setminus D$ i wyłączając z D węzeł (i,j) występujący w cyklu utworzonym przez węzeł (i,j) z łańcuchem D, ponownie otrzyma się łańcuch acykliczny.

4. Ocena ε_{ij} węzła (i,j) nie występującego w łańcuchu D.

4.1. Jeśli węzeł $(i,j) \notin D$ wtedy wraz z węzłami łańcucha D tworzy on cykl oddzielny.

Zgodnie z §2.9. wyznaczmy zbiory $W_{(+)}$ i $W_{(-)}$, przy czym niech $z = \min_{(i,j)\in W_{(-)}} x_{ij}$. W związku z tym niech będzie

$W_{z(-)}$ zbiór $W_{(-)}$ w którym $z = x_{ij}$ oraz

$W_{0(+)}$ zbiór $W_{(+)}$ w którym $x_{ij} = 0$.

4.2. Jeśli przez p_i $(i = 1,2,\dots,m/$ i q_j $/j = 1,2,\dots n/$ oznaczymy odpowiednie potencjały, to ich wartości można obliczyć z układu /m + n - 1/ równań $p_i + q_j = c_{ij}$

Wtedy ocena węzła $(i,j) \in R \setminus D$ przyjmie postać:

$$\varepsilon_{ij} = z(c_{ij} - p_i - q_j) - \sum_{(i,j)\in W_{0(+)}} s_{ij} - \sum_{(i,j)\in W_{z(-)}} s_{ij} \qquad 12$$

4.3. Niech R_2 będzie zbiorem węzłów zawierających

$$\tilde{c}_{ij} = c_{ij} - p_i - q_j < 0 \qquad 13$$

4.4. <u>Cyklami bez obciażeń</u> będziemy nazywali te w których węzeł $(i_0, j_0) \in W_{(-)}$. Cykle te wyznaczamy rozpatrując węzły i-tego wiersza i j-tej kolumny, przy czym takie dla których $(i,j) \in R \setminus D$.

§3. ALGORYTM

<u>BLOK 1</u>. Zapis warunków zadania w postaci macierzy:

$\|c_{ij}\|$, $\|s_{ij}\|$ oraz wektorów $|a_i|$ i $|b_j|$.

BLOK 2. Opracowanie wyjściowego /bazowego/ planu dopuszczalnego ze względu na funkcję celu /3/ oraz przy założeniu $s_{ij} = 0$. /Można przyjąć dowolną metodę, np. renty różnicowej, "kąta północno-zachodniego, VAM itp/.

BLOK 3. Obliczenie potencjałów dla planu w bloku 2.

BLOK 4. Wyznaczenie zbioru węzłów R_2 oraz obliczenie dla każdego węzła z tego zbioru wartości

$$\tilde{c}_{ij} = c_{ij} - p_i - q_j$$

BLOK 5. Dla każdego $\tilde{c}_{ij}$ /blok 4/ obliczyć ε_{ij}. W tym celu, zgodnie z (9):

5.1. wybranemu $\tilde{c}_{ij}$ przyporządkować /wg § 2.9./

$$\min_{(i,j)\in W_{(-)}} x_{ij} = z_{ij};$$

5.2. dla wybranego z_{ij} wyznaczyć cykl;

5.3. dla wybranego cyklu obliczyć ε_{ij} / w/g § 2.11.4.2/

5.4. Działania od 5.1 do 5.3 wykonać dla każdego $\tilde{c}_{ij}$.

BLOK 6. Spośród ε_{ij} wybrać posiadającą najmniejszą wartość ujemną.

BLOK 7. Do węzła odpowiadającego ε_{ij} wybranemu w bloku 6. wprowadzić właściwe $\tilde{x}_{ij} = z$ oraz zgodnie z przyjętą regułą wykonać nowy plan dopuszczalny.

Działanie według bloków 3,4,5 i 6 przeprowadzać dopóki:

7.1. zbiór R_2 nie stanie się pusty lub

7.2. wszystkie węzły tego zbioru otrzymają ε_{ij} nie - ujemne.

BLOK 8. Odciążenie węzła w którym

$$\Delta_{i_0 j_0} = \max_{(i,j)\in R_1} \Delta_{ij} \, ,$$

8.0. W tym celu dla wybranego węzła $s_{i_0 j_0}$ określić cykle odciążające spośród których wybrać ten w którym występuje wartość z doprowadzającą $x_{i_0 j_0}$ do zera /tj. dla $(i_0, j_0) \in W_{(-)}$ / .

Może wystąpić jeden z czterech następujących przypadków.

8.1. Dla węzła $(i_0, j_0) \in R_1$ wystąpi przynajmniej jeden cykl odciążający, w którym $x_{i_0 j_0} = z\left[(i_1, j_1) \in D\right]$ oraz $\mathcal{E}_{i_1 j_1} < 0$; w związku z tym węzeł (i_1, j_1) obciążyć wielkością $x_{i_1 j_1} = z$, wprowadzić do łańcucha D oraz wykonać dalsze działania według bloków od 3 do 7.

8.2. Dla wszystkich węzłów (i_k, j_k) tworzących cykle odciążające dla węzła $(i_0, j_0,)$ $x_{i_0 j_0} = z$ wystąpią oceny $\mathcal{E}_{i_k j_k} > 0$; w związku z tym z podzbioru $L_{i_0 j_0}$ węzłów (i_k, j_k) w których $x_{i_k j_k} = z$ wybrać węzeł posiadający najmniejszą wartość $\mathcal{E}_{i_k j_k} = \min$;

1. Węzeł ten wprowadzić do planu zmieniając go w nową wersję planu dopuszczalnego. Wyznaczyć w nowym planie zbiór $R_2 \setminus (i_0, jo)$.
2. Dla każdego $(-\tilde{c}_{ij}) \in R_2$ działać według bloków od 3 do 7.
3. Przy każdej zmianie planu zapisać wartość wprowadzaną do łańcucha tj. tzw. uogólnioną sumę $\mathcal{E}$.
4. Jeśli uogólniona suma $\mathcal{E}$ dla rozpatrywanego węzła jest ujemna - należy przejść do bloku 6 obliczeń podstawowych. Jeśli natomiast suma ta jest nieujemna - przejść do następnego węzła ze zbioru $L^z_{i_0 j_0}$. Wybieramy dla niego cykl, obliczamy

wartość ε , przy czym działanie to wykonujemy aż do odciążenia węzła (i_o, j_o); gdyby jednak dla wszystkich węzłów zbioru $L^2_{i_o j_o}$ wartości sum uogólnionych (dla ε) były nieujemne, oznacza to brak możliwości odciążenia (i_o, j_o) . W związku z tym należy przejść do odciążenia następnego węzła posiadającego odpowiednio mniejszą wartość $\Delta_{i_1 j_1} = \max\limits_{(i,j) \in R_1} s_{ij}$, tj od bloku 8.2.

