AKADEMIA SZTABU GENERALNEGO
im. Generała Broni Karola Świerczewskiego

KATEDRA CYBERNETYKI

płk dr Jerzy SKIBIŃSKI

OPTYMALIZACJA ALOKACJI ZASOBÓW w ujęciu heurystycznym

WARSZAWA KWIECIEŃ 1970

AKADEMIA SZTABU GENERALNEGO
im. Generała Broni Karola Świerczewskiego

KATEDRA CYBERNETYKI

płk dr Jerzy SKIBIŃSKI

OPTYMALIZACJA ALOKACJI ZASOBÓW
w ujęciu heurystycznym

WARSZAWA KWIECIEŃ 1970

A K A D E M I A S Z T A B U G E N E R A L N E G O
im. gen. broni K. Świerczewskiego

KATEDRA CYBERNETYKI

płk dr Jerzy SKIBIŃSKI

OPTYMALIZACJA ALOKACJI ZASOBÓW
w ujęciu heurystycznym

WARSZAWA KWIECIEŃ 1970

SPIS RZECZY

0. WPROWADZENIE

W ciągu ubiegłych kilku lat podjęto szereg interesujących prób stworzenia możliwie uniwersalnej, a przy tym jednocześnie dostatecznie dogodnej do zastosowań praktycznych, metody planowania i kontroli realizacji zbioru przedsięwzięć współzależnych, składających się na określony kompleks /system/ przeznaczony do osiągnięcia zamierzonego celu generalnego lub skończonej liczby różnych celów współzależnych. Inaczej mówiąc, każde przedsięwzięcie doprowadza do stworzenia określonego obiektu przeznaczonego do działania w ramach kompleksu i spełniającego właściwy mu cel cząstkowy /przy współdziałaniu z innymi obiektami/, oczywiście, po osiągnięciu gotowości przewidzianej dla całego kompleksu. Jedno z podstawowych założeń poszukiwanej metody planowania i kontroli realizacji kompleksu sprowadza się zwykle do postulatu, by uwzględniała przynajmniej większość, jeśli nie wszystkie wybrane czynniki, składające się na efektywność ekonomiczną procesu doprowadzającego do uzyskania przez kompleks zamierzonego stopnia gotowości do działań.

Na tym tle powstaje często szereg istotnych zagadnień, wymagających nie tylko uprzednich rozstrzygnięć teoretycznych /np. w sensie ustalenia struktury matematycznego modelu kompleksu i opracowania algorytmu dla jego rozwiązania/, lecz ponadto zweryfikowania ich z punktu widzenia praktycznej użyteczności w procesie planowania i bieżącego kierowania realizacją planów przedsięwzięć cząstkowych, przeznaczonych do spełniania różnych celów, wymagających stosowania odmiennych technologii itp. Powszechnie wiadomo, że metody planowania oparte na założeniach Metod Analizy Sieciowej /MAS/, np. klasy CPM - lub PERT - Time - Cost, pomimo ich wielu niewątpliwych walorów, nie doprowadzą do jednoznacznych rozwiązań, jeśli uprzednio nie uwzględni się w modelu dodatkowych ograniczeń, nie tylko o charakterze formalnym /w sensie określonych zasad budowy sieci - grafu/ lecz ponadto, jeśli nie wprowadzi się ograniczeń wynikających z warunków narzuconych przez technologię poszczególnych czynności, składających się na wykonanie wszystkich przedsięwzięć danego kompleksu. Ponieważ problem zarządzania poprzez wydatkowanie zasobów materialnych[x/] jest dla kierownictwa problemem centralnym, od rozwiązania którego zależy sprawność organizacyjna i efektywność ekonomiczna realizowanego procesu, zatem uzasadnionymi są wysuwane w tym względzie postulaty, aby proponowana metoda planowania umożliwiała nie tylko bieżące optymalizowanie struktury przyjętego systemu zarządzania /w sensie spełniania jednocześnie przynajmniej pięciu podstawowych funkcji, tj. organizowania, planowania, decydowania, koordynacji i kontroli/, lecz ponadto by stwarzała przesłanki do prognozowania przebiegu procesu w szeregu wariantach zależnych od przyjętych /a priori/ kryteriów oceny efektywności ekonomicznej.

Oczywiście, zagadnienie to staje się tym bardziej złożone, jeśli kompleks ma charakter inwestycji, w której każdy obiekt, z chwilą uruchomienia powinien realizować również określone zadania niezależne od ogólnego zadania w ramach kompleksu. Ponieważ działalność każdego z uruchomionych obiektów będzie z reguły uzależniona od odpowiedniego zewnętrznego systemu kooperacji /dostawy surowców, półfabrykatów, energii itp./ oraz od miejsca w ogólniejszej hierarchii ważności /wartości/ realizowanych efektów końcowych, należy rozstrzygnąć dodatkowe zagadnienie, a mianowicie - ustalić kolejność gotowości obiektów w ramach przyjętego okresu czasu przeznaczonego na uzyskanie gotowości całego kompleksu. Rozwiązanie tego zagadnienia, np. w postaci podziału na właściwe etapy, wymaga nie tylko uwzględnienia

- - - - - - - - - - - - - - - - - - -

x/ Pojęciem zasoby obejmujemy wszelkie środki materialne, energetyczne, finansowe itp. niezbędne do wykonania zamierzonego przedsięwzięcia /kompleksu przedsięwzięć/, m.in. siłę roboczą wszelkich specjalności, parki maszynowe wraz z obsługą techniczną, surowce i prefabrykaty, powierzchnie magazynowe, fronty pracy itp.

szeregu różnych kryteriów dla oceny wartości efektu końco - wego każdego obiektu, lecz i dla oceny maksymalnych wiel - kosci zasobów, a przy tym jeszcze korzystnych, które opłaca się zaangażować, aby doprowadzić kompleks obiektów do pożądanego stanu gotowości.

Powyższe podejście do poszukiwania optymalnej alokacji zasobów można sprowadzić do ustalenia metody wyznaczania zbiorów możliwych stanów kompleksu w kolejnych jednostkach czasu realizacji planu. Ustalone sekwencje współzależnych czynności, składające się na sieć przedsięwzięcia - kompleksu, umożliwiają nie tylko uporządkowanie stanów kompleksu /z punktu widzenia intensywności zużywania zasobów w kolejnych jednostkach czasu/, lecz co więcej - w rezultacie - pozwalają wyznaczyć ogólny zbiór sekwencji obejmujący wszel - kie możliwe, dopuszczalne stany kompleksu, jakie mogą wystąpić w toku realizacji planu. Przyporządkowując każdemu stanowi kompleksu odpowiedni punkt w przestrzeni metrycznej i traktując go jako węzeł, można z kolei wyznaczyć dendryt stanów dopuszczalnych, w którym łuki będą odwzorowywały dopuszczalne sekwencje zmian stanów kompleksu w toku jego realizacji. Innymi słowy, dendryt będzie wyrażał zbiór dopuszczalnych wariantów realizacji planu.

Na tej drodze staje się możliwe nie tylko wyznaczenie wariantu optymalnego /np. wg kryterium najkrótszej drogi/, lecz i dokonywanie bieżących prognoz co do możliwych zmian w procesie realizacji z uwzględnieniem kryteriów jakości wykonania poszczególnych czynności. Można bowiem wykazać,że istnieje równoważność między zagadnieniem wyznaczenia najkrótszej drogi w dendrycie stanów kompleksu a zagadnieniem minimalizacji wartości wyznaczonych na podstawie kryteriów jakości czynności, jeśli tylko kryteria te spełniają warunek addytywności, a ponadto pozwalają wyznaczać wartości minimaksymalne.

1. SFORMUŁOWANIE PROBLEMU

Rozpatrujemy przedsięwzięcie, którego strukturę wydatkowania zasobów można przedstawić w postaci zadanej /a priori/ sieci typu CPM, tj. zbioru współzależnych czynności $c_{ij} \in C$.

Wprowadźmy oznaczenia następujących pojęć:

t_{ij} - czas niezbędny dla wykonania czynności c_{ij}; w toku realizacji nie przewiduje się przerw wynikających z nierównomierności dostaw zasobów, natomiast ewentualne przerwy, wynikające z norm technologicznych, wlicza się do czasu wykonania danej czynności;

s - ilość rodzajów zasobów $/l = 1,2,\ldots, s/$;

q^{l}_{ij} - intensywność zużycia l-tego rodzaju zasobu dla wykonania czynności c_{ij} $/l = 1,2,\ldots, s/$;

- termin końcowy wykonania kompleksu czynności $c_{ij} \in C$, obliczony metodą ścieżki krytycznej lub zadany jako dyrektywny;

t^{w}_{i} - najwcześniejszy termin rozpoczęcia czynności c_{ij};

t^{p}_{j} - najpóźniejszy termin zakończenia czynności c_{ij};

$\{T_{ij}\}$ - wektor, którego składowe T_{ij} są terminami rozpoczęcia wszystkich czynności, przy których nie zostanie naruszony technologiczny ciąg ich wykonania, a ogólny termin wykonania kompleksu nie będzie dłuższy niż λ.

Wektor $\{T_{ij}\}$ nazwiemy <u>planem dopuszczalnym</u>.

Każdemu planowi dopuszczalnemu $\{T_{ij}\}$ i każdemu rodzajowi zasobów l odpowiada pewna <u>funkcja czasu</u> /ilość zasobów zaangażowanych <u>w chwili τ</u> /, czyli

$$Q^{(l)}(\tau) = \sum q_{ij}^{(l)}, \quad (l = 1, 2, \ldots, o), \ldots \qquad /1/$$

gdzie sumowanie przeprowadza się względem c_{ij} C,. takich że $T_{ij} \leqslant \tau < T_{ij} + t_{ij}$.

Dla dokonywania oceny jakości $Q^{(l)}(\tau)$ wprowadza się funkcjonał

$$F\left[Q^{(l)}(\tau, \{T_{ij}\})\right] \ldots \qquad /2/$$

Plan, dla którego /2/ przyjmuje wartość minimalną nazwiemy planem optymalnym.

Rozpatrzona zostanie minimalizacja addytywnych i minimaksymalnych kryteriów jakości. Zagadnienie to będzie rozwinięte szczegółowiej w rozdz. 6-9.

2. UZUPEŁNIAJĄCE POJĘCIA PODSTAWOWE

Określimy pojęcie stan $P_{ij}^{/r/}$ czynności c_{ij} w danej chwili r :

1. Jeśli do chwili r nie została wykonana ani jedna czynność poprzednia $c_{ki} \in C$, to $P_{ij}^{/r/} = -\infty$
2. Jeśli wszystkie poprzednie czynności zostały wykonane, to

$$P_{ij}^{/r/} = 0.$$

3. Jeśli od początku wykonywania c_{ij} minęło w jednostek czasu, $w < t_{ij}$, to

$$P_{ij}^{/r/} = w$$

4. Jeśli od początku wykonywania c_{ij} minęło $w \geqslant t_{ij}$ jednostek czasu, to

$$P_{ij}^{/r/} = +\infty$$

Podzielimy okres λ wykonania kompleksu C na szereg równych przedziałów /równych jednostce czasu/.

Rozpatrzymy stany $P_{ij}^{/r/}$ $/r = 0,1,\ldots,\lambda/$ na granicach przedziałów.

