



**AKADEMIA SZTABU GENERALNEGO**  
im. generała broni K. Świerczewskiego

**JAWNE**  
[Redacted]

Egz. Nr 5

ppłk dypl. mgr Czesław GOZDECKI

**METODA WYBORU OPTYMALNEGO UGRUPOWANIA  
BOJOWEGO RAKIET I ARTYLERII PRZECIWLOTNICZEJ  
W OSŁONIE OBIEKTÓW STAŁYCH**

Rozprawa doktorska



010325

40777  
BIBLIOTEKA NAUKOWA ASG WP  
Archiwum Sztabu Zbiór Specjalnych  
Nr ewid. \_\_\_\_\_



**A K A D E M I A S Z T A B U G E N E R A L N E G O**  
im. generała broni K. Świerczewskiego

---

**JAWNE**  
[redacted]  
[redacted]  
[redacted]

Egz. Nr 5

ppłk dypl. mgr Czesław GOZDECKI

**METODA WYBORU OPTYMALNEGO UGRUPOWANIA  
BOJOWEGO RAKIET I ARTYLERII PRZECIWLOTNICZEJ  
W OSŁONIE OBIEKTÓW STAŁYCH**

**Rozprawa doktorska**



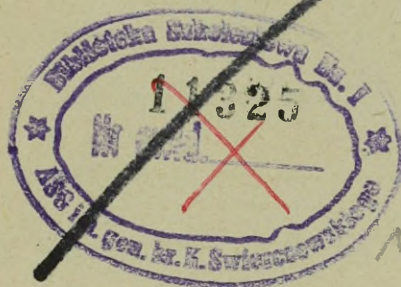
010325

40777  
BIBLIOTEKA NAUKOWA ASG WP  
Archiwum Biura Historii Specjalnych  
Nr ewid. \_\_\_\_\_

**A K A D E M I A S Z T A B U G E N E R A L N E G O**  
im. generała broni K. Świerczewskiego

PODSTAWA  
Ustawa z dnia 22 stycznia 1969 roku  
art. 65 ust. 2 (Dz. Ust. Nr 11 poz. 95)  
.....  
podpis

**JAWNE**



Egz. Nr ..... 3

PRZEKLASYFIKOWANO  
Protokół Nr 12657

ppłk dypl. mgr Czesław GOZDECKI

**METODA WYBORU OPTYMALNEGO UGRUPOWANIA  
BOJOWEGO RAKIET I ARTYLERII PRZECIWLOTNICZEJ  
W OSŁONIE OBIEKTÓW STAŁYCH**

**Rozprawa doktorska**



BIBLIOTEKA NAUKOWA ASG WP  
Archiwum Działu Zbiórów Specjalnych  
Nr ewid. ....

40777

Praca napisana pod kierownictwem  
naukowym  
płk. doc. dr. Włodzimierza KOSTRZEWSKIEGO

S P I S   T R E Ś C I  
=====

	str.
Wstęp . . . . .	3
1. Sformułowanie problemu . . . . .	7
2. Kryterium efektywności i metody jego obliczania . . . . .	12
3. Optymalizacja podziału ognia . . . . .	33
A. Podział ognia według wartości oczekiwanej liczby rażonych celów . . . . .	34
B. Podział ognia według prawdopodobieństwa rażenia wszystkich celów . . . . .	50
C. Optymalizacja podziału ognia do celów stosujących manewr . . . . .	52
4. Ogólny model matematyczny ugrupowania sił i środków OPL . . . . .	61
5. Metody rozwiązania modelu . . . . .	83
6. Algorytmy określania optymalnego ugrupowania: . . . . .	99
A. rakiet przeciwlotniczych . . . . .	99
B. małokalibrowej artylerii przeciwlotniczej . . . . .	102
7. Przykłady zastosowania algorytmów . . . . .	104
Wnioski końcowe . . . . .	126
Załączniki . . . . .	130
Bibliografia . . . . .	140

### WSTĘP

Praca niniejsza naświetla od strony ilościowej problem optymalnego ugrupowania rakiet i artylerii przeciwlotniczej w osłonie obiektów i omawia metodę rozwiązania tego problemu w oparciu o rachunek prawdopodobieństwa, programowanie liniowe i nieliniowe oraz teorię gier.

Zasadniczym celem pracy jest próba opracowania metody umożliwiającej wybór optymalnego ugrupowania w sposób możliwie ścisły oraz ustalenie pewnych ogólnych zasad dotyczących efektywności wykorzystania sił i środków OPL w osłonie obiektów.

Główny akcent w pracy zostaje położony na możliwość praktycznego jej wykorzystania w wojskach OPL i OPK oraz w procesie szkolenia w Akademii Sztabu Generalnego.

Powodem, który skłonił autora do podjęcia tematu jest to, że zagadnienie wyboru optymalnego ugrupowania naziemnych środków OPL w osłonie obiektów stanowi bardzo istotny problem występujący na szczeblach taktycznych wojsk OPL i OPK. Dotychczas jednak problem ten nie był przedmiotem odrębnych i bardziej gruntownych studiów, szczególnie w zakresie użycia rakiet przeciwlotniczych.

Wyznaczenie ugrupowania bojowego na podstawie ogólnych zasad obrony przeciwlotniczej obiektów oraz intuicyjnego sposobu uwzględniania czynników warunkujących ugrupowanie nie stanowi już dziś metody, która by zapewniała efektywne wykorzystanie sił i środków OPL. Wynika to stąd, że szereg czynników, które należy uwzględniać w ugrupowaniu bojowym, warunkuje się wzajemnie, tworząc w ten sposób ścisłe zależności. Ustalenie tych zależności kierując się intuicją oraz uwzględnienie ich w ugrupowaniu bojowym jest rzeczą trudną i prowadzi zwykle do nieścisłości. Zachodzi więc potrzeba opracowania ogólnej metody, która by umożli-

wiała ściślejsze uwzględnienie wpływu poszczególnych czynników, a przez to dokonanie wyboru możliwie najkorzystniejszego wariantu ugrupowania. Metoda taka oparta na wykorzystaniu nowoczesnych działów matematyki: programowania liniowego i nieliniowego, teorii gier oraz rachunku prawdopodobieństwa przedstawiona jest w niniejszej pracy.

W pracy dana jest również odpowiedź na następujące ważne zagadnienie: czy w każdym przypadku istnieje jeden najbardziej korzystny /w świetle przyjętego kryterium efektywności i podstawowych wymagań taktycznych/ wariant ugrupowania bojowego?

Studia nad powyższym zagadnieniem doprowadziły autora do wniosku, że mogą wystąpić sytuacje, w których optymalne rozwiązanie obejmuje nie jeden lecz kilka korzystnych wariantów ugrupowania bojowego. Stosowanie tych wariantów z określonymi częstościami /stosowanie manewru i ścisłe przestrzeganie zasad maskowania/ może niekiedy wpłynąć na zwiększenie efektywności osłony obiektu, w granicach nawet do kilkunastu procent.

Ustalenie tych prawidłowości stało się możliwe dzięki zbudowaniu modelu matematycznego, w którym problem obrony przeciwlotniczej obiektu /zespołu obiektów/ sprowadzony został do gry dwuosobowej o sumie zero ze skończoną liczbą strategii.

Możliwość sprowadzenia problemu obrony obiektu /zespołu obiektów/ do tej klasy gier wynika wprost z celów i zadań, jakie stawia sobie przeciwnik i strona organizująca obronę przeciwlotniczą. Wiadomo bowiem, że przeciwnik usiłuje zniszczyć /obezwładnić/ obiekt, a jednocześnie stara się ponieść minimalne straty od obrony przeciwlotniczej. Cel ten przeciwnik osiągnie wówczas, gdy środki napadu powietrznego przenikną przez system obrony przeciwlotniczej i wykonają atak /bombardowanie/ z dostateczną dokładnością. Natomiast założonego celu przeciwnik nie osiągnie

gdy środki wykonujące nalot zostaną zniszczone lub działalność ich zostanie utrudniona na tyle, że atak okaże się nieskuteczny.

Celem zaś strony organizującej obronę przeciwlotniczą jest niedopuszczenie do zniszczenia obiektu poprzez zadanie maksymalnych strat atakującym siłom przeciwnika, względnie utrudnienie im w wykonaniu ataku /bombardowania/ np. przez zakłócenie radiolokacyjnych celowników bombowych, maskowanie obiektu itp.

Występuje tu wyraźnie sytuacja konfliktowa, w której cele obydwu stron są zdecydowanie przeciwstawne, zaś to prowadzi do gry. W grze tej jako funkcję kryterium /funkcję celu/, stanowiącą miarę efektywności systemu obrony przeciwlotniczej, przyjęto: dla jednego obiektu - prawdopodobieństwo jego obrony, zaś dla zespołu obiektów - średnią wartość prawdopodobieństwa obrony obiektów z uwzględnieniem ich ważności.

Kryteria te w sposób właściwy odzwierciedlają cele obydwu stron oraz pozwalają optymalizować rozkład sił i środków OPL na prawdopodobnych kierunkach nalotów środków napadu powietrznego przeciwnika, co odpowiada przyjmowanemu założeniu, że naloty na broniony obiekt /zespół obiektów/ nie są ze wszystkich kierunków jednakowo prawdopodobne.

W szczególnym przypadku, gdy brak jest danych o skuteczności poszczególnych sposobów ataku /bombardowania/ przeciwnika oraz trudno określić stopień ważności osłanianych obiektów, za funkcję kryterium należy przyjąć wartość oczekiwaną liczby rażonych środków napadu powietrznego.

Z wyborem ugrupowania bojowego wiąże się ściśle zagadnienie optymalizacji podziału ognia; wartości funkcji kryterium dla każdego wariantu ugrupowania należy obliczać z uwzględnieniem optymalnego podziału ognia. Bez tego elementu wybór optymalnego ugrupowania w oparciu o model matematyczny traci sens. Z tego

względu zaszła potrzeba włączenia do pracy powyższego zagadnienia oraz rozbudowy modelu matematycznego.

Rozszerza to znacznie zakres praktycznego wykorzystania pracy, gdyż omawiane w niej metody można stosować zarówno do wyboru optymalnego ugrupowania, jak i do analizy efektywności osłony obiektu /zespołu obiektów/ przy przyjętym wariancie ugrupowania sił i środków OPL.

Stronę praktyczną pracy stanowi algorytm wyboru optymalnego ugrupowania rakiet i artylerii przeciwlotniczej wraz z przykładami ilustrującymi oraz niektóre wnioski dotyczące zasad wykorzystania sił i środków OPL w osłonie obiektów.

## 1. SFORMUŁOWANIE PROBLEMU

Podczas planowania obrony przeciwlotniczej na szczeblach operacyjnych /np. na szczeblu armii lub Frontu/ i operacyjno-taktycznych /np. w korpusie obrony powietrznej kraju/ typową sytuacją jest zwykle taka, że dysponujemy pewną liczbą oddziałów /związków/ o określonym składzie, wyposażeniu technicznym i znanym stopniu wykształcenia. Istnieje przy tym potrzeba osłony pewnej liczby obiektów. Z reguły potrzeby w zakresie osłony przewyższają realne możliwości. W tych warunkach należy, w myśl zasady racjonalnego postępowania<sup>x/</sup> zdecydować, które z tych obiektów powinny być bronione, przez jaki okres czasu oraz ile i jakie siły i środki trzeba wydzielić do ich osłony.

Punktem wyjścia przy rozwiązywaniu powyższego problemu jest wnikliwa ocena możliwości działania przeciwnika w poszczególnych okresach czasu oraz ocena obiektów, głównie w świetle ich charakteru i znaczenia. Po konfrontacji z własnymi możliwościami można następnie dokonać podziału sił i środków obrony przeciwlotniczej.

Właściwy podział sił i środków OPL jest zasadniczym elementem decyzji podejmowanej na szczeblu operacyjnym i stanowi podstawę do precyzowania zadań oraz szczegółowego planowania obrony przeciwlotniczej poszczególnych obiektów.

Szczegółowe planowanie obrony przeciwlotniczej obiektu odbywa się w sztabie związku taktycznego lub oddziału.

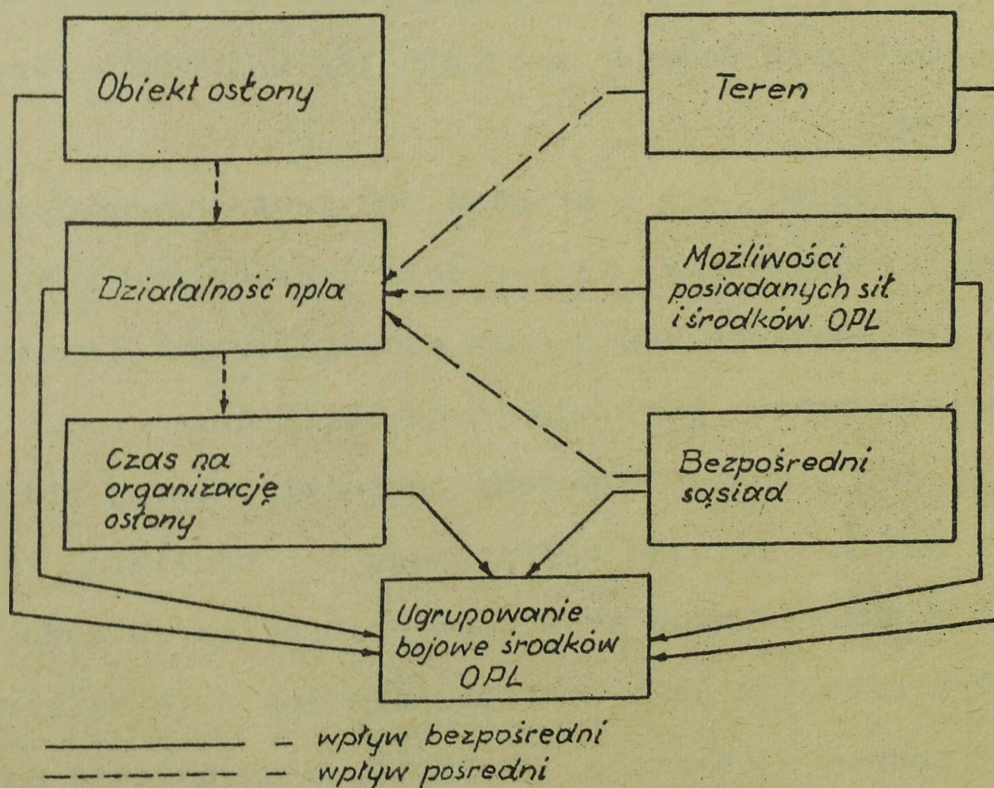
Jednym z podstawowych problemów występujących podczas planowania na tym szczeblu jest wypracowanie możliwie najkorzystniejszego ugrupowania bojowego. Chodzi tu o określenie wariantu,

---

x/ Zwanej też zasadą największego efektu lub zasadą najmniejszego nakładu środków /O.Lange: Optymalne decyzje, PWN Warszawa 1964 r./

który by odpowiadał postawionemu zadaniu, stwarzał możliwie najkorzystniejsze warunki walki ze środkami napadu powietrznego przeciwnika, a ponadto zapewniał dobre warunki dowodzenia, manewru, zaopatrywania, maskowania oraz obrony przed bronią masowego rażenia.

Należy podkreślić, że powyższy problem jest trudny do rozwiązania z uwagi na złożone warunki taktyczne. Wchodzi tu bowiem w grę szereg czynników takich, jak: prawdopodobny zamiar działania przeciwnika, charakter i znaczenie osłanianego obiektu, warunki terenowe, możliwości posiadanych sił i środków, stopień oddziaływania środków obrony przeciwlotniczej bezpośredniego sąsiada oraz czas na organizację osłony. Czynniki te są ze sobą ściśle powiązane, co obrazuje rys.1. Wpływ ich na ugrupowanie



Rys.1. Czynniki warunkujące ugrupowanie bojowe środków OPL.

jest różny; najbardziej zdecydowany wpływ mają: prawdopodobna działalność przeciwnika, teren, możliwości posiadanych sił i środków oraz bezpośredni sąsiad. Różny jest także zakres posiadanych informacji o tych czynnikach. Z reguły o przeciwniku posiadamy tylko pewną ilość wiadomości; im wiadomości te będą bardziej kompletne i pewne, tym łatwiej i lepiej będzie można obmyśleć i zorganizować obronę przeciwlotniczą obiektu /zespołu obiektów/.

Najczęściej jednak nie posiadamy danych o tym, w jakim czasie, jakimi siłami i w jaki sposób przeciwnik wykona uderzenie na osłaniany obiekt. Nie wiemy również pewnie, z których kierunków zostanie wykonany nalot. Danych tych nie możemy posiadać, ponieważ nie znamy zadania, jakie ma wykonać przeciwnik, nie znamy również wszystkich czynników, jakie bierze on pod uwagę przy obmyślaniu planu działania, nie wiemy także, jakie ma o nas wiadomości. W tych warunkach trudno jest twierdzić pewnie, w jaki sposób przeciwnik będzie działał. Staramy się wobec tego ustalić, w jaki sposób może on działać. Gruntowna analiza znanych nam czynników i faktycznych wiadomości o przeciwniku powinna umożliwić ustalenie kilku najbardziej prawdopodobnych sposobów /wariantów/ jego działania. Im mniej będzie tych wariantów, tym łatwiej i lepiej można zorganizować obronę przeciwlotniczą obiektu /zespołu obiektów/. Dochodząc drogą logicznego wnioskowania do prawdopodobnych wariantów działania przeciwnika powinniśmy jednak być bardzo ostrożni. Dużym błędem byłoby chyba, bez wnikliwej analizy, przesądzanie o zamiarze działania przeciwnika, to jest zakładanie, że postąpi on tak, a nie inaczej.

Mając ustalone wspomniane wyżej warianty działania przeciwnika staramy się następnie przyjąć ugrupowanie, które byłoby

najbardziej korzystne w wypadku zastosowania przez przeciwnika dowolnego z nich i jednocześnie by uwzględniało wpływ pozostałych czynników. Do tego celu konieczna jest pewna metoda. Jeśli postawi się wymaganie, by problem ugrupowania rozwiązany był w sposób możliwie ścisły, to w odniesieniu do czynników dających się wyrazić ilościowo metoda ta powinna polegać na wykorzystaniu odpowiedniego aparatu matematycznego - jako narzędzia ułatwiającego w dużym stopniu ustalenie zakresu wpływu poszczególnych czynników i dokonanie wyboru najbardziej korzystnego /w świetle przyjętego kryterium efektywności/ wariantu ugrupowania. To zaś wymaga zbudowania odpowiedniego modelu matematycznego i algorytmu w oparciu o realny zakres wiadomości dotyczących przeciwnika, własnych środków oraz terenu.

W odniesieniu do przeciwnika można założyć, że będą znane:

- a/ dane taktyczno-techniczne i uzbrojenie środków napadu powietrznego;
- b/ prawdopodobne sposoby /warianty/ jego działania<sup>x/</sup>;
- c/ ogólna ilość i bazowanie środków napadu powietrznego oraz kierunki operacyjne nalotów;
- d/ ogólna sytuacja operacyjna po stronie przeciwnika.

W odniesieniu do nas, tzn. strony organizującej obronę przeciwlotniczą możemy przyjąć za znane:

- a/ rodzaj i ilość sił i środków obrony przeciwlotniczej wydzielonych do osłony obiektu, stopień wyszkolenia obsług oraz ogólnie ich stan fizyczny i psychiczny;
- b/ możliwości ogniowe i manewrowe sprzętu oraz stopień niezawodności poszczególnych urządzeń technicznych;

---

x/ Na określenie każdego ze sposobów /wariantów/ działania składają się: rodzaj i ilość środków przenoszenia oraz środków rażenia, prędkość i wysokość lotu celów, kierunek zajścia na obiekt, sposób bombardowania /ataku/, rodzaj stosowanych zakłóceń radioelektronicznych.

- c/ obiekt osłony, zwłaszcza jego położenie, wielkość, kształt, odporność na uderzenia oraz znaczenie;
- d/ teren, szczególnie w rejonie obiektu osłony oraz warunki hydrograficzne i meteorologiczne;
- e/ ugrupowanie sił i środków obrony przeciwlotniczej bezpośrednich sąsiadów oraz ich ogólne możliwości ogniowe;
- f/ ogólną sytuację operacyjną po stronie wojsk własnych;
- g/ czas na organizację obrony przeciwlotniczej.

Tak więc rozwiązania postawionego problemu należy szukać w oparciu o powyższy zakres informacji. Dalsze zwiększanie ilości danych jest nierealne, gdyż w przeciętnych warunkach taktycznych bardziej wyczerpujących wiadomości dotyczących przeciwnika i własnych wojsk z reguły mieć nie będziemy.

Przejdźmy teraz do ustalenia i omówienia kryterium efektywności. Kryterium to stanowić będzie miarę efektywności systemu obrony przeciwlotniczej oraz podstawę do optymalizacji ugrupowania bojowego. Ustalimy najpierw kryterium efektywności dla pojedynczego obiektu, a następnie uogólnimy je na kilka obiektów różniących się między sobą ważnością.

## 2. KRYTERIUM EFEKTYWNOŚCI I METODY JEGO OBLICZANIA

Przeciwnikowi planującemu uderzenia na osłaniany obiekt określoną ilością sił i środków, zależy zawsze na wyborze takiego sposobu /wariantu/ działania, przy którym prawdopodobieństwo wykonania zadania jest możliwie największe.

Chcąc podać wzór, jakim wyraża się to prawdopodobieństwo, należy zauważyć, że zadanie zniszczenia /obezwładnienia/ obiektu będzie wykonane wówczas, gdy zaistnieją dwa sprzyjające dla przeciwnika zdarzenia, a mianowicie:

- 1<sup>o</sup> że siły i środki biorące udział w nalocie przenikną przez system obrony przeciwlotniczej i osiągną nakazany obiekt;
- 2<sup>o</sup> że część sił i środków, której udało się przeniknąć przez system obrony przeciwlotniczej zniszczy /obezwładni/ obiekt.

Jeżeli przez  $Q_1$  i  $Q_2$  oznaczymy prawdopodobieństwo zajścia odpowiednio pierwszego i drugiego zdarzenia, a przez  $Q$  - prawdopodobieństwo wykonania zadania przez przeciwnika, to możemy przyjąć, że:

$$Q = Q_1 \cdot Q_2 , \quad /2.1/$$

gdzie prawdopodobieństwo wystąpienia drugiego zdarzenia  $/Q_2/$  oblicza się przy założeniu, że zdarzenie pierwsze zaszło.

Łatwo jest zauważyć, że każde zdarzenie w równym stopniu wpływa na ostateczny wynik. Np. gdy  $Q_1$  i  $Q_2$  równe są 0,9, to prawdopodobieństwo wykonania zadania wynosi nie 0,9, ale 0,81. Jeżeli natomiast prawdopodobieństwa  $Q_1$  i  $Q_2$  są różne, to prawdopodobieństwo wykonania zadania  $/Q/$  nie przekracza nigdy mniejszej z dwóch liczb, tzn.

$$Q \leq \min /Q_1, Q_2/. \quad /2.2/$$

W ten sposób można zilustrować znaczenie wysiłku przeciwnika w celu zapewnienia odpowiednio dużego prawdopodobieństwa pojedynczych zdarzeń. Oznacza to, że przeciwnikowi zawsze zależy na wyborze takiego sposobu /wariantu/ działania, przy którym prawdopodobieństwo zadania strat przez system obrony przeciwlotniczej byłoby możliwie małe, a jednocześnie prawdopodobieństwo zniszczenia /obezwładnienia/ obiektu osiągałoby wartość możliwie największą.

Spójrzmy teraz na to zagadnienie od naszej strony, tzn. strony organizującej system obrony przeciwlotniczej obiektu.

W ostatecznym rachunku interesuje nas następujące zagadnienie: Jakie jest prawdopodobieństwo, że obiekt nie zostanie zniszczony w świetle możliwych sposobów /wariantów/ działania przeciwnika?

Zauważmy, że zdarzenie nie zniszczenia obiektu jest dokładnie przeciwne zdarzeniu, że obiekt zostanie zniszczony /obezwładniony/ i składa się z dwóch zdarzeń prostych, a mianowicie:

- 1<sup>o</sup> że siły i środki biorące udział w nalocie nie przenikną przez system obrony przeciwlotniczej obiektu;
- 2<sup>o</sup> że część sił i środków, której udało się przeniknąć przez system obrony wykona atak /bombardowanie/ z tak małą skutecznością, że obiekt nie zostanie zniszczony /obezwładniony/.

Jeżeli przez  $P_1$  i  $P_2$  oznaczymy prawdopodobieństwo wystąpienia odpowiednio pierwszego i drugiego zdarzenia, a przez  $P$  prawdopodobieństwo tego, że obiekt nie zostanie zniszczony, to otrzymamy wyrażenie:

$$P = 1 - Q = 1 - Q_1 \cdot Q_2 = 1 - /1-P_1/ /1-P_2/. \quad /2.3/$$

Naszym dążeniem jest sprowadzenie obu wielkości  $Q_1$  i  $Q_2$  do minimum lub w myśl nierówności /2.2/ przynajmniej jednej z nich, np.  $Q_1$ .

