

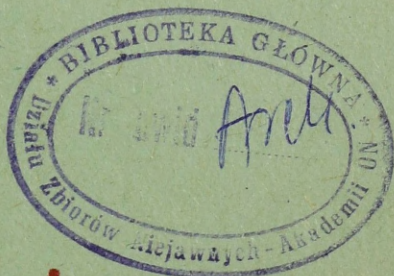
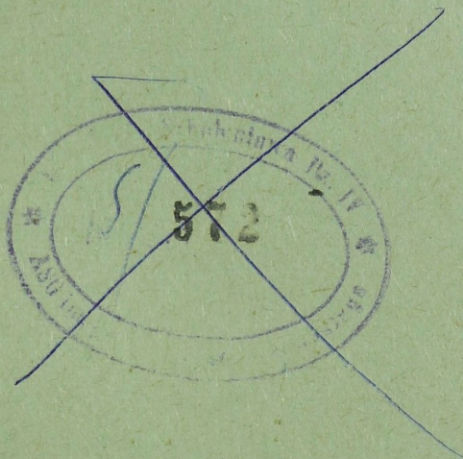
AKADEMIA SZTABU GENERALNEGO
im. gen. broni K. Swierczewskiego

ZESPOL CYBERNETYKI WOJSKOWEJ

47

Płk dr Jerzy SKIBIŃSKI

ELEMENTY TEORII POSZUKIWANIA



4159

WARSZAWA

LISTOPAD

1966



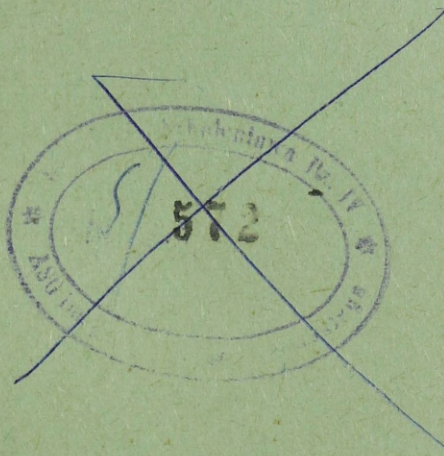
AKADEMIA SZTABU GENERALNEGO
im. gen. broni K. Swierczewskiego

ZESPOŁ CYBERNETYKI WOJSKOWEJ

47

Płk dr Jerzy SKIBIŃSKI

ELEMENTY TEORII POSZUKIWANIA



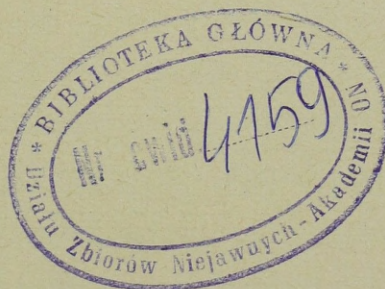
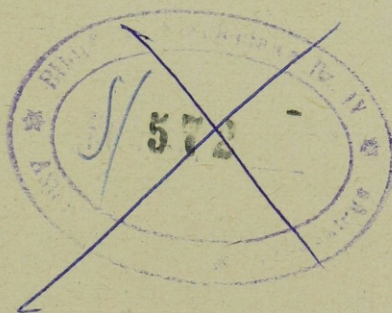
4159

A K A D E M I A S Z T A B U G E N E R A L N E G O
im.gen.broni K.Swierczewskiego

ZESPOŁ CYBERNETYKI WOJSKOWEJ

Płk dr Jerzy SKIBINSKI*

ELEMENTY TEORII POSZUKIWANIA



WARSZAWA

listopad

1966 r.

SPIS ROZDZIAŁÓW

1. Wstęp	3
2. Założenia podstawowe	5
3. Zarys kinematyki poszukiwania celu	8
4. Podstawowe typy zadań kinematyki poszukiwania celu .	15
5. Wyznaczenie prawdopodobieństwa wykrycia celu zależnie od kierunku jego ruchu	24
6. Poszukiwanie w przestrzeni trójwymiarowej	30
6.1. Pojęcia ogólne	30
6.2. Efektywność wykrywania	33
6.3. Ilość czasu niezbędna dla wykrycia celu	36
6.4. Niezbędna ilość obserwatorów	37
6.5. Optymalizacja działania grupy obserwatorów	37
7. Uwagi końcowe	40
Literatura	41
Przypisy	45

1. W s t ę p

Stały wzrost prędkości, zasięgu i siły ognia współczesnych środków walki wymaga, by efekty procesów informacyjnych o poszukiwanym przeciwniku, jako celu aktywnych przeciwdziałań, zapewniały coraz wyższe prawdopodobieństwo jego wykrycia we właściwym czasie. Proces informacyjny realizuje określony system technicznych środków obserwacji i powiadamiania/z udziałem lub bez udziału człowieka/ w nakazanej przestrzeni poszukiwania. Zadanie systemu sprowadza się więc przede wszystkim do wykrycia celu, tj. ustalenia jego rodzaju i położenia w przestrzeni w momencie wykrycia oraz - bieżącej obserwacji, tj. rejestrowania parametrów jego ruchu /kierunku i prędkości/ oraz tych czynników charakteryzujących warunki otoczenia /środowiska/ w jakich przebiega proces poszukiwania, których zmiany wpływają na efektywność działania systemu. Dobór technicznych środków poszukiwania, obserwacji i łączności, niezbędnych do obsługi przyjętego systemu, ich ilość, jakość, rozmieszczenie w przestrzeni poszukiwania, reżim ruchu i pracy itp. zależą od ilości i przewidywanych rodzajów poszukiwanych celów, charakteru przestrzeni /lądowej, powietrznej, wodnej, podwodnej, kosmicznej/ oraz naturalnych i technicznych warunków, aktualnych i przewidywanych, w jakich proces poszukiwania będzie realizowany.

Efektywność działania zorganizowanego systemu poszukiwania jest równoznaczna z uzyskiwaniem aktualnych i możliwie jaknajdokładniejszych informacji o celach na kontrolowanym obszarze w stosunku do zaangażowanej mocy poszukiwania. Wzrost efektywności systemu jest jednak ściśle uzależniony od stanu baz: teoretycznej i technicznej. Jakościowo odmienny charakter ewentualnych przyszłych działań wysuwa przed teorią i techniką poszukiwanie szczególnie wysokie wymagania w zakresie rozwiązań praktycznych, dotyczących organizacji i pracy systemu oraz techniki zbierania, selekcji, magazynowania i obiegu informacji, głównie w oparciu o elektroniczną technikę przetwarzania danych.

Wymienimy tylko ważniejsze działy, decydujące w pierwszym rzędzie o wzroście efektywności procesów poszukiwania.

1. Rozwój kinematyki poszukiwania celu w świetle zmian strukturalno-organizacyjnych, wynikających z rozwoju technicznych środków poszukiwania i obserwacji oraz łączności.

2. Optymalizacja struktur organizacyjnych systemów poszukiwania na bazie zautomatyzowania rejestracji i obiegu informacji.

3. Algorytmizacja przetwarzania informacji w zautomatyzowanych, adaptacyjnych systemach poszukiwania, z punktu widzenia niezbędnych potrzeb kierownictwa /dowództwa/ w procesie podejmowania decyzji.

4. Usprawnianie technicznych środków obiegu, selekcji i magazynowania informacji dla tworzonych systemów poszukiwania.

Eksponując powyższe działy zamierzamy jedynie podkreślić konieczność kompleksowego ujęcia warunków, którym powinien odpowiadać tworzony system poszukiwania oraz zadań, jakie powinien spełniać, na korzyść określonych rodzajów wojsk działających we właściwej sobie przestrzeni. W dalszych rozważaniach ograniczymy się jednak tylko do pierwszego z wymienionych działów, stanowiącego przedmiot badań ogólnej teorii poszukiwania celu w przestrzeni wielowymiarowej. Pozostałe działy są bowiem właściwe takim naukom jak: cybernetyka ogólna i techniczna /teoria informacji, teoria automatycznego sterowania, teoria elektronowych maszyn matematycznych/, automatyka, teoria organizacji itp.

Istniejące kompleksowe systemy kontroli przestrzeni powietrznej np. "Sage", "Marconi", itp. są oparte głównie na technice radioelektronicznej, sprzężone z systemami automatycznego przetwarzania danych, opartymi na elektronicznej technice obliczeniowej i pracują przede wszystkim na korzyść wojsk obrony powietrznej. Rozwijane są coraz intensywniej systemy kontroli przestrzeni podwodnych, korzystające z techniki obserwacji wizualnej, radiolokacyjnej, hydrolokacyjnej, pelengacji szumów itp. Obecnie coraz ostrzej wysuwa się na czoło problemy budowy systemu kontroli przestrzeni kosmicznej,

działający na korzyść środków /wojsk/, przystosowanych do zwalczania celów w tym "niekonwencjonalnym" obszarze. Każda z tych przestrzeni wymaga specjalnego dla siebie systemu poszukiwania, odmiennej techniki poszukiwania i obserwacji celów oraz doboru właściwej aparatury rejestracji i rozpoznania sygnałów /informacji/. Istnieje jednak szereg wspólnych cech, charakterystycznych dla procesów poszukiwania celu ~~w~~ każdej przestrzeni. Cechy te określają przedmiot badań teorii poszukiwania, stanowiącej obecnie jedną z gałęzi badań operacyjnych. Poniżej przedstawimy je w postaci założeń podstawowych, niezbędnych z punktu widzenia stosowania kine-
matyki, głównej aparatury do badania mechaniki ruchu ~~ciał~~ w przestrzeni, niezależnie od cech fizycznych tych ciał i działających na nie sił.^{x/}

2. Założenia podstawowe

1. Poszukiwanie jest procesem, w którym jako przedmiot występuje obserwator, a przedmiotem jest obiekt materialny, nazywany dalej celem. Obserwator i cel znajdują się w ruchu w przestrzeni n - wymiarowej.^{xx/}

2. W momencie wykrycia obserwator "widzi" cel, natomiast cel "nie widzi" obserwatora. Stąd, pojęcie "wykrycie celu" dotyczy obserwatora, który w tym momencie powinien określić położenie celu /współrzędne/, kierunek ruchu i prędkość. Wykrycie występuje^w określonym momencie czasu, a więc nie wyklucza w następnym momencie powstania jednego z następujących zdarzeń:

2.1. cel wykrył obserwatora, obserwator utracił kontakt

z celem;

x/ Związki między siłami i ruchem ciał są przedmiotem badań dynamiki. Badanie ruchu układów mechanicznych pod wpływem działających na nie sił /z wyłączeniem stanów równowagi, którymi zajmuje się statyka/ jest przedmiotem kinetyki, jako działu dynamiki.

xx/ Stan bezruchu traktujemy jako przypadek szczególny ruchu, w którym prędkość jest równa zero.

2.2. obie strony utraciły kontakt.

2.3. cel wykrył obserwatora, obserwator utrzymał kontakt z celem.

Zdarzenie 2.3. traktuje się przy tym jako przypadek szczególny, a okres jego trwania zależy ponadto od charakteru zadań obu stron oraz możliwości aktywnego wyjścia z tego stanu przez każdą ze stron /np. przez przejście do pościgu lub zniszczenie przeciwnika/, poprzez rozwiązanie określonej sytuacji konfliktowej.

3. Wykrycie celu może nastąpić tylko w strefie obserwacji, stanowiącej część obszaru poszukiwania, określonej zasięgiem technicznych środków obserwacji.

4. Moment wystąpienia każdego ze zdarzeń /2., 2.1, 2.2, 2.3/ i czasy ich trwania oraz położenie celu /współrzędne celu/, kierunek jego ruchu i prędkość są zmiennymi losowymi o nieznanym rozkładach prawdopodobieństw. Proces poszukiwania jest więc ciągiem zdarzeń niezależnych /2., 2.1, 2.2, 2.3/, którego poszczególne stany tworzą łańcuch Markowa.

5. Zmienność naturalnych warunków otoczenia wpływa tylko na efektywność działania technicznych środków obserwacji. Wyklucza się wpływ zmienności tych warunków na człowieka, operatora środków technicznych.^{x/}

6. Techniczne środki obserwacji każdej ze stron /p-kt 3/ mogą działać w sposób ciągły lub dyskretny /impulsowy/. Stąd można wyróżnić dwie odmiany struktury procesu napływu informacji.