Stanem kompleksu w danej chwili r nazwiemy wektor $P^{/r/}$, którego składowymi są stany $P_{ij}^{/r/}$ wszystkich czynności $c_{ij} \in C$ wykonywanych w danej chwili.

W ę z ł a m i dendrytu są dopuszczalne /nie doprowadzające do wydłużenia terminu λ/ stany kompleksu.

Ł u k i dendrytu odpowiadają możliwym przejściom z jednego stanu do innego.

Wszystkie drogi łączące stan początkowy ze stanem końcowym wzajemnie jednoznacznie odpowiadają wszystkim planom dopuszczalnym $\{T_{ij}\}$.

/Określenie stanu początkowego i końcowego podano w rozdz.4/.

Zagadnienie sprowadza się do wyznaczenia w dendrycie drogi odpowiadającej planowi optymalnemu $\{T_{ij}^{/opt/}\}$.

3. PROCES TWORZENIA DENDRYTU STANÓW

a/ Etap wstępny

- Numerację sieci dokonamy tak,aby dla dowolnej operacji był spełniony warunek: $i < j$ x/.
- Jeśli termin dyrektywny λ pokrywa się z terminem wyznaczonym przez ścieżkę/drogę/ krytyczną - wyznaczamy tę ostatnią.

---

x/ Por. np. płk dr J. Skibiński: Model alokacji zasobów,Wyd. ASG. Sygn. S/656, str. 11.

→ Dla każdej czynności c_{ij} wyznaczamy terminy

t_i^w – najwcześniejszy jej rozpoczęcia,

t_j^p – najpóźniejszy jej zakończenia.

→ Zestawić tablicę 1, w której umieścić czynności zgodnie z numeracją sieci w miarę wzrostu zdarzeń i oraz j.

→ Na poziomej osi czasu wyznaczyć jednostki czasu $r = 0,1,2,\ldots,\lambda$. Na powyższą oś zrzutować zdarzenia w sieci.

Stany czynności P_{ij}, składających się na stan kompleksu $P^{/r/}$ należy zapisywać wg kolejności czynności zawartych w tablicy 1.

Treść etapu wstępnego podano na przykładzie /rys. 1/.

b/ <u>Etap podstawowy</u>

Nad punktem r = 0 znajduje się początkowy stan kompleksu

$$P^{/o/} = 0 \ldots 0 - \infty \ldots - \infty \}$$

przy czym 0 odpowiada czynnościom, dla których $t_o^w = 0$, a $-\infty$ – czynnościom, które w danej chwili nie mogą się rozpocząć, gdyż nie zostały zrealizowane czynności poprzednie.

Stan początkowy należy połączyć łukami ze wszystkimi stanami kompleksu w <u>następnej chwili</u>.

W procesie ustalania stanów kompleksu w poszczególnych jednostkach czasu $r = 0,1,2,\ldots,\lambda$, może wystąpić jeden z <u>sześciu</u> następujących <u>przypadków</u>.

Przypadek 1.

W chwili r-1 czynność c_{ij} nie rozpocznie się, tj. jej stan wyniesie

$$p_{ij}^{/r-1/} = -\infty, \dots \dots \dots \dots /3/$$

przy czym w chwili r czynności c_{ij} nie można rozpocząć, jeśli czynność poprzednia $c_{ki} \in C$ $/k < i/$ nie zostanie w chwili r zakończona, czyli

$$p_{ki}^{/r-1/} < t_{ki} - 1 \dots \dots \dots \dots /4/$$

Zatem, w chwili r, stan czynności c_{ij} wyniesie

$$p_{ij}^{/r/} = -\infty \dots \dots \dots \dots /5/$$

/por. rozdz. 2 punkt 1/.

Przypadek 2.

W chwili r-1 czynność c_{ij} nie rozpocznie się, tj. jej stan wyniesie

$$p_{ij}^{/r-1/} = -\infty, \dots \dots \dots \dots /6/$$

lecz w chwili r można ją rozpocząć, jeśli czynność poprzed - nia c_{ki} została w chwili r zakończona lub zakończy się; czy- li dla wszystkich $c_{ki} \in C$ stan w chwili r-1 wyniesie

$$p_{ki}^{/r-1/} \geqslant t_{ki} - 1, \dots \dots \dots \dots /7/$$

a wtedy stan czynności c_{ij} w chwili r będzie

$$p_{ij}^{/r/} = 0. \dots \dots \dots \dots /8/$$

/por. rozdz. 2 punkt 2/.

Przypadek 3

W chwili r-1 <u>można</u> rozpocząć czynność c_{ij}, a wtedy jej stan wyniesie:

$$P_{ij}^{/r-1/} = 0 \ldots\ldots\ldots\ldots \quad /9/$$

oraz z kolei w chwili r stan czynności będzie równy jedności, tj.

$$P_{ij}^{/r/} = 1 \ldots\ldots\ldots\ldots \quad /10/$$

W chwili r-1 można też czynności c_{ij} nie rozpoczynać, jeśli

$$r - 1 < t_j^P - t_{ij}, \ldots\ldots\ldots\ldots \quad /11/$$

a wtedy stan czynności w chwili r wyniesie

$$P_{ij}^{/r/} = 0. \ldots\ldots\ldots\ldots \quad /12/$$

Przypadek 4

W chwili r-1 <u>można</u> rozpocząć czynność c_{ij}, a wtedy jej stan

$$P_{ij}^{/r-1/} = 0 \ldots\ldots\ldots\ldots, \quad /13/$$

z którego to stanu w chwili r czynność przejdzie do stanu

$$P_{ij}^{/r/} = 1, \ldots\ldots\ldots\ldots \quad /14/$$

a ponadto w chwili r-1 czynność c_{ij} należy koniecznie rozpocząć, jeśli spełniony jest warunek

$$r - 1 = t_j^P - t_{ij}, \ldots\ldots\ldots\ldots \quad /15/$$

gdyż w przeciwnym razie $P_{ij}^{/r/}$ będzie stanem <u>niedopuszczalnym</u>.

Przypadek 5

W chwili r-1 czynność c_{ij} jest realizowana i w chwili r nie zostanie zakończona; czyli, jeśli

$$0 < P_{ij}^{/r-1/} < t_{ij} - 1 \quad \ldots\ldots\ldots \quad /16/$$

to

$$P_{ij}^{/r/} = P^{/r-1/} + 1. \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad /17/$$

Przypadek 6

W chwili r czynność c_{ij} zostanie lub została zakończona; czyli, jeśli

$$P_{ij}^{/r-1/} \geqslant t_{ij} - 1 \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad /18/$$

to końcowy stan realizacji oznaczymy

$$P_{ij}^{/r/} = +\infty \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad /19/$$

Zestawiając powyższe przypadki, można je zapisać następująco:

1. $P_{ki}^{r-1} < t_{ki} - 1 \longrightarrow P_{ij}^{r-1} = -\infty \qquad P_{ij}^{r} = -\infty$

2. $P_{ki}^{r-1} \geqslant t_{ki} - 1 \longrightarrow P_{ij}^{r-1} = -\infty \qquad P_{ij}^{r} = 0$

3. $r-1 < t_j^P - t_{ij} \longrightarrow P_{ij}^{r-1} = 0 \longrightarrow P_{ij}^{r} = 0$ lub $\longrightarrow P_{ij}^{r} = 1$

4. $r-1 = t_j^P - t_{ij} \longrightarrow P_{ij}^{r-1} = 0 \longrightarrow P_{ij}^{r} = 1$

5. $0 < P_{ij}^{r-1} < t_{ij} - 1 \longrightarrow P_{ij}^{r} = P_{ij}^{r-1} + 1$

6. $P_{ij}^{r-1} \geqslant t_{ij} - 1 \longrightarrow P_{ij}^{r} = +\infty$

Uwagi uzupełniające

1. Jeśli w chwili r-1 wystąpi tylko jeden z powyższych przypadków, to w chwili r stan czynności c_{ij} przyjmie tylko jedną wartość.

2. Jeśli w chwili r-1 czynność c_{ij} znajduje się w sytuacji określonej przez przypadek 3, to w chwili r wystąpią dwa stany:

$$P_{ij}^{/r/} = 0, \qquad P_{ij}^{/r/} = 1.$$

Stąd jeśli jakikolwiek stan kompleksu $P^{/r-1/}$ zawiera w chwili r-1 k stanów $P_{ij}^{/r-1/}$ czynności w sytuacji wg przypadku 3, to w chwili r stan $P^{/r-1/}$ przejdzie do stanu, który można zapisać w postaci zbioru uporządkowanego k liczb binarnych /zer i jedynek/ dodając do każdej z nich stany operacji określone na podstawie pozostałych przypadków.

3. Dwa stany kompleksu $\left(P^{/r/}\right)$ i $\left(P^{/r/}\right)'$ nazwiemy tożsamościowymi, jeśli dla wszystkich $c_{ij} \in C$:

$$\left(P_{ij}^{/r/}\right) = \left(P_{ij}^{/r/}\right)'. \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad /20/$$

W związku z tym, tworząc dendryt stanów kompleksu, wszystkie węzły odpowiadające stanom tożsamościowym /w rozpatrywanej jednostce czasu/ zastępuje się jednym węzłem, do którego skierowuje się wszystkie łuki odpowiadające właściwemu zbiorowi stanów tożsamościowych.

4. Stan $P^{\lambda} = \left\{+\infty + \infty \ldots + \infty\right\}$ oznacza <u>stan końcowy</u> kompleksu, tj. odpowiada zrealizowaniu wszystkich jego czynności.

4. KRYTERIUM OPTYMALNOŚCI

Praktycznie rzecz biorąc, każdą sieć - model planu realizacji kompleksu - zawsze można przedstawić w dwojakiej postaci: jedna wersja planu dotyczy współzależności między poszczególnymi czynnościami, natomiast druga - odwzorowuje współzależności między ruchem /wydatkowaniem/poszczególnych rodzajów zasobów[x/]. Wydaje się, że w większości przypadków można również sformułować funkcjonał dla oceny jakości sieci /lub harmonogramu/ dotyczącej zaangażowania niezbędnych rodzajów zasobów w poszczególnych przedziałach czasu /τ -1, τ/ w toku realizacji planu w okresie /0,λ/. Niech $f[Q^{(l)}]$ będzie funkcjonałem oceny jakości zużycia l -tego rodzaju zasobu.