Sprowadzenie wielkości  $Q_1$  i  $Q_2$  do minimum może być dokonane przez:

- a/ zadanie przeciwnikowi maksymalnych strat siłami lotnictwa myśliwskiego, rakiet przeciwlotniczych i artylerii przeciwlotniczej;
- b/ utrudnienie przeciwnikowi wykonania zadania - np. przez zakłócenie radiolokacyjnych celowników bombowych, maskowanie obiektu, itp.

Ponieważ problemem do rozwiązania w pracy jest ugrupowanie naziemnych środków OPL, a ściślej mówiąc, ugrupowanie rakiet i artylerii przeciwlotniczej, stąd należy wyjść z pierwszego zadania i zbadać w jaki sposób można zadać przeciwnikowi maksimum strat przy danej ilości sił i środków obrony przeciwlotniczej.

Możemy przyjąć, że określony wariant ugrupowania bojowego stwarza warunki do zadania przeciwnikowi maksimum strat wtedy, gdy wartość oczekiwana liczby rażonych celów jest możliwie największa.

Obliczenie wartości oczekiwanej liczby rażonych celów można przeprowadzić w sposób opisany niżej.

Założmy, że prowadzimy strzelanie jednym pododdziałem /dywizjonem ogniowym lub baterią/ do celu grupowego składającego się z  $n$  samolotów i istnieje możliwość przeniesienia ognia lub wraz z rażeniem któregoś z samolotów rażone są także inne.

Niech  $p_1$  będzie prawdopodobieństwem rażenia i-tego samolotu, a  $x$  - liczbą rażonych samolotów. Liczbę  $x$  przedstawimy w postaci sumy:

$$x = x_1 + x_2 + \dots + x_n = \sum_{i=1}^n x_i ,$$

gdzie wielkość przypadkowa  $x_i$  przyjmuje jedność, jeśli  $i$ -ty samolot jest rażony i zero, gdy nie jest rażony. Odpowiadające tej wielkości prawdopodobieństwa są równe:

$x_i$	0	1	,
$p(x_i)$	$q_i$	$p_i$	

gdzie  $q_i = 1 - p_i$ .

Zatem wartość oczekiwana liczby rażonych samolotów w celu grupowym przez jeden pododdział ogniowy będzie równa:

$$M_g(x) = \sum_{i=1}^n (0 \cdot q_i + 1 \cdot p_i) = \sum_{i=1}^n p_i = P \quad /2.4/$$

Gdy do  $i$ -tego samolotu prowadzi ogień nie jeden, lecz kilka pododdziałów, wtedy prawdopodobieństwo jego rażenia będzie równe:

$$P_{im} = 1 - \prod_{b=1}^m (1 - p_{ib}) , \quad /2.5/$$

gdzie:

- $m$  - liczba pododdziałów ogniowych prowadzących ogień do celu;
- $b$  - numer pododdziału  $/b = 1, 2, \dots, m/$ .

Natomiast wartość oczekiwana liczby rażonych samolotów w celu grupowym przez pododdziały prowadzące do niego ogień wyrazi się wzorem:

$$M_g = \sum_{i=1}^n [ 1 - \prod_{b=1}^m (1 - p_{ib}) ] . \quad /2.6/$$

Jeżeli nalot na dany obiekt wykonuje większa ilość celów, to wartość oczekiwana liczby rażonych samolotów przez wszystkie pododdziały uczestniczące w odparciu ataku wyrazi się wzorem:

$$M = \sum_{g=1}^r M_g, \quad /2.7/$$

gdzie:

$r$  - liczba celów;

$g$  - numer celu / $g = 1, 2, \dots, r$ /.

Oczywiście, jeśli niektóre cele nie będą ostrzelane, to dla nich  $M_g$  równa się zero. Jeżeli natomiast do celu prowadzony jest ogień, to wartość oczekiwana  $M_g \geq 0$ . W szczególnym przypadku, gdy obiekt atakowany jest przez jeden samolot /cel pojedynczy/, wtedy  $M_g$  pokrywa się z prawdopodobieństwem rażenia tego samolotu, co wynika bezpośrednio z wzorów /2.5/ i /2.6/.

Dla otrzymania średniej wartości prawdopodobieństwa odparcia ataku z powietrza na obiekt należy wyrażenie /2.7/ podzielić przez ogólną ilość samolotów biorących udział w nalocie<sup>x/</sup>, tzn.

$$P_1 = \frac{M}{S} \quad /2.8/$$

gdzie:  $S = \sum_{g=1}^r n_g$  - ogólna ilość samolotów biorących udział w nalocie na dany obiekt.

W ten sposób otrzymaliśmy wartość  $P_1$  występującą we wzorze /2.3/.

Z powyższego wynika, że proces obliczania średniego prawdopodobieństwa odparcia ataku / $P_1$ / jest dość złożony. Cała trudność w tym zagadnieniu polega na obliczeniu wartości oczekiwanej

---

x/ Taki sposób podejścia do obliczania średniej wartości prawdopodobieństwa można spotkać w pracy [21].

liczby rażonych samolotów, która zależy od ilości pododdziałów prowadzących ogień, skuteczności strzelania każdego pododdziału, liczby celów oraz ich składu i ugrupowania.

Nie czyni to zbyt wielkich przeszkód w rozwiązaniu problemu ugrupowania bojowego, ponieważ jest to zagadnienie tego typu, że z powodzeniem może być zaprogramowane na elektroniczną maszynę cyfrową i ztabelaryzowane dla danego rodzaju sprzętu, bądź też można je obliczyć, stosując metody uproszczone.

W przypadku artylerii przeciwlotniczej istnieje szereg metod obliczania możliwości ogniowych mniej lub bardziej dokładnych. Poniżej zostanie omówiona jedna z nich, wybrana pod kątem praktycznej przydatności<sup>x/</sup>. Metoda ta umożliwia w stosunkowo prosty sposób obliczenie prawdopodobieństwa rażenia celu pojedynczego  $p_1$  lub wartości oczekiwanej liczby rażonych samolotów  $M$  przy odpieraniu kolejnych ataków przeciwnika na osłaniany obiekt.

Obliczanie wskaźników  $p_1$  oraz  $M$  przeprowadza się na podstawie liczby salw i prawdopodobieństwa rażenia jedną salwą<sup>xx/</sup>.

W metodzie założono niezależność salw /strzałów/ bateryjnych oraz przyjęto, że prawdopodobieństwo rażenia celu salwą jest funkcją tylko jednego argumentu, mianowicie czasu lotu pocisku  $t$  do punktu spotkania z celem. Uproszczenie to powoduje zawężenie otrzymanych w ten sposób wyników o około 10 - 15 %

---

x/ Szczegółowy opis tej oraz innych metod można znaleźć w pracach [23] i [24].

xx/ Odstęp strzelania w bateriach sk przyjmuje się 5 sek, natomiast w bateriach mk ogień prowadzi się seriami krótkimi lub długimi. Można jednak, bez popełnienia większego błędu, przyjąć, że ogień małokalibrowej artylerii przeciwlotniczej prowadzony jest salwami z odstępem 1 - 1,2 sek, co odpowiada 50 - 60 strzałów na minutę. Najczęściej przyjmuje się odstęp 1,2 sek.

w stosunku do wartości rzeczywistych. Biorąc jednak pod uwagę nieznane zawczasu parametry ruchu celu, lecz zakładane na podstawie z góry przyjętej hipotezy oraz możliwą tolerancję wartości funkcji kryterium przy optymalizacji ugrupowania bojowego, wynikiłe błędy na skutek przyjętych uproszczeń nie mają istotnego znaczenia.

Łączne prawdopodobieństwo rażenia celu pojedynczego można obliczyć za pomocą wzoru /2.5/. Biorąc pod uwagę ilość salw bateryjnych, wzór ten przyjmie postać:

$$p_{m,s} = 1 - \prod_{l=1}^s (1 - p_1), \quad /2.9/$$

gdzie:  $p_{m,s}$  - prawdopodobieństwo rażenia celu pojedynczego przy strzelaniu  $m$  pododdziałów /baterii/ i sumarycznej ilości salw  $/s/$ ;

$p_1$  - prawdopodobieństwo rażenia celu 1-tą salwą bateryjną.

Stąd wartość oczekiwana liczby rażonych samolotów /celów pojedynczych/ przez pododdziały prowadzące do nich ogień wyrazi się wzorem /2.6/, tzn.

$$M = \sum_{i=1}^n \left[ 1 - \prod_{l=1}^s (1 - p_1) \right]. \quad /2.10/$$

Wyrażenie  $(1 - p_1)$  można przedstawić w postaci funkcji logarytmicznej:

$$(1 - p_1) = e^{\ln(1-p_1)} \quad /2.11/$$

Z rachunku przybliżonego wiadomo, że dla  $0 \leq p \leq 1$  wykładnik potęgi prawej strony wzoru /2.11/ w przybliżeniu jest równy:

$$\ln(1 - p_1) \approx -p_1, \quad /2.12/$$

stąd

$$p_{m,s} = 1 - e^{-A}, \quad /2.13/$$

gdzie  $A = \sum_{l=1}^s p_l$ .

Chcąc obliczyć prawdopodobieństwo rażenia celu pojedynczego za pomocą wzoru /2.13/ należy najpierw określić sumaryczną ilość salw /s/ i prawdopodobieństwo rażenia jedną salwą.

Dla uproszczenia obliczeń wszystkie salwy dzielimy według grup czasów lotu pocisku /od 1 do T/ i dla każdej z nich określamy średnią wartość  $p_l$ .

Tworzymy więc sumy częściowe ilości salw według grup czasów lotu pocisku /t/:

$$s_t = \sum_{b=1}^m a_{tb}, \quad /2.14/$$

gdzie:  $a_{tb}$  - ilość salw odpowiadająca grupie czasów lotu pocisku t oddanych przez jedną baterię,  
/t = 1, 2, ..., T/;

$s_t$  - sumaryczna ilość salw przy strzelaniu m baterii i grupie czasu lotu pocisku t.

Ogólna ilość salw oddanych przez m baterii z uwzględnieniem wszystkich grup czasów lotu pocisku /T/ wyrazi się wzorem:

$$s = \sum_{t=1}^T s_t = \sum_{t=1}^T \sum_{b=1}^m a_{tb}. \quad /2.15/$$

Dla określenia liczby salw, jaką mogą oddać do celu poszczególne baterie przy przyjętym ugrupowaniu bojowym posługujemy

się odpowiednim nomogramem /zał.6/, wykreślonym dla założonej prędkości i wysokości lotu celu<sup>xx/</sup>.

Liczby salw odpowiadające różnym grupom czasów lotu pocisku oddane z poszczególnych baterii przedstawiamy w formie tabeli 1.

Tabela 1

Grupy czasów lotu pocisku /t/	Numery baterii				$\sum_{1}^m a_{tb} = s_t$
	1	2	...	m	
t = 1	a <sub>11</sub>	a <sub>12</sub>	...	a <sub>1m</sub>	$\sum_{1}^m a_{1r} = s_1$
t = 2	a <sub>21</sub>	a <sub>22</sub>	...	a <sub>2m</sub>	$\sum_{1}^m a_{2b} = s_2$
...	...	...	...	...	...
t = T	a <sub>T1</sub>	a <sub>T2</sub>	...	a <sub>Tm</sub>	$\sum_{1}^m a_{Tb} = s_T$

Następnie dla sum częściowych z ostatniej kolumny:

$\sum_{1}^m a_{tb} = s_t$  odczytujemy w tabeli<sup>xx/</sup> /zał.3/ odpowiadające im

wartości  $\sum_{1}^m p_{tb} = \Lambda_t$  i zapisujemy je w formie tabeli 2.

x/ Jeżeli nomogram jest opracowany tylko dla jednej prędkości lotu celu, a obliczenia wykonujemy dla innej, to wykładnik potęgi A mnożymy przez współczynnik  $K_V$ . Jeżeli więc nomogram został sporządzony dla prędkości celu  $V_1$ , a obliczenia chcemy wykonać dla  $V_2$ , to  $K_V = \frac{V_1}{V_2}$  i odwrotnie.

xx/ W załączniku 2 podane są trzy tabele: dla 57 mm baterii sześć i ośmio działowej z przelicznikiem P-6-60 oraz 85 mm baterii ośmio działowej. Należy wybrać jedną z tych tabel.

Tabela 2

t	t=1	t=2	...	t=T	$\sum_{t=1}^T s_t = s$
$s_t$	$s_1$	$s_2$	...	$s_T$	
$A_t$	$A_1$	$A_2$	...	$A_T$	$\sum_{t=1}^T A_t = A$

Mając obliczony wykładnik potęgi A, wartość prawdopodobieństwa  $p_{m,s}$ , wyrażonego wzorem /2.13/, określamy na podstawie tabeli /zał.4/.

Wykonując analogiczne obliczenia dla innych celów<sup>x/</sup>, możemy następnie określić wartość oczekiwaną M i w ostatnim kroku, zgodnie z wzorem /2.8/, średnie prawdopodobieństwo  $P_1$ .

Kompleksowe przykłady, objaśniające opisaną wyżej metodę, podane są na końcu pracy /w punkcie 7/.

Warto w kilku zdaniach wspomnieć jeszcze o jednej metodzie, która w odniesieniu do małokalibrowej artylerii przeciwlotniczej może mieć duże znaczenie praktyczne.

Istota tej metody polega na wykorzystaniu wzoru<sup>xx/</sup>:

$$P_1 = 1 - \sum_{\alpha=0}^f \frac{e^{-sp} (sp)^\alpha}{\alpha!}, \quad /2.16/$$

- gdzie: s - ilość strzałów przypadająca na jeden cel;  
 p - prawdopodobieństwo trafienia przy jednym strzale;  
 f - liczba trafień przy s strzałach.

Wzór /2.16/ wyraża /w funkcji sp/ prawdopodobieństwo tego, że liczba trafień przy s oddanych strzałach będzie nie mniejsza od danej wartości f.

x/ Jeżeli rozpatruje się nalot, w którym bierze udział więcej niż jeden cel pojedynczy.

xx/ Opis i zakres zastosowań tej metody podany jest m.in. w pracy [24].

Pod znakiem sumy występuje funkcja rozkładu prawdopodobieństwa Poissona.

Wartości prawdopodobieństwa  $P_1$ , obliczone według wzoru /2.16/, podane są w tabeli 3.

Metoda ta jest bardzo prosta i może być w praktyce stosowana. Otrzymane za jej pomocą wyniki są mniej dokładne niż w przypadku pierwszej metody, ponieważ zakłada się, że prawdopodobieństwo rażenia przy jednym strzale jest stałe.

Tabela 3

f	sp						
	0,2	0,5	1,0	2,0	3,0	4,0	5,0
1	0,0175	0,0904	0,2642	0,5940	0,8008	0,9084	0,9595
2	0,011	0,0146	0,0803	0,3233	0,5768	0,7619	0,8753
3	0,001	0,019	0,0189	0,1429	0,3527	0,5665	0,7349
4		0,004	0,0037	0,0526	0,1847	0,3711	0,5595
5		0,002	0,0006	0,0166	0,0838	0,2143	0,3839
6			0,0001	0,0045	0,0335	0,1106	0,2378
7				0,0011	0,0119	0,0511	0,1333
8				0,0002	0,0038	0,0213	0,0686
9					0,0011	0,0031	0,0317
10					0,0003	0,0023	0,0136

W rzeczywistości w czasie strzelania  $p$  ulega zmianie. Jednak ze względów praktycznych można przyjąć pewną średnią wartość  $p$  /dla danej wysokości, średniego parametru i przyjętego sposobu strzelania/.

Cheąc posłużyć się wzorem /2.16/ należy znać:

- a/ ilość strzałów, jaką można oddać przy danym ugrupowaniu w czasie odpierania ataku z powietrza /s/;

b/ prawdopodobieństwo rażenia przy jednym strzale /p/.

Pierwszą wielkość, mianowicie  $s$ , można dla każdego wariantu ugrupowania praktycznie określić, posługując się nomogramem /zał.6/.

Drugi parametr można znaleźć w odpowiednich podręcznikach<sup>x/</sup> z zakresu teorii strzelania lub obliczyć, opierając się na znanym wzorze:

$$p_s = 1 - (1 - p)^s, \quad /2.17/$$

gdzie  $p_s$  jest prawdopodobieństwem rażenia celu przy  $s$  strzałach. Aby wyznaczyć wartość  $p$  musimy znać  $p_s$ . Oczywiście, wartość  $p_s$  powinna odpowiadać średnim warunkom strzelania, np. wysokość lotu celu od 200 - 1000 m, lub 1500 - 3000, prędkość lotu celu w granicach 200 - 300 m/sek, średni parametr około 1000 m.

Jeżeli we wzorze /2.16/ podstawimy za  $p$  najmniejszą lub największą wartość prawdopodobieństwa rażenia przy jednym strzale, to otrzymamy odpowiednio dolną lub górną wartość  $P_1$ .

Zwróćmy jeszcze uwagę na to, że jedyną wartością zmienną występującą we wzorze /2.16/ jest  $s$ . Zatem zwiększenie prawdopodobieństwa odparcia ataku przeciwnika jest w tych warunkach możliwe na drodze maksymalizacji wielkości  $s$ .

Rozpatrzmy wobec tego, co wpływa na ilość oddanych strzałów i czy możemy zwiększyć  $s$  przez odpowiedni dobór parametrów określających ugrupowanie bojowe.

W pierwszym rzędzie ilość oddanych strzałów zależy od parametrów charakteryzujących sposób /wariant/ działania przeciwnika takich, jak: prędkość, wysokość, czas przebywania celu na kursie bojowym, kąty nurkowania lub wznoszenia itp.

---

x/ Orientacyjne wartości  $p$  m.in. ujmuje podręcznik: "Zasady strzelania artylerii przeciwlotniczej małego kalibru" wyd. MON 1961 r.

Ponadto ilość oddanych strzałów zależy od: ilości pododdziałów, szybkostrzelności sprzętu, wielkości stref ostrzału /w płaszczyźnie poziomej i pionowej/, możliwości wykrycia i uchwycenia celu na czas przez każdy pododdział, stref martwych dział i przyrządów.

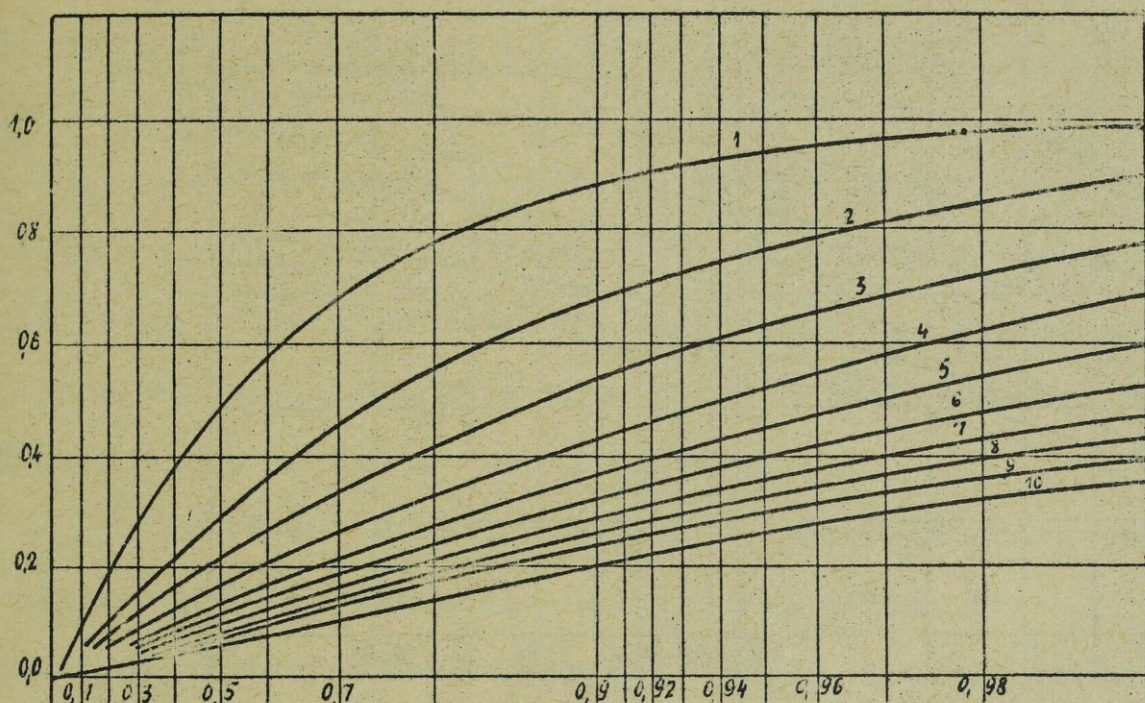
Wreszcie ilość oddanych strzałów zależy od promienia ugrupowania pododdziałów w stosunku do obiektu i odległości między pododdziałami. Zależność ta wynika stąd, że wraz ze zmianą promienia ugrupowania i odległości między pododdziałami zmienia się czas przebywania celu w strefie ognia, co bezpośrednio wpływa na ilość strzałów.

Tak więc, dobierając odpowiednio promień ugrupowania pododdziałów i odległości między nimi możemy zwiększyć ilość strzałów. Sposób doboru zarówno promienia ugrupowania, jak i odległości między pododdziałami omówiony zostanie na przykładach w punkcie 7.

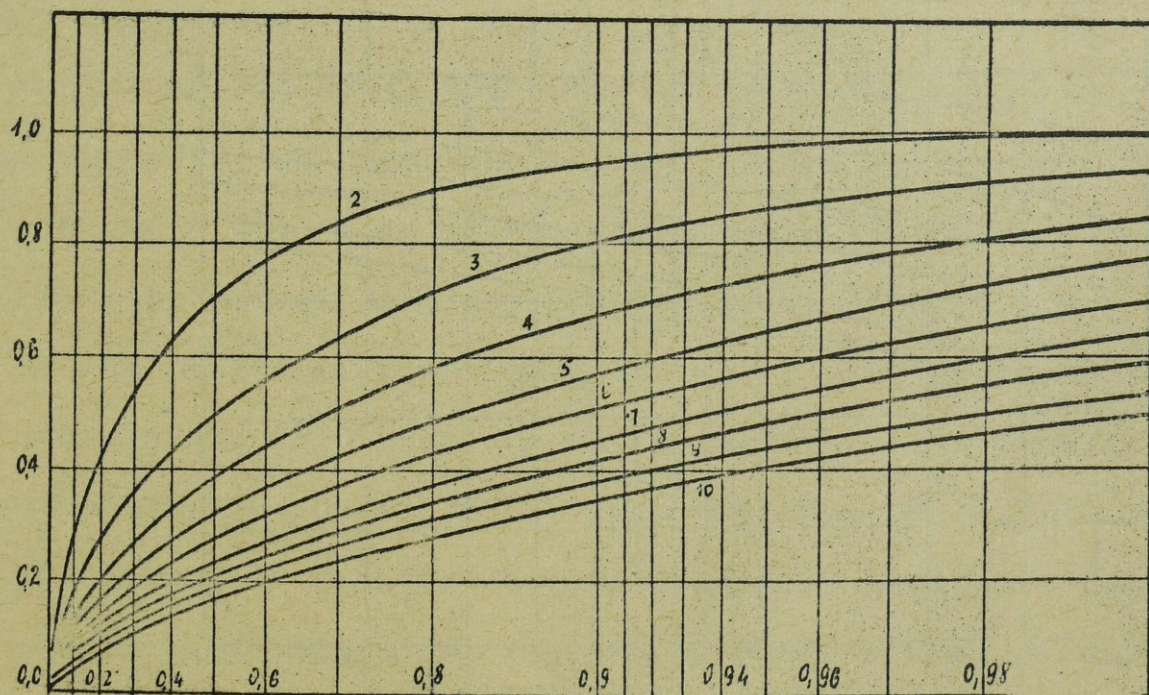
Dotychczas omówione zostały metody obliczania prawdopodobieństwa  $P_1$ , w przypadku rozwiązywania problemu ugrupowania artylerii przeciwlotniczej, którą cechuje stosunkowo duża szybkostrzelność i małe prawdopodobieństwo rażenia celu przy jednym strzale.

Przejdźmy teraz do omówienia sposobu określania wartości  $P_1$  w przypadku, gdy w grę wchodzi mała ilość strzałów i stosunkowo duże prawdopodobieństwo rażenia przy jednym strzale, co ma miejsce przy określaniu ugrupowania rakiet przeciwlotniczych.