6.1. Przepływające informacje zapełniają każdy, dowolnie mały przedział czasu; wtedy prawdopodobieństwo wykrycia celu nieruchomego w przedziale czasu $/0, t/$ wyniesie:

6.1.1. w niezmiennych warunkach otoczenia /w krótkich

x/ Eliminowanie wpływu człowieka ma na celu uproszczenie podejścia do sformalizowania procesu poszukiwania. W przeciwnym przypadku należałoby wprowadzać do modeli poszukiwania szeregu parametrów, określających takie cechy jak: stopnie wykształcenia obsługi aparatury obserwacyjnej własnej i przeciwnika, zmęczenie, odporność psychiczna na zaskoczenie itp. W dzisiejszym stanie wiedzy możliwości oceny ilościowej tych cech są niewystarczające dla wprowadzenia do modelu matematycznego oraz uwzględnienia zmian ich wartości w czasie trwania poszukiwania

okresach czasu/:

$$P/t/ = 1 - \exp[-p_t t] / ; p_t = \text{const} \dots \quad /1/$$

6.2. w zmieniających się warunkach otoczenia /w długich okresach czasu/:

$$P/t/ = 1 - \exp[-\int_0^t p_t dt] / ; p_t \neq \text{const} \dots \quad /2/$$

gdzie p_t oznacza elementarną gęstość prawdopodobieństwa liczby wykryć w przedziale czasu dt

5.2. Przepływające informacje stanowią ciąg impulsów; wtedy prawdopodobieństwo wykrycia celu przynajmniej przez jeden z n impulsów, wyniesie:

6.2.1. w przypadkach poszukiwań stosunkowo krótko trwałych /przy niewielkiej liczbie impulsów/:

$$P/n/ = 1 - /1-p_i/^{n} , \quad p_i = \text{const} \dots \quad /3/$$

6.2.2. w przypadkach poszukiwań w ciągu długich okresów czasu /przy dużej liczbie impulsów/:

$$P/n/ = 1 - \prod_{i=1}^n /1-p_i/ , \quad p_i \neq \text{const} \dots \quad /4/$$

gdzie p_i oznacza odpowiednio elementarne prawdopodobieństwo wykrycia celu przez i -ty impuls na ogólną ich liczbę n .

x

x

x

Powyższe rozważania /rozd. 1 i 2/, obejmują najogólniej charakter i istotę procesu poszukiwania; można je w pewnej mierze zreasumować w postaci próby definicji teorii.

Teoria poszukiwania jest dziedziną badań operacyjnych, zajmująca się wykrywaniem współzależności o charakterze geometrycznym i stochastycznym, zachodzących między czynnikami, określającymi efektywność ruchu obserwatora i celu w sterowanym procesie optymalizacji wysiłku technicznych środków poszukiwania, działających w dowolnych środowiskach przestrzeni wielowymiarowej.

W tym świetle, można wydzielić następujące, podstawowe współzależne działy tej teorii:

1. Kinematyka poszukiwania celu.
2. Metody wykrywania celu.
3. Optymalizacja wysiłku poszukiwania.

Rozpatrzmy główne rysy każdego z nich.

3. Zarys kinematyki poszukiwania celu

Wyznaczenie współzależności między elementami ruchu celu i obserwatora oprzemy na przypadku najprostszym: oba obiekty przesuwają się w przestrzeni poszukiwania, Q ruchem jednostajnym, prostoliniowym. Wprowadzamy następujące oznaczenia w biegunowym układzie współrzędnych.

O - położenie obserwatora w momencie t ;

C - /Cel/ położenie celu w momencie t ;

\vec{R} - promień-wektor odległości obserwatora do celu;

\vec{u} - wektor prędkości /bezwzględnej/ obserwatora;

\vec{v} - wektor prędkości /bezwzględnej/ celu;

α - azymut wektora \vec{R} ;

β - kąt między wektorami \vec{u} i \vec{v}

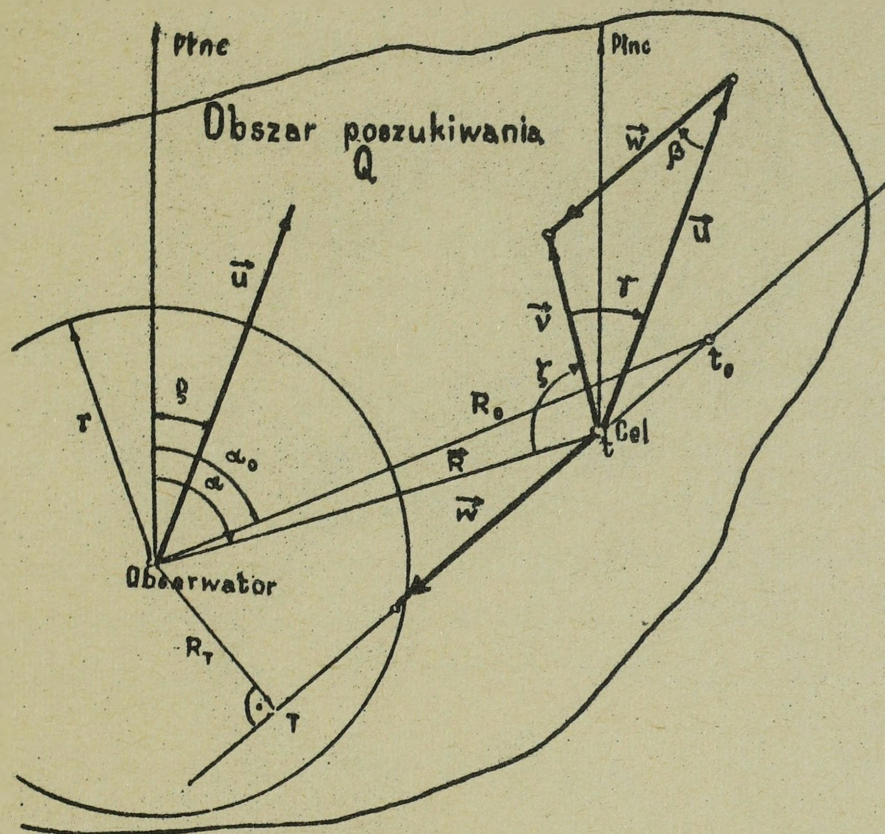
\vec{w} - wektor prędkości względnej celu;

β - kąt między wektorami \vec{u} i \vec{w} ;

r - promień zasięgu obserwacji środków technicznych;

ζ - kąt między wektorami \vec{R} i \vec{v} ;

ρ - azymut kursu obserwatora.



Rys. 1.

Na rysunku 1 został wprowadzony przypadek $u > v$, natomiast na rysunku 2 - gdy $u < v$. Nietrudno zauważyć, że dla badania współzależności między elementami ruchu obu obiektów istotne znaczenie posiadają elementy względne, tj. \vec{w} i β . W dowolnym momencie t procesu obserwacji wyniosą one:

$$\vec{w} = \sqrt{v^2 + u^2 - 2vu \cdot \cos \gamma} \dots \dots \dots /1/$$

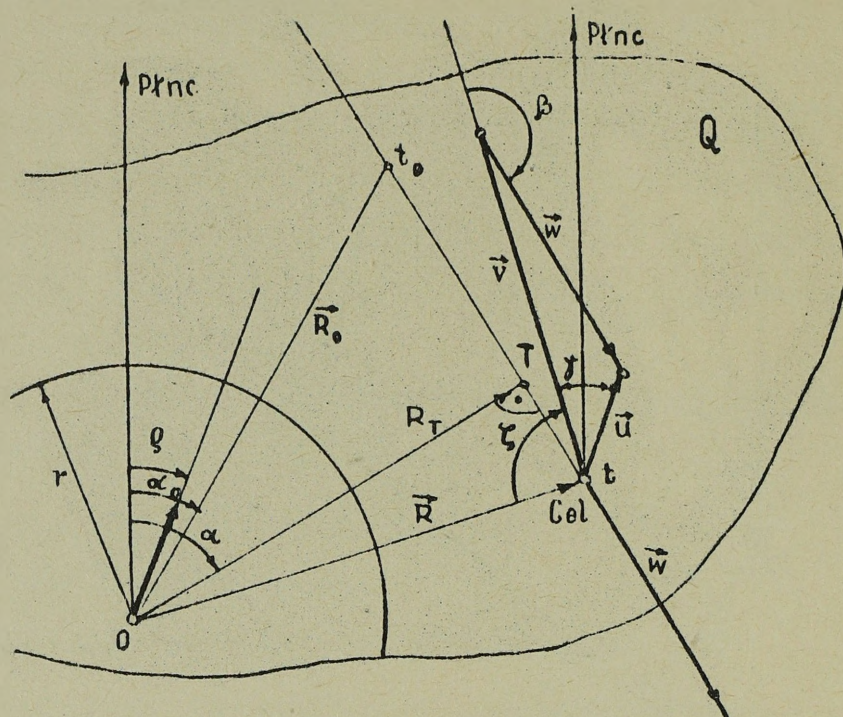
lub:

$$\vec{w} = -u \cos \beta \pm \sqrt{v^2 - u^2 \cdot \sin^2 \beta} \dots \dots \dots /2/$$

oraz

$$\sin \beta = \frac{v}{u} \sin / \beta - \gamma / \dots \dots \dots /3/$$

oczywiście, przy założeniu, że informacje w momencie t o położeniu punktu C, jego kierunku ruchu i prędkości zostały przekazane obserwatorowi O przez innego obserwatora.



Rys. 2

Stąd, można przejść do określania zmian położenia celu względem czasu. W pewnym położeniu t_0 , które można uznać jako początkowe:

$$\vec{R}_0 = \vec{R} - /t-t_0/ \vec{w} \dots\dots\dots /4/$$

oraz uwzględniając /1/ lecz wyłączając przypadek $u=v$, wyznaczmy najkrótszą odległość obserwatora do linii względnego kursu celu:

$$R_T = R \sin /\beta - \alpha_0/ \dots\dots\dots /5/$$

którą w nawigacji morskiej nazywa się trawersem względnym.

Przechodząc z biegunowego układu współrzędnych /rys. 1 i 2/ do układu prostokątnego, a w związku z tym, przyjmując R_T jako oś odciętych X oraz linię względnego kursu celu jako oś rzędnych Y, otrzymamy:

$$y = /t - T/ w ; \quad x = \text{const} \quad \dots\dots\dots /6/$$

oraz

$$\alpha = \beta - \text{arc tg } x/y \quad \dots\dots\dots /7/$$

Zależności od /1/ do /7/ mają raczej charakter formalny, gdyż wyznaczono je na podstawie informacji, uzyskanych od innego obserwatora, który "już widział" cel. Natomiast, z punktu widzenia roli obserwatora, istotne znaczenie posiada rozwiązywanie zadań poszukiwania w oparciu o założenie 4 /rozd. 1.2/ w warunkach losowego rozmieszczenia i ruchu celów na danym obszarze poszukiwania. W przypadku ogólnym prawdopodobieństwo elementarne wykrycia w danym rejonie wyznaczy funkcja:

$$dp = f/R, v, \alpha, \gamma / dR, dv, d\alpha, d\gamma \quad \dots\dots\dots /8/$$

Zatem, gęstość prawdopodobieństwa, że cel znajduje się w określonym rejonie danego obszaru i zmienia w określonych granicach: położenie, prędkość i kąt kursowy względem kąta kursowego obserwatora, /jako zdarzenia niezależne/, przyjmie ogólną postać:

$$P = \int_{R_1}^{R_2} \int_{v_1}^{v_2} \int_{\alpha_1}^{\alpha_2} \int_{\gamma_1}^{\gamma_2} f/R, v, \alpha, \gamma / dR, dv, d\alpha, d\gamma \quad \dots\dots\dots /9/$$

przy założeniu, że spośród wszystkich celów jednorodnych na danym obszarze, jesteśmy w stanie określić liczbowo /lub w %/ tę część, dla których możemy wyznaczyć położenie i prędkości.

Stosowanie wzorów /8/ i /9/ wymaga jednak uprzedniego wyznaczenia współzależności między elementami ruchu celu. Praktycznie, uzyskuje się je na drodze statystycznego opracowania informacji o podobnych procesach, jakie miały miejsce w przeszłości, bądź metodą obliczeń analitycznych, lecz przy wprowadzeniu szeregu hipotez, dotyczących niektórych elementów ruchu. Sposób pierwszy, tj. oceny statystycznej jest z reguły bardzo pracochołny. Wprawdzie istnieją pewne możliwości znacznego skrócenia czasu obliczeń przez zastosowanie

metody prób statystycznych, tzw. metody Monte Carlo, umożliwiające eksperymentowanie /wielokrotne odtwarzanie badanego procesu/ przy pomocy elektronowych maszyn cyfrowych, lecz właśnie z tego względu przydatność tego sposobu oceny współzależności między elementami ruchu będzie z reguły bardzo ograniczona. Drugi sposób, tj. analityczne podejście do oceny prawdopodobieństwa występowania celu w określonym obszarze, jest niewątpliwie szybszy, lecz dokładność wyniku zależy od słuszności wysuniętych hipotez.