Dla uproszczenia modelu przyjmiemy liniową zależność ilości angażowanych zasobów od czasu. W związku z tym, kryterium oceny zużycia l-tego rodzaju zasobu przyjmie postać funkcjonału /por. /2//:

$$F\left[Q^{(l)}\left(\tau,\{T_{ij}\}\right)\right] = \sum_{\tau=1}^{\lambda} f_{\tau}\left[Q^{(l)}\left(\tau,\{T_{ij}\}\right)\right] = \min. , \ldots \quad /21/$$

który odpowiada kryterium w postaci funkcjonału minimaksymalizującego wartość:

$$F\left[Q^{l}\left(\tau,\{T_{ij}\}\right)\right] \max_{\tau} f_{\tau}\left[Q^{l}\left(\tau,\{T_{ij}\}\right)\right] \ldots \quad /22/$$

5. WYZNACZANIE OPTYMALNEJ SEKWENCJI WĘZŁÓW I ŁUKÓW W DENDRYCIE STANÓW KOMPLEKSU

Zgodnie z /9/ i /10/ oraz /13/ i /14/ wszelkie dopuszczalne przejście kompleksu ze stanu w chwili τ -1 do stanu w chwili r obrazuje łuk, który dla czynności c_{ij} realizowanej w przedziale czasu /r-1, / spełnia warunek

---

x/ Zagadnienie dwoistości sieci rozpatrują bardziej szczegółowo W.N. BURKOW i in. w książce: "Sietiewyje modeli i zadaczi uprawlenija", "Sowietskoje Radio", Moskwa, 1967 rozdz. 1.

$$P_{ij}^{/r/} - P_{ij}^{/r-1/} = 1, \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad /23/$$

lub

$$t_{ij} = P_{ij}^{/r-1/} - 1 \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad /24/$$

Zatem, każdy łuk /oznaczmy go symbolem n/ w dendrycie stanów określa jednoznacznie zbiór czynności $c_{ij} \in n$ realizowanych przy przejściu ze stanu $P^{/r-1/}$ do stanu $P^{/r/}$.

Wprowadźmy funkcję określającą ilość zasobów i odpowiadającą czynnościom wyrażonym przez łuk n:

$$Q^{(l)}(n) = \sum_{c_{ij} \in n} q_{ij}^{l}, \quad l = 1,2, \ldots 9, \quad \ldots\ldots \quad /25/$$

gdzie $q_{ij}^{(l)}$ oznacza intensywność zużycia l -tego rodzaju zasobu w czynności c_{ij}.

Niech $f_r\left(Q^{(l)}(n)\right)$ oznacza długość łuku n, a ponadto przyjmiemy kryterium oceny jakości wykorzystania zasobów wyrażone przez wzór /21/. Łatwo zauważyć, że kryterium /21/ wyraża sumę kryteriów cząstkowych f_{τ} dla każdego przedziału czasu. Minimalizacja ogólnego kryterium /21/ jest więc równoważna wyborowi optymalnej ścieżki, prowadzącej przez dendryt, poczynając od stanu początkowego w chwili $r = 0$ do stanu końcowego w chwili $r = \lambda$. Inaczej mówiąc węzły początkowy i końcowy łączy skończony zbiór ścieżek, z których każda jest sekwencją łuków poprzez węzły odpowiadające różnym stanom kompleksu w danej chwili. Z kolei, każdy stan kompleksu /w danej chwili/ zależy od ilości możliwych kombinacji w stopniu zaangażowania zasobów przy wykonywaniu w danej chwili wszystkich czynności zgodnie z planem sieciowym.

W ten sposób dochodzimy do zestawienia skończonego zbioru planów dopuszczalnych realizacji kompleksu, z których każdy jest odwzorowany przez właściwą mu ścieżkę /stanów dopuszczalnych/ o odpowiadającej jej długości, a problem wyboru ścieżki optymalnej sprowadza się do minimalizacji funkcji kryterium /21/.

Rozwiązanie tak sformułowanego zadania można często sprowadzić do zastosowania jednego z szeregu znanych algorytmów poszukiwania "najkrótszej drogi" przez sieć[x/]. Wiadomo jednak, że korzystanie z algorytmu ogólnego wymaga znacznego nakładu prac obliczeniowych. W przypadku rozpatrywanej sieci - dendrytu - stanów dopuszczalnych zauważmy, że można ją traktować jako tzw. graf s k i e r o w a n y, a ponadto - graf b e z c y k l i. Takie podejście pozwala zastosować prostszy algorytm wyznaczania najkrótszej ścieżki, tworząc go w oparciu o odwrotną interpretacji zasady wyznaczania tzw. ścieżki krytycznej w sieci budowanej wg metody CPM /PERT/.

6. WYZNACZANIE NAJKRÓTSZEJ ŚCIEŻKI W DENDRYCIE STANÓW DOPUSZCZALNYCH

Zgodnie z poprzednimi rozważaniami, przejście kompleksu od stanu początkowego $P_o^{/o/}$ do dowolnego stanu $P_j^{/r/}$ wyraża wartość kryterium /które oznaczymy symbolem $F\ P_j^{/r/}$ lub

- - - - - - - - - - - - - -

x/ Niektóre algorytmy opisano w pracach: C. BERGE: Theorie des Graphes et ses Applications, tłum. ros.: Tieorija grafow i jejo primienienije, Moskwa 1962, oraz L.R.FORD Jr., D.R. FULKERSON: Flows in Networks, tłum. ros.: Potoki w sietjach, "Mir", Moskwa, 1966.

krócej F_j /, odpowiadające minimalizacji wyrażenia /22/, tj. równoważne wyznaczeniu minimaksymalnej ścieżki z ogólnego zbioru m ścieżek dopuszczalnych dla danego l-tego rodzaju zasobu. Jeśli symbolem f_{ij} oznaczymy długość łuku prowadzącego od stanu P_i do P_j, to ścieżka minimaksymalna powinna spełniać warunek:

$$\max_{n_{ij} \in m} f_{ij}\left(Q^{(l)}(n)\right) \longrightarrow \min_{m}, \quad \ldots \quad /26/$$

gdzie f_{ij} jest długością łuku od stanu o numerze i do j, przy czym utrzymuje się nadal w mocy zasadę numeracji $i < l$.

Proponowany proces poszukiwania najkrótszej ścieżki w dendrycie stanów kompleksu oprzemy na pewnym podejściu w ramach programowania dynamicznego, a polegającym na obliczeniu wartości kryterium $F_j = F/P_j/$ z zależności rekurencyjnych:

$$\left.\begin{aligned} &F_o = 0, \\ &F_1 = f_{o1}, \\ &\ldots \\ &\ldots \\ &F_j = \min_{i} \max \left[F_i, f_{ij}\right], \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots \\ &F_{z-1} = f_{z-1,z}, \\ &F_z = 0 \end{aligned}\right\} \quad \ldots \quad /27/$$

gdzie z jest ostatnim i najwyższym numerem stanu w dendrycie. Wypada przy tym również zauważyć, aby dla danego den -

drytu zastosować ustaloną zasadę numeracji stanów, na przykład, przydzielając poszczególnym numery w kolejności wzrastającej /por. wykres dendrytu w przytoczonym przykładzie /, poczynając od zera, a kończąc na z = max, dla którego F_z przyjmie wartość minimalną spośród maksymalnych.

Wychodząc z pojęcia "stany tożsamościowe" /20/, można z kolei wyznaczyć dla każdego węzła P_i wielkość F_i, tj. korzystając z zależności rekurencyjnych:

$$\left.\begin{aligned} & F'_z = F_z \, , \\ & F'_{z-1} = \max \left[F_z, f_{z-1,z} \right] \\ & \cdots\cdots\cdots\cdots \\ & \cdots\cdots\cdots\cdots \\ & F'_i = \min_j \max \left[F_j, f_{ij} \right] , \\ & \cdots\cdots\cdots\cdots \end{aligned}\right\} \qquad \ldots\ldots /28/$$

Na tej podstawie można wyprowadzić, że na ścieżce minimaksymalnej znajdą się:

a/ węzły, dla których spełnia się zależność:

$$F_i, F'_i \leqslant F_z,$$

b/ łuki, jeśli

$$F_i, F'_j, f_{ij} \leqslant F_z \, .$$

Zauważmy przy tym, że w oparciu o powyższe warunki /tj. a/ i b// można w przypadku ogólnym wyznaczyć więcej niż jedną ścieżkę minimaksymalną, tj. spełniającą przyjętą zasadę optymalności. Oczywiście, zbiór tych ścieżek można traktować jako podzbiór lub podgraf ogólnego grafu rozwiązań dopuszczalnych.

7. KRYTERIA WYZNACZANIA STANU DOMINUJACEGO

Rozpatrując pełny zbiór planów dopuszczalnych reali - zacji zamierzonego przedsięwzięcia /kompleksu czynności /, wyrażony w postaci zbioru ścieżek łączących odpowiednie stany kompleksu w każdej z kolejnych chwil/por.rys.2/można stwierdzić, że istnieją pewne stany, które nie wpływają na przebieg ścieżki czy ścieżek optymalnych, a jeśli nawet na tych ścieżkach się znajdują, to również można je oceniać, jako "nie lepsze" od innych stanów w danej chwili. Gdyby więc zrezygnować z włączania ich do ogólnej sieci stanów, można tę ostatnią znacznie uprościć bez szkody dla przebiegu ścieżek optymalnych.

W związku z tym, wysuwa się zagadnienie wyznaczania "dominacji" między stanami, tj. ustalania "wyższości użytkowej" jednego stanu względem innego dowolnego stanu kompleksu w danej chwili. Ponieważ zagadnienie dominacji rozpatrujemy z punktu widzenia wykorzystania zasobów, zatem bez szkody dla ogólności rozważań można przyjąć, że kryterium cząstkowe $f_r \left[Q^{(l)}\right]$ jest funkcją niemalejącą wielkości -tego rodzaju zasobu $Q^{(l)}$ w danej chwili r.

Aby określić różnicę stanowiącą o fakcie istnienia dominacji jednego stanu nad drugim, przyjmiemy, że konieczne i wystarczające będzie spełnienie przez dwa porównywalne stany tj. $P_1^{/r/}$ i $P_2^{/r/}$, następujących 3 wariantów:

1. Stan P_1 dominuje nad stanem P_2 jeśli

$$F\left(P_1^{/r/}\right) \leq F\left(P_2^{/r/}\right) ; \quad . . . . /29/$$

2. gdy dla wszystkich czynności /kompleksu/ $c_{ij} \in C$ zachodzi zależność:

$$\left.\begin{array}{l} \left(P_{ij}^{/r/}\right)_1 , \left(P_{ij}^{/r/}\right)_2 < 0, \\ \text{przy czym} \\ \left(P_{ij}^{/r/}\right)_1 \geqslant \left(P_{ij}^{/r/}\right)_2 \end{array}\right\} \quad \ldots\ldots \quad /30/$$

3. jeśli nie zachodzi warunek 2, wtedy dla wszystkich $c_{ij} \in C$ powinno

$$\left(P_{ij}^{/r/}\right)_1 = -\infty , 0, +\infty ,$$

przy czym . . . . . . /31/

$$\left(P_{ij}^{/r/}\right)_1 \geqslant \left(P_{ij}^{/r/}\right)_2$$

Innymi słowy, sens fizyczny dominacji stanu $P_1^{/r/}$ w jakim znajduje się kompleks w przedziale czasu /0, r/ w stosunku do innego dopuszczalnego stanu $P_2^{/r/}$, w jakim mógłby się znaleźć, sprowadza się do możliwości szybszego zakończenia w zamierzonym terminie a ponadto, kryterium jakości wykorzystania zasobów w stanie $P_1^{/r/}$ przyjmie co najwyżej wartość równą wartości w stanie $P_2^{/r/}$.

Uzasadnienie powyższych kryteriów wymaga przeprowadzenia odpowiedniego wywodu. Załączamy go w "Dodatku" do niniejszego opracowania.