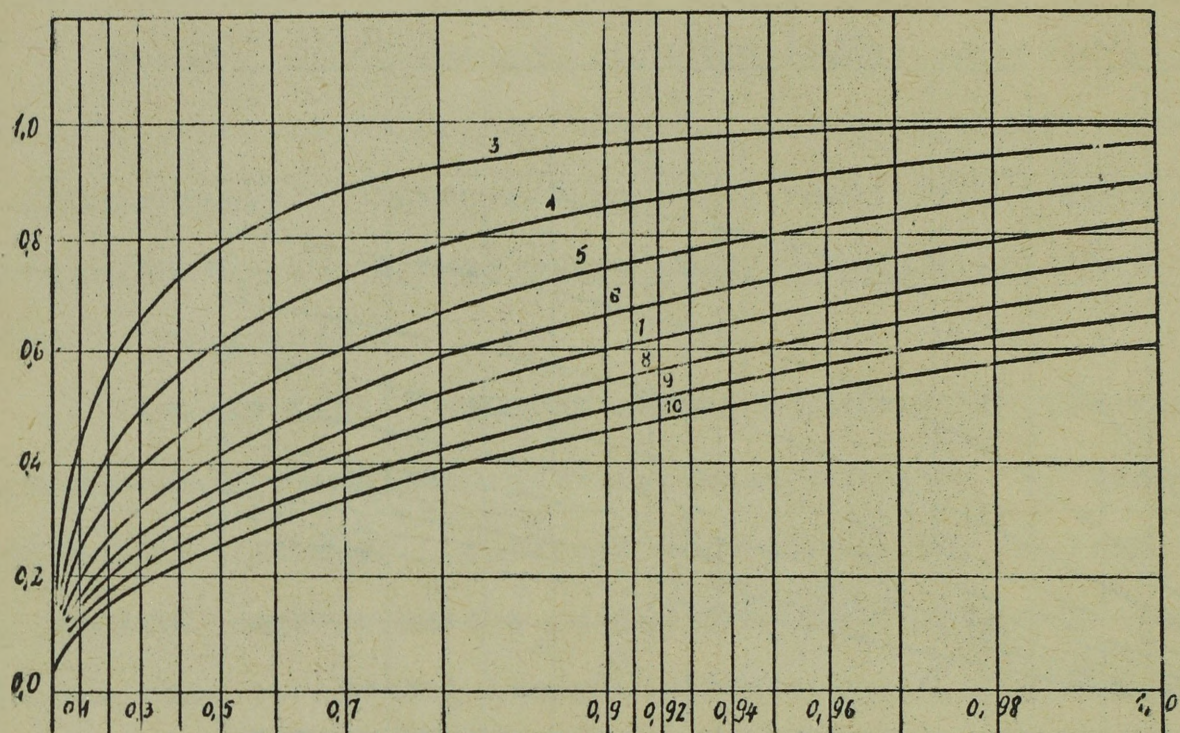
Przy założeniu, że znana jest średnia wartość prawdopodobieństwa rażenia jedną raketą, interesujące nas prawdopodobieństwo  $P_1$  możemy określić, posługując się niżej podanymi wykresami /rys. 2, 3, 4 i 5/, które sporządzono w oparciu o wzór postaci /2.17/, wykorzystując skalę logarytmiczną.



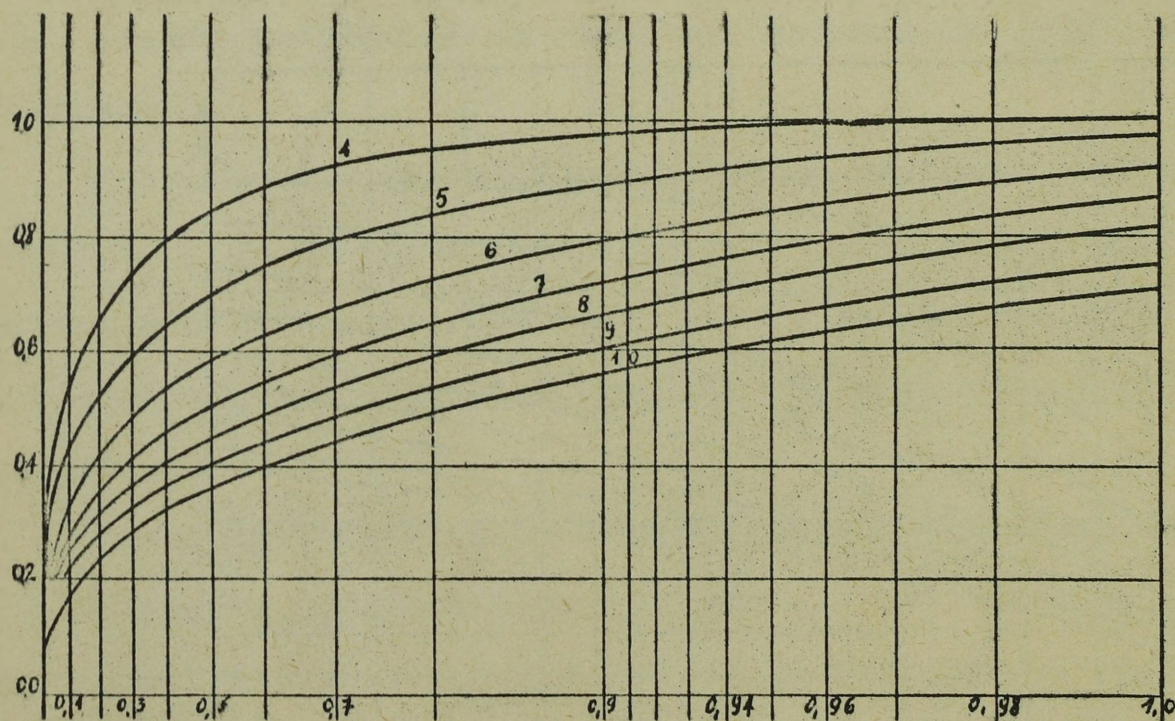
Rys.2. Średnie prawdopodobieństwo trafienia celu pojedynczego co najmniej jedną rakieta



Rys.3. Średnie prawdopodobieństwo trafienia celu pojedynczego co najmniej dwoma raketami



Rys.4. Średnie prawdopodobieństwo trafienia celu pojedynczego co najmniej trzema raketami



Rys.5. Średnie prawdopodobieństwo trafienia celu pojedynczego co najmniej czterema raketami

Na wykresie 2 podane wartości prawdopodobieństw trafienia celu pojedynczego co najmniej jedną rakieta. Krzywe wykreszone zostały dla liczby rakiet od 1 do 10. W razie potrzeby można sporządzić wykres dla większej liczby rakiet. Korzystając z tego wykresu, należy pamiętać, że prawdopodobieństwo trafienia celu jedną rakieta jest stałe. Jeśli w czasie prowadzenia ognia  $p$  ulega zmianie, to krzywe mogą podawać tylko prawdopodobieństwa odpowiadające górnej i dolnej wartości  $p$ .

Na wykresach 3, 4 i 5 podane są wartości prawdopodobieństw trafienia celu pojedynczego co najmniej dwoma, trzema i czterema raketami. Z tych samych wykresów możemy określić prawdopodobieństwo trafienia dwóch, trzech i czterech celów pojedynczych co najmniej jedną rakieta.

Chcąc posłużyć się powyższymi wykresami musimy uprzednio określić liczbę rakiet, jaką można odpalić przy danym ugrupowaniu w czasie odpierania ataku z powietrza. Przy określaniu liczby rakiet należy wziąć pod uwagę sposób działania przeciwnika oraz parametry charakteryzujące możliwości sprzętu takie, jak: strefa ognia, ilość kanałów naprowadzania rakiet, odstęp strzelania, czas przeniesienia ognia na cel następny itp.

Analizując możliwości ogniowe danego ugrupowania zwykle interesuje nas zniszczenie celu, a nie liczba trafień, która to wywołuje. Liczba trafień, która prowadzi do zniszczenia określonego celu jest funkcją zdolności rażącej pocisku i podatności celu na uszkodzenia. Pamiętając o tym, można wykorzystać powyższe wykresy do obliczenia prawdopodobieństwa zniszczenia celu, albo prawdopodobieństwa trafienia.

Przedstawione wyżej rozważania na temat możliwości ogniowych pozwalają stwierdzić, że dla każdego sposobu działania przeciwnika i dowolnego wariantu ugrupowania środków obrony

przeciwlotniczej jesteśmy w stanie określić średnie prawdopodobieństwa  $P_1$  występujące we wzorze /2.3/.

Aby wyrażenie /2.3/ stanowiło kryterium efektywności musimy ponadto umieć choćby w sposób szacunkowy określać występującą w tym wyrażeniu wartość  $P_2$ .

W tym celu należy znać stopień skuteczności poszczególnych sposobów działania przeciwnika, który jest funkcją ilości i rodzaju środków napadu powietrznego, dokładności celowania, skuteczności środków rażenia i charakterystyk obiektu jako celu.

Trzeba jednak podkreślić, że nie zawsze dane te będą wiadome. Dotyczy to głównie sposobów ataku przy użyciu nowych środków rażenia. W takich przypadkach musimy się zadowolić jedynie przybliżonymi danymi, które można uzyskać np. przez porównanie sposobów bombardowania /ataku/ przeciwnika z odpowiednimi sposobami stosowanymi przez własne lotnictwo przy użyciu podobnych środków rażenia. Jeżeli porównań takich przeprowadzić nie można, to z konieczności za funkcję kryterium należy przyjąć wartość  $M$  lub  $P_1$

Oznacza to, że na skutek braku danych, zmuszeni jesteśmy założyć, iż poszczególne sposoby działania przeciwnika są jednakowo skuteczne. Z założeniem tym można się zgodzić, jeśli osłaniany obiekt może być celem dla broni atomowej, jak np. ważny i duży obiekt przemysłowy. Jeżeli natomiast osłaniany obiekt stanowi cel punktowy, jak np. most, pozycje startowe rakiet itp., to może on być niszczone przez lotnictwo bądź środkami klasycznymi, bądź też bronią atomową. W obu przypadkach sposoby działania przeciwnika będą z reguły różne i przyjmowanie ich jako jednakowo skuteczne nie jest słuszne.

W takich przypadkach należy dążyć do uzyskania niezbędnych danych do określenia wartości  $P_a$  dla każdego z prawdopodobnych

sposobów działania przeciwnika. Umożliwi to określenie ugrupowania bojowego, uwzględniającego skuteczność poszczególnych sposobów ataku, tzn. wartość  $P_1$  jest wtedy proporcjonalna do  $Q_2$ .

Proporcja ta orzeka, że w stosunku do ataku najbardziej skutecznego możliwości ogniowe powinny być największe, a w stosunku do mniej skutecznego, który w mniejszym stopniu zagraża obiektowi - odpowiednio mniejsze. W świetle wzoru /1.1/ oznacza to, że przez odpowiedni dobór wielkości  $Q_1$  możemy doprowadzić prawdopodobieństwo wykonania zadania przez przeciwnika /Q/ do wartości możliwie najmniejszej lub, co na jedno wychodzi, prawdopodobieństwo obrony obiektu /P/ do wartości możliwie największej.

W tym miejscu warto jeszcze raz podkreślić tę własność, że prawdopodobieństwo wykonania zadania /Q/ nie przekracza nigdy mniejszej z dwóch liczb  $Q_1$  i  $Q_2$ , tzn.:

$$Q \leq \min (Q_1, Q_2) .$$

Jeśli np. prawdopodobieństwo przeniknięcia przez system obrony przeciwlotniczej / $Q_1$ / wynosi 0,5 , a prawdopodobieństwo zniszczenia /obezwładnienia/ obiektu / $Q_2$ / równe jest 0,9 , to prawdopodobieństwo wykonania zadania /Q/ wynosi tylko 0,45 , a więc spełnia warunek /2.2/, bo

$$0,45 < \min (0,5 , 0,9) .$$

Należy jednak mieć na uwadze, że ze względu na ograniczoną ilość środków wydzielonych do obrony przeciwlotniczej obiektu oraz ograniczone możliwości sprzętu, wartość  $P_1 = 1 - Q_1$  możemy zmieniać jedynie w pewnych granicach, określonych nierównością:

$$0 \leq P_1 \leq \max P_1 , \quad /2.18/$$

gdzie  $\max P_1$  oznacza wartość prawdopodobieństwa, jaką można uzyskać przy zaangażowaniu do odparcia ataku maksimum sił wydzielonych do osłony obiektu.

To samo odnosi się do przeciwnika, tzn. może on przez stosowanie odpowiednich sposobów bombardowania /ataku/ zmieniać wartość  $Q_2$  jedynie w pewnych granicach.

Należy się jednak liczyć z tym, że nigdy nie zmieni on wartości  $Q_2$  w kierunku niekorzystnym dla siebie, lecz będzie się starał wybrać ten sposób działania, który gwarantuje mu osiągnięcie maksymalnych wartości  $Q_1$  i  $Q_2$ . Zdaje on sobie jednocześnie sprawę z tego, że strona broniąca się usiłuje sprowadzić wartość  $Q_1$ , a przez to i  $Q$  do minimum.

Występuje tu wyraźnie sytuacja konfliktowa, w której cele obu stron są zdecydowanie przeciwstawne. To zaś prowadzi do gry. W grze tej jako kryterium efektywności dla jednego obiektu można przyjąć wyrażenie /2.1/ lub /2.3/, gdyż w dostatecznym stopniu odzwierciedlają one zainteresowania obydwu stron.

Dla zespołu obiektów kryterium efektywności musi ponadto uwzględniać ważność poszczególnych obiektów, tzn. będzie miało postać:

$$P_N = \sum_{c=1}^N a_c \cdot P_c, \quad /2.19/$$

gdzie:  $P_N$  - średnia wartość prawdopodobieństwa obrony  $N$  obiektów z uwzględnieniem ich ważności;

$P_c$  - prawdopodobieństwo obrony obiektu o numerze  $c$  / $c = 1, 2, \dots, N$ /;

$a_c$  - ważność obiektu o numerze  $c$ .

Jest rzeczą oczywistą, że liczby  $a_c$  powinny spełniać warunek:

$$\sum_{c=1}^N a_c = 1 \quad /2.20/$$

W ocenie ważności poszczególnych obiektów należy przede wszystkim brać pod uwagę ich ważność operacyjną, która może się zmieniać w czasie oraz wartość ekonomiczną. W oparciu o to winniśmy następnie przypisać każdemu obiektowi odpowiednią liczbę tak, by spełniony był warunek /2.20/.

Jeżeli sytuacja jest tego rodzaju, że nie jesteśmy w stanie ustalić relacji ważności pomiędzy poszczególnymi obiektami, to należy przyjąć

$$a_1 = a_2 = \dots = a_N = \frac{1}{N} . \quad /2.21/$$

Wtedy wyrażenie /2.19/ staje się nie średnią ważoną, lecz średnią arytmetyczną postaci:

$$P_N = \frac{\sum_{c=1}^N P_c}{N} . \quad /2.19a/$$

Naszym dążeniem jest doprowadzenie wyrażenia /2.19/ do wartości maksymalnej. Możemy tego dokonać przez przyjęcie ugrupowania bojowego, które by akcentowało główny wysiłek osłony na obiektach o dużej ważności oraz zapewniało optymalne warunki walki ze środkami napadu powietrznego przeciwnika.

Dążeniem zaś przeciwnika jest sprowadzenie wyrażenia /2.19/ do minimum przez wybór najbardziej niekorzystnego dla nas wariantu nalotu i wykonanie najsilniejszych uderzeń na obiekty o dużej ważności. Wynika to bezpośrednio z wzoru /2.19/ bowiem zmniejszanie  $P_c$  w tych członach sumy, w których liczby  $a_c$  są duże, obniża wyraźnie wartość  $P_N$ , i odwrotnie; każde zwiększenie  $P_c$  przy dużych współczynnikach  $a_c$  podwyższa wydatnie  $P_N$ .

Wyrażenie /2.19/ przyjmujemy za ogólne kryterium będące jednocześnie miarą efektywności działania sił i środków obrony przeciwlotniczej w osłonie zespołu obiektów.

Wartość  $P_1$  we wzorach /2.3/ i /2.19/ należy obliczać z uwzględnieniem optymalnego podziału ognia. Problemem tym zajmujemy się obecnie. Rozpatrzymy najpierw problem optymalnego podziału ognia do celów nie stosujących manewru, a następnie podamy zarys modelu matematycznego i podkreślimy pewną zasadę ogólną, jaka występuje podczas zwalczania celów stosujących manewr.

### 3. OPTIMALIZACJA PODZIAŁU OGNI

Z problemem optymalizacji podziału ognia do zwalczania celów powietrznych spotykamy się wtedy, gdy nalot na osłaniany obiekt wykonuje więcej niż jeden cel, a w jego odparciu mogą uczestniczyć co najmniej dwa pododdziały.

Problem ten komplikuje się wraz ze wzrostem liczby celów i ilości środków obrony przeciwlotniczej będących w dyspozycji. W ogólności polega on na określeniu optymalnego wariantu podziału ognia pododdziałów do zwalczania celów powietrznych, zgodnie z przyjętym kryterium efektywności.

Jako kryterium efektywności w zależności od warunków można przyjąć:

- wartość oczekiwaną liczby rażonych celów;
- prawdopodobieństwo rażenia wszystkich celów.

W pierwszym przypadku zakłada się, że skutki uderzeń z powietrza są proporcjonalne do liczby przepuszczonych przez system obrony przeciwlotniczej celów. Zadaniem więc środków obrony przeciwlotniczej jest razić możliwie dużą liczbę celów.

W odniesieniu do szczególnie ważnych obiektów, na które mogą być wykonane uderzenia bronią jądrową bardziej adekwatnym kryterium wydaje się być prawdopodobieństwo rażenia wszystkich celów.

Rozpatrzmy problem optymalnego podziału ognia według obydwu kryteriów efektywności. Przyjmiemy najpierw założenie, że cele nie stosują manewru.

A. Podział ognia według wartości oczekiwanej liczby rażonych celów

Wprowadamy następujące oznaczenia:

- m - liczba pododdziałów ogniowych uczestniczących w odparciu nalotu;
- r - liczba celów;
- $P_{bg}$  - prawdopodobieństwo rażenia celu o indeksie g ( $1 \leq g \leq r$ ) przez pododdział b ( $1 \leq b \leq m$ ).

w odniesieniu do celu grupowego prawdopodobieństwo to, w myśl wzoru /8/, można wyrazić wzorem:

$$P_{bg} = \frac{M_g}{n}, \quad /3.1/$$

gdzie n - liczba samolotów w celu grupowym.

Wzór /3.1/ w swej istocie wyraża średnie prawdopodobieństwo rażenia jednego samolotu w celu grupowym.

Należy znaleźć optymalny wariant podziału m pododdziałów ogniowych do zwalczania r celów powietrznych.

Zadanie to rozwiązujemy w dwóch etapach. W pierwszym etapie obliczamy w oparciu o odpowiedni algorytm na EMC /zał.7/ prawdopodobieństwa  $P_{bg}$ , tworząc jednocześnie macierz:

$$[P_{bg}] = \begin{bmatrix} P_{11} & P_{12} & \dots & P_{1r} \\ P_{21} & P_{22} & \dots & P_{2r} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ P_{m1} & P_{m2} & \dots & P_{mr} \end{bmatrix} \cdot \quad /3.2/$$

W drugim etapie określamy optymalny wariant podziału pododdziałów ogniowych do zwalczania celów powietrznych z podwójnej macierzy /tabela 4/.

Tabela 4

Numer pododdziału	Numer celu					
	1	2	...	g	...	r
1	$p_{11}$ $x_{11}$	$p_{12}$ $x_{12}$	...	$p_{1g}$ $x_{1g}$	...	$p_{1r}$ $x_{1r}$
2	$p_{21}$ $x_{21}$	$p_{22}$ $x_{22}$	...	$p_{2g}$ $x_{2g}$	...	$p_{2r}$ $x_{2r}$
...	...	...	...	...	...	...
b	$p_{b1}$ $x_{b1}$	$p_{b2}$ $x_{b2}$	...	$p_{bg}$ $x_{bg}$	...	$p_{br}$ $x_{br}$
...	...	...	...	...	...	...
m	$p_{m1}$ $x_{m1}$	$p_{m2}$ $x_{m2}$	...	$p_{mg}$ $x_{mg}$	...	$p_{mr}$ $x_{mr}$

W tabeli tej danymi wejściowymi są: pododdziały ogniowe o kolejnej numeracji od 1 do  $n$ , cele o numerach od 1 do  $r$  i wartości prawdopodobieństw  $p_{bg}$ .

Jeżeli pododdział ogniowy o numerze  $b$  otrzymał zadanie zwalczania celu o indeksie  $g$ , to w klatce  $/b,g/$  pod liczbą  $p_{bg}$  piszemy  $x_{bg} = 1$ . Jeśli natomiast pododdział  $b$  nie otrzymał zadania zwalczania celu  $g$ , to w klatce  $/b,g/$  piszemy  $x_{bg} = 0$ .

Tak więc zmienne  $x_{bg}$  mogą przyjmować dwie wartości: 1 lub 0.

Zadanie znalezienia optymalnego wariantu podziału pododdziałów ogniowych do zwalczania celów powietrznych sprowadza się do określania takiej macierzy

$$X = [x_{bg}] = \begin{bmatrix} x_{11} & x_{12} & \dots & x_{1r} \\ x_{21} & x_{22} & \dots & x_{2r} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ x_{m1} & x_{m2} & \dots & x_{mr} \end{bmatrix} \quad /3.3/$$

gdzie  $x_{bg} = 0,1$ , dla której funkcja kryterium /wartość oczekiwana liczby rażonych celów/:

$$F(X) = \sum_{g=1}^r [1 - \prod_{b=1}^m (1 - p_{bg} x_{bg})] \quad /3.4/$$

osiąga maksimum przy ograniczeniach:

$$\sum_{g=1}^r x_{bg} = 1, \quad /3.5/$$

$$\sum_{b=1}^m x_{bg} \leq m. \quad /3.6/$$

Warunek /3.5/ mówi, że w przypadku gdy nie ma możliwości przeniesienia ognia, pododdział  $b$  ostrzeliwuje tylko jeden cel. Jeżeli istnieje możliwość przeniesienia ognia na cel następny, to dany pododdział powinien być wykazany dwukrotnie w tabeli 4, ponieważ zwalczą dwa cele w tej samej sytuacji powietrznej. W przypadku dwukrotnego przeniesienia ognia pododdział  $b$  wykazujemy trzykrotnie w tabeli 4 itd.

Warunek /3.6/ orzeka, że cel o indeksie  $g$  może być ostrzelany co najwyżej przez  $m$  pododdziałów, tzn. maksymalną liczbę pododdziałów ogniowych uczestniczących w odparciu nalotu.

Tak sformułowane zadanie rozwiązuje się metodami programowania nieliniowego, ponieważ w ogólnym przypadku /gdy do jednego celu prowadzi ogień więcej niż jeden pododdział/ funkcja /3.4/ jest nieliniowa. W pracach [29] i [30] podanych jest szereg metod i algorytmów rozwiązywania tego typu zadań. Dla niektórych

z tych algorytmów są dobrze opracowane programy na EMC, stąd szczegółowy opis metod i techniki postępowania dla otrzymania optymalnego rozwiązania mija się z celem.

Gdy do jednego celu prowadzi ogień nie więcej niż jeden pododdział, tzn.

$$\sum_{b=1}^m x_{bg} = 1, \quad /3.6a/$$

wtedy funkcja /3.4/ jest formą liniową postaci:

$$F(X) = \sum_{b=1}^m \sum_{g=1}^r p_{bg} x_{bg} \quad /3.4a/$$

i powyższe zadanie staje się zwykłym zadaniem programowania liniowego, tzw. zadaniem przydziału.

Tak uproszczone zadanie ma duże znaczenie praktyczne.

Wynika to bezpośrednio z charakteru funkcji /3.4/, bowiem maksymalizacja jej odbywa się głównie na drodze sumowania względem wskaźnika  $g$ , co w praktyce oznacza, że korzystniej jest zwalczać więcej celów /przy jednakowej ich ważności/ niż ześrodkowywać ogień kilku pododdziałów do niektórych z nich, pozostawiając inne nie ostrzelane. Jest to także zgodne z twierdzeniem<sup>x/</sup>, które mówi, że przy optymalnym podziale ognia istnieje co najmniej jeden pododdział ogniowy, któremu przydzielony został cel najkorzystniejszy pod względem prawdopodobieństwa rażenia.

Maksymalizacja formy liniowej /3.4a/ przy warunkach ograniczających /3.5/ i /3.6a/ może być dokonana jedną z ogólnie

---

x/ Szczegółowy opis i dowód powyższego twierdzenia wraz z przykładem ilustrującym podany jest w załączniku 1.

znanych metod transportowych. Obecnie istnieją już dobrze opracowane algorytmy i programy na EBC rozwiązywania tego typu zadań. W prostych przypadkach, gdy liczby  $m$  i  $r$  są małe, optymalne rozwiązanie zarówno zadania /3.4/ - /3.6/, jak i /3.4a/ - /3.6a/ można znaleźć wypisując wszystkie warianty podziału pododdziałów ogniowych do zwalczania celów powietrznych i porównując je kolejno ze sobą. Objaśnimy to na prostym przykładzie.