8.3. Istnieją tylko takie cykle odciążające węzeł (i_o, j_o) dla których $x_{i_o j_o} > z$. Zbiór węzłów z $R \setminus D$ tworzących te cykle oznaczymy $L_{i_o j_o}$.

1. Wprowadzając kolejno wybrane cykle, odciążać węzeł (i_o, j_o) aż do uzyskania $x_{i_o j_o} = 0$. Wartości ε węzłów wprowadzonych do łańcuchów /po każdym odciążeniu (i_o, j_o) - zapisać zgodnie z zasadami postępowania w/g bloków od 3 do 7.
2. Dodać wartości ε obliczone dla węzłów wprowadzonych do łańcucha.
3. Jeśli suma ε będzie ujemna, to wynik działania (realizowanego w punkcie 7.3.1) , przenieść do tablicy pomocniczej na której sprawdzić pozostałe możliwości odciążenia (i_o, j_o) .
4. Jeśli suma ε będzie nieujemna, uznać, że węzła (i_o, j_o) odciążyć nie można i przejść do następnego (i_1, j_1) w którym $\Delta_{i_1 j_1} = \max\limits_{(i,j) \in R_1 \setminus (i_o, j_o)} \Delta_{ij}$

4. Nie istnieją cykle odciążające węzeł (i_o, j_o) . W związku z tym, przystąpić do odciążenia następnego węzła (i_1, j_1) .

x

x x

Postępowanie algorytmiczne uważa się za zakończone, gdy

$$\varepsilon_{ij} \geq 0 , \quad (i,j) \in R \setminus D$$

a węzły /i,j/ $\in R_1$ posiadające $\delta_{ij} > \min\limits_{(i,j) \in R \setminus D} \delta_{ij}$, mają uogólnione sumy ε dodatnie.

Sprawdzenie optymalności otrzymanego rozwiązania polega na wykazaniu, że wartość funkcji celu dla ostatniej wersji planu dopuszczalnego jest mniejsza niż odpowiednia wartość dla planu optymalnego, zbudowanego przy założeniu $\delta_{ij} = 0$, lecz uwzględniającego również koszt stały Q.

4. PRZYKŁAD

BLOK 1. Dane wyjściowe zagadnienia transportowego przedstawiono w tablicy 1. W lewym górnym rogu każdej kratki wpisano jednostkowe koszty transportu (c_{ij}), w prawym górnym rogu - koszty stałe (s_{ij}).

TABLICA 1

$i \backslash j$	b_1		b_2		b_3		b_4		
a_1	17	370	8	200	14	50	19	100	80
a_2	6	250	13	450	9	80	15	70	120
a_3	20	100	5	300	17	250	7	180	200
	70		100		140		90		400 \ 400

BLOK 2. Opracowanie wyjściowego planu dopuszczalnego ze względu na koszty jednostkowe $/c_{ij}/$ przy założeniu $s_{ij} = 0$. Zastosowano metodę "kąta północno-zachodniego". Wynik - jak tablica 2 dla iteracji 1.

ITERACJA 1 TABLICA 2

i \ j	b_1	b_2	b_3	b_4	
a_1	$\boxed{17}$ 370 70	$\boxed{8}$ 200 10	$\boxed{14}$ 50	$\boxed{19}$ 100	80
a_2	$\boxed{6}$ 250	$\boxed{13}$ 450 90	$\boxed{9}$ 80 30	$\boxed{15}$ 70	120
a_3	$\boxed{20}$ 100	$\boxed{5}$ 300	$\boxed{17}$ 250 110	$\boxed{7}$ 180 90	200
	70	100	140	90	400 \ 400

Koszt realizacji tej wersji planu dopuszczalnego:

Koszty transportu w/g (3) - 5750

Koszty stałe - 1530

Razem: 7280

BLOK 3. Obliczenie potencjałów p_i i q_j dla planu otrzymanego w bloku 2. Wartości potencjałów wpisano odpowiednio w skrajnej lewej kolumnie i górnym wierszu tablicy 3.

TABLICA 3

i \ j	$q_1=17$	$q_2=8$	$q_3=4$	$q_4=-6$	
$p_1=0$	17 / 70	8 / 10	14	19	80
$p_2=5$	6	13 / 90	9 / 30	15	120
$p_3=13$	20	5	17 / 110	7 / 90	200
	70	100	140	90	400 \ 400

<u>Uwaga</u>: Potencjały p_i i q_j oblicza się tylko w stosunku do węzłów "obciążonych" /zbiór R_1/, przyjmując $p_1 \geqslant 0$, a praktycznie $p_1 = 0$, tak aby $c_{ij} = p_i + q_j$.

<u>BLOK 4</u>. Wyznaczenie zbioru R_2, tj zbioru węzłów "nieobciążonych". Obliczenie dla każdego węzła z tego zbioru:

$$\tilde{c}_{ij} = c_{ij} - p_i - q_j \qquad \text{/w/g § 2.11. 4.3/}$$

Wyniki zawiera tablica 4.