8. PRZYKŁAD

Powyższy model rozpatrzymy na przykładzie sieci przedsięwzięcia przedstawionego na rys. 1. Numery czynności tworzące sieć zostały uporządkowane wg zasady $i < j$. Treść poszczególnych czynności zawiera tablica 1. Liczby bez nawiasów /przy strzałkach/ oznaczają czas t_{ij} przeznaczony na wykonanie czynności /i,j/. Liczby w nawiasach [ ] oznaczają intensywności q_{ij}^{l} zużycia l-tego rodzaju zasobu przy realizacji /i,j/-tej czynności. Dla uproszczenia obliczeń przyjmiemy, że interesuje nas ocena planu przedsięwzięcia z punktu widzenia zużycia jednego /tj. l-tego/ rodzaju zasobu, ze zbioru w ilości s rodzajów, a przy tym takiego, który występuje jako niezbędny we wszystkich czynnościach danego przedsięwzięcia i od prawidłowości jego wykorzystania zależy w znacznej mierze zrealizowanie przedsięwzięcia w zamierzonym czasie. Np. w danym przykładzie takim zasobem może być niewykwalifikowana siła robocza, bez której nie można by wykonać żadnej czynności w czasie unormowanym.

Niech najkrótszy czas wykonania przedsięwzięcia/rys.1/ odpowiada terminowi najkrótszemu, wynikającemu z obliczenia sieci, tj. λ = 15 dni /jako jednostek czasu/. Jako kryterium optymalności alokacji przyjętego rodzaju zasobu przyjmujemy na podstawie /21/ i /22/ wyrażenie:

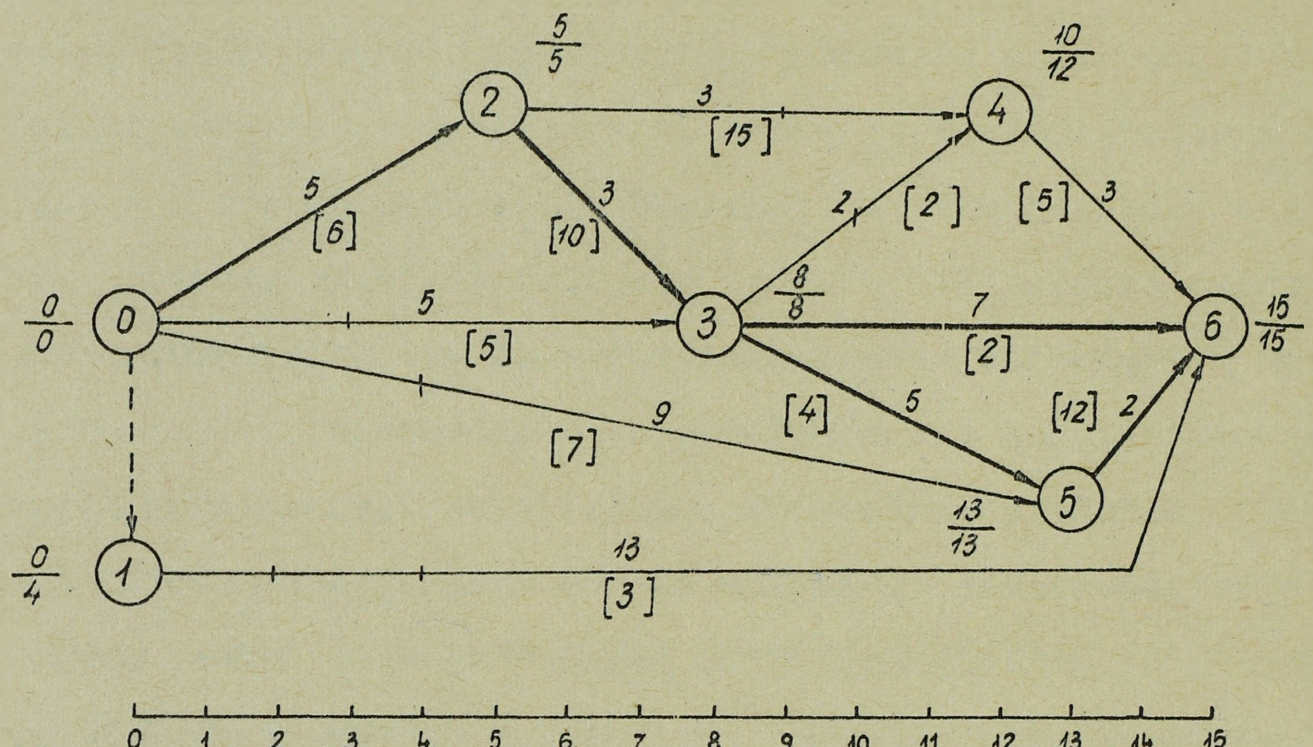
$$\max_{\tau \in [0,\lambda]} Q\left(\tau, \{T_{ij}\}\right) \longrightarrow \min \quad \ldots\ldots\ldots \quad /32/$$

doprowadzające do minimalizacji maksymalne nakłady danego zasobu przy spełnieniu warunku:

$$f_r\left[Q\left(\tau, \{T_{ij}\}\right)\right] = Q\left(\tau, \{T_{ij}\}\right) \quad \ldots\ldots\ldots \quad /33/$$

Proces rozwiązania powyższego przykładu można rozłożyć na następujące kolejne etapy.

Etap wstępny obejmuje obliczenie sieci, tj. uzyskanie dla każdego zdarzenia terminu najwcześniejszego t_i^w i najpóźniejszego t_i^p , wyznaczenie ścieżki /lub ścieżek/ krytycznych oraz obliczenie dla każdej czynności różnicy $t_j^p - t_{ij}$ /por. tablica 1/.



Rys. 1.

TABLICA 1.

Operacje i	Operacje j	Treść operacji	t_{ij}	t^{W}_{i}	$t^{P}_{j}-t_{ij}$
0	1	Czynność pozorna	0	0	0
0	2	Prace ziemne w głównym rejonie obrony	5	0	0
0	3	Budowa SD, WŁ itp.	5	0	3
0	5	Budowa SO art. Organizacja systemu ognia	9	0	4
1	6	Dowóz amunicji i innych środków zaopatrz.	13	0	2
2	3	Budowa schronów ciężkich	3	5	5
2	4	Prace ziemne na pozycjach ryglowych	3	5	9
3	4	Budowa rubieży AOPpanc i OZap	2	8	10
3	5	Budowa urządzeń tyłowych	5	8	8
3	6	Praca w zakresie rozbudowy komunikacji	7	8	8
4	6	Prace minerskie	3	10	12
5	6	Dowóz innych środków materiałowych i techn.	2	13	13

Etap pierwszy dotyczy określenia dla każdej chwili $r = 0, 1, 2, \ldots, \lambda$ /$\lambda = 15$/ podzbioru przejść ze stanów w chwili r-1, w jakich może znaleźć się realizowane przedsięwzięcie, do stanów w chwili r. Podstawą oceny możliwości przejścia każdej czynności /odpowiadającej w planie sieciowym okresowi /r-1,/r// od stanu w chwili r-1 do stanu w chwili r, jest zestawienie sześciu przypadków podstawowych /wyrażenia od /3/ do /19// z których należy wybrać jeden odpowiadający jednoznacznie rozpatrywanej czynności.

W tym celu czasem wygodnie jest posłużyć się tablicą pomocniczą, w której każdemu przejściu /r-1, r/ należy przyporządkować odpowiednie numery stanów $k^{/r-1/}$ i $k^{/r/}$ dla wkaściwych podzbiorów czynności $c_{ij} \in C$, tj. tych, które mogą lub powinny być realizowane w okresie /r-1, r/, a tym samym przyjmą - stan czynności $P_{ij}^{/r/}$. Zestawienie przejść systemu do kolejnych stanów przedstawiono w tablicach pomocniczych - załącznik nr 1. Zestawienie to posłuży z kolei do opracowania zagregowanej listy zmian stanów systemu /tablica 2/, w której wystąpią numery stanów $P_k^{/r/}$ i odpowiadająca każdemu z nich sytuacja wszystkich czynności $c_{ij} \in C$, z punktu widzenia zaangażowania w nich rozpatrywanego zasobu, tj. wielkość $Q^{(1)}(\tau)$.

Etap drugi sprowadza się do ustalenia zbioru rozwiązań dopuszczalnych. Graficzną interpretację przejść do poszczególnych stanów przedstawiono na rys. 2. Korzystając z tablic pomocniczych /"Zestawienie przejść systemu do kolejnych stanów"/ - zał. nr 1 można ustalić kolejne drogi, prowadząc od stanu 0 /początkowego/ do stanu nr 692 /końcowego/, odpowiadające zbiorowi rozwiązań dopuszczalnych. Wprowadzając z kolei regułę dominacji /dla stanów systemu/, graf zmian stanów systemu /rys. 2/ można przekształcić w dendryt stanów uporządkowanych. W tym celu dla każdego stanu obliczamy wg /29/, /30/, /31/ właściwe kryterium, przyjmując, że w chwili r=0 jego wartość będzie równa zeru. Łatwo sprawdzić, że w chwili r=1 stany od nr 1 do nr 8 nie spełniają warunków /29/, /30/, /31/, a tym samym nie można wśród nich wyróżnić stanów dominujących. Z kolei, w chwili r=2 można wyróżnić stan nr 35 jako dominujący w stosunku do stanów nr 16, 20, 26, 30 i 34. W chwili r=3 stan nr 84 dominuje nad stanami nr 42, 43, 46, 47, od 51 do 53, 57,59, 61, 62, od 65 do 68, 70, 71, od 74 do 77, od 79 do 83.

Postępując analogicznie dla kolejnych chwil, docho - dzimy do:

$r = 12$, gdzie stan nr 676 dominuje w stosunku do stanów nr 668, 669, 670, 671;

$r = 13$, gdzie stan nr 685 dominuje nad nr 683, 684 i stan nr 687 - nad nr 686, 683;

$r = 14$, gdzie stan nr 690 dominuje nad nr 688, a stan 691 nad 689.

Wyznaczenie ścieżki stanów optymalnych sprowadza się do połączenia stanów dominujących począwszy od stanu nr 0 do nr 692. Graf - dendryt przejść do stanów dominujących przedstawia rys. 3, na którym linią pogrubioną zaznaczono ścieżkę optymalną.