Ponieważ proces poszukiwania dotyczy zwykle konkretnego celu /lub grupy celów/ o znanych charakterystykach taktyczno-technicznych oraz określonego obszaru poszukiwania /lub jego części/, zatem hipotezy mogą obejmować niektóre z nich w pewnych granicach zmienności. Do tych tzw. zmiennych niezależnych formułowanego modelu poszukiwania można zaliczyć, np. prędkość celu, jego położenie względem obserwatora w rejonie wybranym z ogólnego obszaru poszukiwania itp. Ogólny tok postępowania prowadzi do skonkretyzowania wzoru /9/. Rozpatrzymy ten sposób postępowania.

U podstaw wystąpi najczęściej hipoteza o jednostajnym /prostokątnym/ rozkładzie wartości, jakie może przyjmować każda ze zmiennych w przyjętym /hipotetycznie/ przedziale. Innymi słowy, przyjmując, że funkcja gęstości rozkładu prawdopodobieństwa każdej zmiennej jest stała, można wyznaczyć prawdopodobieństwa:

1. znajdowanie się celu w elementarnym rejonie $RdRd\alpha$ na danym obszarze Q , czyli $\frac{RdRd\alpha}{Q}$

2. przesuwanie się celu w dowolnym kierunku, lecz w granicach, sektora od 0 do 2π względem kursu obserwatora, czyli $d\gamma / 2\pi$.

Zgodnie z założeniem 4 /rozdz. 1.2./, o niezależności zdarzeń, prawdopodobieństwo łączne wystąpienia powyższych obu zdarzeń wyniesie:

$$f/R, \alpha, \gamma / dRd\alpha d\gamma = \frac{RdRd\alpha}{Q} \cdot \frac{d\gamma}{2}$$

a stąd poszukiwaną średnia względna gęstość prawdopodobieństwa, że cel znajduje się w rejonie $RdRd$ i różnica jego kursu względem kursu obserwatora /tj. $\gamma + d\gamma$ / występuje w sektorze od 0 do 2π , wyznaczy się z wzoru:

$$f/R, \alpha, \gamma / = \frac{R}{2\pi Q} \dots\dots\dots /10/$$

Jeśli dla powyższych elementów ruchu celu przyjąć pewne hipotetyczne granice zmienności, to na podstawie /9/ i /10/ można napisać:

$$P/R_1 \leq R \leq R_2, \alpha_1 \leq \alpha \leq \alpha_2, \gamma_1 \leq \gamma < \gamma_2 / = \frac{1}{2\pi Q} \int_{R_1}^{R_2} \int_{\alpha_1}^{\alpha_2} \int_{\gamma_1}^{\gamma_2}$$

$$RdRd \alpha \quad d\gamma \quad \dots\dots\dots /11/$$

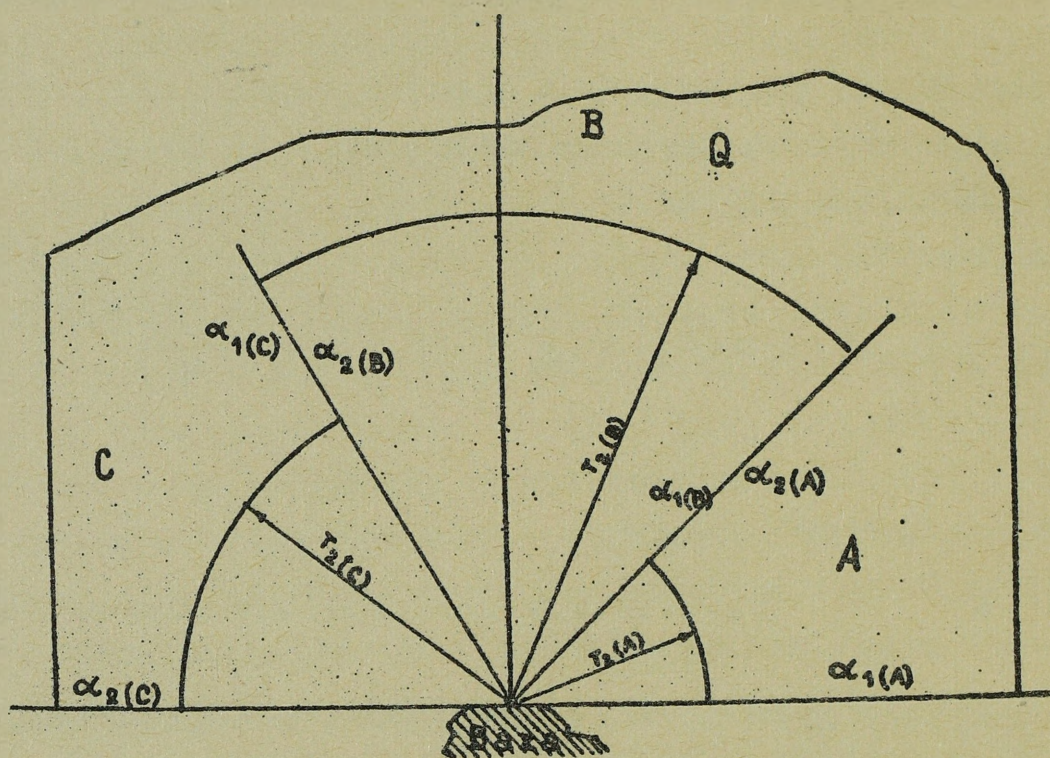
Powyższy wzór pozwala obliczyć prawdopodobieństwo znajdowania się celu w przyjętym sektorze obserwacji / $\alpha_1 \leq \alpha \leq \alpha_2$ / danego obszaru Q , w zasięgu r technicznych środków obserwacji oraz w granicach kąta / $\gamma_1 \leq \gamma < \gamma_2$ /, różnicy między wektorem prędkości obserwatora i celu.

Przykład 1. W ramach systemu obrony pewnej bazy morskiej prowadzi się obserwację określonej części akwenu o powierzchni $Q = 800 \text{ km}^2$ w celu wykrycia nawodnych środków rozpoznania przeciwnika. Uwzględniając kierunki zagrożenia, obszar podzielono na 3 sektory o różnej powierzchni. Przyjęto, że w każdym sektorze działa przynajmniej jeden środek rozpoznania przeciwnika, lecz ich położenie i kierunki ruchu nie są znane.

Należy podzielić ogólny wysiłek środków obserwacji dla każdego sektora proporcjonalnie do prawdopodobieństwa znajdowania się na nim celu.

Hipotezy, dotyczące parametrów występujących we wzorze /11/, zawiera poniższa tabela oraz rys. 3.

Sektor	zasieg /km/		Granice sektorów		różnice kursów	
	r_1	r_2	1	2	1	2
A	0	60	$1/4 \pi$	$1/2 \pi$	π	$5/4 \pi$
B	0	150	$1/4 \pi$	$9/5 \pi$	$1/2 \pi$	$3/2 \pi$
C	0	100	$9/5 \pi$	2π	$3/2 \pi$	$9/5 \pi$



Rys. 3

Rozwiązanie. Stosując wzór /11/ otrzymamy prawdopodobieństwa wykrycia celu w poszczególnych sektorach obserwacji.

Sektor A:

$$P/60 > r_{/A/} \geq 0 : \frac{1}{2} - \pi > \alpha_{/A/} \geq \frac{1}{4} - \pi ; \frac{5}{4} - \pi > r \geq \pi / =$$

$$= \frac{60}{2 \cdot 3,14 \cdot 800} \int_0^{60} r_{/A/} dr_{/A/} \int_{1/4 \pi}^{1/2 \pi} d\alpha_{/A/} \int_{\pi}^{5/4} d r_{/A/} =$$

$$= \frac{1}{5024} \cdot \frac{3600}{2} \cdot \left[-\frac{1}{2} \pi - \frac{1}{4} \pi \right] / \left[-\frac{5}{4} \pi - \pi \right] \approx 0,07$$

Sektor B:

$$P/150 > r/B \geq 0; \frac{9}{5} \pi > \alpha/B \geq \frac{1}{4} \pi; \frac{3}{2} \pi > \gamma/B \geq \frac{1}{2} \pi / =$$

$$= \frac{1}{5024} \cdot \frac{22500}{2} \cdot \frac{1}{4} \pi \cdot \frac{1}{4} \pi \approx 0,4511.$$

Sektor C:

$$P/100 > r/C \geq 0; 2\pi > \alpha/C \geq \frac{9}{5} \pi; \frac{9}{5} \pi > \gamma/C \geq \frac{3}{2} \pi =$$

$$= \frac{1}{5024} \cdot \frac{10000}{2} \cdot \frac{1}{5} \pi \cdot \frac{3}{10} \pi \approx 0,18.$$

Posiadane środki obserwacji należy podzielić w stosunku 7 : 45 : 18, czyli dla sektorów A - 10%, B - 65%, C - 25%.

Otrzymane prawdopodobieństwa można również interpretować następująco: jeśli na danym obszarze 800 km² działa większa liczba celów, to w każdym sektorze będzie znajdowało się odpowiednio: 7%, 45% i 18% ich ogólnej liczby.

4. Podstawowe typy zadań kinematyki poszukiwania

celu

W poprzednim rozdziale rozpatrzono ogólny przypadek poszukiwania, lecz posłużono się przykładami z działań w przestrzeni dwuwymiarowej oraz /w ostatnim przykładzie/ akcji obserwatora nieruchomego. Rozwiniemy model poszukiwania, wuzględniając również ruch obserwatora, przy czym dla uproszczenia rozważań ograniczymy się do przestrzeni dwuwymiarowej, w której techniczne środki obserwacji działają okręźnie.

Przyjmijmy, że istnieją informacje, pozwalające wysunąć dość uzasadnioną hipotezę, że na przyjętym obszarze poszukiwania Q działa M celów jednorodnych z określoną prędkością v. Jeśli ponadto założymy, że gęstość prawdopodobieństwa występowania celów na tym obszarze, jest stała, to

na jednostkę obszaru przypadnie $m_0 = M/Q$ celów, a w zasięgu środków obserwacji o promieniu r przypadnie $n = r^2$ m celów.

Ponieważ, w ciągu jednostki czasu t , obserwator dokona przeglądu obszaru o powierzchni:

$$2 rvt = 2 rt \sqrt{v^2 + u^2 - 2vu \cos \gamma} \dots\dots\dots/12/$$

/por. wzór /1//, zatem, uwzględniając możliwość wejścia do tego obszaru celi pod dowolnymi kątami w granicach 2π /czyli na jednostkę obszaru $m_0 d\gamma/2\pi$ /, otrzymamy średnią liczbę celów:

$$n = \frac{rm_0}{\pi} \int_0^{2\pi} \sqrt{v^2 + u^2 - 2vu \cos \gamma} \dots\dots\dots /13/$$

Aby powyższemu wzorowi nadać wartość praktyczną, należy go doprowadzić do postaci całki eliptycznej zupełnej drugiego rodzaju^{x/}, czyli:

$$n = \frac{4}{\pi} \frac{rm_0}{v+u} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{1-k^2 \sin^2 t} dt \dots\dots\dots /14/$$

gdzie $k^2 = \frac{4vu}{(v+u)^2}$. Przy rozwiązywaniu zadań można korzystać

z tablic obliczonych dla różnych wartości $E/k, \frac{\pi}{2} /xx/$

Przykład 2. Na obszarze poszukiwania o powierzchni 15000 km² działa M=30 środków rozpoznania przeciwnika, ze średnią prędkością 15 km/godz. w różnych kierunkach. Prędkość obserwatora wynosi 30 km/godz. Ile celów wykryje on w ciągu

x/ Tok postępowania podano w przypisie nr 1.
xx/ Tamże.

godziny przy zasięgu swych środków $r = 30$ km.

Rozwiązanie:

1. Na jednostkę obszaru poszukiwania przypada:

$$m_0 = M/Q = 30/15000 = 0,002 \text{ celu/km}^2;$$

2. Współczynnik:

$$k = \frac{2 \sqrt{15 \cdot 30}}{15 + 30} = 0,94.$$

3. Stąd

$$\alpha = \text{arc Sin } 0,94 \approx 70^\circ$$

4. Z tabeli całek eliptycznych zupełnych drugiego rodzaju wybieramy dla $\alpha = 70^\circ$:

$$E/k, \frac{\pi}{2} / = 1,1184$$

5. Podstawiając powyższe wartości do wzoru:

$$n = \frac{4 \cdot 30 \cdot 0,002}{15 + 30} \cdot 1,1184 \approx 4,37$$

Przykład 3. Treść jak w przykładzie 2, lecz prędkość celu wynosi 20 km/godz., natomiast prędkość obserwatora 10 km/godz. Pozostałe dane bez zmian.