TABLICA 4

i \ j	$q_1=17$	$q_2=8$	$q_3=4$	$q_4=-6$	
$p_1 = 0$			14 / +10	19 / +13	
$p_2 = 5$	6 / 250 / −6			15 / +14	
$p_3 = 13$	20 / 100 / −10	5 / −16			

BLOK 5. Dla każdego węzła nieobciążonego obliczyć ε_{ij}. W tym celu:

5.1. wybranemu c_{ij} przyporządkować $\min\limits_{(i,j)\in W_{(-)}} x_{ij} = z_{ij}$ /w/g § 2.9/;

5.2. dla wybranego z_{ij} wyznaczyć cykl;

5.3. dla wyznaczonego cyklu obliczyć ε_{ij} /w/g §2.11.4.3/;

5.4. działania /1 do 3 / wykonać dla każdego $\tilde{c}_{ij}$.

5.5. spośród ε_{ij} wybrać posiadającą najmniejszą wartość ujemną.

Obliczenie.

/2.1/ Ad. 5.1. dla $(i,j) = (2,1;)$ $\tilde{c}_{21} = -16$ por. tablica 4 ;

$z_{21} = 70$ lub 90, stąd $z_{21} = 70$;

Ad. 5.2. cykl: $+ (2,1)$: $s_{21} = +250$; $- (1,1)$: $s_{11} = -370$;

Ad. 5.3. $\varepsilon_{21} = -16 \cdot 70 + 250 - 370 = -1210.$

/3,1/ Ad. 5,1. dla (i,j) : $(3,1)$; $\tilde{c}_{31} = -10$;

$z_{31} = 70$ lub 110, stąd $z_{31} = 70$;

Ad. 5.2. cykl: $+ (3,1)$: $s_{31} = +100$; $- (1,1)$: $s_{11} = -370$;

Ad. 5.3. $_{31} = -10 \cdot 70 + 100 - 370 = -970$;

/3,2/. Ad 5.1 dla (i,j): $(3,2)$; $\tilde{c}_{32} = -16$;

$z_{32} = 90$ lub 110, stąd $z_{32} = 90$;

Ad 5.2 cykl: $+ (3,2)$: $s_{32} = +300$; $- (2,2)$:

$s_{22} = -450$;

Ad 5.3 $\mathcal{E}_{32} = -16 \cdot 90 + 300 - 450 = -1590$

/1,3/ Ad 5.1 dla (i,j) : $(1,3)$; $\tilde{c}_{13} = +10$;

$z_{13} = 10$ lub 30, stąd $z_{13} = 10$;

Ad 5.2. cykl: $+ (1,3)$: $s_{13} = +50$; $- (1,2)$:

$s_{12} = -200$;

Ad 5.3 $\mathcal{E}_{13} = +10 \cdot 10 + 50 - 200 = -50$.

/1,4/ Ad 5.1. dla $(i,j) = (1,4)$; $\tilde{c}_{14} = +13$;

$z_{14} = 10$ lub 90, stąd $z_{14} = 10$;

Ad 5.2. cykl: $+ (1,4)$: $s_{14} = +100$;

$- (1,2)$: $s_{12} = -200$;

Ad 5,3. $\mathcal{E}_{14} = +13 \cdot 10 + 100 - 200 = +30$.

/2,4/ Ad 5.1 dla $(i,j) = (2,4)$; $\tilde{c}_{24} = +14$;

$z_{24} = 30$ lub 90, stąd $z_{24} = 30$;

Ad 5.2 cykl: $+ (2,4)$: $s_{24} = +70$; $- (2,3)$:

$s_{23} = -80$;

Ad 5.3 $\mathcal{E}_{24} = +14 \cdot 30 + 70 - 80 = +410$.

Ad. 5.5. Spośród ε_{ij}, obliczonych w bloku 5.4. wybrać ε_{ij} o wartości najmniejszej, czyli:

$$\varepsilon_{32} = -1590$$

BLOK 6. Wprowadzając do węzła $(3,2)$ $x_{32} = 90$, zmienić plan dopuszczalny /tablica 2/. Zgodnie z regułą "kąta północno-zachodniego" nowy plan dopuszczalny przyjmie postać /tablica 5/ iteracji 2:

ITERACJA 2.

TABLICA 5.

i \ j	b_1	b_2	b_3	b_4	
a_1	$\boxed{17}$ 370 70	$\boxed{8}$ 200 10	$\boxed{14}$ 50	$\boxed{19}$ 100	80
a_2	$\boxed{6}$ 250	$\boxed{13}$ 450	$\boxed{9}$ 80 120	$\boxed{15}$ 70	120
a_3	$\boxed{20}$ 100	$\boxed{5}$ 300 90	$\boxed{17}$ 250 20	$\boxed{7}$ 180 90	200
	70	100	140	90	400 \ 400

Koszt realizacji tej wersji planu dopuszczalnego:

Koszty transportu przy $s_{ij} = 0$	3770
Koszty stałe $(s_{ij} > 0)$	1380
Razem:	5150

Przejście do iteracji 3. Obliczenie potencjałów p_i i q_j dla planu dopuszczalnego w/g tablicy 2. /jak działanie w/g bloku 3/. Wyniki zawiera tablica 6.

TABLICA 6

$i \backslash j$	$q_1=17$	$q_2=8$	$q_3=20$	$q_4=10$	
$p_1=0$	[17] 370 70	[8] 200 10	[14] 50 - 6	[19] 100 + 9	80
$p_2=-11$	[6] 250 0	[13] 450 +16	[9] 80 120	[15] 70 + 16	120
$p_3=-3$	[20] 100 +6	[5] 300 90	[17] 250 20	[7] 180 90	200
	70	100	140	90	400 400

Obliczenie $\tilde{c}_{ij}$ w zbiorze R_2 /jak blok 4/. Wyniki zawiera tablica 6.