Niech będzie dana macierz prawdopodobieństw  $P_{bg}$  :

Numer pododdziału	Numer celu	
	1	2
1	0,3	0,2
2	0,5	0,4
3	0,1	0,3

Przy warunku ostrzelania obydwu celów, mamy sześć wariantów podziału ognia trzech pododdziałów:

I	II	III	IV	V	VI
$\begin{bmatrix} b & g \\ 1 & 1 \\ 2 & 2 \\ 3 & 2 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} b & g \\ 1 & 2 \\ 2 & 1 \\ 3 & 2 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} b & g \\ 1 & 2 \\ 2 & 1 \\ 3 & 1 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} b & g \\ 1 & 1 \\ 2 & 1 \\ 3 & 2 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} b & g \\ 1 & 1 \\ 2 & 2 \\ 3 & 1 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} b & g \\ 1 & 2 \\ 2 & 2 \\ 3 & 1 \end{bmatrix}$

Obliczamy dla każdego wariantu wartość funkcji /3.4/:

$$F_I = 0,3 + [1 - (1 - 0,4)(1 - 0,3)] = 0,3 + 0,58 = 0,88;$$

$$F_{II} = 1 - (1 - 0,2)(1 - 0,3) + 0,5 = 0,44 + 0,5 = 0,94;$$

$$F_{III} = 0,2 + [1 - (1 - 0,3)(1 - 0,1)] = 0,2 + 0,37 = 0,57;$$

$$F_{IV} = 1 - (1 - 0,3)(1 - 0,5) + 0,3 = 0,65 + 0,3 = \underline{\underline{0,95}};$$

$$F_V = 1 - (1 - 0,3)(1 - 0,1) + 0,4 = 0,37 + 0,4 = 0,77;$$

$$F_{VI} = 1 - (1 - 0,2)(1 - 0,4) + 0,3 = 0,52 + 0,3 = 0,82.$$

Z obliczeń wynika, że optymalnym wariantem jest IV, tzn. pierwszy i drugi pododdział powinny prowadzić ogień do pierwszego celu, a trzeci - do drugiego celu. Wtedy wartość oczekiwana liczby rażonych celów jest maksymalna i wynosi 0,95.

Dla dużych liczb  $m$  i  $r$  określenie optymalnego rozwiązania powyższą metodą jest uciążliwe, nawet przy zastosowaniu elektronicznej techniki obliczeniowej. Wtedy celowe jest zastosować jedną ze wspomnianych wyżej metod. Przykładowo, dla jednej z nich w załączniku 2 podajemy algorytm na EMC. Przy ręcznych obliczeniach do rozwiązania zadania /3.4a/ - /3.6a/ najcelowiej jest stosować metodę kombinatoryczną.

Istota metody kombinatorycznej polega na tym, że zaczynając od rozwiązania wyjściowego, przechodzimy kolejno do innych rozwiązań o większej wartości funkcji /3.4a/ i w skończonej liczbie kroków dochodzimy do rozwiązania optymalnego. Objasnimy to na przykładzie.

Niech będzie dana macierz prawdopodobieństw  $p_{bg}$  :

Tabela 5

Numer pododdziału	Numer celu				
	1	2	3	4	5
1	0,28	0,29	0,27	0,18	0,15
2	0,14	0,45	0,5	0,22	0,19
3	0,42	0,26	0,17	0,16	0,21
4	0,23	0,2	0,24	0,43	0,37

Stosując regułę największego elementu macierzy, znajdujemy rozwiązanie wyjściowe, uwzględniając warunki ograniczające /3.5/

i /3.6a/. W tym celu odszukujemy w tabeli 5 największy element. Jest nim  $p_{23} = 0,5$ , stąd kładziemy  $x_{23} = 1$ , wykreślając jednocześnie drugi wiersz i trzecią kolumnę. Następnym największym elementem jest  $p_{44} = 0,43$ , zatem  $x_{44} = 1$ . Wykreślamy czwarty wiersz i czwartą kolumnę, a następnie odszukujemy w tak zredukowanej macierzy największą liczbę. Jest nią  $p_{31} = 0,42$ , stąd  $x_{31} = 1$ . Wykreślamy trzeci wiersz i pierwszą kolumnę. Teraz największym elementem jest  $p_{12} = 0,29$ , więc  $x_{12} = 1$ . Znaleźliśmy rozwiązanie wyjściowe /tabela 6/. Widzimy, że spełnia ono warunki ograniczające /3.5/ i /3.6a/.

Tabela 6

Numer pododdziału	Numer celu				
	1	2	3	4	5
1	0,28	0,29	0,27	0,18	0,15
2	0,14	0,45	0,5	0,22	0,19
3	0,42	0,26	0,17	0,16	0,21
4	0,28	0,20	0,24	0,43	0,37

Teraz tabelę 6 poddajemy przekształceniom tożsamościowym tak, aby elementy wybrane w rozwiązaniu wyjściowym uczynić równymi zeru. W tym celu wszystkie elementy tabeli mnożymy przez / -1 /, a następnie do pierwszego wiersza dodajemy liczbę 0,29, do drugiego 0,5, do trzeciego 0,42 i do czwartego 0,43. W wyniku tych przekształceń otrzymujemy tabelę 7, w której elementy wybrane w rozwiązaniu wyjściowym są równe zeru, a pozostałe nie-

Tabela 7

Numer pododdziału	Numer celu				
	1	2	3	4	5
1	0,01	0	0,02	0,11	0,14
2	0,36	0,05	0	0,28	0,31
3	0	0,16	0,25	0,26	0,21
4	0,15	0,23	0,19	0	0,06

ujemne. Zatem zbudowany wariant rozwiązania jest optymalny<sup>x/</sup>.

Zgodnie z nim podział ognia powinien być następujący:

[	b	g	]
	1	2	
	2	3	
	3	1	
	4	4	
	-	5	

Wartość oczekiwana odpowiadająca temu rozwiązaniu wyniesie:

$$F(X) = 0,29 + 0,5 + 0,42 + 0,43 = 1,64.$$

Jest to największa wartość funkcji  $F(X)$ , jaką można osiągnąć przy wszystkich możliwych wariantach podziału ognia. Z rozwiązania optymalnego wynika, że przy tej liczbie pododdziałów cel nr 5 nie będzie ostrzelany<sup>xx/</sup>.

x/ Dowód twierdzenia, z którego tu korzystamy oraz opis metody kombinatorycznej można znaleźć np. w książce [11].

xx/ W rozpatrywanym przykładzie założono, iż żaden z pododdziałów nie ma możliwości przeniesienia ognia na cel następny, tzn. cele działają jednocześnie, stąd cel nr 5 nie może być ostrzelany.

Z podanego przykładu wynika, że rozwiązanie wyjściowe było już optymalne. Często jednak tak nie jest. Latwo to wykryć, gdyż po uczynieniu elementów wybranych w pierwszym rozwiązaniu zerami, w tabeli pojawią się liczby ujemne. Wtedy znajdujemy największy co do wartości bezwzględnej element ujemny i tworzymy tzw. łańcuch zamknięty tego elementu z elementami wybranymi w rozwiązaniu wyjściowym.

Zasada budowy łańcucha zamkniętego jest następująca. Wykreśla się wiersze i kolumny zawierające po jednym zaznaczonym zerze, ponieważ dla utworzenia łańcucha trzeba mieć w wierszu lub kolumnie co najmniej dwa zera; należy pominąć wiersz lub kolumnę, gdzie znajduje się największy element ujemny. Po pierwszym wykreśleniu dokonujemy powtórnego przeglądu i wykreślamy te wiersze /kolumny/, w których zostało po jednym zerze. Znowu przeglądamy wiersze /kolumny/ i robimy to samo. Wreszcie dla zbudowania łańcucha zamkniętego łączymy niewykreślone zera. Połączone elementy numerujemy zgodnie z ruchem wskazówki zegara, rozpoczynając od elementu ujemnego. Mówimy, że elementy tego łańcucha o nieparzystych numerach tworzą półłańcuch nieparzysty, zaś o numerach parzystych - półłańcuch parzysty.

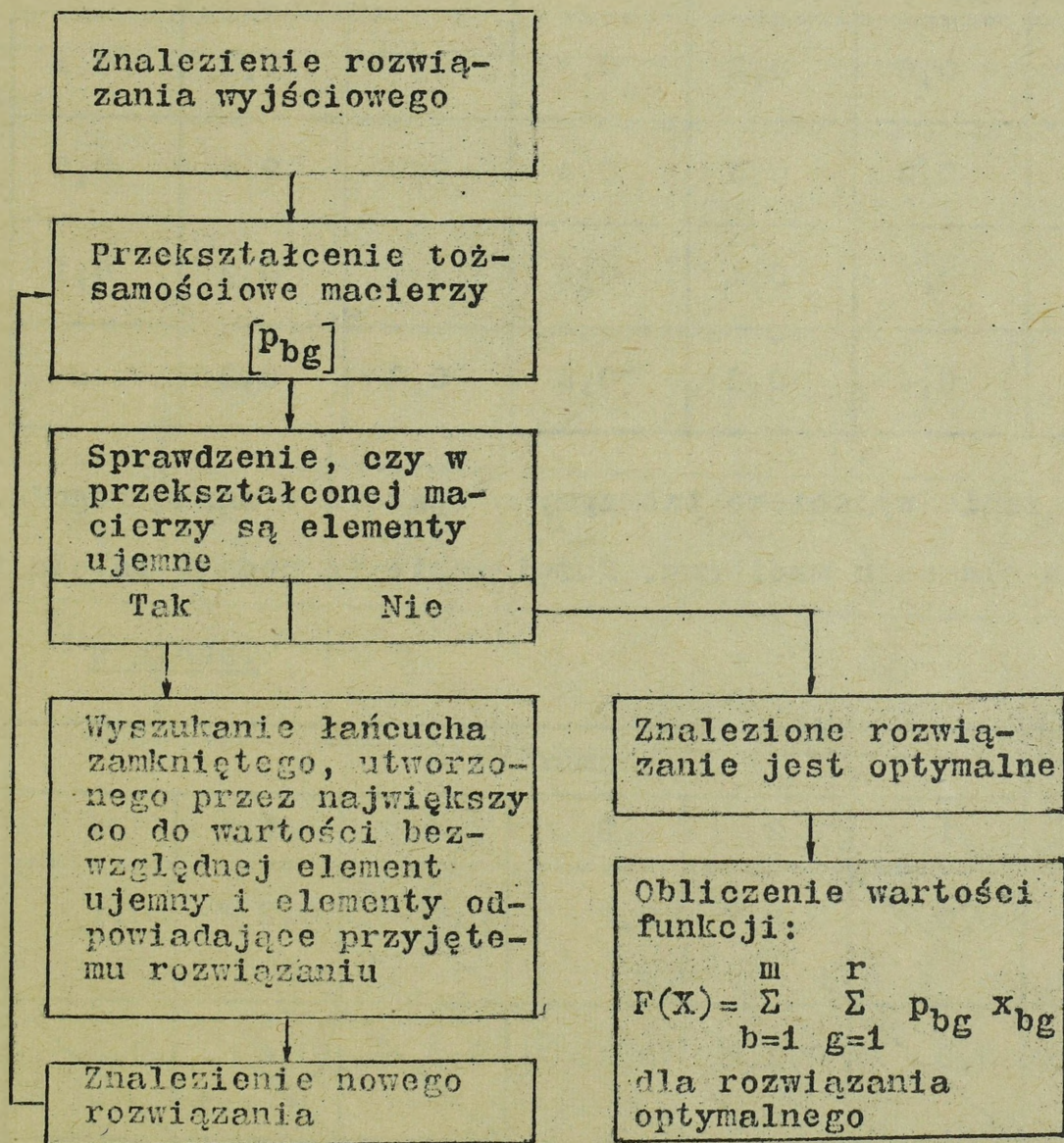
Po utworzeniu łańcucha zamkniętego znajdujemy drugie rozwiązanie. W tym celu przesuwamy z parzystego półłańcucha do nieparzystego liczbę, która jest najmniejsza w parzystym półłańcuchu. Następnie tabelę /będącą jednocześnie macierzą/ poddajemy przekształceniom tożsamościowym, tak aby otrzymać macierz, w której by nie było ani jednego elementu ujemnego, a wszystkie elementy  $p_{bg}$  odpowiadające nowemu rozwiązaniu były równe zeru.

Operację tę powtarzamy dopóty, dopóki nie dojdziemy do rozwiązania, gdzie w przekształconej macierzy wszystkie wybrane elementy są równe zeru, a pozostałe - nieujemne. To ostatnie

rozwiązanie będzie optymalne<sup>x/</sup>.

Dla obliczenia wartości funkcji /3.4a/, odpowiadającej rozwiązaniu optymalnemu, należy połączyć w jedną tabelę macierz wyjściową i ostatnie rozwiązanie. Suma iloczynów par liczb, stojących w klatkach tabeli 4 jest maksymalną wartością funkcji  $F(X)$ .

Omówioną wyżej metodę znajdowania rozwiązania optymalnego można przedstawić w postaci następującego algorytmu:



Dla ilustracji procesu znajdowania rozwiązania optymalnego przytoczymy bardziej złożony przykład.

x/ Opieramy się tu na twierdzeniach podanych w [11].

Należy znaleźć optymalny wariant podziału ognia czterech pododdziałów do zwalczania sześciu celów powietrznych, przy założeniu, że nie ma możliwości przeniesienia ognia. Macierz prawdopodobieństw  $p_{bg}$ , obliczona za pomocą algorytmu /zał. 7/, jest następująca /tabela 8/.

Tabela 8

Numer pododdziału	Numer celu					
	1	2	3	4	5	6
1	0,6	0,2	0,3	0,7	0,2	0,1
2	0,3	0,3	0,4	0,3	0,4	0,3
3	0,2	0,1	0,4	0,1	0,2	0,1
4	0,4	0,2	0,5	0,3	0,3	0

Rozwiązanie wyjściowe tworzymy w oparciu o znaną regułę największego elementu macierzy. Rozwiązanie to podaje tabela 9.

Tabela 9

Numer pododdziału	Numer celu					
	1	2	3	4	5	6
1	0,6	0,2	0,3	0,7	0,2	0,1
2	0,3	0,3	0,4	0,3	0,4	0,3
3	0,2	0,1	0,4	0,1	0,2	0,1
4	0,4	0,2	0,5	0,3	0,3	0



Powyższą tabelę poddajemy przekształceniom tożsamościowym tak, aby elementy zaznaczone kółkami były równe zeru, a pozostałe nieujemne. W tym celu wszystkie elementy macierzy mnożymy przez  $-1$ , a następnie do pierwszego wiersza dodajemy  $0,7$ , do drugiego  $0,4$ , do trzeciego  $0,2$  i do czwartego  $0,5$ . W wyniku takiego przekształcenia ekwiwalentnego macierzy wyjściowej /tabela 8/, otrzymujemy /tabela 10/.

Tabela 10

Numer pododdziału	Numer celu					
	1	2	3	4	5	6
1	0,1	0,5	0,4	0	0,5	0,6
2	0,1	0,1	0	0,1	0	0,1
3	0	0,1	-0,2	0,1	0	0,1
4	0,1	0,3	0	0,2	0,2	0,5

Jak widać rozwiązanie wyjściowe nie jest optymalne, ponieważ w tabeli 10 występuje element ujemny  $p_{33} = -0,2$ .

Ponieważ w naszym przykładzie występuje jeden element ujemny, zatem jest on też i największy co do wartości bezwzględnej. Tworzymy więc łańcuch zamknięty elementu ujemnego z elementami odpowiadającymi pierwszemu rozwiązaniu /zaznaczono je kółkami/. W tabeli 11 łańcuch ten zaznaczono linią przerywaną, a numery elementów w łańcuchu wpisane są w prawych górnych rogach klatek.

Mając zbudowany łańcuch zamknięty, poprawiamy rozwiązanie wyjściowe w sposób następujący. Z parzystego półłańcucha prze-

Tabela 11

Numer pododdziału	Numer celu					
	1	2	3	4	5	6
1	0,1	0,5	0,4	0	0,5	0,6
2	0,1	0,1	0	0,1	0	0,1
3	0	0,1	-0,2	0,1	0	0,1
4	0,1	0,3	0	0,2	0,2	0,5

Diagramy w tabeli 11:

- W komórce (1,4) jest kółko z 0 i strzałka 1 skierowana w dół.
- W komórce (2,5) jest kółko z 0 i strzałka 1 skierowana w dół.
- W komórce (3,3) jest kwadrat z -0,2 i strzałka 1 skierowana w górę.
- W komórce (4,1) jest kółko z 0,1 i strzałka 1 skierowana w dół.
- W komórce (4,3) jest kółko z 0 i strzałka 1 skierowana w górę.

nosimy do nieparzystego liczbę 1. Przeniesienie to pokazują strzałki /tabela 11/. Drugie rozwiązanie przedstawia tabela 12.

Tabela 12

Numer pododdziału	Numer celu					
	1	2	3	4	5	6
1	0,1	0,5	0,4	0	0,5	0,6
2	0,1	0,1	0	0,1	0	0,1
3	0	0,1	-0,2	0,1	0	0,1
4	0,1	0,3	0	0,2	0,2	0,5

Diagramy w tabeli 12:

- W komórce (1,4) jest kółko z 0 i strzałka 1 skierowana w dół.
- W komórce (2,5) jest kółko z 0 i strzałka 1 skierowana w dół.
- W komórce (3,3) jest kwadrat z -0,2 i strzałka 1 skierowana w górę.
- W komórce (4,1) jest kółko z 0,1 i strzałka 1 skierowana w dół.

Ponieważ liczba  $p_{33} = -0,2$  została wybrana w drugim rozwiązaniu, należy dokonać przekształceń, by uczynić ją równą zero. W tym celu wystarczy do kolumny trzeciej dodać 0,2. W wyniku tej operacji otrzymamy macierz, w której nie ma ani jednego elementu

ujemnego, a wszystkie elementy wybrane w drugim rozwiązaniu są równe zero. Dlatego rozwiązanie to jest optymalne. Dla obliczenia maksymalnej wartości funkcji  $F(X)$  wystarczy połączyć w jedną tablicę macierz wyjściową /tabela 8/ oraz rozwiązanie optymalne, tzn. macierz

$$X^* = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

a następnie przeprowadzić obliczenia zgodnie z wzorem /3.4a/. W tabeli 13 podana jest ostateczna postać rozwiązania.

Tabela 13

Numer pododdziału	Numer celu					
	1	2	3	4	5	6
1	0,6 0	0,2 0	0,3 0	0,7 1	0,2 0	0,1 0
2	0,3 0	0,3 0	0,4 0	0,3 0	0,4 1	0,3 0
3	0,2 0	0,1 0	0,4 1	0,1 0	0,2 0	0,1 0
4	0,4 1	0,2 0	0,5 0	0,3 0	0,3 0	0 0

Wartość maksymalna funkcji  $F(X^*)$  wyniesie:

$$F(X^*) = 0,7 + 0,4 + 0,4 + 0,4 = 1,9.$$

Z uwagi na brak możliwości przeniesienia ognia, cele nr 2 i 6 nie będą ostrzelane. A więc podział ognia powinien być następujący:

$$\begin{bmatrix} b & g \\ 1 & 4 \\ 2 & 5 \\ 3 & 1 \\ 4 & 1 \end{bmatrix}.$$

Z powyższych przykładów wynika, że nawet przy znacznych  $m$  i  $r$  znalezienie najlepszego wariantu podziału ognia nie sprawia większych trudności. W praktyce najczęściej jest tak, że jeśli pierwsze rozwiązanie nie jest optymalne, to dla jego uzyskania wystarczą jedna - dwie iteracje, w myśl podanego algorytmu.

W dotychczasowych rozważaniach przyjmowaliśmy, że wszystkie cele w danej sytuacji powietrznej są jednakowo ważne. Co prawda trudno będzie w praktyce ustalić na podstawie danych z rozpoznania radiolokacyjnego typ samolotu przeciwnika, szczególnie w warunkach stosowania przez niego zakłóceń. Z tego względu, z uwagi na brak informacji o celach, bardzo często zmuszeni będziemy założyć, że są one jednakowo ważne.

Jeżeli jednak w praktyce uda nam się w jakiś sposób zdobyć pełniejsze informacje, wtedy należy ustalić relację ważności pomiędzy celami. Tak np. nosiciel broni jądrowej /rozpoznany na podstawie typu samolotu/, samolot stosujący zakłócenia lub samolot prowadzący grupę może być uznany za ważniejszy od pozostałych. Zatem jeśli cele nie są jednakowo ważne i posiadamy o nich aktualne dane, to należy przypisać im odpowiednie liczby /wagi/:  $W_1, W_2, \dots, W_r$  i wtedy funkcja kryterium /3.4/ będzie miała postać:

$$F(X) = \sum_{g=1}^r W_g \left[ 1 - \prod_{b=1}^m (1 - p_{bg} x_{bg}) \right], \quad /3.4c/$$

a w przypadku spełnienia warunku /3.6a/ sprowadzi się do formy liniowej:

$$F(X) = \sum_{b=1}^m \sum_{g=1}^r W_g P_{bg} X_{bg} \quad /3.4d/$$

Zilustrujmy to na przykładzie. Załóżmy, że na osłaniany obiekt lecą jednocześnie trzy cele pojedyncze, przy czym pierwszy cel jest dwa razy ważniejszy od pozostałych  $W_1 = 2, W_2 = 1, W_3 = 1/$ . Macierz prawdopodobieństw rażenia poszczególnych celów jest następująca:

Numer pododdziału	Numer celu		
	1	2	3
1	0,32	0,26	0,18
2	0,41	0,24	0,33
3	0,21	0,40	0,25

Przy warunku ostrzelania wszystkich celów, mamy sześć wariantów podziału ognia trzech pododdziałów:

$$\begin{matrix} \text{I} & & \text{II} & & \text{III} & & \text{IV} & & \text{V} & & \text{VI} \\ \left[ \begin{matrix} b & g \\ 1 & 1 \\ 2 & 2 \\ 3 & 3 \end{matrix} \right] & , & \left[ \begin{matrix} b & g \\ 1 & 2 \\ 2 & 1 \\ 3 & 3 \end{matrix} \right] & , & \left[ \begin{matrix} b & g \\ 1 & 2 \\ 2 & 3 \\ 3 & 1 \end{matrix} \right] & , & \left[ \begin{matrix} b & g \\ 1 & 3 \\ 2 & 1 \\ 3 & 2 \end{matrix} \right] & , & \left[ \begin{matrix} b & g \\ 1 & 3 \\ 2 & 2 \\ 3 & 1 \end{matrix} \right] & , & \left[ \begin{matrix} b & g \\ 1 & 1 \\ 2 & 3 \\ 3 & 2 \end{matrix} \right] .
 \end{matrix}$$

Obliczamy dla każdego wariantu wartość funkcji /3.4d/:

$$\begin{aligned}
 F_I &= 2 \cdot 0,32 + 1 \cdot 0,24 + 1 \cdot 0,25 = 1,13; \\
 F_{II} &= 1 \cdot 0,26 + 2 \cdot 0,41 + 1 \cdot 0,25 = 1,33; \\
 F_{III} &= 1 \cdot 0,26 + 1 \cdot 0,33 + 2 \cdot 0,21 = 1,01; \\
 F_{IV} &= 1 \cdot 0,18 + 2 \cdot 0,41 + 1 \cdot 0,40 = \underline{\underline{1,40}}; \\
 F_V &= 1 \cdot 0,18 + 1 \cdot 0,24 + 2 \cdot 0,21 = 0,84; \\
 F_{VI} &= 2 \cdot 0,32 + 1 \cdot 0,33 + 1 \cdot 0,40 = 1,37.
 \end{aligned}$$

Z obliczeń wynika, że optymalnym wariantem jest IV, tzn. pierwszy pododdział powinien prowadzić ogień do trzeciego celu, drugi do pierwszego celu, a trzeci do drugiego celu. Wtedy funkcja  $F(X)$  przyjmuje wartość maksymalną, równą 1,41. Wartość tę można uważać jako średnią ważoną liczby rażonych celów.

Gdyby nie uwzględniać ważności poszczególnych celów, to optymalnym wariantem byłby wariant VI. Wartość oczekiwana liczby rażonych celów dla tego wariantu wynosi 1,05.

#### B. Podział ognia według prawdopodobieństwa rażenia wszystkich celów

Rozpatrzmy problem optymalnego podziału ognia, przyjmując jako kryterium efektywności prawdopodobieństwo rażenia wszystkich celów  $P_r$ . Oczywiście, jeśli liczba pododdziałów  $m$  jest mniejsza od liczby celów  $r$ , to  $P_r = 0$ . Zatem warunkiem koniecznym, by  $P_r > 0$  jest spełnienie ostrej nierówności:  $m > r$ . Warunek ten staje się dostateczny, gdy dla wszystkich wskaźników  $b$  i  $g$  prawdopodobieństwa  $p_{bg} > 0$ .