ZAGREGOWANA LISTA ZMIAN STANÓW SYSTEMU

TABLICA 2

r	$P_k^{/r/}$	$Q^{(l)}(\tau)$	$P_{02}^{/r/}$	$P_{03}^{/r/}$	$P_{05}^{/r/}$	$P_{16}^{/r/}$	$P_{23}^{/r/}$	$P_{24}^{/r/}$	$P_{34}^{/r/}$	$P_{35}^{/r/}$	$P_{36}^{/r/}$	$P_{46}^{/r/}$	$P_{56}^{/r/}$
0	0	0	0	0	0	0	$-\infty$	$-\infty$	$-\infty$	$-\infty$	$-\infty$	$-\infty$	$-\infty$
	1	6	1	0	0	0	$-\infty$	$-\infty$	$-\infty$	$-\infty$	$-\infty$	$-\infty$	$-\infty$
	2	9	1	0	0	1	$-\infty$	$-\infty$	$-\infty$	$-\infty$	$-\infty$	$-\infty$	$-\infty$
	3	13	1	0	1	0	$-\infty$	$-\infty$					
1	4	16	1	0	1	1	$-\infty$	$-\infty$		$-\infty$			
	5	11	1	1	0	0	$-\infty$	$-\infty$					
	6	14	1	1	0	1	$-\infty$	$-\infty$					
	7	18	1	1	1	0	$-\infty$	$-\infty$					
	8	21	1	1	1	1	$-\infty$	$-\infty$					
	9	6	2	0	0	0	$-\infty$	$-\infty$	$-\infty$	$-\infty$	$-\infty$	$-\infty$	$-\infty$
	10	9	2	0	0	1	$-\infty$						
	11	13	2	0	1	0	$-\infty$						
	12	16	2	0	1	1	$-\infty$						
	13	11	2	1	0	0	$-\infty$						
	14	14	2	1	0	1	$-\infty$						
	15	18	2	1	1	0	$-\infty$						
	16	21	2	1	1	1	$-\infty$						
2	17	9	2	0	0	2	$-\infty$			$-\infty$			
	18	16	2	0	1	2	$-\infty$						

r	$P_k^{/r/}$	$Q^{(r)}(T)$	$P_{02}^{/r/}$	$P_{03}^{/r/}$	$P_{05}^{/r/}$	$P_{16}^{/r/}$	$P_{23}^{/r/}$	$P_{24}^{/r/}$	$P_{34}^{/r/}$	$P_{35}^{/r/}$	$P_{36}^{/r/}$	$P_{46}^{/r/}$	$P_{56}^{/r/}$
	19	14	2	1	0	2	$-\infty$						
	20	21	2	1	1	2	$-\infty$						
	21	16	2	0	2	1	$-\infty$						
	22	13	2	0	2	0	$-\infty$						
	23	18	2	1	2	0	$-\infty$						
	24	21	2	1	2	1	$-\infty$						
	25	16	2	0	2	2	$-\infty$						
2	26	21	2	1	2	2	$-\infty$	$-\infty$	$-\infty$	$-\infty$	$-\infty$	$-\infty$	$-\infty$
	27	11	2	2	0	0	$-\infty$						
	28	14	2	2	0	1	$-\infty$						
	29	18	2	2	1	0	$-\infty$						
	30	21	2	2	1	1	$-\infty$						
	31	14	2	2	0	2	$-\infty$			$-\infty$			
	32	21	2	2	1	2	$-\infty$						
	33	18	2	2	2	0	$-\infty$						
	34	21	2	2	2	1	$-\infty$						
	35	21	2	2	2	2	$-\infty$						
	36	9	3	0	0	1	$-\infty$	$-\infty$	$-\infty$	$-\infty$	$-\infty$	$-\infty$	$-\infty$
	37	9	3	0	0	2	$-\infty$						
	38	16	3	0	1	1	$-\infty$						
3	39	16	3	0	1	2	$-\infty$						
	40	14	3	1	0	1	$-\infty$						

r	$P_k^{/r/}$	$Q^{(\tau)}(\tau)$	$P_{02}^{/r/}$	$P_{03}^{/r/}$	$P_{05}^{/r/}$	$P_{16}^{/r/}$	$P_{23}^{/r/}$	$P_{24}^{/r/}$	$P_{34}^{/r/}$	$P_{35}^{/r/}$	$P_{36}^{/r/}$	$P_{46}^{/r/}$	$P_{56}^{/r/}$
	41	14	3	1	0	2	$-\infty$						
	42	21	3	1	1	1	$-\infty$						
	43	21	3	1	1	2	$-\infty$						
	44	16	3	0	2	1	$-\infty$						
	45	16	3	0	2	2	$-\infty$						
	46	21	3	1	2	1	$-\infty$						
	47	21	3	1	2	2	$-\infty$						
	48	14	3	2	0	1	$-\infty$						
	49	14	3	2	0	2	$-\infty$						
	50	21	3	2	1	1	$-\infty$						
3	51	21	3	2	1	2	$-\infty$						
	52	21	3	2	2	1	$-\infty$	$-\infty$	$-\infty$	$-\infty$	$-\infty$	$-\infty$	$-\infty$
	53	21	3	2	2	2	$-\infty$						
	54	9	3	0	0	3	$-\infty$						
	55	16	3	0	1	3	$-\infty$						
	56	14	3	1	0	3	$-\infty$						
	57	21	3	1	1	3	$-\infty$						
	58	16	3	0	2	3	$-\infty$						
	59	21	3	1	2	3	$-\infty$						
	60	14	3	2	0	3	$-\infty$						
	61	21	3	2	1	3	$-\infty$						
	62	21	3	2	2	3	$-\infty$						
	63	16	3	0	3	1	$-\infty$						

r	$P^{/r/}_{k}$	$Q^{(l)}(L)$	$P^{/r/}_{02}$	$P^{/r/}_{03}$	$P^{/r/}_{05}$	$P^{/r/}_{16}$	$P^{/r/}_{23}$	$P^{/r/}_{24}$	$P^{/r/}_{34}$	$P^{/r/}_{35}$	$P^{/r/}_{36}$	$P^{/r/}_{46}$	$P^{/r/}_{56}$
	64	16	3	0	3	2	$-\infty$						
	65	21	3	1	3	1	$-\infty$						
	66	21	3	1	3	2	$-\infty$						
	67	21	3	2	3	1	$-\infty$						
	68	21	3	2	3	2	$-\infty$						
	69	16	3	0	3	3	$-\infty$						
	70	21	3	1	3	3	$-\infty$						
	71	21	3	2	3	3	$-\infty$						
	72	14	3	3	0	1	$-\infty$						
	73	14	3	3	0	2	$-\infty$						
	74	21	3	3	1	1	$-\infty$						
3	75	21	3	3	2	2	$-\infty$						
	76	21	3	3	1	2	$-\infty$						
	77	21	3	3	2	1	$-\infty$						
	78	14	3	3	0	3	$-\infty$						
	79	21	3	3	1	3	$-\infty$						
	80	21	3	3	2	3	$-\infty$	$-\infty$	$-\infty$	$-\infty$	$-\infty$	$-\infty$	$-\infty$
	81	21	3	3	3	1	$-\infty$						
	82	21	3	3	3	2	$-\infty$						
	83	21	3	2	3	3	$-\infty$						
	84	21	3	3	3	3	$-\infty$						

r	$P^{/r/}_{k}$	$Q^{(l)}(l)$	$P^{/r/}_{02}$	$P^{/r/}_{03}$	$P^{/r/}_{05}$	$P^{/r/}_{16}$	$P^{/r/}_{23}$	$P^{/r/}_{24}$	$P^{/r/}_{34}$	$P^{/r/}_{35}$	$P^{/r/}_{36}$	$P^{/r/}_{46}$	$P^{/r/}_{56}$
⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮
	664	21	$+\infty$	$+\infty$	8	10	$+\infty$	$+\infty$	$+\infty$	4	4	0	
	665	21	$+\infty$	$+\infty$	8	10	$+\infty$	$+\infty$	$+\infty$	4	4	1	
	666	21	$+\infty$	$+\infty$	8	11	$+\infty$	$+\infty$	$+\infty$	4	4	0	
	667	21	$+\infty$	$+\infty$	8	11	$+\infty$	$+\infty$	$+\infty$	4	4	1	
12	668	14	$+\infty$	$+\infty$	$+\infty$	10	$+\infty$	$+\infty$	$+\infty$	4	4	0	
	669	14	$+\infty$	$+\infty$	$+\infty$	10	$+\infty$	$+\infty$	$+\infty$	4	4	1	
	670	14	$+\infty$	$+\infty$	$+\infty$	11	$+\infty$	$+\infty$	$+\infty$	4	4	0	
	671	14	$+\infty$	$+\infty$	$+\infty$	11	$+\infty$	$+\infty$	$+\infty$	4	4	1	
	672	21	$+\infty$	$+\infty$	+ 8	10	$+\infty$	$+\infty$	$+\infty$	4	4	2	
	673	21	$+\infty$	$+\infty$	+ 8	11	$+\infty$	$+\infty$	$+\infty$	4	4	2	
	674	14	$+\infty$	$+\infty$	$+\infty$	10	$+\infty$	$+\infty$	$+\infty$	4	4	2	
	675	14	$+\infty$	$+\infty$	$+\infty$	11	$+\infty$	$+\infty$	$+\infty$	4	4	2	
	676	14	$+\infty$	$+\infty$	$+\infty$	12	$+\infty$	$+\infty$	$+\infty$	4	4	0	
	677	14	$+\infty$	$+\infty$	$+\infty$	12	$+\infty$	$+\infty$	$+\infty$	4	4	1	
	678	14	$+\infty$	$+\infty$	$+\infty$	12	$+\infty$	$+\infty$	$+\infty$	4	4	2	
	679	22	$+\infty$	$+\infty$	$+\infty$	11	$+\infty$	$+\infty$	$+\infty$	$+\infty$	5	1	0
	680	22	$+\infty$	$+\infty$	$+\infty$	11	$+\infty$	$+\infty$	$+\infty$	$+\infty$	5	2	0
13	681	22	$+\infty$	$+\infty$	$+\infty$	12	$+\infty$	$+\infty$	$+\infty$	$+\infty$	5	1	0
	682	22	$+\infty$	$+\infty$	$+\infty$	12	$+\infty$	$+\infty$	$+\infty$	$+\infty$	5	2	0

r	$P_k^{/r/}$	$Q^{(l)}(\tau)$	$P_{02}^{/r/}$	$P_{03}^{/r/}$	$P_{05}^{/r/}$	$P_{16}^{/r/}$	$P_{23}^{/r/}$	$P_{24}^{/r/}$	$P_{34}^{/r/}$	$P_{35}^{/r/}$	$P_{36}^{/r/}$	$P_{46}^{/r/}$	$P_{56}^{/r/}$
13	683	17	$+\infty$	$+\infty$	$+\infty$	11	$+\infty$	$+\infty$	$+\infty$	$+\infty$	5	$+\infty$	0
	684	17	$+\infty$	$+\infty$	$+\infty$	12	$+\infty$	$+\infty$	$+\infty$	$+\infty$	5	$+\infty$	0
	685	19	$+\infty$	$+\infty$	$+\infty$	$+\infty$	$+\infty$	$+\infty$	$+\infty$	$+\infty$	5	1	0
	686	19	$+\infty$	$+\infty$	$+\infty$	$+\infty$	$+\infty$	$+\infty$	$+\infty$	$+\infty$	5	2	0
	687	17	$+\infty$	$+\infty$	$+\infty$	$+\infty$	$+\infty$	$+\infty$	$+\infty$	$+\infty$	5	$+\infty$	0
14	688	22	$+\infty$	$+\infty$	$+\infty$	$+12$	$+\infty$	$+\infty$	$+\infty$	$+\infty$	6	2	1
	689	17	$+\infty$	$+\infty$	$+\infty$	$+12$	$+\infty$	$+\infty$	$+\infty$	$+\infty$	6	$+\infty$	1
	690	19	$+\infty$	$+\infty$	$+\infty$	$+\infty$	$+\infty$	$+\infty$	$+\infty$	$+\infty$	6	2	1
	691	14	$+\infty$	$+\infty$	$+\infty$	$+\infty$	$+\infty$	$+\infty$	$+\infty$	$+\infty$	6	$+\infty$	1
15	692		$+\infty$	$+\infty$	$+\infty$	$+\infty$	$+\infty$	$+\infty$	$+\infty$	$+\infty$	$+\infty$	$+\infty$	$+\infty$