<u>Jak blok 5.</u>

<u>Obliczenie:</u>

Dla (i,j) : $(2,1)$; $\tilde{c}_{21} = 0$ /por. tablica 6/;

$z_{21} = 70$ lub 120; $z_{21} = 70$;

cykl: $+ (2,1)$: $s_{21} = + 250$; $- (1,1) = - 370$;

$\varepsilon_{21} = 0 \cdot 70 + 250 - 370 \underline{= - 120}$

Dla $(i,j) = (3,1)$; $\tilde{c}_{31} = + 6$;

$z_{31} = 70$ lub 90; $z_{31} = 70$;

Cykl: $+ (3,1)$: $s_{31} = + 100$; $- (1,1)$: $s_{11} = - 370$;

$\varepsilon_{31} = + 6 \cdot 70 + 100 - \underline{370 = + 150}$;

Dla $(i,j) = (2,2)$; $\tilde{c}_{22} = + 16$;

$z_{22} = 90$ lub 120; $z_{22} = 90$;

Cykl: + (2,2) : $s_{22} = +450$; $-(3,2)$: $s_{32} = -300$;

$$\varepsilon_{22} = +16 \cdot 90 + 450 - \underline{300 = +1590;}$$

Dla $(i,j) = (1,3)$; $\tilde{e}_{13} = -6$;

$z_{13} = 10$ lub 120; $z_{13} = 10$;

cykl: + (1,3): $s_{13} = +50$; $-(1,2)$: $s_{12} = -200$;

$${}_{13} = 6 \cdot 10 + 50 - \underline{200 = -210;}$$

Dla $(i,j) = (1,4)$; $\tilde{e}_{14} = +9$;

$z_{14} = 10$ lub 90; $z_{14} = 10$;

cykl: + (1,4) : $s_{14} = +100$; $-(1,2)$: $s_{12} = -200$;

$$\varepsilon_{14} = +9 \cdot 10 + 100 - 200 = -10;$$

Dla $(i,j) = (2,4)$; $\tilde{e}_{24} = +16$;

$z_{24} = 90$ lub 120 ; $z_{24} = 90$;

cykl: + (2,4) : $s_{24} = +70$; $-(3,4)$: $s_{34} = -180$;

$$\varepsilon_{24} = +16 \cdot 90 + 70 - 180 = \underline{+1330}$$

Spośród ε_{ij} obliczonych w bloku 8 wybrać ε_{ij} o wartości najmniejszej, czyli:

$$\varepsilon_{13} = -210$$

<u>Jak blok 6</u>. Wprowadzając do węzła (1,3) $x_{13} = 10$, zmienić plan dopuszczalny w/g iteracji 2 /tablica 5/. Zgodnie z regułą "kąta północno-zachodniego" nowy plan dopuszczalny przyjmie postać iteracji 3. /tablica 7/:

ITERACJA 3. TABLICA 7

i \ j	b_1	b_2	b_3	b_4	
a_1	$\boxed{17}$ 370 70	$\boxed{8}$ 200	$\boxed{14}$ 50 10	$\boxed{19}$ 100	80
a_2	$\boxed{6}$ 250	$\boxed{13}$ 450	$\boxed{9}$ 80 120	$\boxed{15}$ 70	120
a_3	$\boxed{20}$ 100	$\boxed{5}$ 300 100	$\boxed{17}$ 250 10	$\boxed{7}$ 180 90	200
	70	100	140	90	400 \ 400

Koszt realizacji tej wersji planu dopuszczalnego:

Koszty transportu przy	$s_{ij} = 0$	3710
Koszty stałe	$(s_{ij} > 0)$	1230
	Razem	4940

Przejście do iteracji 4. Postępując zgodnie z procedurą podaną w blokach 3,4 i 5, otrzymamy wyniki iteracji 4 /patrz tablica 8/ oraz poniżej – wartości dla ε_{ij}.

ITERACJA 4. TABLICA 8

i \ j	$q_1=17$	$q_2=2$	$q_3=14$	$q_4=4$	
$p_1=0$	$\boxed{17}$ 370 70	$\boxed{8}$ 200 +6	$\boxed{14}$ 50 10	$\boxed{19}$ 100 +15	80
$p_2=-5$	$\boxed{6}$ 250 -6	$\boxed{13}$ 450 +16	$\boxed{9}$ 80 120	$\boxed{15}$ 70 +16	120
$p_3=3$	$\boxed{20}$ 100 0	$\boxed{5}$ 300 100	$\boxed{17}$ 250 10	$\boxed{7}$ 180 90	200
	70	100	140	90	400 400

$\varepsilon_{21} = -6 \cdot 70 + 250 - 370 \underline{= -540};$

$\varepsilon_{31} = 0 \cdot 70 + 100 - 370 + 200 = -70,$

$\varepsilon_{12} = +6 \cdot 10 + 200 - 50 = +210,$

$\varepsilon_{22} = +16 \cdot 100 + 450 - 300 = +1750,$

$\varepsilon_{14} = +15 \cdot 10 + 100 - 50 = +200,$

$\varepsilon_{24} = +16 \cdot 90 + 70 - 180 = +1330.$

Ponieważ najmniejszą spośród wartości ujemnych posiada $\varepsilon_{21} = -540$, zatym iteracja 5 będzie polegała na wprowadzeniu do węzła $(2,1)$ $x_{21} = 70$ i odpowiedniej zmianie planu dopuszczalnego w/g tablicy 8.

ITERACJA 5. TABLICA 9

i \ j	$q_1 = 11$	$q_2 = 8$	$q_3 = 14$	$q_4 = 10$	
$p_1 = 0$	$\boxed{17}$ 370 +6	$\boxed{8}$ 200 0	$\boxed{14}$ 50 80	$\boxed{19}$ 100 +9	80
$p_2 = -5$	$\boxed{6}$ 250 70	$\boxed{13}$ 450 +10	$\boxed{9}$ 80 50	$\boxed{15}$ 70 +10	120
$p_3 = -3$	$\boxed{20}$ 100 +12	$\boxed{5}$ 300 100	$\boxed{17}$ 250 10	$\boxed{7}$ 180 90	200
	70	100	140	90	400 \ 400

Koszty realizacji tej wersji planu wynoszą:

Koszty transportu przy $s_{ij} = 0$	3290
Koszty stałe $/s_{ij} > 0/$	1110
	Razem 4400