Problem optymalnego podziału ognia sprowadza się w tym przypadku do określenia macierzy  $X = [x_{bg}]$ , gdzie  $x_{bg} = |0,1|$ , dla której funkcja kryterium /prawdopodobieństwo rażenia wszystkich celów/:

$$P_r(X) = \prod_{g=1}^r [1 - \prod_{b=1}^m (1 - p_{bg} x_{bg})] \quad /3.7/$$

osiąga maksimum przy ograniczeniach /3.5/ i /3.6/, tzn.:

$$\sum_{g=1}^r x_{bg} = 1,$$

$$\sum_{b=1}^m x_{bg} \leq m.$$

Tak sformułowane zadanie, podobnie jak zadanie /3.4/ - /3.6/, rozwiązuje się metodami programowania nieliniowego, ponieważ w ogólnym przypadku funkcja /3.7/ jest nieliniowa. Dla małych  $m$  i  $g$  optymalne rozwiązanie możemy uzyskać, wypisując wszystkie warianty podziału ognia do celów i porównując je kolejno ze sobą. Zilustrujemy to na przykładzie.

Niech będzie dana macierz prawdopodobieństw  $P_{bg}$  :

Numer pododdziału	Numer celu		
	1	2	3
1	0,51	0,45	0,30
2	0,20	0,50	0,25
3	0,40	0,30	0,38

Przy warunku ostrzelania wszystkich celów mamy sześć wariantów podziału ognia trzech pododdziałów:

$$\begin{matrix} \text{I} & & \text{II} & & \text{III} & & \text{IV} & & \text{V} & & \text{VI} \\ \left[ \begin{matrix} b & g \\ 1 & 1 \\ 2 & 2 \\ 3 & 3 \end{matrix} \right] & , & \left[ \begin{matrix} b & g \\ 1 & 2 \\ 2 & 3 \\ 3 & 1 \end{matrix} \right] & , & \left[ \begin{matrix} b & g \\ 1 & 3 \\ 2 & 1 \\ 3 & 2 \end{matrix} \right] & , & \left[ \begin{matrix} b & g \\ 1 & 3 \\ 2 & 2 \\ 3 & 1 \end{matrix} \right] & , & \left[ \begin{matrix} b & g \\ 1 & 2 \\ 2 & 1 \\ 3 & 3 \end{matrix} \right] & , & \left[ \begin{matrix} b & g \\ 1 & 1 \\ 2 & 3 \\ 3 & 2 \end{matrix} \right] .
 \end{matrix}$$

Obliczamy dla każdego wariantu wartość funkcji /3.7/:

$$P_I = 0,51 \cdot 0,50 \cdot 0,38 = 0,097;$$

$$P_{II} = 0,45 \cdot 0,25 \cdot 0,40 = 0,045;$$

$$P_{III} = 0,30 \cdot 0,20 \cdot 0,30 = 0,018;$$

$$P_{IV} = 0,30 \cdot 0,50 \cdot 0,40 = 0,060;$$

$$P_V = 0,45 \cdot 0,20 \cdot 0,38 = 0,034;$$

$$P_{VI} = 0,51 \cdot 0,25 \cdot 0,30 = 0,038.$$

- 32 -

Z obliczeń wynika, że optymalnym wariantem jest I / $P_I = 0,097$ /. Jest on także najlepszy w świetle kryterium /3.4/, ponieważ wartość oczekiwana liczby rażonych celów jest maksymalna i wynosi 1,39.

Dotychczas rozpatrywaliśmy problem optymalnego podziału ognia do celów nie stosujących manewru. Jak wiadomo, problem ten można rozwiązać metodami programowania nieliniowego, a przy pewnych uproszczeniach /warunki /3.5/ i /3.6a// staje się zwykłym zadaniem transportowym. Komplikuje się on wtedy, gdy uwzględnić możliwe warianty manewru celów. Zagadnieniem tym zajmiemy się obecnie.

### C. Optymalizacja podziału ognia do celów stosujących manewr.

W celu zmniejszenia efektywności działania środków obrony przeciwlotniczej lotnictwo przeciwnika m.in. stosuje w szerokim zakresie manewr, polegający na szybkiej zmianie kierunku i wysokości lotu. Do określania momentu rozpoczęcia manewru wykorzystuje ono odpowiednie urządzenia ostrzegawcze, zamontowane na samolotach. W tych warunkach chcąc zadać przeciwnikowi możliwie duże straty siłami i środkami OPL wydzielonymi do osłony obiektu, należy zawczasu określić prawdopodobne warianty manewru celów i na tej podstawie wybrać najlepszy wariant podziału ognia.

Ilość możliwych wariantów manewru celów, polegającego na zmianie kierunku lotu przy wejściu w strefy ognia środków OPL, wyraża się wzorem:

$$K = m^r \quad /3.8/$$

gdzie:

- m - liczba pododdziałów ogniowych mogących jednocześnie prowadzić ogień do celów;
- r - liczba celów.

Ilość zaś możliwych wariantów podziału pododdziałów ogniowych do zwalczania celów powietrznych obliczyć można za pomocą wzoru:

$$S = \frac{n!}{(n-r)!} \quad /3.9/$$

Ze względu na przeciwieństwo celów działania środków napadu powietrznego i środków obrony przeciwlotniczej, zagadnienie powyższe można sprowadzić do gry. Za funkcję kryterium najcelowiej jest przyjąć wartość oczekiwaną liczby rażonych celów. Wartość tę oznaczymy symbolem  $M_{ij}$ , gdzie  $i$  oznacza numer wariantu podziału środków OPL, a  $j$  - numer wariantu manewru celów.

Każdemu z możliwych wariantów manewru celów ( $j$ ) i każdej kombinacji podziału środków OPL ( $i$ ) odpowiada ściśle określona wartość  $M_{ij}$ . Możemy zatem sporządzić tabelę, która jednocześnie stanowić będzie macierz gry:

Tabela 14

i \ j		Warianty manewru celów					
		1	2	...	j	...	K
Warianty podziału pododdziałów ogniowych	1	$M_{11}$	$M_{12}$	...	$M_{1j}$	...	$M_{1K}$
	2	$M_{21}$	$M_{22}$	...	$M_{2j}$	...	$M_{2K}$
	...	...	...	...	...	...	...
	i	$M_{i1}$	$M_{i2}$	...	$M_{ij}$	...	$M_{iK}$
	...	...	...	...	...	...	...
	S	$M_{S1}$	$M_{S2}$	...	$M_{Sj}$	...	$M_{SK}$

Przeciwnik dąży do zastosowania takiego wariantu manewru, by wartość  $M_{ij}$  była minimalna. Strona broniąca się powinna zawczasu ocenić prawdopodobne warianty manewru przeciwnika /zakładając różne ilości celów/ oraz ugrupowanie i możliwości środków OPL i na tej podstawie określić najbardziej korzystne warianty podziału pododdziałów ogniowych, tzn. takie, dla których wartość oczekiwana liczby rażonych celów  $M_{ij}$  będzie maksymalna. Dążenie przeciwnika i strony broniącej się możemy matematycznie zapisać:

$$V_1 = \max_i \min_j M_{ij}, \quad /3.10/$$

gdzie  $V_1$  oznacza dolną wartość gry.

Wariant podziału środków OPL odpowiadający dolnej wartości gry oznaczymy symbolem  $i'$ . Zapewnia on uzyskanie wartości oczekiwanej, równej co najmniej  $V_1$  bez względu na to jaki wariant manewru przeciwnika zastosuje.

Wynika to bezpośrednio z nierówności:

$$V_1 \leq M_{i'j} \quad /3.11/$$

Jeżeli jednak przeciwnik posiada aktualne dane dotyczące ugrupowania i możliwości sił i środków OPL, to może zastosować taki wariant manewru, przy którym wartość oczekiwana liczby rażonych celów będzie równa co najwyżej

$$V_2 = \min_j \max_i M_{ij}, \quad /3.12/$$

gdzie  $V_2$  jest górną wartością gry.

W przypadku gdy  $V_1 = V_2$  sytuacja jest prosta, bowiem optymalne rozwiązania dla obu stron odczytujemy wprost z tabeli 14; dla strony broniącej się będą te warianty podziału środków, które zapewniają osiągnięcie wartości  $V_1$ , zaś dla przeciwnika - wartości  $V_2$ .

Jeżeli natomiast  $V_1 < V_2$ , to optymalne rozwiązanie możemy otrzymać wprowadzając strategie mieszane.

Niech więc  $x_i$  oznacza częstość, z jaką strona broniąca się powinna stosować wariant podziału środków OPL o indeksie  $i$ , a  $y_j$  - częstość, z jaką dla przeciwnika najkorzystniej jest stosować wariant manewru  $j$ . W odniesieniu do wyraźnie niekorzystnych wariantów  $i$  oraz  $j$ , częstości te będą równe zeru.

Sumy częstości  $x_i$  i  $y_j$  spełniać muszą równości:

$$\sum_{i=1}^S x_i = 1 \quad \text{i} \quad \sum_{j=1}^K y_j = 1 . \quad /3.13/$$

Wartość oczekiwana  $M_{ij}$  z uwzględnieniem częstości  $x_i$  oraz  $y_j$  wyrazi się wzorem:

$$M(x_i, y_j) = \sum_{i=1}^S \sum_{j=1}^K x_i y_j M_{ij} \quad /3.14/$$

Dolną  $V_1$  i górną  $V_2$  wartość gry oraz częstości optymalne:  $x_i = x'_i$ ,  $y_j = y'_j$  obliczamy z równań:

$$V_1 = \max_x \min_y \sum_{i=1}^S \sum_{j=1}^K x_i y_j M_{ij} \quad /3.15/$$

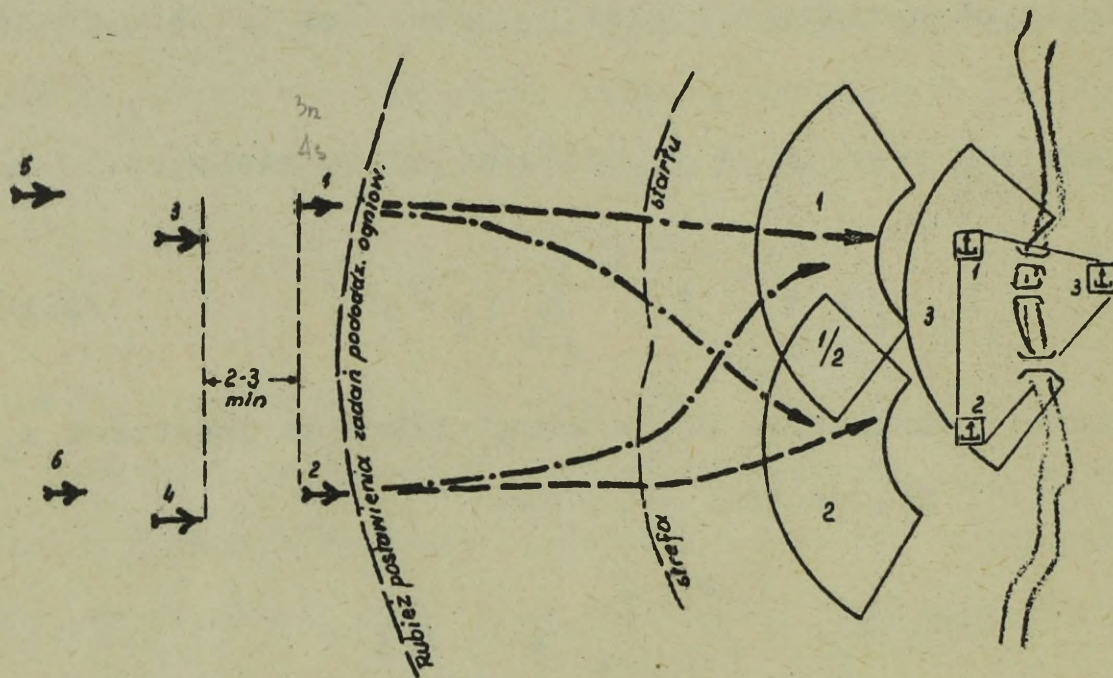
$$V_2 = \min_y \max_x \sum_{i=1}^S \sum_{j=1}^K x_i y_j M_{ij} , \quad /3.16/$$

stosując jedną z metod rozwiązywania gier o sumie zero.

Jeżeli liczby wariantów  $S$  oraz  $K$  są skończone, to wartości  $V_1$  i  $V_2$  istnieją i są sobie równe na mocy fundamentalnego twierdzenia teorii gier.

Dla ilustracji zagadnienia i pokazania pewnej ogólnej zasady, jaka tu występuje rozpatrzmy następujący prosty przykład.

Założmy, że pułk rakiet przeciwlotniczych w składzie trzech dywizjonów ogniowych osłania zespół przepraw na ważnej rubieży wodnej /rys.6/



Rys.6

Przyjmijmy najpierw, że przeciwnik stara się zniszczyć przeprawę, stosując następującą taktykę działania: w nalocie bierze udział sześć grup, każda w składzie do 4 samolotów. Grupy tworzą trzy rzuty /w każdym rzucie po dwie grupy/. Odstęp czasu pomiędzy kolejnymi rzutami wynosi 2-3 minuty, zaś pomiędzy grupami w danym rzucie są nieznaczne /do 20 sek/. Cele są urzutowane wszerek. System rozpoznania radiolokacyjnego działa bezawaryjnie. Przeciwnik posiada informacje o typie środków OPL osłaniających przeprawę i w ogólnych zarysach zna ich ugrupowanie. Pułk rakiet przeciwlotniczych dysponuje dwoma jednostkami ognia. Cykl strzelania wynosi 2 minuty.

Zbadajmy, czy w założonych warunkach przeciwnik ma możliwość przeniknięcia przez system ognia rakiet na głębokość do obiektów ataku, stosując manewr przeciwrakietowy w płaszczyźnie poziomej. W przyjętym wariancie nalotu dywizjony mogą przenieść ogień do następnych rzutów, ale nie mają możliwości kolejnego ostrzelania grup samolotów w danym rzucie. W każdym więc rzucie zachodzi potrzeba jednoczesnego oddziaływania na dwa cele. Wystarczy zatem przeanalizować możliwość ostrzelania jednocześnie dwóch grup przy założeniu, że grupy stosują manewr przeciwrakietowy. Ilość możliwych kombinacji wejścia dwóch celów w strefę ognia trzech dywizjonów obliczamy za pomocą wzoru /3.8/. W danym przypadku mamy:  $m = 3$ ,  $r = 2$ .

Po podstawieniu danych do wzoru mamy

$$K = 3^2 = 9.$$

Są to kombinacje:

$$\begin{array}{ccccc}
 j = 1 & j = 2 & j = 3 & j = 4 & j = 5 \\
 \begin{bmatrix} g & b \\ 1 & 1 \ i \ 3 \\ 2 & 1 \ i \ 3 \end{bmatrix}, & \begin{bmatrix} g & b \\ 1 & 1 \ i \ 3 \\ 2 & 2 \ i \ 3 \end{bmatrix}, & \begin{bmatrix} g & b \\ 1 & 2 \ i \ 3 \\ 2 & 1 \ i \ 3 \end{bmatrix}, & \begin{bmatrix} g & b \\ 1 & 2 \ i \ 3 \\ 2 & 2 \ i \ 3 \end{bmatrix}, & \begin{bmatrix} g & b \\ 1 & 1/2 \ i \ 3 \\ 2 & 1 \ i \ 3 \end{bmatrix}, \\
 \\
 j = 6 & j = 7 & j = 8 & j = 9 \\
 \begin{bmatrix} g & b \\ 1 & 1 \ i \ 3 \\ 2 & 1/2 \ i \ 3 \end{bmatrix}, & \begin{bmatrix} g & b \\ 1 & 1/2 \ i \ 3 \\ 2 & 1/2 \ i \ 3 \end{bmatrix}, & \begin{bmatrix} g & b \\ 1 & 1/2 \ i \ 3 \\ 2 & 2 \ i \ 3 \end{bmatrix}, & \begin{bmatrix} g & b \\ 1 & 2 \ i \ 3 \\ 2 & 1/2 \ i \ 3 \end{bmatrix}.
 \end{array}$$

Dla przykładu opiszemy słownie warianty manewru  $j = 2$  i  $j = 9$ .

$j = 2$  - cel nr 1 wchodzi najpierw w strefę ognia pierwszego, a następnie trzeciego dywizjonu, zaś cel nr 2 - w strefę ognia drugiego i trzeciego dywizjonu.

$j = 9$  - cel nr 1 wchodzi w strefę ognia drugiego i trzeciego dywizjonu, a cel nr 2 najpierw w strefę ognia pierwszego i drugiego /pokrywając się strefy ognia dywizjonów/, a następnie w strefę ognia trzeciego dywizjonu.

Ilość możliwych wariantów podziału ognia trzech dywizjonów do jednoczesnego ostrzelania dwóch celów obliczamy za pomocą wzoru /3.9/, do którego podstawiamy dane:  $m = 3$ ,  $r = 2$ .

$$S = \frac{3!}{(3-2)!} = 6.$$

Będą to warianty:

$$\begin{array}{cccc}
 j = 1 & i = 2 & i = 3 & i = 4 \\
 \left[ \begin{array}{cc} g & b \\ 1 & 1 \ i \ 3 \\ 2 & 2 \end{array} \right], & \left[ \begin{array}{cc} g & b \\ 1 & 1 \ i \ 2 \\ 2 & 3 \end{array} \right], & \left[ \begin{array}{cc} g & b \\ 1 & 1 \\ 2 & 2 \ i \ 3 \end{array} \right], & \left[ \begin{array}{cc} g & b \\ 1 & 2 \\ 2 & 1 \ i \ 3 \end{array} \right], \\
 & i = 5 & i = 6 & \\
 & \left[ \begin{array}{cc} g & b \\ 1 & 2 \ i \ 3 \\ 2 & 1 \end{array} \right], & \left[ \begin{array}{cc} g & b \\ 1 & 3 \\ 2 & 1 \ i \ 2 \end{array} \right]. & 
 \end{array}$$

Mając wypisane wszystkie możliwe warianty manewru celów i warianty podziału środków OPL możemy przystąpić do sporządzenia tabeli 15, stanowiącej jednocześnie macierz gry. Przyjmujemy, że jeśli cel wchodzi w strefę ognia dywizjonu, to istnieje możliwość odpalenia do niego serii trzech rakiet; faktywnie temu przypiszemy wartość 1. Jeżeli natomiast cel nie wchodzi w strefę ognia - przyjmujemy wartość 0. Uproszczenie to nie wpłynie na zmianę rozwiązania optymalnego.

Macierz gry jest następująca:

Tabela 15

i \ j	Warianty manewru przeciwnika									Min. ostrzel. celów	
	j=1	j=2	j=3	j=4	j=5	j=6	j=7	j=8	j=9		
Warianty podziału środków OPL	i=1	1	2	1	2	1	2	2	2	2	1
	i=2	2	2	2	2	2	2	2	2	2	<u>2</u> ✓
	i=3	2	2	1	1	2	2	2	2	1	1
	i=4	1	1	2	2	2	1	2	2	2	1
	i=5	2	1	2	1	2	2	2	1	2	1
	i=6	2	2	2	2	2	2	2	2	2	<u>2</u>
Max. ostrzel. celów	2	2	2	2	2	2	2	2	2	2	-

Z macierzy wynika, że  $V_1 = V_2 = 2$ . Istnieje więc punkt siodłowy. Optymalne warianty podziału dywizjonów ogniowych do celów:  $i = 2$  oraz  $i = 6$ .

A więc najcelowiej jest pierwszemu i drugiemu dywizjonowi przydzielić cel nr 1, a trzeciemu - cel nr 2 lub odwrotnie, cel nr 2 przydzielić pierwszemu i drugiemu dywizjonowi, zaś cel nr 1 - trzeciemu. Procent ostrzelanych celów równa się 100, ponieważ w kolejnych rzutach każdy cel jest ostrzelany serią trzech rakiet. Przy założonej więc taktyce działania przeciwnik nie ma możliwości przeniknięcia przez strefę ognia rakiet na głębokość<sup>do</sup> obiektów ataku.

Można wykazać, że gdyby nawet przeciwnik stosował przeciw stacjom naprowadzania rakiet /SNR/ pociski klasy "powietrze - ziemia" np. typu "Shrike", to i tak procent ostrzelanych celów w danym wypadku nie ulegnie zmniejszeniu.

Wystarczy jednak, aby przeciwnik zorganizował nalot w ten sposób, że cele działałyby w dwóch rzutach /w każdym rzucie po trzy cele/, zachowując odległości i odstępy jak poprzednio, a procent ostrzelanych celów może się zmniejszyć nawet do 33.

Latwo obliczyć, że będzie wówczas 27 możliwych wariantów manewru celów i 6 wariantów podziału środków. Dolna wartość gry  $V_1 = 1$ , górna  $V_2 = 2$ .

Ogólnie, procent ostrzelanych celów, określony na podstawie dolnej wartości gry, wyraża się wzorem

$$P \geq \begin{cases} 100 \text{ dla } r < m \\ \frac{100(m-2)}{r} \text{ dla } r \geq m. \end{cases} \quad /3.17/$$

Z wzoru /3.17/ wynika bardzo istotny wniosek. Otóż gdy  $m = 2$  i  $r \geq m$  - procent ostrzelanych celów równa się zero. Fakt ten należy mieć na uwadze, tworząc system obrony przeciwlotniczej obiektu.

Mając ustalone kryterium efektywności oraz metody jego obliczania z uwzględnieniem optymalnego podziału ognia, możemy przystąpić do sformułowania ogólnego modelu matematycznego dotyczącego ugrupowania sił i środków OPL w osłonie obiektu /zespołu obiektów/.

#### 4. OGÓLNY MODEL MATEMATYCZNY UGRUPOWANIA SIŁ I ŚRODKÓW OPL

Dla zbudowania ogólnego modelu matematycznego wprowadźmy następujące oznaczenia:

$j$  - indeks oznaczający sposób /wariant/ działania przeciwnika, gdzie  $j = 1, 2, \dots, w$ ;

$k$  - indeks oznaczający wariant ugrupowania sił i środków OPL, gdzie  $k = 1, 2, \dots, u$ ;

$x_k$  - częstość stosowania wariantu ugrupowania sił i środków OPL o indeksie  $k$ ;

$y_j$  - częstość stosowania wariantu nalotu o indeksie  $j$ ;

$P_k^j$  - prawdopodobieństwo obrony obiektu przy  $j$ -tym sposobie działania przeciwnika i  $k$ -tym wariacie ugrupowania środków OPL;

$Q_k^j = 1 - P_k^j$  - prawdopodobieństwo wykonania zadania przez przeciwnika przy  $j$ -tym sposobie jego działania i  $k$ -tym wariacie ugrupowania środków OPL;

$Q_{1k}^j = 1 - P_{1k}^j$  - prawdopodobieństwo przeniknięcia przez system OPL przy  $j$ -tym sposobie działania przeciwnika i  $k$ -tym wariacie ugrupowania;

$Q_{2k}^j = 1 - P_{2k}^j$  - prawdopodobieństwo zniszczenia /obezwładnienia/ obiektu przy  $j$ -tym sposobie działania przeciwnika i  $k$ -tym wariacie ugrupowania środków OPL.

$P_{Nk}^j = \sum_{c=1}^N a_c^j P_{ck}^j$  - średnia wartość prawdopodobieństwa obrony  $N$  obiektów przy  $j$ -tym sposobie działania przeciwnika i  $k$ -tym wariacie ugrupowania środków OPL.

- $V_1$  - dolna wartość prawdopodobieństwa obrony obiektu /dolna wartość gry/;  
 $V_2$  - górna wartość prawdopodobieństwa obrony obiektu /górna wartość gry/;  
 $V$  - wartość gry.

Wyrażenie  $P_{Nk}^j$  jest wielkością, którą przeciwnik stara się minimalizować przez wybór odpowiedniego wariantu nalotu i skupienie głównego wysiłku działania na obiektach o dużej ważności. Dla jednego obiektu wyrażenie to, zgodnie z wzorem /2.3/, przyjmie postać:

$$P_k^j = 1 - Q_k^j = 1 - Q_{1k}^j \cdot Q_{2k}^j = 1 - (1 - P_{1k}^j) \cdot (1 - P_{2k}^j). \quad /4.1/$$

Sformułujemy najpierw model matematyczny ugrupowania sił i środków OPL w osłonie jednego obiektu, a następnie uogólnimy go na  $N$  obiektów, różniących się między sobą ważnością.

Wyboru wariantu działania, minimalizującego wielkość /4.1/, przeciwnik może dokonać tym trafniej im dane o obiekcie i jego obronie przeciwlotniczej będą dokładniejsze i bardziej aktualne.

Dążenie przeciwnika do minimalizowania wielkości /4.1/ lub, co na jedno wychodzi, maksymalizowania wielkości  $Q_k^j$  możemy wyrazić matematycznie następująco:

$$\min_j P_k^j = \min_j [1 - (1 - P_{1k}^j)(1 - P_{2k}^j)] \quad /4.2/$$

lub

$$\max_j Q_k^j = \max_j (Q_{1k}^j \cdot Q_{2k}^j) = \max_j [(1 - P_{1k}^j)(1 - P_{2k}^j)]. \quad /4.3./$$

Wyrażenie /4.2/ przedstawia najmniejszą wartość prawdopodobieństwa obrony obiektu ze względu na możliwe sposoby dzia-

łania przeciwnika przy ustalonym wariancie ugrupowania środków OPL, a wyrażenie /4.3/ największą wartość prawdopodobieństwa wykonania zadania przez przeciwnika.