ROZWIAZANIE OPTYMALNE

TABLICA 3

r	$P_k^{/r/}$	$Q^{(1)}(\tau)$	$P_{02}^{/r/}$	P_{03}	P_{05}	P_{16}	P_{23}	P_{24}	P_{34}	P_{35}	P_{36}	P_{46}	P_{56}
		q_{ij}	6	5	7	3	10	15	2	4	2	5	12
0	0	0											
1	8	21	1	1	1	1	$-\infty$	$-\infty$	$-\infty$	$-\infty$	$-\infty$	$-\infty$	$-\infty$
2	35	21	2	2	2	2	$-\infty$	$-\infty$	$-\infty$	$-\infty$	$-\infty$	$-\infty$	$-\infty$
3	84	21	3	3	3	3	$-\infty$	$-\infty$	$-\infty$	$-\infty$	$-\infty$	$-\infty$	$-\infty$
4	145	21	4	4	4	4	$-\infty$	$-\infty$	$-\infty$	$-\infty$	$-\infty$	$-\infty$	$-\infty$
5	205	20	$+\infty$	$+\infty$	5	5	0	$-\infty$	$-\infty$	$-\infty$	$-\infty$	$-\infty$	$-\infty$
6	325	20	$+\infty$	$+\infty$	6	6	1	$-\infty$	$-\infty$	$-\infty$	$-\infty$	$-\infty$	$-\infty$
7	414	20	$+\infty$	$+\infty$	7	7	2	$-\infty$	$-\infty$	$-\infty$	$-\infty$	$-\infty$	$-\infty$
8	459	18	$+\infty$	$+\infty$	8	8	$+\infty$	$-\infty$	0	0	0	$-\infty$	$-\infty$
9	523	26	$+\infty$	$+\infty$	$+\infty$	9	$+\infty$	0	1	1	1	$-\infty$	$-\infty$
10	595	24	$+\infty$	$+\infty$	$+\infty$	10	$+\infty$	1	$+\infty$	2	2	$-\infty$	$-\infty$
11	659	24	$+\infty$	$+\infty$	$+\infty$	11	$+\infty$	2	$+\infty$	3	3	$-\infty$	$-\infty$
12	676	14	$+\infty$	$+\infty$	$+\infty$	12	$+\infty$	$+\infty$	$+\infty$	4	4	0	$-\infty$
13	685	19	$+\infty$	$+\infty$	$+\infty$	$+\infty$	$+\infty$	$+\infty$	$+\infty$	$+\infty$	5	1	0
14	690	19	$+\infty$	$+\infty$	$+\infty$	$+\infty$	$+\infty$	$+\infty$	$+\infty$	$+\infty$	6	2	1
15	692	0	$+\infty$	$+\infty$	$+\infty$	$+\infty$	$+\infty$	$+\infty$	$+\infty$	$+\infty$	$+\infty$	$+\infty$	$+\infty$

Rozwiązanie optymalne zawiera tablica nr 3, zestawiona dla stanów dominujących na podstawie tablicy nr 2. Graficzną postać rozwiązania optymalnego przedstawia rys.

9. UWAGI KOŃCOWE

Przedstawione podejście do zagadnienia alokacji zasobów daje szereg niewątpliwych korzyści, wynikających z możliwości wyróżnienia równolegle szeregu wariantów rozwiązań suboptymalnych, uporządkowanych według wzrastających różnic między dolną i górną granicą intensywności angażowanych zasobów. Dysponowanie takimi zbiorami wariantów ma istotne znaczenie dla kierownictwa w procesie realizacji planu, stwarza bowiem przesłanki dla prognozy stopnia osiągnięcia zamierzonego celu przy założonej intensywności zużycia zasobów. Z drugiej strony, wyróżnianie stanów optymalnych i kolejnych suboptymalnych wariantów planu jest w istocie swej bardzo pracochłonne, a związane z tym zadania wyboru rozwiązania optymalnego mają charakter kombinatoryczny.

Wypada zauważyć, że ogólna liczba stanów dopuszczalnych i liczba możliwych przejść z jednego stanu do innych stanów, zależy nie tylko od stopnia złożoności sieci /planu przedsięwzięcia/ i ilości rodzajów zaangażowanych zasobów, lecz również od wielkości przyjętej jednostki czasu. W przypadkach rozpatrywania sieci składających się z kilku - dziesięciu czynności /przy stosunku ilości czynności do ilości zdarzeń od 1,4 do 1,6/ liczba stanów dopuszczalnych może wynosić od kilkunastu do kilkudziesięciu tysięcy, to-też nawet zastosowanie EMC może okazać się mało ekonomiczne jeśli zastosować algorytm doprowadzający do uzyskania wyników ścisłych. W związku z tym, wydaje się, że stosunkowo bardziej opłacalną metodę obliczeń daje programowanie heurystyczne. W szczególności, może być korzystne stosowanie heurystycznych metod wyznaczania funkcjonalnych współzależności, a m.in. tzw. metody scalania, metody doboru /selekcji/ itp. przy wykorzystaniu łańcuchowej metody Monte Carlo lub metody optymalizacji sekwencji wykrywania operacji, np. [1], [2], [3], [4], [5].

Przewiduje się jednak, że zarówno zaproponowaną metodę jak i połączenie jej z wymienionymi metodami heurystycznymi można bardziej usprawnić w przypadkach rozwiązywania konkretnych zadań.

DODATEK

do rozdz. 7: "Kryteria wyznaczania stanu dominującego"

Uzasadnienie wprowadzonych kryteriów /29/, /30/, /31/ można wyrazić poprzez następujące

Twierdzenie. Niech w dendrycie stanów dopuszczalnych /kompleksu/ ścieżka optymalna przechodzi przez stan $P_2^{/r/}$, przy czym wiadomo, że stan $P_1^{/r/}$ dominuje nad stanem $P_2^{/r/}$; wtedy - stan $P_1^{/r/}$ znajduje się na ścieżce stanów optymalnych.

Dowód. Niech w chwili r stan $P_1^{/r/}$ dominuje nad stanem $P_2^{/r/}$, czyli:

$$P_1^{/r/} > P_2^{/r/} ,$$

natomiast w następnym kroku wyznaczania stanów kompleksu, tj. w przedziale /r, r+1/ wystąpi następujący zbiór stanów

$$\left\{P_1^{/r+1/}\right\} , \left\{P_2^{/r+1/}\right\} .$$

Wprowadźmy następujące twierdzenie pomocnicze, tj.

Lemat: Jeśli stan $\overset{o}{P}{}_1^{/r/}$ dominuje nad stanem $P_2^{/r/}$, czyli, stosując zapis:

$$P_1^{/r/} \succ P_2^{/r/} ,$$

to dla dowolnego stanu $P_2^{/r+1/}$ zawsze można wyznaczyć stan $P_1^{/r+1/}$, taki że

$$P_1^{/r+1/} \succ P_{2\,2}^{/r+1/}$$

Dowód lematu: Zagadnienie sprowadza się do wyznaczenia stanu $P_1^{/r+1/}$, który spełniając warunki /29/, /30/, /31/ zachowa dominację w stosunku do dowolnego stanu dopuszczalnego $P_2^{/r+1/}$. W tym celu wystarczy znaleźć stan $\left(P_{ij}^{/r+1/}\right)_1$ dla dowolnej czynności $c_{ij} \in C$.

Na podstawie zestawienia sześciu możliwych przypadków ustalania stanów kompleksu /por. rozdz. 3/ stan $\left(P_{ij}^{/r+1/}\right)_1$ przyjmie wartość:

$$\left(P_{ij}^{/r+1/}\right)_1 = \begin{cases} -\infty, & \text{jeśli } \left(P_{ij}^{/r+1/}\right)_1 \text{ spełnia warunki /3/ i /4/ w przypadku 1;} \\ 0, & \text{jeśli } \left(P_{ij}^{/r+1/}\right)_1 \text{ spełnia warunki /6/, /7/ i /8/ w przypadku 2, lub warunki /9/, /11/ i /10/ w przypadku 3,} \\ & \text{jeśli } \left(P_{ij}^{/r+1/}\right)_2 = 0; \\ 1, & \text{jeśli } \left(P_{ij}^{/r+1/}\right)_1 = 1; \\ \left(P_{ij}^{/r+1/}\right)_1 + 1, & \text{jeśli } \left(P_{ij}^{/r+1/}\right) \text{ spełnia warunki /16/ i /17/ przypadku 5;} \\ +\quad, & \text{jeśli } \left(P_{ij}^{/r+1/}\right) \text{ spełnia warunki /18/ i /19/ przypadku 6.} \end{cases} \qquad /32/$$

W związku z powyższym, gdyby ponadto uwzględnić warunki /29/, /30/ i /31/ można stwierdzić, że stan $\left(P_{ij}^{/r+1/}\right)_1$ jest stanem dopuszczalnym, oraz można też łatwo uzasadnić, że jeśli podczas przechodzenia kompleksu od stanu $P_1^{/r/}$ do stanu $P_1^{/r+1/}$ nie wykonuje się żadnej czynności $c_{ij} \in C$, to nie wykonuje się też tej czynności przy przechodzeniu od stanu $P_2^{/r/}$ do stanu $P_2^{/r+1/}$.

Zrozumiałe jest również, że podczas przechodzenia od stanu $P_1^{/r/}$ do $P_1^{/r+1/}$ ilość $Q^{(l)}$ wykorzystywanych wszystkich rodzajów zasobów / l = 1,2,...., / w przedziale czas

/r, r+1/ nie będzie większa niż przy przechodzeniu od stanu $P_2^{/r/}$ do $P_2^{/r+1/}$. Ponieważ przyjęto /w rozdz. 6/, że kryterium cząstkowe $f_r\left[Q^{(l)}\right]$ jest funkcją niemalejącą, to przy $P_1^{/r/} \longrightarrow P_1^{/r+1/}$ jej wartość nie będzie mniejsza niż przy $P_2^{/r/} \longrightarrow P_2^{/r+1/}$.

Jeśli więc uwzględnimy warunek /29/, określający dominację stanu P_1 nad stanem P_2, czyli:

$$F\left(P_1^{/r/}\right) \leqslant F\left(P_2^{/r/}\right)$$

to dowód powyższego lematu można uznać za wystarczający, gdyż

$$P_1^{/r+1/} \succ P_2^{/r+1/} .$$

Rozwijając z kolei dowód twierdzenia przyjmijmy, że ścieżka optymalna przechodzi w kolejnych chwilach czasu /od 0 do λ/ przez stany P_2, czyli

$$P^{/0/},\ P_2^{/1/},\ P_2^{/2/},\ \ldots,\ P_2^{(\lambda-1)},\ P_2^{(\lambda)} \ldots \qquad /33/$$

Korzystając z zależności /31/ można przejść do sformułowania ciągu stanów P_1 w chwilach /r+1/, czyli

$$P_1^{/r/},\ P_1^{/r+1/},\ P_1^{/r+2/},\ \ldots,\ P_1^{(\lambda)},\ \ldots \qquad /34/$$

a przy tym takie, aby dla dowolnej chwili v / zachodziła zależność $P_1^{(v)} > P_2^{(v)}$. Zrozumiałe, że taki ciąg doprowadzi do stanu końcowego $P_1^{(\lambda)}$, tożsamego ze stanem $P_2^{(\lambda)}$, a stąd, $P_1^{(\lambda)} \succ P_2^{(\lambda)}$. Oznacza ono, że wartość kryterium zużycia zasobów w stanie $P_1^{(\lambda)}$ nie powinna osiągnąć wyższej wartości niż w stanie $P_2^{(\lambda)}$.