Rozwiązanie:

1. $m_0 = 30/15000 = 0,002$

2. $k = \frac{2 \sqrt{20 \cdot 10}}{20 + 10} \approx 0,81$

3. $\alpha = \text{arc Sin } 0,81 \approx 54^\circ$

4. Dla $\alpha = 54^\circ$, otrzymamy: $E/k, \frac{\pi}{2} / = 1,2681$

Bad

$$n = \frac{4,30 \cdot 0,002}{3,14} / 20 + 10 / \cdot 1,2681 \approx 3,05.$$

Przykłady 2 i 3 wskazują, że w miarę zmniejszania się prędkości obserwatora i celów, maleje średnie liczbę wykryć /na jednostkę czasu/ w obszarze zasięgu środków obserwacji, i odwrotnie.

Z wzoru /14/ ponadto wynika, że w celu uchylenia się przed wykryciem należy jaknajbardziej zmniejszyć prędkość, unikając kursu spotkaniowego z celem.

Powyższe zadanie można traktować jako, w pewnym sensie, próbę ogólniejszego spojrzenia na proces poszukiwania w ujęciu kinematycznym. Z kolei, zadanie to można konkretyzować, zależnie od charakteru zadania obserwatora oraz sposobu patrolowania obszaru.

W powyższych dwóch przypadkach /przykład 2 i 3/ ocenialiśmy liczbę celów, występujących w zasięgu obserwatora przesuwającego się w dowolnym kierunku na danym obszarze poszukiwania. Obecnie rozpatrzmy przypadek obliczenia ilości celów, pojawiających się w zasięgu obserwatora /w ciągu jednostki czasu/, przesuwającego się ściśle określonym kursem / α /.

Ponieważ liczba celów, jakie w ciągu jednostki czasu mogą znaleźć się w zasięgu obserwatora /na różnych kursach/, zależy od stosunku prędkości u/v , wyróżnimy dwa przypadki: pierwszy, gdy $u \leq v$ oraz drugi - gdy $u > v$.

Rozpatrzmy je. Przede wszystkim, najogólniej rzecz biorąc, można przyjąć, że zgodnie z założeniem o jednostajnym rozkładzie celów na obszarze poszukiwania, w ciągu jednostki czasu, gęstość prawdopodobieństwa wejścia celu w granice kątów kursowych obserwatora α , $\alpha + d$, wyniesie:

$$P / \alpha / d\alpha = \frac{n_0 / \alpha /}{n} d\alpha \dots\dots\dots /15/$$

przyczym:

$$n = \int_0^{2\pi} n_0 / \alpha / d\alpha .$$

$$n_0 / \alpha / = \frac{m_0 r}{2\pi} \int_a^b w \cos \varphi \, d\varphi \dots \dots \dots /16/$$

ponieważ w przedziale /a,b/ interesują nas tylko wartości dodatnie funkcji podcałkowej względem zmiennej φ przyjmującej wartości w granicach od 0 do π . Nie trudno stwierdzić, że wzór /16/ można przedstawić w postaci^{x/};

$$n_0 / \alpha / = \frac{m_0 r}{2\pi} \int_a^b /u \cos \alpha - v \cos / \varphi - \alpha / \, d\varphi \dots \dots \dots /17/$$

przy dolnej granicy całkowania^{xx/}:

$$a = \arccos \left/ \frac{u}{v} \cos \alpha \right/ \dots \dots \dots /18/$$

oraz - górnej granicy:

$$b = \arccos \left/ - \frac{u}{v} \cos \alpha \right/ + \pi \dots \dots \dots /19/$$

W wyniku scałkowania wyrażenie /17/ w powyższych granicach, dla przypadku $u \leq v$, otrzymamy:

$$n_0 / \alpha / = \frac{m_0 r}{\pi} \left[u \cos \alpha \arccos \left/ - \frac{u}{v} \cos \alpha \right/ + \sqrt{v^2 - u^2 \cos^2 \alpha} \right] /20/$$

Gęstość prawdopodobieństwa, że w ciągu jednostki czasu cele te znajdą się w strefie technicznych środków wykrycia obserwatora, przesuwającego się pod kątem kursowym α , określimy na podstawie wzoru ogólnego /15/, wprowadzając do niego wyrażenia /14/ i /20/, czyli:

$$P / \alpha / = \frac{n_0 / \alpha /}{n} = \frac{s \cos \alpha \left[u \cos \alpha \arccos \left/ - \frac{u}{v} \cos \alpha \right/ + \sqrt{v^2 - u^2 \cos^2 \alpha} \right]}{4 / 1 + s / E / k, \quad \pi / 2 /}$$

x/ Por. przypis nr 2.
xx/ por. przypis nr 3.

gdzie $s = u/v$, a b określa wzór /19/.

Rozpatrując przypadek $u > v$ wyróżnimy następujące możliwości:

$$1. \begin{cases} \arccos \left(-\frac{v}{u} \right) \leq \alpha \leq \arccos \left(-\frac{v}{u} \right), & c \leq 1; \\ -\arccos \left(-\frac{v}{u} \right) \leq \alpha \leq -\arccos \left(-\frac{v}{u} \right) \end{cases}$$

$$2. -\arccos \left(-\frac{v}{u} \right) \leq \alpha \leq \arccos \left(-\frac{v}{u} \right), \quad c \geq 1;$$

$$3. \arccos \left(-\frac{v}{u} \right) \leq \alpha \leq -\arccos \left(-\frac{v}{u} \right), \quad c \leq 0;$$

gdzie $\arccos \left(-\frac{v}{u} \right) \cos \alpha = c$.

Srednia liczba celów, przesuwających się z prędkością v , jakie mogą znaleźć się w ciągu jednostki czasu w strefie technicznych środków wykrywania obserwatora, przesuwającego się z prędkością u /gdzie $u > v$ / na kącie kursowym α , w granicach powyższych możliwości, wyniesie:

ad 1 - nie różni się od przypadku $u \leq v$, a stąd można stosować wzór /20/ oraz dla wyznaczenia gęstości prawdopodobieństwa tego zdarzenia - wzór /21/;

ad 2 - gdy kąt kursowy α mieści się w powyższych granicach, otrzymamy:

$$n_0 / \alpha / = m_0 r u \cos \alpha \dots\dots\dots /22/$$

oraz

$$P / \alpha / = \frac{s \cos \alpha}{4/1+s/E/k, \pi/2/} \dots\dots\dots /23/$$

ad 3 - dla kąta kursowego α , zawartego w powyższych granicach, otrzymamy:

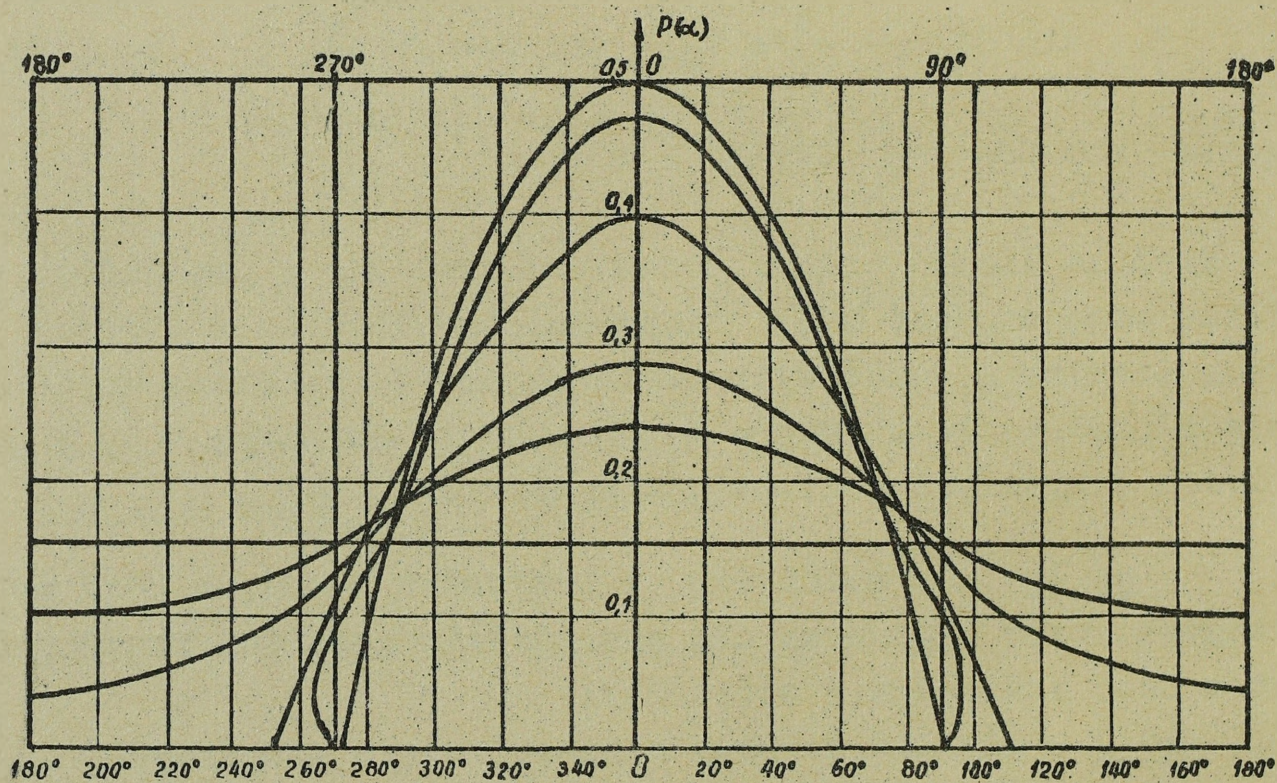
$$n_0 / \alpha / = 0 \dots\dots\dots /24/$$

oraz

$$P / \alpha / = 0 \dots\dots\dots /25/$$

Wzory /21/, /23/ i /25/ można zastąpić nomogramem /rys.5/, pozwalającym wyznaczyć gęstość prawdopodobieństwa wejścia celu w zasięg obserwacji pod różnymi kątami kursowymi oraz dla stosunków prędkości obserwatora i celu /s/ od 0 do 2.

Korzystając z powyższego wykresu można ocenić gęstość prawdopodobieństwa znalezienia się celu w strefie środków poszukiwania, niezależnie od ilości celów w danym rejonie oraz odległości od nich do obserwatora.



Rys. 5

Przykład 4. Na podstawie informacji z rozpoznania lotniczego ustalono, że dany akwen poszukiwania o powierzchni $Q = 10000 \text{ km}^2$ patroluje 50 jednostek przeciwnika przesuając się w różnych kierunkach ze średnią prędkością

20 km/godz. Obliczyć ilość celów z jaką może w ciągu godziny spotkać się obserwator, poruszający się z prędkością 30 km/godz. posiadając środki wykrywania o zasięgu 50 km. Ocenić gęstość prawdopodobieństwa spotkania z celem z kierunków: 30° , 60° , 90° .

Rozwiązanie

1. $m_0 = 50/10.000 = 0,005$ celów/km²

2. $k = \frac{2 \sqrt{20 \cdot 30}}{20+30} = 0,98; \quad \alpha = \arcsin 0,98 \approx 80^\circ;$

$$E/k, \quad \pi/2/ = 1,04$$

3. $n = \frac{4 \cdot 50 \cdot 0,005}{3,14} / 20+30/ \cdot 1,04 \approx 1,7$ celu.

4. Gęstość prawdopodobieństwa:

przy $\alpha = 30^\circ$ $\left[- \arccos \left| \frac{20}{30} \right| \leq 30^\circ \leq \arccos \left| -\frac{20}{30} \right| \right] =$
 $= -48^\circ \leq 30^\circ \leq 48^\circ$

w/g /23/: $P/30^\circ/ = \frac{3,14 \cdot 1,5 \cdot \cos 30^\circ}{4/1+1,5/ \cdot 1,04} \approx 0,5;$

przy $\alpha = 60^\circ$ $\left[\arccos \left| \frac{20}{30} \right| \leq 60^\circ \leq \arccos \left| -\frac{20}{30} \right| \right] =$
 $= 48^\circ \leq 60^\circ \leq 96^\circ;$

w/g /21/: $P/60^\circ/ = \frac{1,5 \cdot 0,5 \cdot 2,39 + \sqrt{1 - \frac{900 \cdot 0,25}{400}}}{4/1+1,5/ \cdot 1,04} \approx 0,25$

Przy $\alpha = 90^\circ$

w/g /21/: $P/90^\circ/ \approx 0,1.$

5. Wyznaczenie prawdopodobieństwa wykrycia celu zależnie od kierunku jego ruchu

Obliczając prawdopodobieństwo wykrycia celu zakładano: równomierność ich rozmieszczenia na obszarze poszukiwania i znajomość prędkości, natomiast pomijano kierunki ruchu. Obecnie uwzględnimy również ten czynnik. Innymi słowy: przyjmując jako znane, położenie celu w danym momencie czasu oraz jego prędkość, wyznaczmy prawdopodobieństwo wykrycia zależnie od sektora możliwych jego kursów. Oznaczmy je symbolem $P/\alpha, R/$.