Strona organizująca obronę przeciwlotniczą obiektu znając prawdopodobne sposoby działania przeciwnika, własne możliwości i inne czynniki, o których mowa w punkcie 1, powinna wybrać spośród wszystkich możliwych wariantów ugrupowania ten, dla którego wyrażenie /4.2/ przyjmie wartość największą, co w zapisie matematycznym możemy wyrazić:

$$V_1 = \max_k \min_j P_k^j = \max_k \min_j [1 - (1 - P_{1k}^j)(1 - P_{2k}^j)]. \quad /4.4/$$

Oznaczmy przez  $k'$  wariant ugrupowania środków OPL, przy którym wartość /4.4/ zostaje osiągnięta. Wtedy wyrażenie /4.4/ możemy zapisać:

$$V_1 = \max_k \min_j P_k^j = \min_j P_{k'}^j. \quad /4.5/$$

Z /4.5/ wynika, że dla wszystkich możliwych sposobów działania przeciwnika będzie:

$$V_1 \leq P_{k'}^j. \quad /4.6/$$

Oznacza to, że przyjmując wariant ugrupowania  $k'$ , zapewniamy sobie uzyskanie prawdopodobieństwa obrony obiektu równego co najmniej

$$V_1 = \min_j P_{k'}^j,$$

bez względu na sposób działania przeciwnika, ponieważ wartość prawdopodobieństwa  $V_1$  odnosi się do wariantu najbardziej dla nas niekorzystnego. W odniesieniu do innych sposobów działania przeciwnika prawdopodobieństwo to będzie odpowiednio większe,

co wynika bezpośrednio z nierówności /4.16/. Ale przyjmując wariant ugrupowania  $k'$  bierzemy pod uwagę tę okoliczność, że przeciwnik może prawidłowo ocenić wszystkie czynniki warunkujące jego decyzję i wybrać ten sposób działania, który zapewnia mu wykorzystanie słabych stron systemu obrony przeciwlotniczej obiektu, a jednocześnie daje możliwie dużą pewność zniszczenia /obezwładnienia/ obiektu. Można powiedzieć, że strona broniąca się wybierając wariant ugrupowania  $k'$  zakłada, że przeciwnik będzie działał w sposób przemyślany i dlatego zachowuje dużą ostrożność, tzn. liczy się z możliwością zastosowania przez przeciwnika najbardziej niekorzystnego dla niej sposobu działania.

Należy podkreślić, że jeśli przeciwnik posiada informacje dotyczące ilości i rodzaju sił i środków OPL wydzielonych do osłony obiektu oraz zna zasady ich użycia, to może zastosować taki sposób działania, przy którym prawdopodobieństwo obrony obiektu będzie równe co najwyżej

$$V_2 = \min_j \max_k P_k^j = \min_j \max_k [1 - (1 - P_{1k}^j)(1 - P_{2k}^j)]. \quad /4.7/$$

Wyrażenie /4.7/ stanowi górną wartość prawdopodobieństwa obrony obiektu, a wyrażenie /4.4/ jest wartością dolną tego prawdopodobieństwa<sup>x/</sup>.

Ze znaczenia obu tych wartości wynika oczywista nierówność:

$$\max_k \min_j P_k^j \leq \min_j \max_k P_k^j, \quad /4.8/$$

---

x/ Wartości prawdopodobieństw wyrażone wzorami /4.4/ i /4.7/, zgodnie z terminologią stosowaną w teorii gier, nazywają się odpowiednio *dolną* i *górną* *wartością* *gry*.

czyli

$$V_1 \leq V_2. \quad /4.9/$$

W konkretnej sytuacji może się zdarzyć, że  $V_1 = V_2$  lub  $V_1 < V_2$ . Rozróżnienie tych dwóch przypadków jest bardzo ważne. W pierwszym z nich, gdy  $V_1 = V_2$  sytuacja jest prosta; strona broniąca się, wybierając wariant ugrupowania  $k'$ , zapewnia sobie uzyskanie prawdopodobieństwa obrony obiektu równego co najmniej tej wspólnej wartości, zdając sobie jednocześnie sprawę z tego, że przeciwnik może zapobiec w uzyskaniu większej wartości niż  $V_1 = V_2$  przez zastosowanie najbardziej niekorzystnego dla nas wariantu działania. Wariant ten oznaczymy indeksem  $j'$ . Wspólna wartość

$$V_1 = V_2 \quad /4.10/$$

jest kompromisową wartością prawdopodobieństwa obrony obiektu i zgodnie z terminologią stosowaną w teorii gier nazywa się w a r t o ś c i ą g r y. Tak więc, jeśli  $V_1 = V_2$ , to strona organizująca obronę przeciwlotniczą posiada optymalny wariant ugrupowania  $k'$ , a przeciwnik - optymalny sposób działania  $j$ .

W teorii gier dowodzi się, że warunkiem koniecznym i wystarczającym na to, aby zachodziła równość /4.10/ jest istnienie punktu siodłowego macierzy

$$\left[ P_{k}^j \right] = \begin{bmatrix} P_1^1 & P_1^2 & \dots & P_1^W \\ P_2^1 & P_2^2 & \dots & P_2^W \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ P_u^1 & P_u^2 & \dots & P_u^W \end{bmatrix}, \quad /4.11/$$

A

tzn. istnienie pary rozwiązań  $/k', j'/$ , dla której  $P_k^j$  jest jednocześnie minimalną wartością swego wiersza i maksymalną wartością kolumny.

Przy założeniu, że przeciwnik zna ilość i rodzaj sił i środków OPL wydzielonych do osłony obiektu oraz potrafi ustalić ich położenie<sup>x/</sup>, możemy wyrażenia /4.1/, /4.4/, /4.7/, /4.10/ i /4.11/ uważać za ogólny model gry.

W celu określenia optymalnego wariantu ugrupowania  $k'$  oraz najkorzystniejszego sposobu działania przeciwnika  $j'$  należy w tym przypadku zbudować macierz /4.11/, która w zapisie rozwiniętym, tzn. z włączeniem macierzy /3.2/ i /3.3/ przyjmie postać /tabela 16/.

Mając tak zbudowaną macierz i korzystając z wzorów /2.7/ i /2.8/ możemy z łatwością określić zarówno maksymalną, jak i minimalną wartość prawdopodobieństwa. Wariant ugrupowania  $k$  spełniający warunek /4.4/ możemy w danym przypadku uważać za optymalny. Niekiedy wariantów takich może być kilka, np. dwa lub trzy. Wtedy spośród równoważnych sobie wariantów /z punktu widzenia prawdopodobieństwa  $P_k^j$ / wybieramy ten, który zapewnia lepsze warunki dowodzenia, manewru, maskowania, zaopatrywania oraz obrony przed bronią masowego rażenia. Należy dodać, że warianty, które nie odpowiadają podstawowym wymagom taktycznym nie powinny być umieszczane w tabeli 16.

Dla przeciwnika optymalnym sposobem działania jest ten, który spełnia warunek /4.7/.

Rozpatrzmy teraz drugi przypadek, wynikający z nierówności /4.9/, tzn. gdy

$$V_1 < V_2, \quad /4.12/$$

---

x/ Przy takim założeniu można przyjąć, że jest to gra o pełnej informacji.



zakładając jednocześnie, że środki wydzielone do obrony przeciwlotniczej obiektu pozwalają na zmianę co pewien czas ugrupowania bojowego /zmianę stanowisk ogniowych pododdziałów/, a więc posiadają możliwości manewrowe. Przypadek ten dotyczy szczególnie małokalibrowej artylerii przeciwlotniczej.

W tym przypadku strona organizująca obronę przeciwlotniczą może z reguły uzyskać większą wartość prawdopodobieństwa  $P_k^j$  niż

$$V_1 = \max_k \min_j P_k^j ,$$

jeśli będzie stosować nie jeden lecz kilka wariantów ugrupowania<sup>x/</sup>. Wynika to stąd, że przez stosowanie co pewien czas manewru /przejście pododdziałów na zapasowe SO/ oraz maskowania, stworzymy przeciwnikowi znaczne trudności w uzyskaniu aktualnych danych o systemie obrony przeciwlotniczej obiektu.

Posiadanie przez przeciwnika tylko częściowych danych lub zupełny ich brak, jest czynnikiem, który zawsze ujemnie wpływa na wybór przez niego optymalnego sposobu działania i prowadzi najczęściej do błędów, co jest korzystne dla nas.

W niektórych jednak przypadkach przeciwnik może prawidłowo ocenić skuteczność systemu obrony przeciwlotniczej obiektu, mimo posiadania niepełnych danych. Jednak szanse bezbłędnej oceny nie są wielkie.

Ale nawet w tym udanym przypadku prawdopodobieństwo wykonania zadania przez przeciwnika o wiele się nie zmieni

---

x/ Jest to zgodne z zasadniczym twierdzeniem teorii gier o sumie zero, które mówi, że strona broniąca się może zwiększyć swoją wygraną, stosując tzw. s t r a t e g i ę m i e - s z a n ą. Stosowanie kilku wariantów ugrupowania z określonymi częstościami stanowi właśnie s t r a t e g i ę m i e s z a n ą.

w porównaniu z prawdopodobieństwem, które co najwyżej może on osiągnąć w przypadku nie stosowania przez nas manewru.

Jeżeli ponadto uwzględnić fakt, że przez wykonanie w odpowiednim czasie manewru możemy uniknąć uderzeń mających na celu obezwładnienie sił i środków OPL, to stosowanie z określoną częstością kilku korzystnych wariantów ugrupowania jest celowe.

Dla określenia prawdopodobieństwa obrony obiektu, jakie strona broniąca się może osiągnąć w przypadku stosowania manewru, przyjmamy wprowadzone na wstępie oznaczenia:  $x_k$  i  $y_j$ .

W odniesieniu do wyraźnie niekorzystnych wariantów ugrupowania i sposobów działania przeciwnika częstości te będą równe zeru.

Sumy wszystkich częstości  $x_k$  i  $y_j$  są równe:

$$\sum_{k=1}^u x_k = 1 \quad \text{i} \quad \sum_{j=1}^w y_j = 1 \quad /4.13/$$

Wartość prawdopodobieństwa obrony obiektu, z uwzględnieniem możliwych wariantów ugrupowania i prawdopodobnych sposobów działania przeciwnika, będzie w tym przypadku równa:

$$P(x_k, y_j) = \sum_{k=1}^u \sum_{j=1}^w x_k y_j p_k^j \quad /4.14/$$

Dolną i górną wartość gry oraz częstości optymalne:

$x_k = x'_k$  i  $y_j = y'_j$  obliczamy z równań:

$$V'_1 = \max_x \min_y \sum_{k=1}^u \sum_{j=1}^w x_k y_j p_k^j \quad /4.15/$$

$$V'_2 = \min_y \max_x \sum_{k=1}^u \sum_{j=1}^w x_k y_j p_k^j \quad /4.16/$$

które określają odpowiednio dolną  $V_1'$  i górną  $V_2'$  wartość prawdopodobieństwa obrony obiektu /w przypadku stosowania manewru/.

Zaznaczyć należy, iż wartości  $V_1'$  i  $V_2'$  zawsze istnieją i są sobie równe, jeśli tylko ilość możliwych wariantów ugrupowania i sposobów działania przeciwnika jest skończona<sup>x/</sup>.

A więc

$$\begin{aligned}
 V_1' &= \max_x \min_y \sum_{k=1}^u \sum_{j=1}^w x_k y_j P_k^j = \\
 &= \min_y \max_x \sum_{k=1}^u \sum_{j=1}^w x_k y_j P_k^j = V_2' . \quad /4.17/
 \end{aligned}$$

Należy podkreślić, że wspólna wartość  $V_1' = V_2' = V'$  jest oszacowaniem kompromisu odnoszącego się do przypadku  $V_1 < V_2$ , którego nie dałoby się ustanowić stosując jeden wariant ugrupowania i przewidując tylko jeden sposób działania przeciwnika.

Tak więc strona broniąca się stosując kilka wariantów ugrupowania, np. dwa lub trzy z częstościami  $x_k'$  / $k=1,2,\dots,u$ / może być pewna, że prawdopodobieństwo obrony obiektu osiągnie wartość równą  $V'$ .

W teorii gier dowodzi się, że zawsze zachodzi nierówność

$$V_1 \leq V' . \quad /4.18/$$

co łącznie z możliwością uniknięcia skutków uderzeń z powietrza /uderzeń na SO pododdziałów ogniowych/ przemawia za celowością stosowania manewru.

---

x/ Jest to zgodne z zasadniczym twierdzeniem teorii gier, które mówi, że dla każdej gry macierzowej wartości  $\max_x \min_y E(X,Y)$  oraz  $\min_y \max_x E(X,Y)$ , gdzie  $X = (x_1, x_2, \dots, x_m)$  i  $Y = (y_1, y_2, \dots, y_n)$  istnieją i są sobie równe. Oznacza to, że każda gra macierzowa ma rozwiązanie.

Macierz /4.11/ oraz równania /4.15/ i /4.16/ stanowią dla rozpatrywanego przypadku ogólny model matematyczny.

W modelu tym wzięto pod uwagę to, że na skutek stosowania manewru i maskowania przeciwnik nie zawsze jest w stanie określić w momencie podejmowania decyzji położenie sił i środków OPL wydzielonych do osłony obiektu. Dlatego też wybrany przez niego sposób /wariant/ działania może nie być optymalny. To zaś stwarza możliwość uzyskania większego prawdopodobieństwa obrony obiektu niż  $V_1$ .

Przejdźmy teraz do naświetlenia zagadnienia uwzględniania w modelu kierunków zajścia przeciwnika na obiekt /kierunków nalotu/ oraz stopnia oddziaływania środków OPL bezpośredniego sąsiada.

Przy równomiernym rozkładzie pododdziałów na poszczególnych rubieżach w okół obiektu prawdopodobieństwo zadania przeciwnikowi strat jest w przybliżeniu na wszystkich kierunkach jednakowe. To zaś nie stanowi rozwiązania optymalnego, gdyż w rzeczywistości naloty z poszczególnych kierunków nie są jednakowo prawdopodobne. Uwarunkowane jest to szeregiem czynników, jakie przeciwnik uwzględnia przy wyborze kierunków nalotu.

Do czynników tych możemy zaliczyć:

- a/ położenie obiektu w stosunku do rejonu lotnisk;
- b/ stopień oddziaływania środków OPL na podejściach do obiektu ataku;
- c/ charakterystyczne punkty terenowe umożliwiające orientację i wyjście w rejon obiektu;
- d/ kształt obiektu, od którego między innymi zależy prawdopodobieństwo jego zniszczenia /obezwładnienia/;

e/ położenie celów zapasowych<sup>x/</sup> ;

f/ pora doby i warunki meteorologiczne.

Cheąc ustalić prawdopodobne kierunki nalotu przeciwnika na dany obiekt, trzeba dokładnie ocenić powyższe czynniki i określić w jakim stopniu każdy z nich wpływa na ich wybór. Na ogół nie da się pewnie ustalić, z których kierunków przeciwnik będzie atakował obiekt, a przez to trudno jest wykluczyć jakiś kierunek. Wynika stąd potrzeba tworzenia obrony okrężnej. Jednak prawdopodobieństwo zadania strat przeciwnikowi na każdym z kierunków nie musi być jednakowe, ponieważ prawdopodobieństwo wykonania zadania przez przeciwnika z reguły nie posiada tej własności. Zatem nasuwa się potrzeba zróżnicowania na poszczególnych kierunkach prawdopodobieństwa  $P_1$ , proporcjonalnie do  $Q$ .

Gdyby prawdopodobieństwo wykonania zadania przez przeciwnika  $/Q/$  było jednakowe przy nalocie z dowolnego kierunku, sytuacja byłaby prosta; równomierny rozkład pododdziałów byłby najbardziej właściwy. Jednak z reguły prawdopodobieństwo  $Q$  jest różne na różnych kierunkach. Wynika to stąd, że  $Q$  jest iloczynem prawdopodobieństw  $Q_1$  i  $Q_2$ , z których każde zależy od szeregu czynników załamujących się nieco inaczej na poszczególnych kierunkach. Na wartość prawdopodobieństwa  $Q_1$  wpływają takie czynniki, jak: trasa i profil lotu do rejonu celu, prędkość, skład i ugrupowanie środków napadu powietrznego, sposób ataku /bombardowania/ oraz stopień oddziaływania środków CPL na trasie lotu do obiektu ataku. Ten ostatni czynnik

---

x/ W instrukcjach zaleca się wybierać kierunek zajścia na cel zasadniczo w ten sposób, aby w każdej chwili można było wykonać uderzenie na cel zapasowy, nie wykonując przy tym zbyt skomplikowanych manewrów.

będzie się kształtował nieco inaczej na każdym z kierunków, gdyż możliwości oddziaływania środków OPL będą różne dla różnych tras lotu środków napadu powietrznego przeciwnika. Możliwości te zależą głównie od ilości, rodzaju i ugrupowania środków OPL, co dla każdego kierunku jest najczęściej różne.

Z powyższego wynika, że łączne prawdopodobieństwo przeniknięcia przez system OPL do obiektu ataku jest ogólnie rzecz biorąc funkcją odległości i kierunku podejścia do tego obiektu. Proces obliczania łącznego prawdopodobieństwa  $Q_1$  dla każdego z możliwych kierunków podejścia do obiektu, jest zagadnieniem stosunkowo trudnym. Wymaga on przede wszystkim przyjęcia konkretnego położenia środków OPL i założenia wariantów nalotu, aby na tej podstawie można było określić liczbę i rodzaj środków OPL włączanych kolejno do akcji oraz możliwości obniżenia przez nich prawdopodobieństwa  $Q_1$ . Zagadnienie jeszcze bardziej się komplikuje, gdy uwzględnić to, że przeciwnik w czasie lotu do obiektu ataku może wykonywać różne manewry /zmiana kursu, wysokości i prędkości/. Ponadto sam kierunek ataku /bombardowania/ nie koniecznie musi się pokrywać z kierunkiem podejścia do obiektu.

Również prawdopodobieństwo  $Q_2$  nie wykazuje cech stałości. Zależy ono od rodzaju i ilości środków, jakie przenikną przez system OPL, sposobu ich wyjścia w rejon obiektu /chodzi tu głównie o prędkość i wysokość, co warunkuje możliwości wykrycia celu/ i sposobu ataku /bombardowania/ oraz od charakterystyk obiektu jako celu i skuteczności środków rażenia.

Elementem ułatwiającym rozwiązanie powyższego zagadnienia jest to, że nie ma potrzeby obliczania prawdopodobieństwa przeniknięcia przez system OPL, licząc od wejścia przeciwnika w nasz system radiolokacyjnego wykrywania do rubieży rozpoczęcia ataku, gdyż na ugrupowanie środków OPL w osłonie obiektu

ma wpływ głównie bezpośredni sąsiad, z którym istnieje łączność ogniowa lub odległość do niego jest tak mała, że przeciwnik chcąc zaatakować obiekt z tego kierunku, musi najpierw przelatywać przez strefę ognia sąsiada. Za sąsiada można również uważać własne lotnictwo myśliwskie działające w strefie ognia lub w pobliżu tej strefy.

Chodzi o to, że przeciwnik dla zapewnienia sobie lepszych warunków wykonania zadania, do lotu do obiektu może wykonywać z innego kierunku niż kierunek ataku /bombardowania/, ale w tym przypadku jest on bardziej narażony na ataki własnego lotnictwa myśliwskiego, gdyż prawdopodobieństwo przechwycenia celu przez lotnictwo jest między innymi funkcją drogi. W tym znaczeniu można mówić o bezpośrednim wpływie działalności własnego lotnictwa myśliwskiego na ugrupowanie bojowe.

Jeśli mimo zwiększenia prawdopodobieństwa oddziaływania własnego lotnictwa /na skutek wydłużenia drogi/, prawdopodobieństwo wykonania zadania przez przeciwnika zwiększy się dzięki dodatniemu wpływowi innych czynników, to manewr, którego celem jest wybranie odpowiedniego kierunku ataku /bombardowania/ można uznać za korzystny dla przeciwnika.

Kierunek dolotu do rejonu celu z reguły nie będzie się pokrywał z kierunkiem ataku /bombardowania/ w przypadkach, gdy przeciwnik:

a/ zastosuje manewr przeciwrakietowy. W manewrze tym samoloty z chwilą przekroczenia prawdopodobnej rubieży postawienia zadań pododdziałom ogniowym mogą zmienić kurs, w granicach  $30^{\circ}$ - $60^{\circ}$ , omijając całkowicie strefy ognia tych pododdziałów, z których mogą być naprowadzane na nie rakiety. Wyjście na cel może być z innego kierunku i przez wykonanie energicznego skrętu w stronę strefy ognia. W wyniku tego manewru

- przeciwnik polepsza sobie możliwości przeniknięcia przez strefę ognia rakiet, a tym samym zwiększa prawdopodobieństwo wykonania zadania;
- b/ wykona manewr dla obejścia strefy ognia bezpośredniego sąsiada, którego środki OPL są ugrupowane na kierunku lotu do rejonu celu lub też dla zaatakowania obiektu z tych kierunków, na których nasycenie środków osłaniających obiekt jest małe. W instrukcjach zaleca się np. wybieranie trasy lotu w ten sposób, by lot do rejonu celu był wykonywany nad rejonami słabo nasyconymi środkami OPL. Do rejonów tych zalicza się między innymi tereny lesiste i bagniste, rejony nie zajęte przez wojska, oraz rejony, które były uprzednio obiektami uderzeń jądrowych;
- c/ będzie się starał uzyskać zaskoczenie przez wykonanie ataku /bombardowania/ od tyłu lub od zaciemnionej strony horyzontu, względnie od strony słońca /w warunkach dobrej pogody/ przy równoczesnym wykorzystaniu ukształtowania terenu dla maskowania lotu. Tego rodzaju taktykę stosują głównie samoloty myśliwsko-bombowe;
- d/ wykona dodatkowy manewr, w celu wybrania kierunku ataku /bombardowania/, przy którym prawdopodobieństwo zniszczenia /obezwładnienia/ obiektu jest możliwe największe. W instrukcjach np. podkreśla się, że atak na cele wąskie i długie /mosty, przeprawy, stacje kolejowe itp./ najcelowiej jest wykonywać pod kątem w granicach  $15^{\circ}$  -  $20^{\circ}$ . Przy atakowaniu celów o małych wymiarach, szczególnie z małych wysokości, wybór kierunku uzależniony jest możliwościami jego wykrycia. Dla ułatwienia wyjścia na mały i dobrze zamaskowany obiekt, kierunek nalotu zaleca się wybierać w ten sposób, by wyjście na cel było wykonane od strony dobrze widocznego obiektu orientacyjnego.

Podkreśla się jednocześnie, że przy atakowaniu celów powierzchniowych, prawdopodobieństwo rażenia praktycznie nie zależy od kierunku nalotu. W tym wypadku kierunek ataku /bombardowania/ jest uzależniony tylko od rozmieszczenia środków OPL;

e/ będzie stosował manewr przez zmianę kursu i wysokości lotu przed wejściem w strefę ognia, aby jak najbardziej utrudnić myśliwcom wykonanie ataku.

Z powyższego wynika, że jest wiele sytuacji, w których przeciwnik może zaatakować obiekt nie bezpośrednio z trasy, lecz po wykonaniu dodatkowego manewru przed wejściem w strefę ognia. Główny cel tego manewru polega na stworzeniu lepszych warunków przeniknięcia przez system obrony przeciwlotniczej obiektu i skuteczniejszym wykonaniu ataku /bombardowania/, co w rezultacie zwiększa wartość  $Q$ .

Należy jednak mieć na uwadze to, że dopóki przeciwnik wykonuje manewry, dopóty odwleka on termin wykonania podstawowego zadania bojowego, narażając się jednocześnie przez dłuższy czas na oddziaływanie środków OPL, szczególnie lotnictwa myśliwskiego. Dlatego na celowość stosowania manewru muszą w konkretnej sytuacji taktycznej wpłynąć czynniki zwiększające w ostatecznym rachunku prawdopodobieństwo wykonania zadania.

Organizując system obrony przeciwlotniczej obiektu, powinniśmy dążyć do ustalenia tych czynników oraz oszacowania wartości prawdopodobieństw  $Q_k^j$  przy atakach z poszczególnych kierunków.