W wyniku obliczenia potencjałów p_i i q_j oraz wartości $\tilde{c}_{ij}$, otrzymano następujące oceny cykli węzłów nieobciążonych /tablica 9/:

$$\varepsilon_{11} = + 6 \cdot 70 + 370 - 250 = + 540,$$

$$\varepsilon_{31} = + 12 \cdot 70 + 100 - 250 + 450 = + 1140,$$

$$\varepsilon_{12} = 0 \cdot 80 + 200 - 50 = + 150,$$

$$\varepsilon_{22} = + 10 \cdot 50 + 450 - 80 = + 870,$$

$$\varepsilon_{14} = + 9 \cdot 80 + 100 - 50 = + 770,$$

$$\varepsilon_{24} = + 10 \cdot 50 + 70 - 80 = + 480$$

Ponieważ wszystkie ε_{ij} są nieujemne, to zgodnie z postępowaniem algorytmicznym dla tego zadania - wystąpił bowiem przypadek bloku 7.2 - należy przystąpić do odciążenia węzła posiadającego

$$s_{i_0 j_0} = \max_{(ij)\in R_1} s_{ij} \qquad \text{/blok 7/}$$

Wybrany węzeł $(3,2)$ odpowiada temu warunkowi /$s_{32} = 300$/, a zgodnie z blokiem 8.0 wystąpił przypadek 8.4. Węzła $(3,2)$ nie można odciążyć, ponieważ wartości ε dla ewentualnych odciążających go węzłów będą dodatnie.

Kolejny węzeł, który można odciążyć /tj. 3,3 / posiada: $s_{33} = 250$ i $x_{33} = z = 10$. Dla odciążającego go węzła $(3,1)$ wartość ε_{31} wynosi: $+ 12.10 + 100 - 250 = - 30$, co oznacza, że taka możliwość istnieje i powinna być korzystna dla danego planu dopuszczalnego.

W związku z tym nowy plan dopuszczalny przyjmie postać /tablica 10/:

ITERACJA 6

TABLICA 10

i \ j	$q_1 = 11$	$q_2 = -4$	$q_3 = 14$	$q_4 = -2$	
$p_1 = 0$	$\boxed{17}$ 370 +6	$\boxed{8}$ 200 +12	$\boxed{14}$ 50 80	$\boxed{19}$ 100 +21	80
$p_2 = -5$	$\boxed{6}$ 250 60	$\boxed{13}$ 450 +22	$\boxed{9}$ 80 60	$\boxed{15}$ 70 +22	120
$p_3 = 9$	$\boxed{20}$ 100 10	$\boxed{5}$ 300 100	$\boxed{17}$ 250 -6	$\boxed{7}$ 180 90	200
	70	100	140	90	400 \ 400

Koszt realizacji planu:

Koszty transportu przy $s_{ij} = 0$	3350
Koszty stałe $(s_{ij} > 0)$	960
Razem:	4310

Plan optymalny na podstawie funkcji celu (3) miałby postać /tablica 11/

TABLICA 11

i \ j	b_1	b_2	b_3	b_4	
a_1	17	8	14 50 80	19	80
a_2	6 250 70	13	9 80 50	15	120
a_3	20	5 300 100	17 250 10	7 180 90	200
	70	100	140	90	400 \ 400

Koszt realizacji tego planu wynosi:

Koszt transportu /przy $s_{ij} = 0$/	3290
Koszt stały $(s_{ij} > 0)$	1110
Razem	4400

A zatem, plan otrzymamy jako wynik iteracji 6 /tablica 10/ należy uznać jako optymalny, ponieważ funkcja celu przyjmuje mniejszą wartość /4310/ niż dla planu optymalnego przy kryterium /3/.

<u>PRZYKŁAD 2.</u> Optymalizacja planu dowozu w warunkach ograniczonego czasu.

Warunki zadania - jak w przykładzie 1 - zawiera tablica 2.1. Ponadto, wprowadza się ograniczenia w postaci najdłuższego czasu w jakim plan powinien być zrealizowany. Zakładając, że stan środków transportowych zapewnia przesunięcie zaplanowanej masy z punktu i do punktu j w jednym rejsie /np. kolumny samochodowej/ w tablicy 2.2 podano średnie czasy przejazdu.

Należy opracować plan dowozu zapewniający pełne zapotrzebowania zgłoszone przez punkty j w czasie ograniczonym do 16 godzin, z uwzględnieniem lokalnego ekstremum funkcji kosztów jednostkowych przewozu masy i funkcji kosztów stałych.

TABLICA 2.1.

i \ j	b_1	b_2	b_3	b_4	b_5	
a_1	$\boxed{17}$ 550	$\boxed{14}$ 1000	$\boxed{4}$ 1200	$\boxed{7}$ 950	$\boxed{19}$ 780	100
a_2	$\boxed{8}$ 400	$\boxed{10}$ 1250	$\boxed{21}$ 900	$\boxed{15}$ 850	$\boxed{6}$ 1210	150
a_3	$\boxed{19}$ 1700	$\boxed{6}$ 2200	$\boxed{12}$ 1000	$\boxed{22}$ 970	$\boxed{9}$ 870	180
a_4	$\boxed{3}$ 2800	$\boxed{25}$ 800	$\boxed{18}$ 920	$\boxed{10}$ 320	$\boxed{13}$ 600	120
	70	130	160	80	110	550 / 550

Uwaga: w lewym górnym rogu kratki /i,j/ wpisano jednostkowe koszty transportu /c_{ij}/, w prawym górnym rogu - - koszty stałe /s_{ij}/

TABLICA 2.2.

i \ j	b_1	b_2	b_3	b_4	b_5	
a_1	22	15	13	18	12	100
a_2	16	14	15	10	17	150
a_3	14	19	10	16	14	180
a_4	10	12	20	13	21	120
	70	130	160	80	110	550 \ 550

Uwaga: w kratkach /i,j/ wpisano czas przejazdu z punktu i do j z ładunkiem określonym w planie optymalnym i wszelkich planach dopuszczalnych.

Uwzględniając 16 godzin jako górną granicę transportu, z punktu i do j, dane zagadnienie przyjmie postać tablicy 2.3.