Jak wynika z rozważań w rozdz. 2., cel znajdujący się w danym momencie w odległości R od obserwatora /rys.1,2/, znajdzie się w zasięgu środków obserwacji /tj. na obszarze o promieniu r , gdy $r \leq R/$, jeśli przedłużenie wektora \vec{w} prędkości względnej celu przetnie koło o promieniu r . Prawdopodobieństwo wejścia celu do tego obszaru wyniesie:

$$P / \alpha, R/ = \frac{\gamma / R, \alpha /}{2 \pi} \dots \dots \dots /26/$$

gdzie $\gamma / R, \alpha /$ wyznacza obszar obejmujący wszystkie kąty γ , tj. wszystkie różnice między kątami kursów celu, przy których jego wektor \vec{w} jest zwrócony w głąb obszaru o promieniu r .

Wyznaczenie wielkości $\gamma / R, \alpha /$ metodą analityczną jest dość uciążliwe, natomiast o wiele łatwiej i szybciej określić ją graficznie. Sposób ten przedstawiono na rys.6 dla trzech różnych przypadków, wynikających z położenia celu względem obserwatora oraz stosunku ich prędkości.

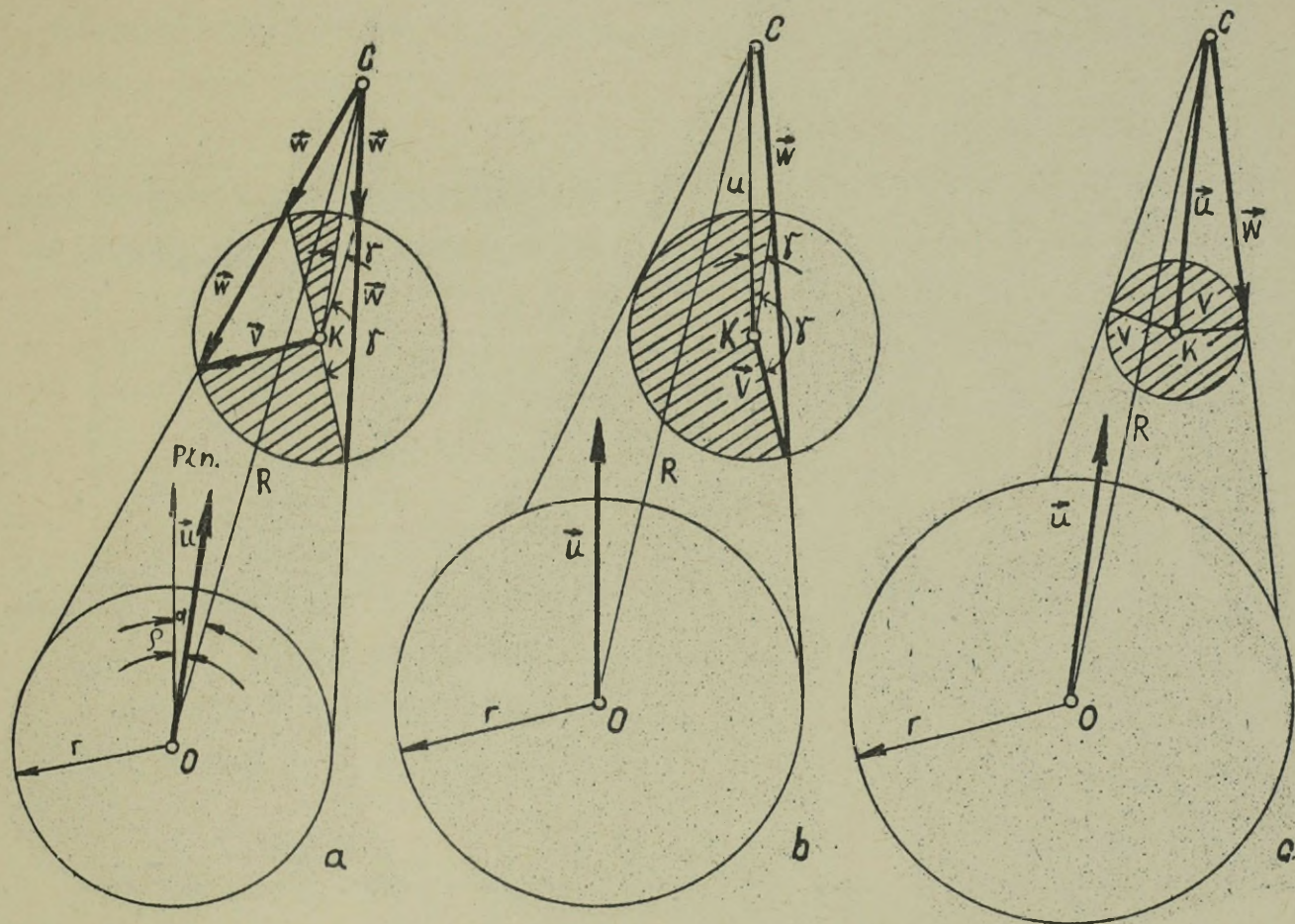
Elementy wspólne dla tych przypadków będą:

1/z określonego punktu O /położenia obserwatora w danym momencie czasu/ rysujemy:

- koło o promieniu r , odpowiadającemu zasięgowi obserwacji;
- wektor prędkości obserwatora \vec{u} ;
- odcinek $OC=R$ /pod kątem $\alpha /$, odpowiadający odległości obserwatora do celu

2. Z punktu C w kierunku przeciwnym do \vec{u} wrysowuje się odcinek CK równy modułowi wektora \vec{u} .

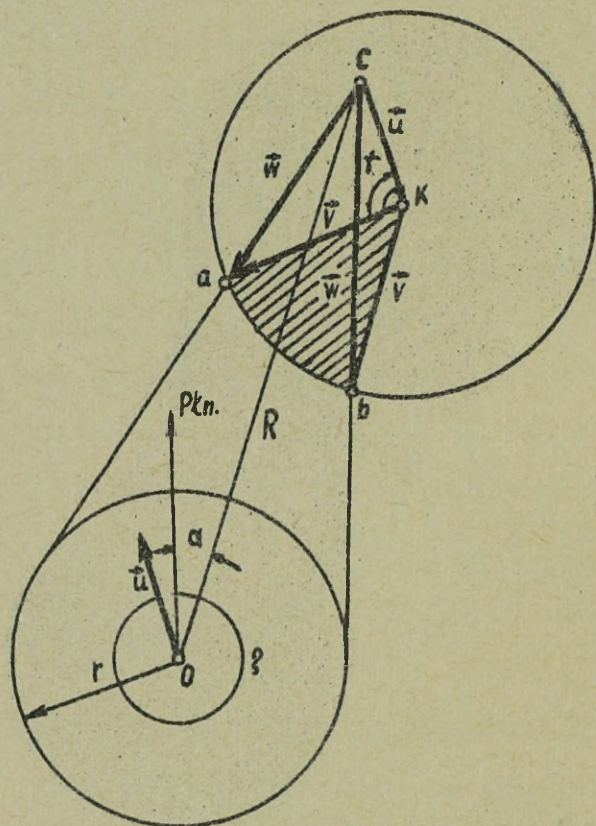
3. Z punktu K rysuje się okrąg koła o promieniu równym modułowi wektora prędkości celu \vec{v} .



Rys. 6.

Wynika stąd, że zależnie od położenia celu i stosunku u do v można z punktu C przeprowadzić tylko określone styczne, a mianowicie: w przypadku gdy wektor prędkości względnej celu \vec{w} jest zwrócony w głąb koła o promieniu r /włącznie z ewentualnymi stycznymi do tego koła /rys.6ab/. W ten sposób w kole o promieniu \bar{r} powstanie sektor możliwych wektorów prędkości bez-względnych celu /obszary zakreskowane/, skierowanych w głąb koła o promieniu r . Stosunek powierzchni tych sektorów /rys.6a/, lub sektora /6b/ do powierzchni całego koła określa prawdopodobieństwo wykrycia celu w danym momencie czasu. Gdyby cel i obserwator przesuwali się nadal w tych samych kierunkach z niezmiennymi prędkościami, prawdopodobieństwo wykrycia celu będzie wzrastało /np. od sytuacji przedstawionej na rys. 6a do sytuacji - na rys. 6b/, aż wystąpi pewność wykrycia /np. w

sytuacji - na rys. 6c/, czyli $\gamma/R, \alpha/ = 2\pi$, a stąd $P/\alpha, R/ = 1$.



Rys. 7.

Uogólnienie powyższej metody zilustrujemy na przykładzie.

$$\alpha = 20^\circ, R = 75 \text{ km},$$

$$r = 25 \text{ km},$$

$$u = 20 \text{ km/godz.}$$

$$v = 30 \text{ km/godz.}$$

Rozwiązanie graficzne przedstawione na rys.7.

Sektor wektora \vec{w} wynosi

$$\gamma/R, \alpha/ = \sphericalangle a K b \approx 52^\circ =$$

$$= 0,28$$

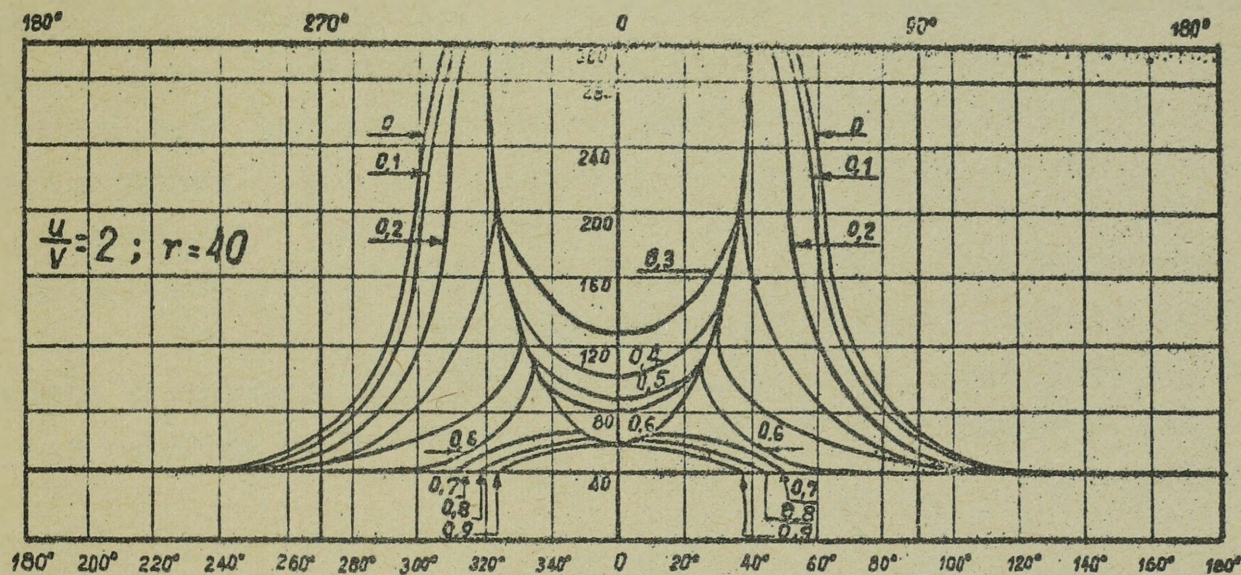
Z wzoru /26/ wyznaczymy:

$$P/\alpha, R/ = \frac{\gamma/R, \alpha/}{2\pi} =$$

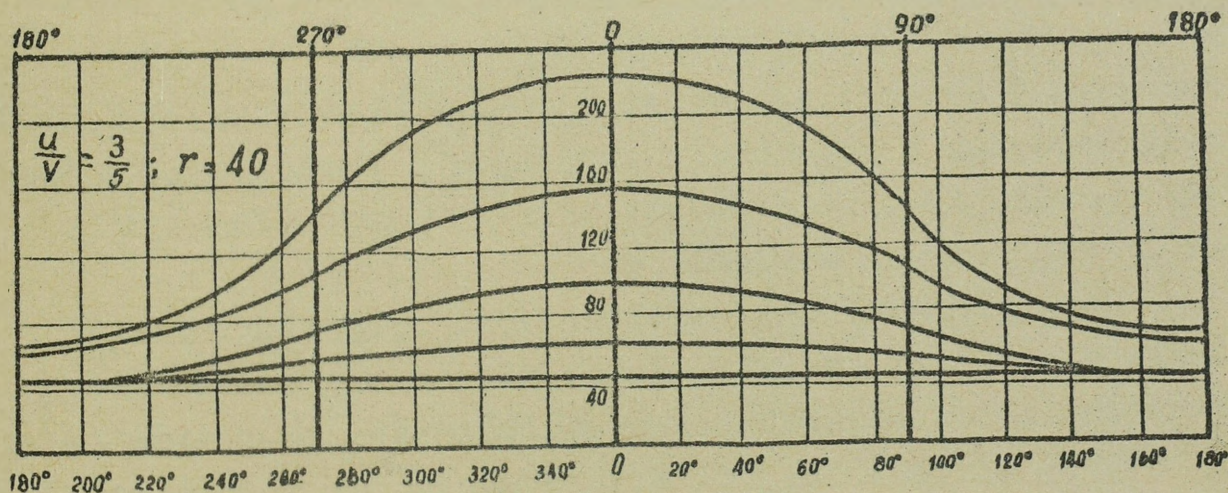
$$= \frac{0,28 \pi}{2\pi} = 0,14$$

W oparciu o powyższe rozwiązania można wykonać dla celów praktycznych odpowiednie nomogramy, przyspiszające tok obliczeń. Zakładając, że na obszarze poszukiwania cele są rozmieszczone równomiernie oraz przyjmując różne stosunki prędkości obserwatora do prędkości celu można narysować siatkę składającą się z układu kątów kursowych α i skali odległości R , na którą wprowadzić odpowiednie krzywe równych prawdopodobieństw $P/\alpha, r/$ wejścia celu do obszaru obserwacji.

Na rys. 8 przedstawiono przykładowo linie równych prawdopodobieństw dla stosunku $u/v = 2$, a na rys. 9 - $u/v = 3/5$, przy $r = 40$



Rys. 8



Rys. 9

Założenie o równomierności rozmieszczenia celów na obszarze poszukiwania jest pewnym uproszczeniem, które w praktyce będzie rzadko występowało. Należy liczyć się z możliwością, że rozmieszczenie celów w poszczególnych okresach czasu będzie podporządkowane różnym rozkładom prawdopodobieństw a nie tylko prawu rozkładu normalnego.

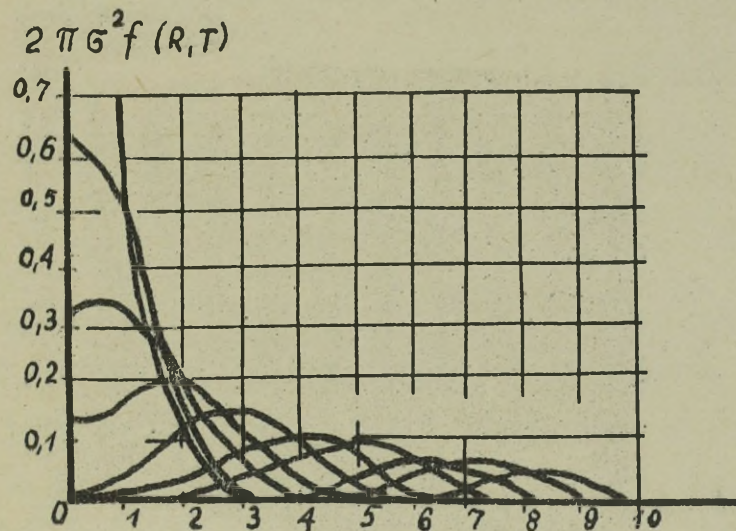
Rozpatrzmy następujący przypadek. W toku akcji, w pewnym momencie, obserwator wykrył cel i określił jego położenie, popełniając przy tym błąd podlegający pewnemu prawu rozkładu /normalnego, eliptycznego, kołowego itp./. Przyjmijmy, że w momencie t kontakt z celem utracono i przez okres $t + at$ / $a > 1$ / nie prowadzono obserwacji. Można więc przewidywać, że cel przesunął się z prędkością v w nieznanym kierunku, a tym samym wystąpiło kolejne zadanie wyznaczenia nowego rozkładu $f/R, t+at/$, tj. na okres utraty kontaktu. Jeśli wiadomo, że pierwotny błąd w ocenie położenia jest podporządkowany prawu rozkładu normalnego kołowego z odchyleniem standartowym σ , to nowy rozkład można wyrazić następująco:

$$f/R, t+at/ = \frac{1}{2 \pi \sigma^2} \exp \left(- \frac{R^2 + v^2 \frac{T^2}{2\sigma^2}}{2\sigma^2} \right) I_0 \left(\frac{R v T}{\sigma^2} \right) \dots /27/$$

Przy czym $T = t+at$, natomiast $I_0 \left(\frac{R v T}{\sigma^2} \right)$ jest funkcją Bessela rzędu zerowego o argumencie urojonym.^{x/} Korzystając z wzoru /27/ na rys. 13 przedstawiono układ krzywych funkcji $f/R, T/$ dla różnych wartości T .

Jako początek osi współrzędnych przyjęto punkt, w którym cel został wykryty. Jak wynika z zagęszczenia się krzywych, określających prawdopodobieństwa położenia celu na różnych kierunkach, cel może znaleźć się w różnych miejscach. Zadanie sprowadzi się więc do określenia największego prawdopodobieństwa ponownego wykrycia celu. Wykonanie tego

x/ Wartości funkcji Bessela można wyznaczyć korzystając np. z książki: I.N. Bronsztejn, K.A. Siemiendrajew, Poradnik Encyklopedyczny Matematyka, str.542-544. Wyd. PWN 1959.



Rys. 10.

zadania wymaga takiego doboru kursów, który zapewni przebywanie i prowadzenie obserwacji w rejonach charakteryzujących się największą gęstością rozkładów celu. Przeprowadzone badania wykazały, że ten warunek spełnia trasa określona przez spiralę logarytmiczną.

6. Poszukiwanie w przestrzeni trójwymiarowej.

6.1. Pojęcia ogólne

W niniejszym rozdziale rozpatrzemy możliwości rozwinięcia zasad i reguł poszukiwania w przestrzeni dwuwymiarowej na przypadki bardziej złożone:

1. gdy proces poszukiwania realizuje obserwator znajdujący się w trzecim wymiarze w stosunku do celu przesuwającego się na płaszczyźnie /np. samolot w stosunku do okrętu nawodnego/;

2/ gdy obserwator i cel przesuwają się w przestrzeni trójwymiarowej lecz w różnych, właściwych sobie środowiskach /np. samolot w stosunku do okrętu podwodnego/.

Z poprzednich rozważań wiadomo, że prawdopodobieństwo wykrycia celu jest równe 1 /zdarzenie pewne/, gdy odległość od obserwatora do celu jest co najwyżej równa odległości wykrycia. Na tej podstawie możemy przystąpić do określenia wszelkich prawdopodobieństw wykrycia, zależnie od względnej trasy przesuwania się celu, a ściślej - najmniejszej odległości do celu w momencie jego przenikania do strefy obserwacji. Odległość tę nazwiemy długością trawersu względnego, a rozkład prawdopodobieństw wykrycia celu, w momencie jego przenikania przez granicę strefy obserwacji, - rozkładem trawersu względnego. Pojęcie to przedstawiono na rys. 11^a.

Cele C_1 i C_2 przenikają do strefy obserwacji /r/ w punktach a_1 i a_2 . Najkrótsze ich odległości od obserwatora

$$OC'_1 = OC_2$$

oraz prędkości względne celu w okresie obserwacji t

$$w_1 t = w_2 t$$

przyjęto jako równe dla utrzymania symetrii rozkładu. W związku z tym prawdopodobieństwa wykrycia obu celów będą jednakowe, gdyż czasy ich przechodzenia przez strefę obserwacji będą takie same. Rozkład prawdopodobieństw wykrycia tych celów, zależnie od wielkości ich trawersów względnych, tj. OC'_1 , OC'_2 , przedstawia na dolnej części rys. 11 figura wrysowana linią ciągłą krzywą.

Prawdopodobieństwa wykrycia celu na trawersie /0,x/ w momencie t będą kształtowały się następująco:

1. $P/x/ = 1$

dla:

$$-\sqrt{r^2 - \left|\frac{wt}{2}\right|^2} < x < \sqrt{r^2 - \left|\frac{wt}{2}\right|^2} \dots\dots\dots /28/$$

2. $P/x/ = 0$

dla:

$$r < x < -r \dots\dots\dots /29/$$

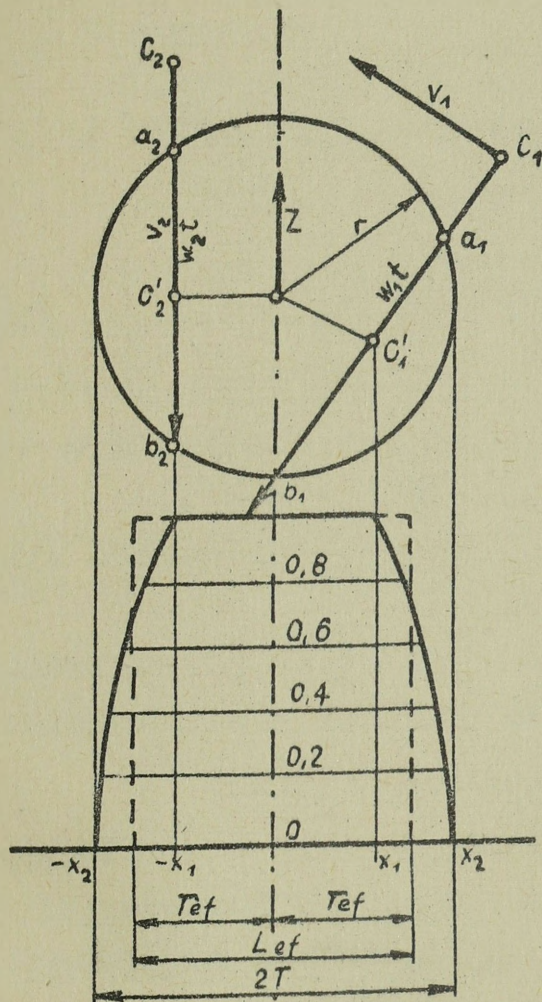
3. $P/x/ = \frac{2\sqrt{r^2 - x^2}}{wt}$

dla:

$$\sqrt{r^2 - \left|\frac{wt}{2}\right|^2} < x < r. \dots\dots\dots /30/$$

lub

$$-r < x < -\sqrt{r^2 - \left|\frac{wt}{2}\right|^2}$$



Rys. 11.

W ten sposób można analitycznie wyznaczyć krzywe trawersu względnego, przedstawione w dolnej części rys.11., które z kolei pozwalają wyprowadzić trzy dalsze pojęcia niezbędne przy rachunku, a mianowicie:

1/ Efektywna szerokość rubieży poszukiwania dla jednego obserwatora / $L_{ef} = 2 r_{ef}$, rys.11/ oznacza szerokość umowną, w której granicach prawdopodobieństwo wykrycia celu jest równe 1.

Efektywną szerokość rubieży poszukiwania określa powierzchnia ograniczona przez oś odciętych i krzywą trawersu względnego /rys.11/, czyli:

Korzystając z powyższych pojęć można przystąpić do próby uzyskania odpowiedzi na następujące pytania:

1. Jaka jest efektywność danego procesu wykrywania?
2. Ile czasu powinien trwać ten proces realizowany przez grupę obserwatorów?
3. Jaki powinien być skład grupy obserwatorów, aby uzyskać określony efekt w zamierzonym czasie?
4. Jaki powinien być optymalny sposób działania grupy?

Zagadnienie te rozpatrzymy kolejno.

6.2. Efektywność wykrywania

Jako wskaźnik efektywności procesu poszukiwania stosuje się powszechnie prawdopodobieństwo wykrycia celu w danym obszarze poszukiwania.

Z doświadczeń wynika, że rozkład tych prawdopodobieństw odpowiada najczęściej rozkładowi Poissona, czyli:

$$P/n/ = 1 - e^{-n_0} \dots\dots\dots /34/$$

gdzie n_0 jest oczekiwaną liczbą wykryć, natomiast $P/n/$ oznacza prawdopodobieństwo wykrycia przynajmniej jednego celu.