W celu podania ogólnego sposobu określania prawdopodobieństwa wykonania zadania przez przeciwnika, z uwzględnieniem kierunków nalotu i stopnia oddziaływania środków OPL bezpośredniego sąsiada, wprowadźmy dodatkowo następujące oznaczenia:

$Q_{kh}^{j(\varphi)}$  - prawdopodobieństwo wykonania zadania przez przeciwnika przy działaniu z kierunku  $\varphi$  i h-tym wariancie ugrupowania środków OPL bezpośredniego sąsiada;

$Q_{1kh}^{j(\beta)}$  - prawdopodobieństwo przeniknięcia przez system obrony przeciwlotniczej przy działaniu z kierunku  $\varphi$  i h-tym wariancie ugrupowania środków OPL bezpośredniego sąsiada;

$Q_2^{j(\varphi)}$  - prawdopodobieństwo zniszczenia /obezwładnienia/ obiektu przy działaniu z kierunku  $\varphi$ ;

Przy powyższych oznaczeniach wartość  $Q_{kh}^{j(\beta)}$  wyrazi się wzorem:

$$Q_{kh}^{j(\varphi)} = Q_{1kh}^{j(\varphi)} \cdot Q_2^{j(\varphi)} \quad /4.19/$$

Pierwszy czynnik po prawej stronie wzoru /4.19/ równy jest iloczynowi dwóch prawdopodobieństw, a mianowicie:

a/ prawdopodobieństwa przeniknięcia przez strefę ognia bezpośredniego sąsiada  $/Q_{1h}^{j(\varphi)}/$ ;

b/ prawdopodobieństwu przeniknięcia przez strefę ognia środków OPL wydzielonych do obrony przeciwlotniczej obiektu  $/Q_{1k}^{j(\varphi)}/$ .

Dla równomiernego rozkładu pododdziałów prawdopodobieństwo  $Q_{1k}^{j(\varphi)}$  będzie w przybliżeniu jednakowe na wszystkich kierunkach.

Tak więc wartość  $Q_{1kh}^{j(\varphi)}$  wyrazi się wzorem:

$$Q_{1kh}^{j(\varphi)} = Q_{1h}^{j(\varphi)} \cdot Q_{1k}^{j(\varphi)}, \quad /4.20/$$

gdzie prawdopodobieństwo  $Q_{1k}^{j(\varphi)}$  oblicza się przy założeniu, że siły i środki biorące udział w nalocie przenikną przez strefę ognia bezpośredniego sąsiada.

Do obliczenia pierwszego czynnika występującego po prawej stronie wzoru /4.20/ konieczna jest znajomość położenia

i możliwości środków OPL sąsiada. Na podstawie tych danych można już łatwo obliczyć  $Q_{1h}^{J(\varphi)}$ . W przypadku rakiet i artylerii przeciwlotniczej obliczenia wykonujemy sposobami podanymi w punkcie 2.

Cheąc ponadto uwzględnić prawdopodobieństwo zadania przeciwnikowi strat przez własne lotnictwo myśliwskie za czas dodatkowego manewru, w celu zaatakowania obiektu z innego kierunku niż kierunek wyznaczający najkrótszą trasę lotu, należy najpierw określić drogą, jaką przeciwnik musi dodatkowo przebyć w czasie tego manewru oraz prawdopodobieństwo jego przechwycenia na tej drodze. Mając powyższe dane oraz zakładając ilość samolotów myśliwskich mogących wziąć udział w odparciu nalotu na obiekt, można w przybliżeniu określić szukaną wartość prawdopodobieństwa.

Jest rzeczą oczywistą, że obliczenia te mają sens tylko dla znacznych odcinków drogi oraz dla wysokości, na których własne lotnictwo myśliwskie może skutecznie zwalczać cele powietrzne.

Praktycznie oznacza to, iż przy określaniu ugrupowania małokalibrowej artylerii przeciwlotniczej zwalczającej cele głównie na małych wysokościach, zagadnienie to można pominąć. Przy określaniu ugrupowania rakiet przeciwlotniczych należy je uwzględniać.

Drugi czynnik występujący we wzorze /4.19/, mianowicie  $Q_2^{J(\varphi)}$  jest również iloczynem dwóch prawdopodobieństw:

- a/ prawdopodobieństwa wyjścia celu nad obiekt lub punkt orientacyjny  $/Q_{2\beta}^{J(\varphi)}/$ ;
- b/ prawdopodobieństwa zniszczenia /obezwładnienia/ obiektu  $/Q_{2\delta}^{J(\varphi)}/$ .

Zatem  $Q_2^{j(\varphi)}$  wyrazi się wzorem:

$$Q_2^{j(\varphi)} = Q_{2\beta}^{j(\varphi)} \cdot Q_{2\delta}^{j(\varphi)}. \quad /4.21/$$

Pierwszy z czynników tego iloczynu zależy przede wszystkim od: prędkości i wysokości lotu samolotów, charakteru obiektu, terenu, urządzeń optycznych i radiolokacyjnych znajdujących się na samolotach oraz od stopnia wyszkolenia obsługi samolotu. Dla współczesnych samolotów wartość  $Q_{2\beta}^{j(\varphi)}$  może się wahać w granicach od 0,6 do 0,9.

Drugi czynnik występujący we wzorze /4.21/, mianowicie  $Q_{2\delta}^{j(\varphi)}$  w odniesieniu do dużych obiektów lub zbliżonych swym kształtem do koła można przyjąć za stały, tzn. dla tego rodzaju obiektów prawdopodobieństwo rażenia praktycznie nie zależy od kierunku ataku /bombardowania/. W odniesieniu do obiektów wąskich i długich /np. mosty, stacje kolejowe/ prawdopodobieństwo rażenia zmienia się wraz ze zmianą kierunku ataku /bombardowania/.

Na podstawie przeprowadzonej analizy można stwierdzić, że obliczenie prawdopodobieństwa wykonania zadania  $Q_{kh}^{j(\varphi)}$  jest dość złożone i kłopotliwe. Z pewnością w wielu przypadkach przyjdzie się z konieczności zadowolić jedynie przybliżonymi danymi.

Tak więc uwzględnienie w modelu kierunków nalotu oraz stopnia oddziaływania sił i środków OPL bezpośredniego sąsiada poszerza znacznie macierz /4.11/ oraz komplikuje proces obliczeniowy. Nie zmienia natomiast istoty samego modelu.

Dotychczas sformułowany został model matematyczny ugrupowania sił i środków OPL w osłonie jednego obiektu. Obecnie przejdziemy do jego uogólnienia na N obiektów, różniących się między sobą ważnością.

Zgodnie z uwagami podanymi w punkcie 2, za kryterium efektywności w uogólnionym modelu przyjmujemy wyrażenie /2.19/, tzn.:

$$P_N = \sum_{c=1}^N a_c P_c,$$

gdzie liczby  $a_c$  powinny spełniać warunek /2.20/, tj.

$$\sum_{c=1}^N a_c = 1.$$

Macierz gry dla tego kryterium ma postać tabeli 17.

Mając tak zbudowaną macierz możemy z łatwością określić dolną wartość gry:

$$V_1 = \max_k \min_i P_{Nk}^j = \max_k \min_j \sum_{c=1}^N a_c P_{ck}^j, \quad /4.22/$$

jak i górną wartość gry, tzn.:

$$V_2 = \min_j \max_k P_{Nk}^j = \min_j \max_k \sum_{c=1}^N a_c P_{ck}^j. \quad /4.23/$$

Wariant ugrupowania spełniający warunek /4.22/ możemy w danym przypadku uważać za optymalny. Wariantów takich może być niekiedy kilka, np. dwa lub trzy. Wtedy, spośród równoważnych sobie wariantów z punktu widzenia prawdopodobieństwa obrony zespołu obiektów  $/P_{Nk}^j/$ , wybieramy ten, który zapewnia lepsze warunki dowodzenia, manewru, zaopatrywania, maskowania oraz obrony przed bronią masowego rażenia. Należy dodać, że warianty, które nie odpowiadają powyższym wymogom, nie powinny być uwzględniane w tabeli 17; są to warianty wyraźnie niekorzystne.

Dla przeciwnika optymalnym sposobem działania  $/j'/$  jest ten, który spełnia warunek /4.23/.

UOGÓLNIONY MODEL GRY

Tabela 17

Warianty ugrupowania $k$	$j = 1$		$j = 2$		$\dots$	$j = w$		$\min_j \sum_{c=1}^N a_{cck}^{pj}$	$\sum_{c=1}^N a_{cck}^{pw}$	$\min_j \sum_{c=1}^N a_{cck}^{pj}$
	$c=1$	$c=N$	$c=1$	$c=N$		$c=1$	$c=N$			
$k = 1$	$a_{111}^1$	$a_{N11}^1$	$a_{111}^2$	$a_{N11}^2$	$\dots$	$a_{111}^w$	$a_{N11}^w$	$\min_j \sum_{c=1}^N a_{cck}^{pj}$	$\sum_{c=1}^N a_{cck}^{pw}$	$\min_j \sum_{c=1}^N a_{cck}^{pj}$
$k = 2$	$a_{112}^1$	$a_{N12}^1$	$a_{112}^2$	$a_{N12}^2$	$\dots$	$a_{112}^w$	$a_{N12}^w$	$\min_j \sum_{c=1}^N a_{cck}^{pj}$	$\sum_{c=1}^N a_{cck}^{pw}$	$\min_j \sum_{c=1}^N a_{cck}^{pj}$
$\dots$	$\dots$	$\dots$	$\dots$	$\dots$	$\dots$	$\dots$	$\dots$	$\dots$	$\dots$	$\dots$
$k = u$	$a_{11u}^1$	$a_{N1u}^1$	$a_{11u}^2$	$a_{N1u}^2$	$\dots$	$a_{11u}^w$	$a_{N1u}^w$	$\min_j \sum_{c=1}^N a_{cck}^{pj}$	$\sum_{c=1}^N a_{cck}^{pw}$	$\min_j \sum_{c=1}^N a_{cck}^{pj}$
$\max_k \sum_{c=1}^N a_{cck}^{pj}$	$\max_j \sum_{c=1}^N a_{cck}^1$		$\max_j \sum_{c=1}^N a_{cck}^2$		$\dots$	$\max_j \sum_{c=1}^N a_{cck}^w$		$\max_j \sum_{c=1}^N a_{cck}^{pw}$	$\max_j \sum_{c=1}^N a_{cck}^{pw}$	-

Z tabeli 17 wynika, że istotną różnicą w porównaniu do obrony jednego obiektu jest większa różnorodność sposobów /wariantów/ działania przeciwnika oraz uwzględniona jest ważność poszczególnych obiektów.

Komplikuje to znacznie proces obliczeniowy, ale model matematycznego ugrupowania sił i środków OPL w osłonie zespołu obiektów jest w istocie taki sam, jak w przypadku osłony jednego obiektu.

Z powyższego można wyciągnąć następujące wnioski:

- a/ W przypadku, gdy macierz /tab.16 lub 17/ posiada punkt siodłowy, tzn. istnieje para rozwiązań  $/k', j'/$ , dla której  $P_{k'}^j$  jest jednocześnie minimalną wartością swego wiersza i maksymalną wartością kolumny, wtedy optymalnym wariantem ugrupowania sił i środków OPL jest  $k'$ . Stosowanie manewru nie wpływa na zwiększenie prawdopodobieństwa obrony obiektu /zespołu obiektów/.
- b/ Gdy macierz gry nie ma punktu siodłowego, to w myśl nierówności /4.18/, można z reguły osiągnąć nieco większą wartość prawdopodobieństwa obrony obiektu niż  $V_1$ , jeśli zostanie zastosowany manewr oraz przestrzegane będą zasady maskowania. Jeżeli w tym przypadku manewru nie planujemy, tzn. decydujemy się tylko na jeden wariant ugrupowania, to najcelowiej jest stosować wariant ugrupowania spełniający warunek /4.5/ lub /4.22/.
- c/ Jeżeli różnica  $V_2 - V_1$  /zwana rozwartością gry/ jest bardzo mała /np. mniejsza od 0,01/, to nie jest celowe stosowanie manewru, ponieważ wartość prawdopodobieństwa obrony obiektu /zespołów obiektów/ zwiększa się nieznacznie. Wariant ugrupowania spełniający warunek /4.5/ lub /4.22/ oraz podstawowe wymogi taktyczne można uważać jako optymalny.

## 5. METODY ROZWIĄZANIA MODELU

Poniżej przedstawimy dwie metody rozwiązywania gry macierzowej, które w odniesieniu do rozpatrywanego problemu wydają się być najbardziej odpowiednie, tzn. za ich pomocą można stosunkowo łatwo obliczyć częstości optymalne  $x'_i$  oraz  $y'_j$ .

Pierwszym i najważniejszym krokiem przy wyznaczaniu optymalnego rozwiązania jest zbudowanie w oparciu o odpowiedni algorytm<sup>x/</sup> macierzy gry /tab.16 lub 17/.

Mając zbudowaną macierz bezpośrednio z niej określamy dolną wartość prawdopodobieństwa obrony obiektu /zespołu obiektów/, czyli dolną wartość gry  $V_1$  oraz górną wartość tego prawdopodobieństwa /górną wartość gry  $V_2$ /.

Jeżeli  $V_1 = V_2 = V$ , sytuacja jest prosta, bowiem wariant ugrupowania odpowiadający tej wspólnej wartości  $V$  oraz spełniający podstawowe wymogi taktyczne można uważać jako optymalny.

Jeżeli natomiast  $V_1 < V_2$ , to dla znacznych  $j$   $/j \geq 3/$  i  $k$   $/k \geq 3/$  rozwiązanie gry nie jest zbyt proste i wymaga zastosowania pewnych metod matematycznych.

Mówiąc o rozwiązaniu gry mamy oczywiście na myśli wyznaczenie częstości  $x'_k$   $/k = 1, 2, \dots, n/$  i  $y'_j$   $/j = 1, 2, \dots, w/$ , z jakimi należy stosować poszczególne warianty ugrupowania bojowego dla uzyskania prawdopodobieństwa obrony obiektu /zespołu obiektów/, równego  $V'_1 = V'_2 = V'$ .

Jedną z metod, która w odniesieniu do rozpatrywanego problemu wydaje się być najbardziej odpowiednia, sprowadza się do wykonania kilku operacji na macierzy /4.11/, którą w skrócie oznaczymy literą A.

---

x/ Przykład takiego algorytmu podany jest w załączniku 5.

Wstępną operacją jest odrzucenie wariantów ugrupowania wyraźnie niekorzystnych, które oznaczymy symbolem  $k^*$ . W taki sam sposób postępujemy z wariantami działania przeciwnika, tzn. wyraźnie niekorzystne warianty działania  $/j^*/$  mamy prawo pominąć, gdyż częstości ich stosowania będą równe zeru.

Zatem dowolny wariant ugrupowania spełniający nierówność

$$P_{k^*}^j \leq P_k^j \quad /5.1/$$

dla  $k \neq k^*$  i dla każdego  $j /j = 1, 2, \dots, w/$  może być wyłączony ze zbioru wariantów korzystnych, gdyż częstość, z jaką będzie on stosowany jest równa zeru.

Analogicznie dowolny wariant działania przeciwnika spełniający nierówność

$$P_k^j \leq P_k^{j^*} \quad /5.2/$$

dla  $j \neq j^*$  i dla każdego  $k /k = 1, 2, \dots, u/$  możemy uznać za wyraźnie niekorzystny dla przeciwnika.

Po tej operacji macierz /4.11/ zredukuje się do  $u^*$  wierszy i  $w^*$  kolumn, gdzie  $u^*$  - liczba korzystnych wariantów ugrupowania, a  $w^*$  - liczba korzystnych /niepodporządkowanych/ wariantów działania przeciwnika.

Wartość gry w tym przypadku będzie równa:

$$V_1 = \max_x \min_y \sum_{k=1}^{u^*} \sum_{j=1}^{w^*} x_k y_j P_k^j = \min_y \max_x \sum_{k=1}^{u^*} \sum_{j=1}^{w^*} x_k y_j P_k^j = V_2.$$

Następnie wypisujemy kolejno wszystkie podmacierze kwadratowe stopnia

$$d = \min(u^*, w^*). \quad /5.3/$$

macierzy  $A$  i dla każdej z nich obliczamy  $x_k, y_j$  oraz  $V'$ , korzystając ze wzorów<sup>x/</sup>

x/ Dowody wzorów /5.4/-/5.6/ można znaleźć np. w książce McKinsey: "Wprowadzenie w teorię igr" /tłum. z j.angielskiego/, wyd. 1960 r. Moskwa. [4]

$$v' = \frac{|B|}{I_d(\text{adj } B)I_d'} \quad /5.4/$$

$$x_k = \frac{I_d \text{ adj } B}{I_d(\text{adj } B)I_d'} \quad /5.5/$$

$$y_j = \frac{I_d(\text{adj } B)'}{I_d(\text{adj } B)I_d'} \quad /5.6/$$

przy założeniu, że  $I_d(\text{adj } B)I_d' \neq 0$ .

We wzorach /5.4/ - /5.6/ poszczególne symbole oznaczają:

B - macierz kwadratowa stopnia d, utworzona z macierzy A.

Jeżeli A jest macierzą kwadratową, tzn.  $u^* = w^*$ ,

wtedy  $B = A$ ;

|B| - wyznacznik macierzy B;

adj B - macierz dołączona, która w rozwiniętym zapisie przyj-  
mie postać:

$$\text{adj } B = \begin{bmatrix} B_{11} & B_{12} & \dots & B_{d1} \\ B_{21} & B_{22} & \dots & B_{d2} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ B_{1d} & B_{2d} & \dots & B_{dd} \end{bmatrix}, \quad /5.7/$$

gdzie  $B_{kj}$  - algebraiczne dopełnienie elementów  $P_{kj}^j$   
macierzy B, a wskaźnik d jest równy  $\min(u^*, w^*)$ ;

$I_d$  - wektor wierszowy, tj. macierz postaci  $I_d = /1 \ 1 \ \dots \ 1/$ ,  
gdzie ilość kolumn jest równa d;

$I_d'$  - macierz transportowa macierzy  $I_d$ , tj.

$$I_d' = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ \vdots \\ 1 \end{bmatrix};$$

$(\text{adj } B)'$  - macierz transponowana macierzy dołączonej  $\text{adj } B$ ,  
tzn.:

$$(\text{adj } B)' = \begin{bmatrix} B_{11} & B_{12} & \dots & B_{1d} \\ B_{21} & B_{22} & \dots & B_{2d} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ B_{d1} & B_{d2} & \dots & B_{dd} \end{bmatrix} . \quad /5.8/$$

Po obliczeniu  $x_k$ ,  $y_j$  oraz  $V'$  dla wszystkich podmacierzy  $B$  stopnia  $d$  utworzonych z macierzy  $A$ , wybieramy następnie rozwiązanie spełniające nierówność:

$$P(k, y_j') \leq V' \leq P(x_k', j) , \quad /5.9/$$

gdzie  $x_k'$  i  $y_j'$  są częstościami optymalnymi. Oczywiście, muszą one być wartościami nieujemnymi oraz spełniać równania:

$$\sum_{k=1}^{u^*} x_k' = 1 \quad \text{i} \quad \sum_{j=1}^{w^*} y_j' = 1 , \quad /5.10/$$

Dla objaśnienia metody rozwiążemy przykład liczbowy.

Niech będzie dana macierz  $A$ , która po wyeliminowaniu wyraźnie niekorzystnych sposobów działania przeciwnika oraz wariantów ugrupowania sił i środków OPL, ma postać:

		Prawdopodobne sposoby działania przeciwnika			$\min_j P_k^j$
		$j = 1$	$j = 2$	$j = 3$	
Możliwe warianty ugrupowania	$k = 1$	0,72	0,61	0,33	0,33
	$k = 2$	0,51	0,63	0,58	0,51
	$k = 3$	0,71	0,57	0,71	<u>0,57</u>
$\max_k P_k^j$		0,72	<u>0,63</u>	0,71	-

Dolna wartość prawdopodobieństwa obrony obiektu /dolna wartość gry/ wynosi  $V_1 = 0,57$ , zaś wartość górna  $V_2 = 0,63$ . Stąd różnica  $V_2 - V_1 = 0,63 - 0,57 = 0,06$ : Częstości  $x'_k$  i  $y'_j$  oraz wartość gry  $V'$  obliczamy następująco:

W celu łatwiejszego liczenia mnożymy każdy element macierzy /5.11/ przez liczbę 100 i odejmujemy od wszystkich elementów liczbę 33 /jest to najmniejszy element danej macierzy/. Po tej operacji macierz /5.11/ przyjmie postać

$k \backslash j$	$j=1$	$j=2$	$j=3$
$k=1$	39	28	0
$k=2$	18	30	25
$k=3$	38	24	38

/5.12/

Ponieważ liczba wierszy równa jest liczbie kolumn, zatem  $A = B$ . Obliczamy wyznacznik macierzy B:

$$|B| = \begin{vmatrix} 39 & 28 & 0 \\ 18 & 30 & 25 \\ 38 & 24 & 38 \end{vmatrix} . \quad /5.13/$$

Korzystając z własności wyznaczników, dążymy do uzyskania możliwie dużej ilości zer w wyznaczniku /5.13/.

W tym celu od pierwszej kolumny odejmujemy kolumnę trzecią:

$$|B| = \begin{vmatrix} 39 & 28 & 0 \\ -7 & 30 & 25 \\ 0 & 24 & 38 \end{vmatrix} .$$

Od drugiego wiersza odejmujemy wiersz trzeci:

$$|B| = \begin{vmatrix} 39 & 28 & 0 \\ -7 & 6 & -13 \\ 0 & 24 & 38 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 39 & -11 & 0 \\ -7 & 13 & -13 \\ 0 & 24 & 38 \end{vmatrix}$$

Od kolumny drugiej odejmujemy pierwszą:

$$|B| = \begin{vmatrix} 39 & 28 & 0 \\ -7 & 6 & -13 \\ 0 & 24 & 38 \end{vmatrix}.$$

Do drugiej kolumny dodajemy trzecią:

$$|B| = \begin{vmatrix} 39 & -11 & 0 \\ -7 & 0 & -13 \\ 0 & 62 & 38 \end{vmatrix} = -62 \cdot (-13) \cdot 39 - 38(-7)(-11) =$$

$$= 31438 - 2926 = 28508.$$

Następnie obliczamy macierz dołączoną  $\text{adj } B$ .

W tym celu transponujemy macierz  $B$ :

$$B' = \begin{vmatrix} 39 & 18 & 38 \\ 28 & 30 & 24 \\ 0 & 25 & 38 \end{vmatrix}$$

oraz tworzymy macierz dopełnień algebraicznych macierzy transponowanej  $B'$ :

$$\text{adj } B = \begin{bmatrix} (-1)^{1+1} \begin{vmatrix} 30 & 24 \\ 25 & 38 \end{vmatrix} & (-1)^{1+2} \begin{vmatrix} 28 & 24 \\ 0 & 38 \end{vmatrix} & (-1)^{1+3} \begin{vmatrix} 28 & 30 \\ 0 & 25 \end{vmatrix} \\ (-1)^{2+1} \begin{vmatrix} 18 & 38 \\ 25 & 38 \end{vmatrix} & (-1)^{2+2} \begin{vmatrix} 39 & 38 \\ 0 & 38 \end{vmatrix} & (-1)^{2+3} \begin{vmatrix} 39 & 18 \\ 0 & 25 \end{vmatrix} \\ (-1)^{3+1} \begin{vmatrix} 18 & 38 \\ 30 & 24 \end{vmatrix} & (-1)^{3+2} \begin{vmatrix} 39 & 38 \\ 28 & 24 \end{vmatrix} & (-1)^{3+3} \begin{vmatrix} 39 & 18 \\ 28 & 30 \end{vmatrix} \end{bmatrix} =$$

$$= \begin{bmatrix} 540 & -1064 & 700 \\ 266 & 1482 & -975 \\ -708 & 128 & 666 \end{bmatrix} .$$

Mnożymy macierz adj B przez wektor wierszowy:

$$I_3 = [1 \ 1 \ 1] .$$

$$I_3 \text{ adj B} = [1 \ 1 \ 1] \cdot \begin{bmatrix} 540 & -1064 & 700 \\ 266 & 1482 & -975 \\ -708 & 128 & 666 \end{bmatrix} =$$
$$= [98 \ 546 \ 391] .$$

Mnożymy następnie macierz  $I_3 \text{ adj B}$  przez wektor kolumnowy:

$$I_3' = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} :$$

$$I_3(\text{adj B})I_3' = [98 \ 546 \ 391] \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} = [98 + 546 + 391] = [1035] .$$

Po tych operacjach możemy już przystąpić do obliczenia  $V'$  i  $x_k'$ , korzystając ze wzorów /5.4/ i /5.5/:

$$V' = \frac{|B|}{I_3(\text{adj B})I_3'} = \frac{28508}{1035} = 27,64 .$$

Po dodaniu liczby 33 /o tę wartość zmniejszono bowiem wszystkie elementy macierzy A/, będzie:

$$V' = 27,64 + 33 = 60,64 \% .$$

$$x'_k = \frac{I_3 \text{ adj } B}{I_3 (\text{adj } B) I_3} = \frac{[98 \ 546 \ 391]}{[1035]} =$$

$$= \left[ \frac{98}{1035} \cdot \frac{546}{1035} \cdot \frac{391}{1035} \right] \approx [0,1 \ 0,5 \ 0,4] .$$

W celu obliczenia częstości  $y'_j$ , transponujemy macierz  $\text{adj } B$ , a więc

$$(\text{adj } B)' = \begin{bmatrix} 540 & 266 & -708 \\ -1064 & 1482 & 128 \\ 700 & -975 & 666 \end{bmatrix} .$$

Macierz  $(\text{adj } B)'$  mnożymy następnie przez wektor wierszowy  $I_3 = [1 \ 1 \ 1]$  :

$$I_3 (\text{adj } B)' = [1 \ 1 \ 1] \begin{bmatrix} 540 & 266 & -708 \\ -1064 & 1482 & 128 \\ 700 & -975 & 666 \end{bmatrix} =$$

$$= [176 \ 773 \ 86] .$$

Korzystając ze wzoru /5.6/, mamy :

$$y'_j = \frac{I_3 (\text{adj } B)'}{I_3 (\text{adj } B) I_3} = \frac{[176 \ 773 \ 86]}{[1035]} =$$

$$= \left[ \frac{176}{1035} \quad \frac{773}{1035} \quad \frac{86}{1035} \right] = [0,16 \ 0,76 \ 0,08] .$$

Z powyższych obliczeń wynika, że jeśli nie stosujemy manewru, to najkorzystniejszym wariantem ugrupowania jest wariant  $k = 3$ , ponieważ gwarantuje prawdopodobieństwo obrony obiektu równe co najmniej 0,57, niezależnie od wyboru przez przeciwnika sposobu działania /widać to bezpośrednio w macierzy wyjściowej/; żaden inny wariant nie zapewnia nam tak

wysokiego prawdopodobieństwa obrony obiektu. Możemy jednak uzyskać nieco większą wartość prawdopodobieństwa /o 3,64 %/, jeśli przyjmiemy koncepcję stosowania manewru. Częstości, z jakimi należy stosować poszczególne warianty ugrupowania są następujące:

$k = 1$	-	0,1 ;
$k = 2$	-	0,5 ;
$k = 3$	-	0,4 .