TABLICA 2.3.

i \ j	b_1	b_2	b_3	b_4	b_5	
a_1	X	14 / 1000	4 / 1200	X	19 / 780	100
a_2	8 / 400	10 / 1250	21 / 900	15 / 850	X	150
a_3	19 / 1700	X	12 / 1000	22 / 970	9 / 870	180
a_4	3 / 2800	25 / 800	X	10 / 320	X	120
	70	130	160	80	110	550 \ 550

ROZWIAZANIE

BLOK 1. Wprowadzone do pamięci założenia wyjściowe przedstawia tablica 2.3.

Węzły /i,j/ w których czasy przesunięcia mas przekraczają 16 godzin nie zostały wypełnione. Stąd, macierz kosztów transportu stała się tzw. macierzą "dziurawą".

BLOK 2. Opracowanie pierwszego planu dopuszczalnego /iteracja 1/ przy założeniu $s_{ij} = 0$.

Należy zauważyć, że w przypadku macierzy "dziurawej" zastosowanie metody "kąta północno-zachodniego" może nie doprowadzić do zbilansowania rozdzielanych mas. W niniejszym przykładzie występuje taki właśnie przypadek. Korzystniejsze jest natomiast zastosowanie metody VAM-Z, która doprowadza do uzyskania planu optymalnego /przy $s_{ij} = 0$/ lub bardzo zbliżonego.

Stosując metodę VAM-Z otrzymano plan dopuszczalny /tablica 2.4/.

ITERACJA 1. TABLICA 2.4.

i \ j	b_1	b_2	b_3	b_4	b_5	
a_1		$\boxed{14}$ 1000	$\boxed{4}$ 1200 100		$\boxed{19}$ 780	100
a_2	$\boxed{8}$ 100	$\boxed{10}$ 1250 130	$\boxed{21}$ 900	$\boxed{15}$ 850 20		150
a_3	$\boxed{19}$ 1700		$\boxed{12}$ 1000 60	$\boxed{22}$ 970 10	$\boxed{9}$ 870 110	180
a_4	$\boxed{3}$ 2800 70	$\boxed{25}$ 800		$\boxed{10}$ 320 50		120
	70	130	160	80	110	550 \ 550

Koszt realizacji powyższego planu wynosi:

- koszt transportu przy $s_{ij} = 0$ — 4640
- koszty stałe $(s_{ij} > 0)$ — 9260

Razem: 13900

BLOK 3. Obliczenie potencjałów dla planu dopuszczalnego (wg iteracji 1) zawiera tablica 2.5.

BLOK 4. Obliczenie współczynników $\tilde{c}_{ij} \in R_2$ zawiera tablica 2.5.

TABLICA 2.5.

q_i \ Pi	$q_1 = 7$	$q_2 = 9$	$q_3 = 4$	$q_4 = 14$	$q_5 = 1$	
$P_1=0$	X	14 / +5	4 / 100	X	19 / +18	100
$P_2=1$	8 / 0	10 / 130	21 / +16	15 / 20	X	150
$P_3=8$	19 / +4	X	12 / 60	22 / 10	9 / 110	180
$P_4=4$	3 / 70	25 / +20	X	10 / 50	X	120
	70	130	160	80	110	550 / 550

BLOK 5. Ponieważ w planie dopuszczalnym (tablica 2.5) nie występują $-\tilde{c}_{ij} \in R_2$ (tym samym, wszystkie ε_{ij} są dodatnie), przechodzimy do bloku 8.

BLOK 8. Odciążenie węzła, w którym występuje $\Delta_{i_0 j_0} =$

$= \max\limits_{(i,j) \in R_1} \Delta_{ij}$. Jest to węzeł /4,1/, w którym $\Delta_{i_0 j_0} = 2800$. Wybieramy dla niego cykle i obliczamy wartości ε_{ij} .

a/ cykl: (4,1) , (4,2) , (2,2) , (2,1)

z = 70 /odpowiadające $\min X_{i_4 j_1} = 70$ /

Odciąża się węzeł 4,1 o 70 jednostek, które przechodzą do węzłów (2,1) i (4,2) .

$$\varepsilon_{41} = -2800 + 400 + 20 \cdot 70 = -200$$

b/ cykl: (4,1) , (2,1), (2,4) (4,4):

$z = 20$ (odpowiadające $x_{24} = 20$) .

Węzeł (4,1) odciąża się o 20 jednostek, węzeł (2,4) sprawadza się do zera, a obciążenie o 20 jednostek wystąpi w węzłach (2,1) i (4,4) .

$$\varepsilon_{41} = 0 \cdot 20 + 400 - 850 \underline{= -450}$$

c/ cykl: (4,1), (3,1), (3,4), (4,4) ; $z = 10$ odpowiadające $x_{34} = 10$, Odciążenie (4,1) i (3,4) o 10 jednostek.

$$\varepsilon_{41} = 4 \cdot 10 + 1700 - 970 \underline{= +770} .$$

d/ cykl: (4,1), (3,1), (3,3), (2,3), (2,2), (4,2).

$z = 60$ jednostek odpowiadających węzłowi (3,3), który sprowadzi się do zera; węzeł (4,1) odciąży o 60 jednostek , tj. do 10 jednostek, a obciążone zostaną węzły (3,1) i (2,3).

$$\varepsilon_{41} = (4 \cdot 60 + 1700) - 100 + (16 \cdot 60 + 900) + (20 \cdot 60 + 800) \underline{= +4800}$$

Spośród powyższych wariantów najkorzystniejszy jest wariant b/, w którym $\varepsilon_{41} = -450$. Po wprowadzeniu do planu (tablica 2.5) otrzymamy kolejny, poprawiony plan dopuszczalny, zawarty w tablicy 2.6.

i \ j	$q_1=7$	$q_2=9$	$q_3=4$	$q_5=14$	$q_6=1$	
$P_1 = 0$		$\boxed{14}$ 1000 +5	$\boxed{4}$ 1200 100		$\boxed{19}$ 780 +18	100
$P_2 = 1$	$\boxed{8}$ 400 20	$\boxed{10}$ 1250 130	$\boxed{21}$ 900 +16	$\boxed{15}$ 850 0		150
$P_3 = 8$	$\boxed{19}$ 1700 +4		$\boxed{12}$ 1000 60	$\boxed{22}$ 970 10	$\boxed{9}$ 870 110	180
$P_4 = -4$	$\boxed{3}$ 280 50	$\boxed{25}$ 800 +20		$\boxed{10}$ 320 70		120
	70	130	160	80	110	550 \ 550