Ponieważ na obszarze poszukiwania będzie najczęściej działała większa liczba celów, zatem praktycznie wskaźnik efektywności dotyczy prawdopodobieństwa wykryć nie mniejszej od zadanej liczby celów $m/$. Korzystając z wzoru Poissona, pozwalającego obliczyć prawdopodobieństwo dowolnej liczby wykryć możemy więc określić prawdopodobieństwo, że w danym obszarze zostanie wykryte przynajmniej m celów na ogólną liczbę s , czyli:

$$P/s \geq m/ = 1 - \sum_{s=0}^{s=m-1} \frac{n_0^s}{s!} e^{-n_0} \dots\dots\dots /35/$$

Na obszarze poszukiwania $/Q/$ może działać większa ilość celów poruszających się na różnych kursach i z różnymi prędkościami. Powstanie więc zagadnienie określenia oczekiwanej

liczby wykryć przez jednego obserwatora w czasie t:

$$n_0 = \frac{3 L_{ef} t}{\pi Q} \cdot \sqrt{v+u} \cdot E\left(\frac{2 \sqrt{vuy}}{u+v}; \frac{\pi}{2}\right) \dots\dots\dots /36/$$

przy czym E jest całką eliptyczną drugiego rodzaju.

Ponieważ posługiwanie się powyższym wzorem jest dość uciążliwe, istnieje możliwość zastąpienia go wzorem przybliżonym, którego podstawowy człon stanowi funkcja ilości ruchu:

$$f/a/ = \frac{2}{\pi} \cdot \sqrt{a+1} \cdot E\left(\frac{2 \sqrt{a}}{a+1}; \frac{\pi}{2}\right) \dots\dots\dots /37/$$

gdzie: a = v/u, zaś E - wspomnianą już całkę eliptyczną.

Funkcję tę łatwo ztabelaryzować lub przedstawić graficznie, przez co znacznie przyspisy się proces obliczeń oczekiwanej liczby wykryć, a mianowicie:

$$n_0 = \frac{2 r_{ef} ut}{Q} \cdot f/a/ \dots\dots\dots /38/$$

Pierwszy wyraz w tym wzorze można traktować jako tzw. współczynnik widoczności:

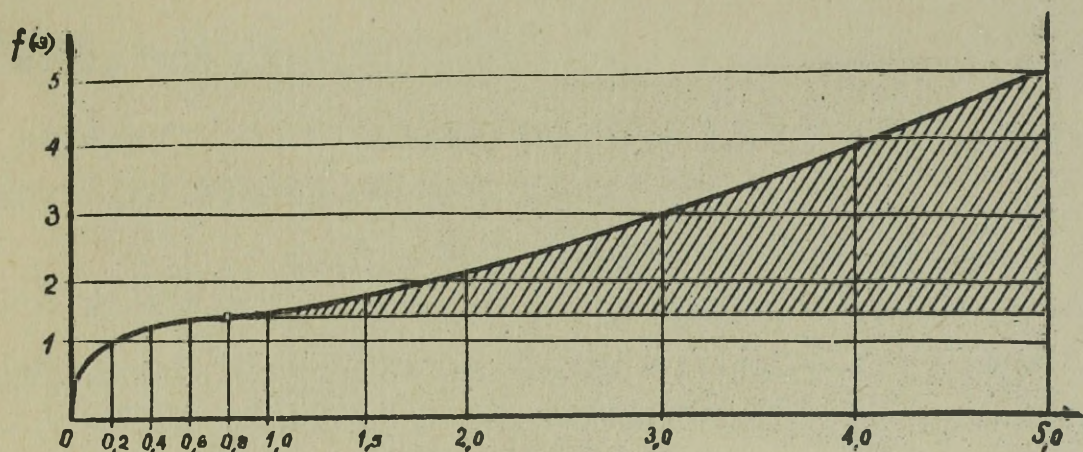
$$\zeta = \frac{2 r_{ef} ut}{Q} \dots\dots\dots /39/$$

Jak łatwo zauważyć funkcja ilości ruchu /37/ zmienia swoją wartość zależnie od stosunku prędkości celu do prędkości obserwatora. Stąd, np. w procesach poszukiwania celów morskich przez lotnictwo, a więc gdy stosunek tych prędkości będzie bardzo mały, funkcja ilości ruchu będzie bliska 1, a tym samym oczekiwaną liczbę wykryć można przyjmować w przybliżeniu jako równą współczynnikowi widoczności, czyli:

$$n_0 \approx \zeta \dots\dots\dots /40/$$

a stąd prawdopodobieństwo wykryć :

$$P \approx 1 - e^{-\zeta} \dots\dots\dots /41/$$



Rys. 12

Na wykresie /rys.12/ przedstawiono zależność funkcji ilości ruchu od stosunku prędkości celu do obserwatora. Widać stąd m.in. granice stosowalności rozwiązania przybliżonego. Obszar zakreskowany oznacza, że począwszy od $a=0,8$, gdy $f/a=1,169$ stosowanie wzorów przybliżonych może prowadzić do poważnych błędów.

W przypadku, gdy na obszarze poszukiwania działa, więcej niż jeden obserwator, przy czym każdy z nich działa samodzielnie w oddzielnym rejonie danego obszaru, wtedy oczekiwana liczba wykryć wyniesie:

$$n_0 = \sum_{i=1}^l n \zeta_i f/a/ \dots \dots \dots /42/$$

gdzie l jest liczbą obserwatorów, $i = 1, 2, \dots, l$.

Przykład:

W pewnej części akwenu morskiego o powierzchni $Q = 50.000 \text{ km}^2$ działa pewna ilość okrętów podwodnych ze średnią prędkością $v = 15 \text{ km/godz.}$ Z jakim prawdopodobieństwem można wykryć cel przy pomocy samolotu posiadającego podczas poszukiwania prędkość $u = 250 \text{ km/godz.}$, zasięg obserwacji $r = 15 \text{ km}$, w czasie przebywania w obszarze poszukiwania przez 3 godziny.

Rozwiązanie. Ponieważ $a = \frac{v}{u} = \frac{15}{250} = 0,06$ można zastosować wzór przybliżony /48/, a mianowicie:

$$\zeta = \frac{2 r_{ef} ut}{Q} = \frac{2 \cdot 15 \cdot 250 \cdot 3}{50.000} = 0,45$$

Zatem, prawdopodobieństwo wykrycia /41/ celu przynajmniej 1 raz wyniesie:

$$P \approx 1 - e^{-0,45} = 1 - 0,6376 = 0,3624 \approx 36\%$$

- przynajmniej dwa razy:

$$P \approx 1 - e^{-0,09} = 1 - 0,9139 = 0,0861 \approx 7\%$$

-przynajmniej trzy razy:

$$P \approx 1 - e^{-0,014} = 1 - 0,9861 = 0,0139 \approx 1\%$$

6.3. Ilość czasu niezbędnego dla wykrycia celu

Ocena prawdopodobieństwa wykrycia celu, której wyrazem są wyrażenia /34/, /37/, /38/, /39/ i /40/, zakładała, że przebieg procesu poszukiwania trwa lub powinien trwać t jednostek czasu. Zadanie to można odwrócić: ile jednostek czasu wymaga realizacja procesu poszukiwania by wykrycie celu nastąpiło z przyjętym prawdopodobieństwem. Jeśli z powyższych wyrażen określmy czas, otrzymamy:

$$t = \frac{-Q \ln/1- P/n/}{2r_{ef} u f /a/} \dots\dots\dots/43/$$

Przy czym $P/n/$ oznacza przyjęte prawdopodobieństwo wykrycia celu.

Przykład. Treść jak w przykładzie w rozdz. 6.2. Obliczyć czas niezbędny dla wykrycia celu z prawdopodobieństwem 0,8.

$$t = \frac{-50.000 \ln/1-0,8/}{2 \cdot 15 \cdot 250 \cdot 1,003} = 10,7 \text{ godz.}$$

/dla $a = 0,06$ $f/a/ = 1,003/$.

6.4. Niezbędna ilość obserwatorów

W podobny sposób z wzorów od /34/ do /40/ oraz /42/ można wyznaczyć liczbę obserwatorów, czyli:

$$l = \frac{-Q}{2r_{ef}} \frac{\ln/1 - P/n/}{ut'f/a} / \dots \dots \dots /44/$$

gdzie t' oznacza przyjęty czas poszukiwania.

Przykład. Treść jak w przykładzie 6.2.

Obliczyć ilość obserwatorów, którzy w ciągu 3 godzin wykryją cele z prawdopodobieństwem 0,8.

$$l = \frac{-50.000}{2 \cdot 15} \frac{\ln/1 - 0,8/}{250 \cdot 3 \cdot 1,003} \approx 3,5$$

czyli 4 obserwatorów

6.5. Optymalizacja działania grupy obserwatorów

Niezależnie od uzyskania możliwie wysokiej efektywności poszukiwania, sposób działania obserwatorów powinien uwzględniać, że będą oni przebywali w tym czasie na możliwie ograniczonym obszarze. Przy założeniu równomierności rozmieszczenia kursów celu na obszarze poszukiwania, spełnianie tych dwóch warunków nastąpi wtedy, gdy kursy poszczególnych obserwatorów również będą rozmieszczone równomiernie w stosunku do kursów celów. W przypadku gdy kursy celów są znane, wtedy zależnie od wielkości różnicy między kursem celu i obserwatora φ / oczekiwana liczba wykryć wyniesie:

Rozpatrzmy trzy przypadki:

a/ gdy $\varphi = 0$ lub $\varphi + 2\pi$, tj. gdy kursy celu i obserwatora są względem siebie równoległe, a więc w sytuacji pościgowej oczekiwana liczba wykryć będzie:

$$n_0 = \frac{2 r_{ef} ut}{Q} / 1 - \frac{v}{u} / \dots \dots \dots /45/$$

b/ gdy $\varphi = \pi$, tj. gdy kursy celu i obserwatora są skierowane ku sobie, a więc w sytuacji spotkaniowej:

$$n_0 = \frac{2 r_{ef} \cdot ut}{Q} /1 + \frac{v}{u}/ \dots \dots \dots /46/$$

c/ gdy $\varphi = \frac{\pi}{2}$ lub $\varphi = \frac{3}{4}\pi$, tj. gdy kursy celu i obserwatora są względem siebie prostopadłe:

$$n_0 = \frac{2 r_{ef} \cdot ut}{Q} \sqrt{1 + \left(\frac{v}{u}\right)^2} \dots \dots \dots /47/$$

Korzystając z wzorów /45/, /46/ i /47/ rozpatrzmy przykład obliczenia oczekiwanej liczby wykryć dla:

$Q = 50.000 \text{ km}^2$, $r = 20 \text{ km}$, $u = 300 \text{ km/godz.}$, $v = 20 \text{ km/godz.}$
 $t = 3 \text{ godz.}$

a/ $\varphi = 0$; $\varphi = \pi$

$$n_0 = \frac{2 \cdot 20 \cdot 300 \cdot 3}{50.000} /1 - \frac{20}{300}/ = 0,67$$

b/ $\varphi = \frac{\pi}{2}$

$$n_0 = \frac{2 \cdot 20 \cdot 300 \cdot 3}{50.000} /1 + \frac{20}{300}/ = 0,77$$

c/ $\varphi = \frac{\pi}{2}$; $\varphi = \frac{3}{4}\pi$

$$n_0 = \frac{2 \cdot 20 \cdot 300 \cdot 3}{50.000} \sqrt{1 + \left(\frac{20}{300}\right)^2} = 0,72$$

Jak wynika z powyższego przykładu, najwyższe wyniki uzyskuje się na kursach równoległych spotkaniowych, natomiast najniższe - na równoległych pościgowych. Praktycznie jest to oczywiste i nie wymaga wyjaśnień, Jeśli więc poszukiwanie odbywa się na kursie równoległym do kursu celów, przy czy w jednym cyklu działania obserwatora będą występowały pościgowe i spotkaniowe układy kursów, to oczekiwana liczba wykryć będzie średnią arytmetyczną wyrażen /45/ i /46/, czyli

$$n_0 = \frac{2r_{ef} \cdot ut}{Q} \dots \dots \dots /48/$$

a liczba halsów spotkaniowych będzie równa liczbie halsów pościgowych. Jeśli jednak na obszarze poszukiwania wystąpi konieczność rozmieszczenia nieparzystej liczby kursów należy dążyć by większa ich część miała charakter spotkaniowy.