Ponieważ, zgodnie z założeniem, ciąg stanów /34/ jest optymalnym, stąd też istnieje ciąg stanów

$$P^{/0/}, P_1^{/1/}, P_1^{/2/}, \ldots, P_1^{(\lambda-1)}, P^{(\lambda)},$$

który należy uznać jako optymalny, odpowiadający optymalnej ścieżce w dendrycie stanów dopuszczalnych.

LITERATURA:

1. BIEŁKINA M.W. i in. : Optimizacja posledowatielnosti wypołnienija opieracji. "Awtomatika i Telemechnika", nr 11, 1965.
2. LERNER A. Ja., CEIMAN F. Ch.: Ob ewristiczeskich mieto - dach zadacz uprawlenija matierialno-techniczeskim snabżeniem. "Awtomatika i Telemechnika", nr 2, 1969.
3. OZERNOJ W.M., RJABOW L.P.: Ewristiczeskij mietod optimizacji posledowatielnostiej wypołnienija opieracyj . Awtomatika i Telemechanika", nr 12, 1967.
4. PAGE M.S.: On Monte Carlo Methods im Congestion Problem. "Operations Research", vol. 13, nr 2, 1965.
5. TEITZ M.H., BART P.: Heuristic Methods for Estimating the Generalized Vertex Median of Weighted Graph."Operations Research", vol. 16, nr 5, 1968.

Wykonano w 50 egz.

Egz.nr 1-50 Bibl.Jawna
Wyk.: płk Skibiński
Druk: PK,dn. 4.05.70 r.
Nr ks. 634/1422/WW
Druk ASG-0-XV-4582

ZAŁACZNIK 1

ZESTAWIENIE PRZEJŚĆ SYSTEMU DO KOLEJNYCH STANÓW

r	K^{r-1}	$K^{/r/}$	P^r_{03}	P^r_{05}	P^r_{16}	$K^{/r/'}$
0	0	0	0	0	0	
		1	0	0	0	
		2	0	0	1	
		3	0	1	0	
1	0	4	0	1	1	
		5	1	0	0	
		6	1	0	1	
		7	1	1	0	
		8	1	1	1	
		9	0	0	0	
		10	0	0	1	
		11	0	1	0	
	1	12	0	1	1	
		13	1	0	0	
		14	1	0	1	
		15	1	1	0	
		16	1	1	1	
2			0	0	1	10
			0	1	1	12
		17	0	0	2	
	2	18	0	1	2	
			1	0	1	14
			1	1	1	16
		19	1	0	2	
		20	1	1	2	
			0	1	0	11
	3		0	1	1	12
		21	0	2	1	

r	K^{r-1}	$K^{/r/}$	P_{03}	P_{05}	P_{16}	$K^{/r/}$
		22	0	2	0	
	3		1	1	0	15
			1	1	1	16
		23	1	2	0	
		24	1	2	1	
			0	1	1	12
			0	1	2	18
	4		0	2	1	21
		25	0	2	2	
			1	1	1	16
2			1	1	2	20
			1	2	1	24
		26	1	2	2	
			1	0	0	13
			1	0	1	14
	5		1	1	0	15
			1	1	1	16
		27	2	0	0	
		28	2	0	1	
		29	2	1	0	
		30	2	1	1	
			1	0	1	14
			1	0	2	19
	6		1	1	1	16
			1	1	2	20
			2	0	1	28
		31	2	0	2	
			2	1	1	30
		32	2	1	2	

r	K^{r-1}	$K^{/r/}$	P_{03}	P_{05}	P_{16}	$K^{/r/}$
			1	1	0	15
			1	1	1	16
			1	2	0	23
	7		1	2	1	24
			2	1	0	29
			2	1	1	30
2		33	2	2	0	
		34	2	2	1	
			1	1	1	16
			1	1	2	20
	8		1	2	1	24
			1	2	2	26
			2	1	1	30
			2	1	2	32
			2	2	1	34
		35	2	2	2	
		36	0	0	1	
		37	0	0	2	
		38	0	1	1	
	9	39	0	1	2	
3		40	1	0	1	
		41	1	0	2	
		42	1	1	1	
		43	1	1	2	

r	K^{r-1}	$K^{/r/}$	P_{03}	P_{05}	P_{16}	$K^{/r/}$
3			0	0	1	36
			0	0	2	37
			0	1	1	38
	10		0	1	2	39
			1	0	1	40
			1	0	2	41
			1	1	1	42
			1	1	2	43
			0	1	1	38
			0	1	2	39
		44	0	2	1	
		45	0	2	2	
	11		1	1	1	42
			1	1	2	43
		46	1	2	1	
		47	1	2	2	
			0	1	1	38
			0	1	2	39
	12		0	2	1	44
			0	2	2	45
			1	1	1	42
			1	1	2	43
			1	2	1	46
			1	2	2	47
			1	0	1	40
	13		1	0	2	41
			1	1	1	42
			1	1	2	43
		48	2	0	1	
		49	2	0	2	
		50	2	1	1	
		51	2	1	2	

r	K^{r-1}	$K^{/r/}$	P_{03}	P_{05}	P_{16}	$K^{/r/}$
3			1	0	1	40
			1	0	2	41
			1	1	1	42
	14		1	1	2	43
			2	0	1	48
			2	0	2	49
			2	1	1	50
			2	1	2	51
			1	1	1	42
			1	1	2	43
			1	2	1	46
	15		1	2	2	47
			2	1	1	50
			2	1	2	51
		52	2	2	1	
		53	2	2	2	
			1	1	1	42
	16		1	1	2	43
			1	2	1	46
			1	2	2	47
			2	1	1	50
			2	1	2	51
			2	2	1	52
			2	2	2	53
			0	0	2	37
		54	0	0	3	
	17		0	1	2	39
		55	0	1	3	
			1	0	2	41
		56	1	0	3	
			1	1	2	43
		57	1	1	3	

r	K^{r-1}	K^{r}	P_{03}	P_{05}	P_{16}	$K^{/r/}$
3			0	1	2	39
			0	1	3	55
	18		0	2	2	45
		58	0	2	3	
			1	1	2	43
			1	1	3	57
			1	2	2	47
		59	1	2	3	
			1	0	2	41
			1	0	3	56
	19		1	1	2	43
			1	1	3	57
			2	0	2	49
		60	2	0	3	
			2	1	2	51
		61	2	1	3	
			1	1	2	43
	20		1	1	3	57
			1	2	2	47
			1	2	3	59
			2	1	2	51
			2	1	3	61
			2	2	2	53
		62	2	2	3	
			0	2	1	44
			0	2	2	45
	21	63	0	3	1	
		64	0	3	2	
			1	2	1	46
			1	2	2	47
		65	1	3	1	
		66	1	3	2	

r	K^{r-1}	$K/r/$	P_{03}	P_{05}	P_{16}	$K/r/$
	22		0	2	1	44
			0	2	2	45
			0	3	1	63
			0	3	2	64
			1	2	1	46
			1	2	2	47
			1	3	1	65
3			1	3	2	66
	23		1	2	1	46
			1	2	2	47
			1	3	1	65
			1	3	2	66
			2	2	1	52
			2	2	2	53
		67	2	3	1	
		68	2	3	2	
	24		1	2	1	46
			1	2	2	47
			1	3	1	65
			1	3	2	66
			2	2	1	52
			2	2	2	53
			2	3	1	67
			2	3	2	68
	25		0	2	2	45
			0	2	3	58
			0	3	2	64
		69	0	3	3	
			1	2	2	47
			1	2	3	59
			1	3	2	66
		70	1	3	3	

r	K^{r-1}	$K/r/$	P_{03}	P_{05}	P_{16}	$K/r/$
	26		1	2	2	47
			1	2	3	59
			1	3	2	66
			1	3	3	70
			2	2	2	53
			2	2	3	62
			2	3	2	68
		71	2	3	3	
	27		2	0	1	48
3			2	0	2	49
			2	1	1	50
			2	2	2	53
		72	3	0	1	
		73	3	0	2	
		74	3	1	1	
		75	3	2	2	
	28		2	0	1	48
			2	0	2	49
			2	1	1	50
			2	2	2	53
			3	0	1	72
			3	0	2	73
			3	1	1	74
			3	2	2	75
	29		2	1	1	50
			2	1	2	51
			2	2	1	52
			2	2	2	53
			3	1	1	74
		76	3	1	2	
		77	3	2	1	
			3	2	2	75

r	K^{r-1}	$K/r/$	P_{03}	P_{05}	P_{16}	$K/r/$
	30		2	1	1	50
			2	1	2	51
			2	2	1	52
			2	2	2	53
			3	1	1	74
			3	1	2	76
			3	2	1	77
			3	2	2	75
	31		2	0	2	49
3			2	0	3	60
			2	1	2	51
			2	1	3	61
			3	0	2	73
		78	3	0	3	
			3	1	2	76
		79	3	1	3	
	32		2	1	2	51
			2	1	3	61
			2	2	2	53
			2	2	3	62
			3	1	2	76
			3	1	3	79
			3	2	2	75
		80	3	2	3	
			2	2	1	52
			2	2	2	53
			2	3	1	67
	33		2	3	2	68
			3	2	1	77
	34		3	2	2	75
		81	3	3	1	
		82	3	3	2	
			2	2	2	53
			2	2	3	62
	35		2	3	2	68
3		83	2	3	3	
			3	2	2	75
			3	2	3	80
			3	3	2	82
		84	3	3	3	