Koszt realizacji powyższego planu wynosi:

- koszt transportu przy $\delta_{ij} = 0$ 4640
- koszty stałe $(\delta_{ij} > 0)$ 8810

Razem 13450

Ponieważ wszystkie $\tilde{c}_{ij}$ są nieujemne, kontynuujemy proces odciążania węzłów wykazujących max δ_{ij}

a/ węzeł (4,1) : cykl (4,1), (2,1), (2,2), (4,2)

z = 50 (odpowiadające $x_{41} \in R_2$)

$$\varepsilon_{41} = -2800 + 20 \cdot 50 + 800 = -1000$$

b/ węzeł (4,1): cykl (4,1), (3,1), (3,4), (4,4)

z = 10 (odpowiadające węzłowi 3,4 , w którym $x_{34} = 10$ jako $x_{34} \in R_2$)

$$\varepsilon_{41} = 4 \cdot 10 + 1700 - 970 = +770$$

Spośród powyższych wariantów najkorzystniejszy jest wariant a/, w którym ε_{41} = - 1000. Po wprowadzeniu do planu dopuszczalnego (tablica 2.6), otrzymamy kolejny plan dopuszczalny, którego koszt realizacji powinien być o 1000 jednostek niższy.

Nowy plan dopuszczalny zawiera tablica 2.7.

TABLICA 2.7

i \ j	q_1 =27	q_2 =29	q_3 = 4	q_4=14	q_5 = 1	
P_1=0	X	14 1000 - 15	4 1200 100	X	19 780 +18	100
P_2=-19	8 400 70	10 1250 80	21 900 +36	15 850 +20	X	150
P_3=8	19 1700 0	X	12 1000 60	22 970 10	9 870 110	180
P_4=-4	3 2800 -20	25 800 50	X	10 320 70	X	120
	70	130	160	80	110	550 \ 550

Koszt realizacji powyższego planu wynosi:

- koszt transportu przy δ_{ij} = 0 5640
- koszty stałe ($\delta_{ij} > 0$) 6810

Razem 12450

Ponieważ w rozpatrywanej, kolejnej wersji planu występują dla $\tilde{c}_{ij}$ wartości ujemne, sprawdzamy możliwości poprawienia planu, poczynając od określenia cykli dla ujemnych $\tilde{c}_{ij}$.

a/ Węzeł (4,1) : $\tilde{c}_{41}$ = - 20; cykl (4,1), (2,1), (2,4), (4,4) pozwala na wprowadzenie do $(4,1)$ $x_{41} = 70$ oraz do $(2,4)$ $x_{44} = 70$, kosztem odciążenia węzłów $(2,1)$ i $(4,4)$ o 70 jednostek każdy. Stąd

$$\varepsilon_{41} = 20 \cdot 70 + 2800 - 400 + (20 \cdot 70 + 850) - 320 =$$
$$\underline{= 2930}$$

co świadczy, że w ten sposób koszt realizacji planu wzrośnie o 2930 w stosunku do poprzedniej jego wersji.

b/ Węzeł $(1,2)$: $\tilde{c}_{12} = -15$; cykl: $(1,2)$, $(4,2)$, $(4,4)$, $(3,4)$ $(3,3)$, $(1,3)$; $\min x_{ij} = x_{34} = 10$.

$$\varepsilon_{12} = -15 \cdot 10 + 100 - 970 \underline{= -120}$$

c/ Węzeł $(1,2)$: cykl: $(1,2)$, $(1,3)$, $(2,3)$, $(2,2)$

$x_{22} = 80$ wprowadzone do $(1,2)$ daje

$$\varepsilon_{12} = -15 \cdot 80 + 1000 + 36 \cdot 80 + 900 - 1250 =$$
$$\underline{= + 2330}$$

Spośród powyższych wariantów zmian do planu dopuszczalnego (tablica 2.7) najkorzystniejszy jest wariant b/, według którego $\varepsilon_{12} = -120$. Uwzględniając go, otrzymamy nowy plan dopuszczalny (tablica 2.8)

TABLICA 2.8

j / i	$q_1 = 12$	$q_2=14$	$q_3 = 4$	$q_4 = 1$	$q_5 = 1$	
$P_1=-0$		$\boxed{14}$ 1000 10	$\boxed{4}$ 1200 90		$\boxed{19}$ 780 +18	100
$P_2=-4$	$\boxed{8}$ 400 70	$\boxed{10}$ 1250 80	$\boxed{21}$ 900 +21	$\boxed{15}$ 850 +20		150
$P_3=8$	$\boxed{19}$ 1700 -1		$\boxed{12}$ 1000 70	$\boxed{22}$ 970 +15	$\boxed{9}$ 870 110	180
$P_4=11$	$\boxed{3}$ 2800 -20	$\boxed{25}$ 800 40		$\boxed{10}$ 320 80		120
	70	130	160	80	110	550 550

Koszt realizacji powyższego planu:

- koszty transportu /przy $\Delta_{ij} = 0$ / 5490
- koszty stałe $(\Delta_{ij} > 0)$ 6840

Razem 12330

Ponieważ cykle dla węzłów (3,1) i (4,1), posiadających ujemne $\tilde{C}_{ij}$, dają wartości ε_{31} i ε_{41} dodatnie, należy przystąpić do odciążenia węzłów, poczynając od wykazujących największe Δ_{ij}.

a/ Węzeł (2,2); $s_{22} = 1250$, posiada następujące cykle:

- (2,2), (2,3), (1,3), (1,2); z = 10 w węźle (1,2)

$\varepsilon_{22} = + 21 \cdot 10 + 900 \underline{= + 1110;}$

- (2,2), (2,4), (4,4), (4,2); z = 80 w węzle (2,2)

$\varepsilon_{22} = - 1250 - 320 + 20 \cdot 80 + 850 = + \underline{880},$

co oznacza, że węzła (2,2) nie można odciążyć.

b/ Węzeł (1,3); $s_{13} = 1200$.