Z porównania wyrażeń /47/ i /48/ wynika wyższość prostopadłego układu kursów w stosunku do równoległego. Skorzystanie z tej właściwości zwiększy efekt poszukiwania w przypadku wielocyklicznego /wielokrotnego/ przeglądu obszaru przez obserwatora dysponującego znacznie większą prędkością niż cele, najkorzystniej jest wtedy prowadzić poszukiwania stosując halsy równoległe ~~na~~przemiian z halsami prostopadłymi.

Jeśli proces poszukiwania odbywa się na dużym obszarze oraz istnieją możliwości działania kilku obserwatorów /kilka grupy obserwatorów/, wtedy korzystne jest ugrupowanie w tzw. sztyku grzebieniowym, przydzielając każdemu z nich odpowiedni kierunek. W przypadku, gdy na obszarze poszukiwania znajduje się jeden cel, wszyscy obserwatorzy posiadają tę samą prędkość, przy czym $v/u < 1$ to oznaczając przez b odległość między kierunkami działań obserwatorów, oczekiwana liczba wykryć wyniesie:

$$n_0 = \frac{ut}{Q} f/a//2 r_{ef} + b/ \dots\dots\dots /49/$$

Zastosowanie powyższego sposobu poszukiwania względnie - działania na oddzielnych kierunkach, zależy od efektywnej szerokości pasa poszukiwania dla każdego obserwatora. Porównując wyrażenie /49/ z /42/ lub jego uproszczoną postacią dla 1 obserwatorów, posiadających tę samą prędkość, tj:

$$n_0 = 1 \cdot n \cdot \xi_i \cdot f/a/ \dots\dots\dots /50/$$

dójdziemy do wniosku o ich równoważności, jeśli odległości między poszczególnymi kierunkami, występującymi przy sposobie przebieniowym są równe lub większe od efektywnej szerokości pasów poszukiwań. W przeciwnym przypadku korzystniej jest stosować poszukiwanie na oddzielnych kierunkach /rejonach/, gdyż uzyska się wyższą oczekiwaną liczbę wykryć.

7. UWAGI KONCOWE

Przedmiot badań teorii poszukiwania obejmuje zbyt wiele problemów o zróżnicowanym charakterze, by można je przedstawić w stosunkowo skromnych ramach niniejszego rozdziału. Stąd też, nawet próba klasyfikacji procesów poszukiwania została ograniczona do niezbędnego minimum. Ograniczyliśmy się tylko do kryterium charakteru i informacji o wartościach parametrów określających położenie i ruch celu i obserwatora. Podobne trudności dotyczą też przedstawienia pewnych metod budowy modeli poszukiwania. Jak można było zauważyć, ograniczyliśmy się w zasadzie do modeli typu probabilistycznego, a jako technikę ich budowy i rozwiązywania stosowaliśmy geometrię z elementami trygonometrii oraz rachunek prawdopodobieństwa.

Wydaje się jednak niezbędne, zauważyć, że istnieją również możliwości spojrzenia na technikę poszukiwania od strony klasyfikacji modeli według charakteru struktury rozkładu potencjału poszukiwania.

W stosunkowo zwięzłym wykładzie, obejmującym tylko wybrane elementy teorii poszukiwania, nie rozpatrywaliśmy też wszelkich możliwych metod rozwiązywania zadań praktycznych, związanych z wykrywaniem celów. Pominęliśmy możliwości stosowania teorii gier, teorii masowej obsługi, metod programowania liniowego i dynamicznego itp. Istnieją już obecnie dostatecznie uzasadnione przesłanki pozwalające określać optymalne elementy czasu i przestrzeni /trajektorie ruchu obserwatora/ składające się na mechanizm procesu poszukiwania celu /celów/ w przypadku dysponowania określonymi siłami i środkami, jak również - wyznaczać optymalny skład sił i środków poszukiwania oraz czasoprzestrzenny reżim ich pracy w konkretnych warunkach działania celów /przeciwnika/, przesuujących się po różnych, przypadkowych trasach i przestrzeniach wielowymiarowych /w sensie topologicznym/.

Należy również stwierdzić, że w obecnym stadium rozwoju teoria poszukiwania posiada jeszcze szereg luk i uproszczeń, które wymagają dalszych rozwinięć i urealnienia. Wskażemy tylko niektóre z nich.

Rozpatrując mechanizm procesu poszukiwania założono, że cel nie "widzi" obserwatora. W rzeczywistości obie strony posiadają te możliwości, a powodzenie jednej jest uzależnione od zaskoczenia przeciwnika, właściwych przedsięwzięć w celu dalszego uchylenia się od jego obserwacji bądź zniszczenia go. Zachodzą więc typowe sytuacje konfliktowe, których rozwiązywaniem zajmuje się teoria gier.

Praktyczne stosowanie przedstawionych metod określania efektywności poszukiwania wymaga dysponowania stosunkowo znaczną liczbą różnego rodzaju informacji oraz odpowiednią aparaturą przyspieszającą tok obliczeń. Wartość tych informacji zależy w głównej mierze od efektywności technicznych urządzeń obserwacji charakteryzujących się m.in.: zasięgiem obserwacji /r/, prawdopodobieństwem wykrywania celu w różnych warunkach otoczenia /np. oświetlenia, zakłóceń radiolokacyjnych itp./, prawdopodobieństwem wykrycia przez cel itp. Zbieranie tego rodzaju informacji na drodze prób dokonywanych klasycznymi metodami statystycznymi jest niezwykle uciążliwe, a w warunkach bojowych najczęściej mało przydatne. W związku z tym wysuwa się obecnie na czoło metoda stosowania elektronicznej techniki obliczeniowej do szybkiego wykonywania dużej liczby prób statystycznych pozwalających na uogólnienie wyników /np. zastosowanie metody Monte Carlo do określania prawdopodobieństwa wykrycia celu na rubieży dozoru/. W prostszych przypadkach oceny efektywności w warunkach bojowych dużą pomoc dają wszelkiego rodzaju nomogramy opracowane w oparciu o wyprowadzone wzory analityczne.

LITERATURA

1. EMELIANOW W.A., ABCZUK W.A., ŁAPSZIN W.P., SUZDAL W.G. Teorija poiska w wojennom diele; Wojenizdat, Moskwa 1964.
2. AFANASJEW A.A., GORBUNOW W.A.; Effektivnost obnaruženija celej radiotechniczeskimi sredstwami nabliudenija, Wojenizdat, Moskwa, 1964 .
3. MORSE F.M., KIMBALL D.E.: Methods of Operations Research, tłum. z ang.: Metody issledowanija operacii, "Sowietskoje Radio", Moskwa, 1956.

4. Nawigacja taktyczna. Poszukiwanie przeciwnika na morzu /rozd. 4/. Wyd. MON, Dowództwo Marynarki Wojennej, 1950.

5. PAŁKIN W.K.: Obróbka nabliudienij. "Morskoj Sbornik", nr 2 /1961.

6. SKIBINSKI J.: Wstęp do teorii poszukiwania. Wyd. ASG 1964.

7. SKWORCOW M.J.: Ob algoritmach maszynogo rieszenija zadacz takticzeskogo manewrirowanija. "Morskoj Sbornik", nr 3/1962.

8. WENTCEL E.S.: Wwiedienije w issledowanije operaczi. "Sowietskoje Radio", Moskwa, 1964.

ELEMENTY PROCESU POSZUKIWANIA

PRZYPIS nr 1

Wzór na wyznaczenie średniej liczby celów, jakie mogą wejść do strefy wykrywania, pod dowolnym kątem względem

$$n = \frac{r m_0}{\pi} \int_0^{\pi/2} \sqrt{v^2 + u^2 - 2vu \cos \gamma} \dots\dots\dots /13/$$

Aby umożliwić zcałkowanie tego wyrażenia, wyraz pod pierwiastkiem przekształcimy następująco:

$$w^2 = v^2 + u^2 - 2vu \cos \gamma = (v+u)^2 - 2vu(1 + \cos \gamma) =$$

$$= (v+u)^2 \left[1 - \frac{2vu(1 + \cos \gamma)}{(v+u)^2} \right] =$$

$$= (v+u)^2 \left[1 - \frac{2vu(1 + \cos \gamma)}{(v+u)^2} \right] \dots\dots\dots /13,1/$$

Podstawiając do wyrażenia w nawiasie kwadratowym:

$$1 + \cos \gamma = 2 \cos^2 \frac{\gamma}{2}$$

Otrzymamy:

$$1 - \frac{4vu \cos^2 \frac{\gamma}{2}}{(v+u)^2}$$

Ponieważ w wyniku przedstawienia wyrażenia /13.1/ do wzoru /13/ i zmiany przedziału całkowania od 0 do $\pi/2$:

$$n = \frac{4 r m_0}{\pi} (v+u) \int_0^{\pi/2} \sqrt{1 - \frac{2vu(1 + \cos \gamma)}{(v+u)^2}} d\gamma \dots\dots\dots /13.2$$

następnie, po przejściu do $t = \frac{\pi}{2} - \frac{\gamma}{2}$, skąd $d\gamma = -2 dt$, wyrażenie /13.2/ przyjmie postać:

$$n = - \frac{2 \frac{m_0}{r}}{\pi} /v+u/ \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{1 - \frac{4 \cdot vu}{/v+u/2} \text{Cos}^2 / \frac{\pi}{2} - t/dt}$$

...../13.3/

oraz przyjmując $k^2 = \frac{4 \cdot vu}{/v+u/2}$, otrzymamy:

$$n = \frac{4 \cdot m_0}{\pi} /v+u/ \int_0^{2\pi} \sqrt{1 - k^2 \text{Sin}^2 t} dt \dots\dots\dots /14/$$

Łatwo zauważyć, że w ten sposób uzyskano przejście do całki eliptycznej zupełnej drugiego rodzaju, w postaci ogólnej:

$$E = E /k, \frac{\pi}{2} / = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{1 - k^2 \text{Sin}^2 \varphi} d\varphi$$

/por. I.N. Bronsztejn i K.A. Siemiediajew: Poradnik Encyklopedyczny Matematyka, PWN, 1959, str.92-93/ pozwalającej obliczyć wzór /13/ przy pomocy odpowiednich tablic.

PRZYPIIS nr 2

Traktując funkcję podcałkowej /16/ jako iloczyn skalarny wektorów \vec{w} i \vec{z} , otrzymamy:

$$\vec{w} \cdot \vec{z} = w \text{Cos} \varphi,$$

a ponieważ:

$$\vec{w} = \vec{v} - \vec{u}$$

stąd

$$\vec{u} \cdot \vec{z} - \vec{v} \cdot \vec{z} = w \text{Cos} \varphi$$

Ponieważ

$$\vec{u} \cdot \vec{z} = u \text{Cos} \alpha, \vec{v} \cdot \vec{z} = v \text{Cos} / \gamma - \alpha /$$

zatem, wzór /16/ przyjmie postać:

$$n_0 / a / = \frac{m_0 \cdot r}{2\pi} \int_a^b /u \text{Cos} \alpha - v \text{Cos} / \gamma - \alpha / d\gamma$$

PRZYPISY nr 3

Ponieważ funkcja podcałkowa /17/ powinna przyjmować tylko wartości dodatnie, zatem

$$u \cos \alpha - v \cos / \gamma - \alpha / > 0$$

stąd dolna granica całkowania będzie:

$$\arccos \frac{u}{v} \cos \alpha / < / \gamma - \alpha / \dots \dots \dots /17.1/$$

oraz górna granica:

$$2\pi - \arccos \frac{u}{v} \cos \alpha / < / \gamma - \alpha / \dots \dots /17.2/$$

Ponieważ

$$2\pi - \arccos \frac{u}{v} \cos \alpha / = \pi - \arccos \frac{u}{v} \cos \alpha / + \pi$$

oraz

$$\arccos \frac{u}{v} \cos \alpha / = \pi - \arccos \frac{u}{v} \cos \alpha /$$

zatem

$$\arccos \frac{u}{v} \cos \alpha / + \pi > / \gamma - \alpha / \dots \dots \dots /17.3/$$

Uwzględniając nierówności /17.1/, /17.3/ można wyznaczyć granice całkowania funkcji podcałkowej /17/, dla przypadku $u > v$, a mianowicie:

$$a = \arccos \frac{u}{v} \cos \alpha / \dots \dots \dots /18/$$

$$b = \arccos \frac{u}{v} \cos \alpha / + \pi \dots \dots \dots /19/$$

Odbito 100 egz.

Egz. nr 1-100 bibl. jawna
Wyk. płk SKIBINSKI
Druk. K.L.
Nr. ks. 3317/WW
Druk ASG - O-XV-3167