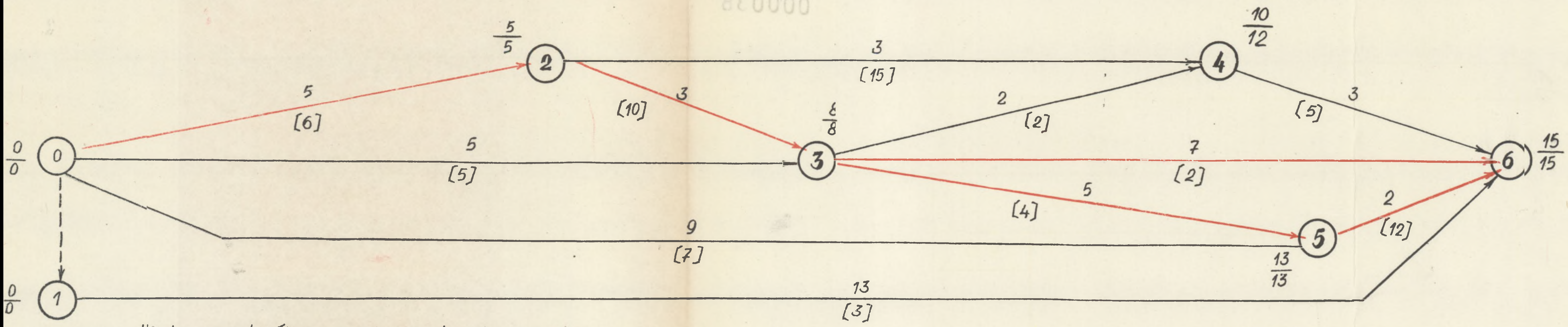
r	$K^{/r-1/}$	$K^{/r/}$	$P_{05}^{/r/}$	$P_{16}^{/r/}$	$P_{46}^{/r/}$	$K^{/r/}$
		664	8	10	0	
	596	665	8	10	1	
	÷	666	8	11	0	
		667	8	11	1	
	626	668	$+\infty$	10	0	
	652	669	$+\infty$	10	1	
	÷	670	$+\infty$	11	0	
	659	671	$+\infty$	11	1	
	627		8	10	1	665
		672	8	10	2	
			8	11	1	667
		673	8	11	2	
			$+\infty$	10	1	669
		674	$+\infty$	10	2	
			$+\infty$	11	1	671
		675	$+\infty$	11	2	
	628		$+\infty$	10	0	668
	÷		$+\infty$	10	1	669
	642		$+\infty$	11	0	670
12			$+\infty$	11	1	671
	643		$+\infty$	10	1	669
			$+\infty$	10	2	674
			$+\infty$	11	1	671
			$+\infty$	11	2	675
	644		$+\infty$	11	0	670
	646		$+\infty$	11	1	671
	648	676	$+\infty$	12	0	
	650	677	$+\infty$	12	1	
	645		$+\infty$	11	1	671
	647		$+\infty$	11	2	675
	649		$+\infty$	12	1	677
	651	678	$+\infty$	12	2	
	660		$+\infty$	11	0	670
	÷		$+\infty$	11	1	671
	662		$+\infty$	12	0	676
			$+\infty$	12	1	677
	661		$+\infty$	11	1	671
	663		$+\infty$	11	2	675
			$+\infty$	12	1	677
			$+\infty$	12	2	678

r	$K^{/r-1/}$	$K^{/r/}$	$P_{16}^{/r/}$	$P_{46}^{/r/}$	$P_{56}^{/r/}$	$K^{/r/}$
	664	679	11	1	0	
	÷	680	11	2	0	
	671	681	12	1	0	
		682	12	2	0	
13	672		11	2	0	680
	÷	683	11	$+\infty$	0	
	675		12	2	0	682
		684	12	$+\infty$	0	
	676		12	1	0	681
	÷		12	2	0	682
	677	685	$+\infty$	1	0	
		686	$+\infty$	2	0	
			12	2	0	682
	678		12	$+\infty$	0	684
			$+\infty$	2	0	686
		687	$+\infty$	$+\infty$	0	
	679	688	12	2	1	
		689	12	$+\infty$	1	
	÷	690	$+\infty$	2	1	
	682	691	$+\infty$	$+\infty$	1	
14	683		12	$+\infty$	1	689
	684		$+\infty$	$+\infty$	1	691
	685		$+\infty$	2	1	690
	686		$+\infty$	$+\infty$	1	691
	687		$+\infty$	$+\infty$	1	691
15	690					
	691	692	$+\infty$	$+\infty$	$+\infty$	

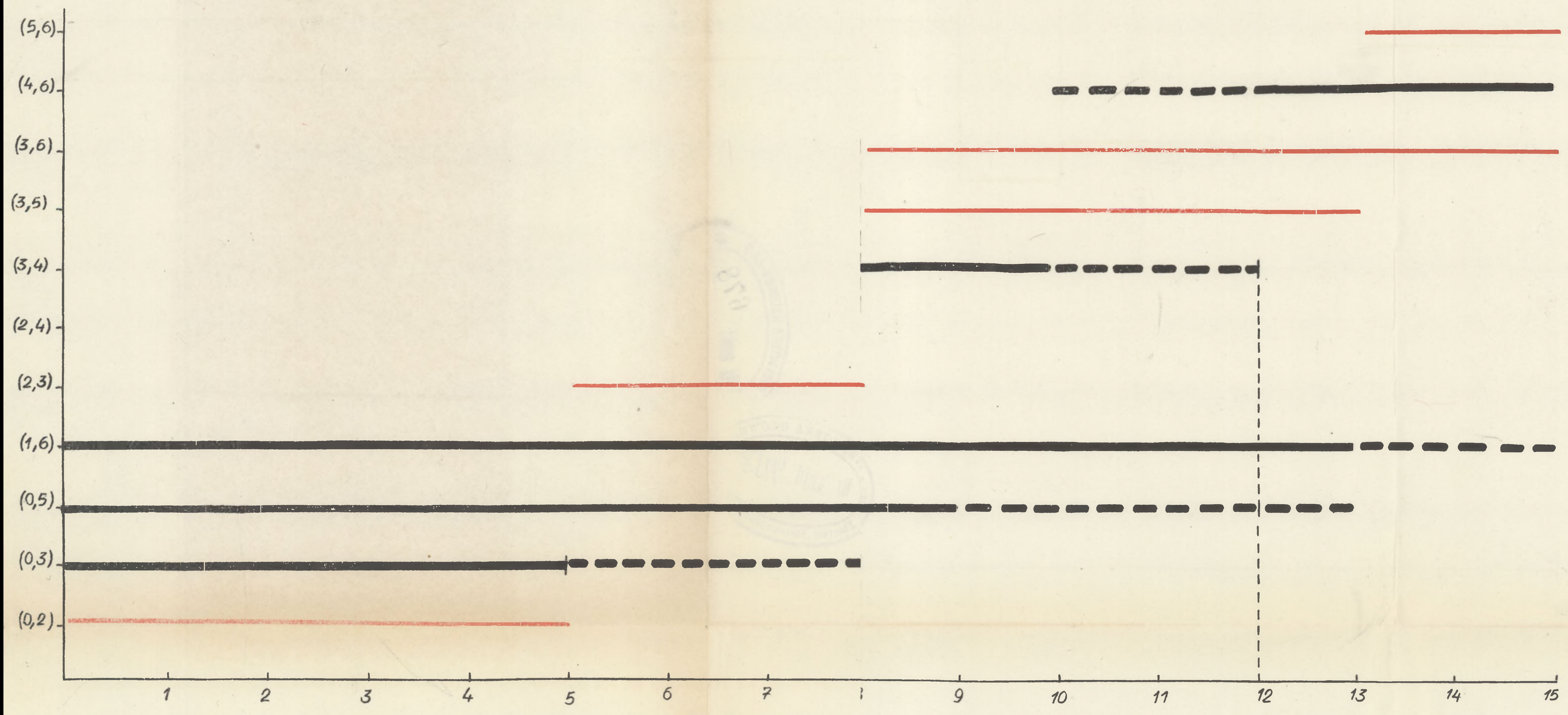
4 zał

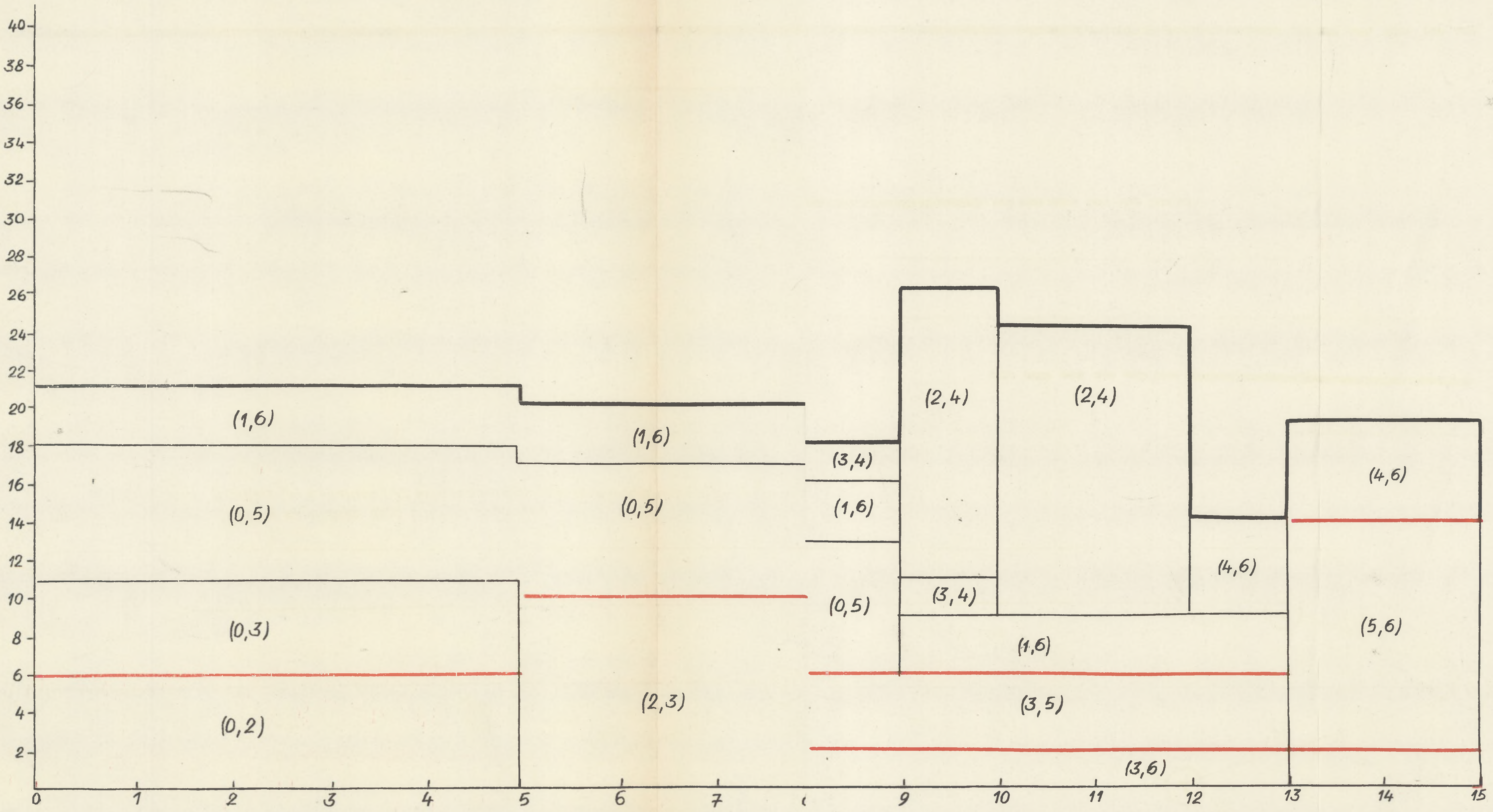
Rys. 3 DENDRYT PRZEJŚĆ DO STANÓW DOMINUJĄCYCH

ROZWIĄZANIE OPTYMALNE



Uwaga: liczby nad strzałką oznaczają czas trwania czynności
liczby pod strzałką (w nawiasach [ ]) oznaczają intensywność zużycia dla danej czynności





WYKONANO w 50 egz.
Poz. ks. 1423/W W
Oprac. płk SKIBIŃSKI

Rys. 2 GRAF ZMIAN STANÓW SYSTEMU


7
6
5
4
3
2
1
0