- cykl: (1,3), (3,3), (3,5), (1,5); z = 100;

$\varepsilon_{13} = -1200 + 18 \cdot 90 + 780 = \underline{+1200;}$

- cykl: (1,3), (2,3), (2,2), (1,2); z = 80;

$\varepsilon_{13} = +21 \cdot 80 + 900 - 1250 = \underline{+1330;}$

węzła (1,3) nie można odciążyć.

c/ Węzeł (1,2); $s_{12} = 1000$; z = 20 w węźle (1,2)

- cykl: (1,2), (1,3), (3,3), (3,4), (4,4), (4,2).

$\varepsilon_{12} = -1000 + 15 \cdot 10 + 970 = \underline{+120;}$

- cykl: (1,2), (1,3), (3,3), (3,1), (2,1), (2,2); z=10;

$\varepsilon_{12} = -1000 - 1 \cdot 10 + 1700 = \underline{+690;}$

a zatem, węzła (1,2) nie można odciążyć.

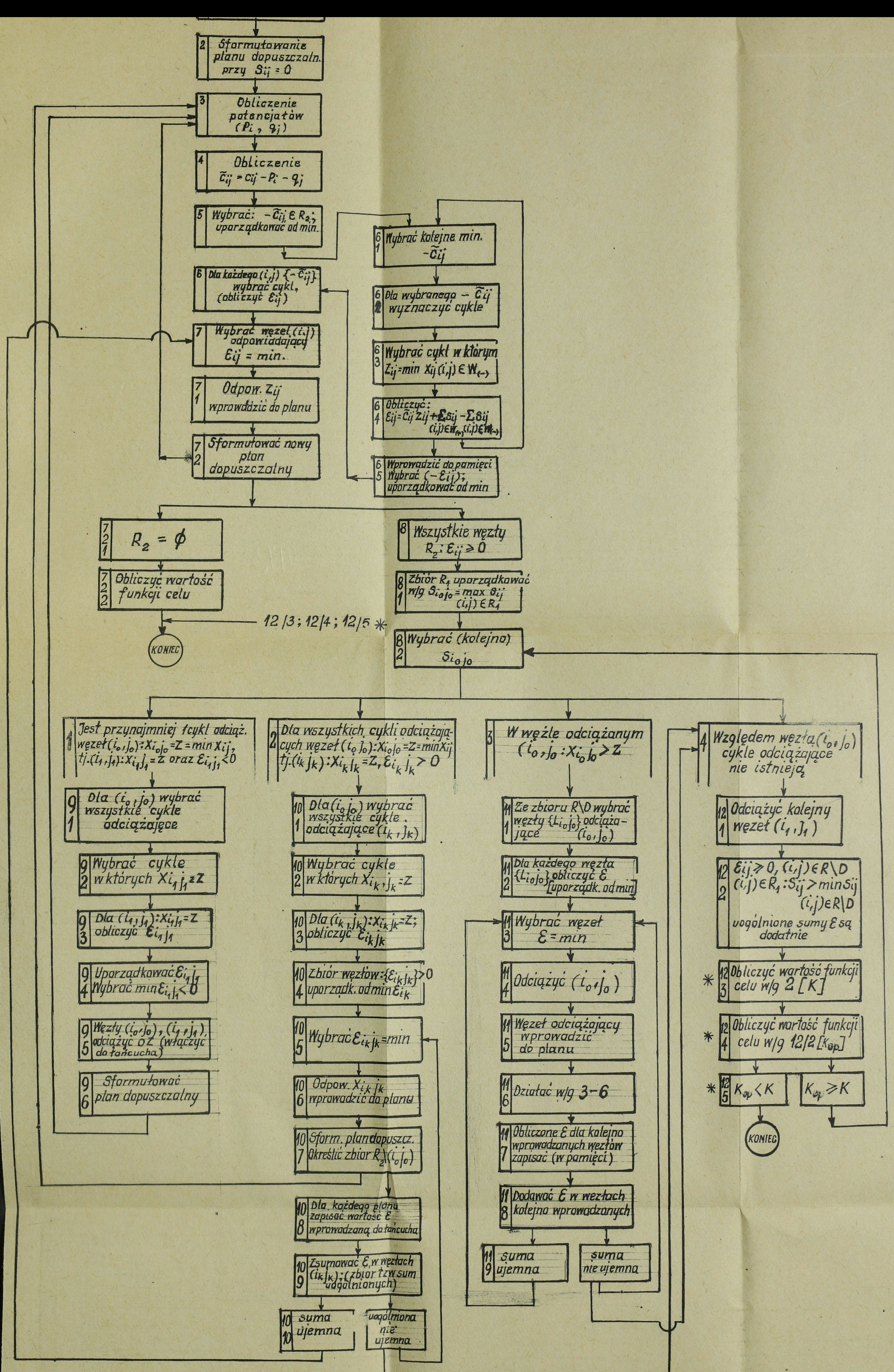
d/ Węzeł (3,3); $s_{33} = 1000$;

- cykl: (3,3), (3,1), (2,1), (2,3); z = 60;

$\varepsilon_{33} = -1000 - \cdot 60 + 1700 + 21 \cdot 60 + 900 = \underline{+2800}$

Podobnie łatwo stwierdzić, że i pozostałe węzły, tj. (3,5): $s_{35} = 870$; (4,2): $s_{42} = 800$; (2,1): $s_{21} = 400$; (4,4) : $s_{44} = 320$ nie posiadają cykli, w których wystąpią ujemne wartości ε_{ij}. W związku z tym plan wyrażony w tablicy 2.8 należy uważać jako optymalny. Koszt realizacji tego planu jest bowiem mniejszy niż koszt planu przedsta - wionego w tablicy 2.4 (13900 - 12330 = 1570).

Wykonano w 100 egz.
Egz.nr 1-100 bibl.jawna
Wyk. płk Skibiński
Druk. BG, OH, dn. 16.4.68r.
Nr ks. 541/959/WW
Druk ASG-O-XV-3684



Wydruk. 100 egz. poz. nr 970/WW (zał. do skryptu poz. nr 959/WW)