Dla przeciwnika, gdy strona broniąca się nie stosuje manewru, optymalnym sposobem działania jest  $j = 2$ , a w przypadku manewru - stosowanie wszystkich trzech sposobów, z częstościami:

$j = 1$	-	0,16 ;
$j = 2$	-	0,76 ;
$j = 3$	-	0,08 .

Wówczas prawdopodobieństwo wykonania zadania wyniesie 39,36 %.

Opisana wyżej metoda rozwiązywania gry może być stosowana wtedy, gdy macierz kwadratowa  $B$  stopnia  $\min /u, w /$ , utworzona z macierzy  $A$  jest nieosobliwa, tzn. jej wyznacznik jest różny od zera.

Jeżeli warunek ten nie jest spełniony, wtedy dla znalezienia rozwiązania można zastosować następującą metodę.

Proces rozwiązywania gry według tej metody dzielimy na dwa etapy. W pierwszym etapie, podobnie jak uprzednio, redukujemy macierz  $A$ , eliminując niektóre wiersze i kolumny /odpowiadające wariantom wyraźnie niekorzystnym/ i przekształcamy ją tak, że jej elementy mają postać /np. bez wartości ułamkowych/, którą łatwiej jest operować; wreszcie bada się ją na istnienie punktu siodłowego.

Gdy istnieje punkt siodłowy, nie ma nic więcej do zrobienia; rozwiązanie zostało znalezione. W przeciwnym razie, czyli zazwyczaj, trzeba przejść do drugiego etapu. Tutaj rzecz polega na uzyskaniu optymalnych częstości  $x_k$  i  $y_j$  oraz odpowiadającego tym częstościom prawdopodobieństwa  $V'$ . W tym celu należy rozwiązać układ nierówności /wypisany na podstawie już zredukowanej macierzy A/ postaci:

$$\begin{aligned} P_1^1 x_1 + P_2^1 x_2 + P_3^1 x_3 + \dots + P_u^1 x_u &\geq V', \\ P_1^2 x_1 + P_2^2 x_2 + P_3^2 x_3 + \dots + P_u^2 x_u &\geq V', \\ P_1^3 x_1 + P_2^3 x_2 + P_3^3 x_3 + \dots + P_u^3 x_u &\geq V', \\ \dots & \\ P_1^W x_1 + P_2^W x_2 + P_3^W x_3 + \dots + P_u^W x_u &\geq V', \\ P_1^1 y_1 + P_1^2 y_2 + P_1^3 y_3 + \dots + P_1^W y_W &\leq V', \\ P_2^1 y_1 + P_2^2 y_2 + P_2^3 y_3 + \dots + P_2^W y_W &\leq V', \\ P_3^1 y_1 + P_3^2 y_2 + P_3^3 y_3 + \dots + P_3^W y_W &\leq V', \\ \dots & \\ P_u^1 y_1 + P_u^2 y_2 + P_u^3 y_3 + \dots + P_u^W y_W &\leq V', \\ x_1 + x_2 + x_3 + \dots + x_u &= 1, \\ y_1 + y_2 + y_3 + \dots + y_W &= 1. \end{aligned} \tag{5.14}$$

W powyższym układzie nierówności istnieje również to ograniczenie, że żadna wartość  $x_k$  i  $y_j$  nie może być ujemna, a więc

$$0 \leq x_k \leq 1 \quad 1 \quad 0 \leq y_j \leq 1.$$

Dla  $k \leq 3$  i  $j \leq 3$  rozwiązanie układu nierówności jest zadaniem dość prostym; możemy je otrzymać w oparciu nawet o metodę graficzną, stosowaną w programowaniu liniowym.

Dla większych  $k$  oraz  $j$  uzyskanie rozwiązania jest zadaniem dość trudnym. Wtedy zachodzi potrzeba zastosowania, znanej w programowaniu liniowym, metody simpleks, bądź też bardziej uproszczonej metody, którą objaśnimy na przykładzie /dla  $k = j = 3$ /. Dla większych  $k$  i  $j$  wystąpi tylko więcej zmiennych i więcej zależności między nimi, natomiast metoda postępowania jest taka sama.

Pierwszym krokiem jest wypisanie na podstawie już zredukowanej macierzy  $A$ , układu nierówności:

$$P_1^1 x_1 + P_2^1 x_2 + P_3^1 x_3 \geq V'$$

$$P_1^2 x_2 + P_2^2 x_2 + P_3^2 x_3 \geq V'$$

$$P_1^3 x_3 + P_2^3 x_3 + P_3^3 x_3 \geq V' \quad /5.15/$$

$$x_1 + x_2 + x_3 = 1 ,$$

$$P_1^1 y_1 + P_1^2 y_2 + P_1^3 y_3 \leq V'$$

$$P_2^1 y_1 + P_2^2 y_2 + P_2^3 y_3 \leq V'$$

$$P_3^1 y_1 + P_3^2 y_2 + P_3^3 y_3 \leq V'$$

$$y_1 + y_2 + y_3 = 1 .$$

Widzimy, że siedem niewiadomych  $/x_1, x_2, x_3, y_1, y_2, y_3, V'$  muszą spełniać osiem zależności /warunków/. Ponadto istnieje to ograniczenie, że żadna wielkość  $x$  i  $y$  nie może być ujemna.

Sytuacja jest więc tego rodzaju, że istnieje więcej zależności niż zmiennych i że wśród tych zależności występują głównie nierówności, co komplikuje rozwiązanie.

Istota tej metody polega na przeanalizowaniu całego zbioru zależności /5.15/; na tej podstawie rozwiązuje się niektóre z tych zależności jako równania, a następnie zestawia się otrzymany wynik z pozostałymi zależnościami traktowanymi jako nierówności. A oto praktyczna metoda postępowania.

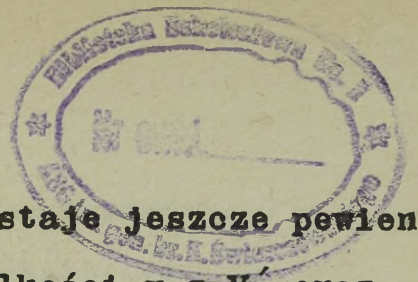
Piszemy najpierw wszystkie osiem zależności jako równości. Rozwiązujemy którekolwiek siedem spośród nich, następnie sprawdzamy, czy otrzymane wartości  $x$  i  $y$  są nieujemne i czy spełnione jest także ósme równanie. Jeżeli tak - otrzymaliśmy rozwiązanie. Jeżeli nie, to odrzucamy uzyskane wyniki i próbujemy innego sposobu. Piszemy mianowicie jakąś wybraną zależność w postaci ścisłej nierówności, a pozostałych siedem jako równości. Jeżeli ścisła nierówność jest jedną z zależności obejmujących szukane wielkości  $x$ , np.

$$P_1^2 x_1 + P_2^2 x_2 + P_3^2 x_3 > V'.$$

to odpowiadająca tej nierówności wielkość  $y$  /w. danym przypadku  $y_2$ / równa się zeru, co oznacza, że sposób /wariant/ działania  $j = 2$  jest dla przeciwnika wyraźnie niekorzystny i wobec tego nie powinien on go stosować jako swojego optimum. Podobnie jest dla zależności między wielkościami  $y$ . Jeżeli np.

$$P_2^1 y_1 + P_2^2 y_2 + P_2^3 y_3 < V',$$

to odpowiadająca tej nierówności wielkość  $x_2$  równa się zeru, co oznacza, że wariant ugrupowania  $k = 2$  jest dla nas wyraźnie niekorzystny i dlatego nie powinniśmy go stosować.



Jeżeli wyłączymy te przypadki, pozostaje jeszcze pewien układ zależności, gdzie porównuje się wielkości  $x$  z  $V'$  oraz takie, gdzie porównuje się wielkości  $y$  z  $V'$ . Odpowiada to optymalnym wartościom  $x$  i  $y$ , różnym od zera. Wynik jest taki, że gdy uwzględniamy korzystne warianty ugrupowania zgodnie z częstościami optymalnymi, wtedy każdy sposób /wariant/ działania przeciwnika stosowany z częstością optymalną pozwala osiągnąć wartość prawdopodobieństwa obrony obiektu równą dokładnie  $V'$ . Podobnie jest dla strony przeciwnej. Mamy tutaj najprostszy sprawdzian każdego przypuszczalnego rozwiązania optymalnego dla obu stron. Bierzymy optymalne rozwiązanie i oceniamy wartość prawdopodobieństwa obrony obiektu dla każdego z korzystnych sposobów /wariantów/ działania przeciwnika; w wyniku powinniśmy otrzymać w każdym przypadku tę samą wartość  $V'$ . Podobnie znajdujemy tę samą wartość  $V'$  oceniając optymalną taktykę strony przeciwnej, dla każdego z korzystnych wariantów ugrupowania środków OPL. Przykład liczbowy wyjaśni jeszcze bardziej opisaną wyżej metodę.

Niech będzie dana macierz  $A$ , która po wyeliminowaniu wyraźnie niekorzystnych sposobów /wariantów/ działania przeciwnika i wariantów ugrupowania środków OPL, ma postać:

$k \backslash j$	$j=1$	$j=2$	$j=3$	$\min_j P_k^j$
$k=1$	0,8	0,2	0,2	<u>0,2</u>
$k=2$	0,4	0,1	0,6	0,1
$k=3$	0,6	0,5	0,0	0,0
$\max_k P_k^j$	0,8	<u>0,5</u>	0,6	-

/5.16/

Należy znaleźć optymalne częstości  $x'_k$  i  $y'_j$ .

W celu łatwiejszego liczenia mnożymy każdy element macierzy /5.16/ przez 10. Po tej operacji macierz przyjmie postać:

		j		
		j=1	j=2	j=3
k	k=1	8	2	2
	k=2	4	1	6
	k=3	6	5	0

/5.17/

Na podstawie macierzy /5.17/ wypisujemy układ warunków /5.15/:

$$8x_1 + 4x_2 + 6x_3 \geq V', \quad 8y_1 + 2y_2 + 2y_3 \leq V',$$

$$2x_1 + 1x_2 + 5x_3 \geq V', \quad 4y_1 + 1y_2 + 6y_3 \leq V',$$

$$2x_1 + 6x_2 + 0x_3 \geq V', \quad 6y_1 + 5y_2 + 0y_3 \leq V',$$

$$x_1 + x_2 + x_3 = 1, \quad y_1 + y_2 + y_3 = 1.$$

Przyjmujemy najpierw wszystkie zależności jako równości i rozwiązujemy układ równań dla wartości  $x$ , tzn.:

$$8x_1 + 4x_2 + 6x_3 = V',$$

$$2x_1 + x_2 + 5x_3 = V',$$

$$2x_1 + 6x_2 = V',$$

$$x_1 + x_2 + x_3 = 1.$$

Rozwiązując ten układ równań np. metodą podstawienia, otrzymujemy:

$$x_1 = -\frac{1}{2}, \quad x_2 = \frac{3}{4}, \quad x_3 = \frac{3}{4}, \quad V' = \frac{7}{2}.$$

co nie jest dopuszczalne wobec  $x_1 < 0$ . Przyjmujemy teraz jedną z tych zależności, jako ścisłą nierówność, np.:

$$8x_1 + 4x_2 + 6x_3 > V',$$

z czym łączy się  $y_1 = 0$ . Równania są teraz następujące:

$$\begin{array}{ll} 2x_1 + x_2 + 5x_3 = V', & 2y_2 + 2y_3 = V', \\ 2x_1 + 6x_2 = V', & y_2 + 6y_3 = V', \\ x_1 + x_2 + x_3 = 1, & y_2 + y_3 = 1. \end{array}$$

Ostatnie dwa równania po prawej stronie dają:

$$y_2 = \frac{V'}{5}, \quad y_3 = \frac{1 - V'}{5},$$

co nie jest dopuszczalne wobec  $y_3 < 0$ , ponieważ jak wynika z macierzy /5.17/,  $2 \leq V' \leq 5$ . Nie są też spełnione pozostałe równania. Dowolny wybór jednej zależności i przyjmowanie jej jako ścisła nierówność prowadzi do tego samego negatywnego wyniku.

Przyjmujemy następnie dwie zależności jako ścisłe nierówności. Podejście takie same, jak poprzednio nasuwa myśl, że dobrze byłoby spróbować jednej spośród zależności zawierających  $y$ , np.:

$$\begin{array}{l} 8x_1 + 4x_2 + 6x_3 > V', \quad \text{przy czym } y_1 = 0, \\ 8y_1 + 2y_2 + 2y_3 < V', \quad \text{przy czym } x_1 = 0. \end{array}$$

Pozostałe zależności przyjmujemy jako równania, tzn.:

$$\begin{array}{ll} x_2 + 5x_3 = V', & y_2 + 6y_3 = V', \\ 6x_2 = V', & 5y_2 = V', \\ x_2 + x_3 = 1, & y_2 + y_3 = 1. \end{array}$$

Rozwiązanie daje:

$$x_1 = 0, \quad x_2 = \frac{1}{2}, \quad x_3 = \frac{1}{2};$$

$$y_1 = 0, \quad y_2 = \frac{3}{5}, \quad y_3 = \frac{2}{5};$$

$$V = 3,$$

a dzieląc przez 10, otrzymamy<sup>x/</sup>  $V' = 0,3$ .

Zatem na optymalne rozwiązanie składają się dwa warianty ugrupowania:  $k = 2$  i  $k = 3$ , które powinny być stosowane z częstościami 0,5. Dla przeciwnika najbardziej korzystnie jest stosować sposoby działania  $j = 2$  oraz  $j = 3$ , odpowiednio z częstościami  $y_2 = 0,6$  i  $y_3 = 0,4$ . Wtedy prawdopodobieństwo obrony obiektu wyniesie 0,3.

Dotychczas zostały omówione dwie metody rozwiązywania gier macierzowych. Są one stosunkowo proste i z powodzeniem można je stosować w praktyce, szczególnie przy ręcznych obliczeniach. Z punktu widzenia programowania na EMC bardziej dogodnymi metodami są metoda simpleks oraz metoda iteracyjna. Omawianie tych metod mija się z celem, ponieważ dla nich są dość dobrze opracowane programy na EMC.

---

x/ Przez tę liczbę pomnożyliśmy wszystkie elementy macierzy /5.16/, wobec czego wartość prawdopodobieństwa obrony obiektu /wartość gry/ została również zwiększona o 10. Dla otrzymania rzeczywistej wartości należy podzielić otrzymaną z rozwiązania liczbę.

## 6. ALGORYTMY OKREŚLANIA OPTYMALNEGO UGRUPOWANIA

W celu określenia optymalnego ugrupowania rakiet i artylerii przeciwlotniczej w osłonie obiektów stałych należy najpierw przeprowadzić analizę zadania i ocenę położenia, wykonać wstępne prace na mapie, a następnie przejść do obliczeń. Celowym jest z punktu widzenia ekonomii pracy i czasu wykonywać poszczególne czynności w pewnym ustalonym porządku.

Spis czynności oraz kolejność i sposób ich wykonywania stanowi algorytm określania ugrupowania bojowego.

### A. Algorytm określania optymalnego ugrupowania rakiet przeciwlotniczych

W celu określenia optymalnego ugrupowania rakiet przeciwlotniczych w osłonie obiektów stałych, należy:

a/ przeprowadzić analizę zadania i ocenę położenia w myśl zasad przyjmowanych w taktyce wojsk OPL;

b/ wnioski i dane dotyczące taktyki działania środków napadu powietrznego przeciwnika, własnych możliwości oraz stopnia oddziaływania sił i środków OPL bezpośredniego sąsiada wpisać do odpowiednich tabel<sup>x/</sup>;

c/ na mapę najcelowiej w skali 1:100 000 lub 1:200 000 wrysować obiekt osłony, prawdopodobne warianty działania przeciwnika, położenie własnych sił i środków OPL, ugrupowanie najbliższych sąsiadów oraz ogólną sytuację operacyjną;

d/ wykreślić w skali mapy co 2 lub 5 km, licząc od środka obiektu, możliwe rubieże ugrupowania pododdziałów. Należy przy tym wykluczyć te rubieże, które ze względu na zły teren nie pozwalają na rozmieszczenie pododdziałów ogniowych;

---

x/ Wzory tabel podane są w przykładzie 1 /punkt 7 pracy/.

e/ wykreślić ze środka obiektu sektory /wycinki/ co  $30^{\circ}$  lub  $36^{\circ}$  tak, by obejmowały prawdopodobne kierunki podejścia przeciwnika do osłanianego obiektu;

f/ ustalić pierwszy wariant ugrupowania bojowego, tzn. uwzględniając prawdopodobne kierunki ataku przeciwnika, teren oraz sąsiadów rozmieścić pododdziały na pierwszej rubieży licząc od środka obiektu. Sektory, w których ugrupowano pododdziały ogniowe należy zaznaczyć /np. podkolorować/;

g/ za pomocą nomogramu /zał.8/ określić ilość rakiet, jaką mogą odpalić poszczególne pododdziały ogniowe do każdego wariantu działania przeciwnika. Dane zapisać w tabeli<sup>x/</sup>;

h/ ustalić drugi wariant ugrupowania, tzn. uwzględniając czynniki, jak w punkcie f/, rozmieścić pododdziały w tych samych co poprzednio sektorach, lecz na drugiej rubieży. W analogiczny sposób określić dla każdego pododdziału możliwą do odpalenia ilość rakiet, a dane zapisać w tabeli;

i/ w podobny sposób ustalić trzeci i następne warianty ugrupowania. Ostatnim wariantem będzie ten, dla którego wyraźnie zarysowuje się spadek możliwej do odpalenia ilości rakiet;

j/ na podstawie tabeli ilości rakiet oraz wykresów /rys.2 - 5/ zbudować macierz gry /tab.16/. Elementami tej macierzy powinny być wartości prawdopodobieństw  $P_{k}^j$ ;

k/ w przypadku, gdy gra posiada punkt siodłowy, bezpośrednio z macierzy określić optymalną rubież ugrupowania pododdziałów oraz najkorzystniejsze dla przeciwnika sposoby działania. Jeżeli punktu siodłowego nie ma, przystąpić do rozwiązania gry, wprowadzając strategię mieszane. Sposób postępowania, jak w zagadnieniu 5 niniejszej pracy;

---

x/ Wzór tabeli podany jest w przykładzie 1 /punkt 7 pracy/.

ĭ/ optymalną rubież /rubieże/ ugrupowania pododdziałów wykreślić na mapie oraz zaznaczyć wybrane stanowiska ogniowe pododdziałów. Jest to dopiero pierwsza kombinacja rozmieszczenia pododdziałów ogniowych na określonej rubieży /rubieżach/;

ł/ biorąc za podstawę uprzednio wykreślone sektory /wycoinki/ i liczbę pododdziałów, obliczyć ilość wszystkich możliwych kombinacji /C/ rozmieszczenia pododdziałów ogniowych w ustalonych sektorach:

$$C = \frac{S!}{(S-m)!m!} , \quad /6.1/$$

gdzie: S - ilość sektorów, m - liczba pododdziałów ogniowych.

W praktyce po uwzględnieniu terenu i prawdopodobnych kierunków podejścia przeciwnika do osłanianego obiektu, liczba S ulegnie znacznej redukcji, a przez to zmniejszy się ilość kombinacji;

m/ dla każdej kombinacji ugrupowania pododdziałów, analogicznie jak w punkcie g/, obliczyć możliwą do odpalenia ilość rakiet - dane zapisać w tabeli<sup>x/</sup>;

n/ na podstawie tabeli ilości odpalonych rakiet sporządzić macierz gry. W przypadku, gdy gra posiada punkt siodłowy, to odpowiadający temu punktowi wariant ugrupowania można przyjąć jako optymalny. W przeciwnym razie wprowadzić strategię mieszane i dla wyznaczenia częstości  $x_k$  i  $y_j$  oraz wartości  $V'$  rozwiązać grę, stosując metody jak w zagadnieniu 5 niniejszej pracy;

o/ zaznaczyć na mapie optymalne rozwiązanie, wykreślić strefy ognia pododdziałów, wrysować stanowisko dowodzenia

---

x/ Wzór tabeli podany jest w przykładzie 1.

oddziału /związku/, RSWP, elementy tyłowe oraz opracować legendę, w której m.in. umieścić tabelę możliwości ogniowych.

Opisany wyżej algorytm nasuwa myśl, że proces określania optymalnego ugrupowania jest dość złożony i pracochłonny. Istnieje jednak realna możliwość zaprogramowania czynności od f/ do n/ na maszynę cyfrową. Algorytm na maszynę cyfrową podają załączniki 2, 5 i 7.

Zastosowanie maszyny cyfrowej skróci wielokrotnie czas uzyskiwania optymalnego rozwiązania i wobec tego przedstawiona w pracy metoda może być stosowana nawet w szybko zmieniającej się sytuacji operacyjnej. Przy ręcznej technice obliczeniowej, z uwagi na dużą pracochłonność, metoda ta może być stosowana do ustalania pewnych ogólnych zasad ugrupowania sił i środków OPL lub weryfikacji zasad już istniejących.

#### B. Algorytm określania optymalnego ugrupowania małokalibrowej artylerii przeciwlotniczej

Przy określaniu ugrupowania małokalibrowej artylerii przeciwlotniczej technika postępowania jest podobna, jak w punkcie A. Podamy więc tylko istotne różnice, odwołując się jednocześnie tam gdzie jest to możliwe do algorytmu podanego wyżej.

W pierwszym etapie przeprowadzamy analizę zadania, ocenę położenia i wypisujemy dane dotyczące taktyki działania środków napadu powietrznego przeciwnika, własnych sił i środków oraz wszelkie informacje o sąsiadach.

W drugim etapie wykonujemy następujące czynności:

a/ Na mapie w skali 1:50.000 lub 1:100.000 nanosimy te same elementy, co w punkcie c/.

b/ Wykreślamy w skali mapy co 1 lub 2 km, licząc od środka obiektu, możliwe rubieże ugrupowania pododdziałów ogniowych. Należy z góry wykluczyć te rubieże, które z uwagi na warunki terenowe nie pozwalają na rozmieszczenie pododdziałów ogniowych.

c/ Wykreślamy w stosunku do środka obiektu sektory co 30 lub 36° tak, by obejmowały one prawdopodobne kierunki ataku przeciwnika.

d/ Ustalamy pierwszy wariant ugrupowania bojowego, kierując się czynnikami, jak w punkcie f/.

e/ Posługując się nomogramem /zał.6/ określamy ilość strzałów, jaką mogą oddać poszczególne pododdziały ogniowe w odniesieniu do każdego wariantu działania przeciwnika. Dane zapisujemy w tabeli<sup>x/</sup>.

f/ Analogicznie, jak w punkcie h/ ustalamy drugi wariant ugrupowania oraz określamy ilość strzałów. Dane zapisujemy w tabeli.

g/ W podobny sposób ustalamy trzeci i następne warianty ugrupowania. Ostatnim wariantem będzie ten, dla którego wyraźnie zarysowuje się spadek ilości strzałów. Dla dokładnego ustalenia maksimum wykreślamy jedną lub dwie rubieże pośrednie pomiędzy sąsiednimi rubieżami, z których pododdziały ogniowe mają możliwości oddania najwięcej strzałów.

h/ Budujemy macierz gry, jak w punkcie j/. Dalsze postępowanie, jak w punktach od k/ do o/.

Sposób praktycznego postępowania zilustrujemy na przykładzie w punkcie 7.

---

x/ Wzór tabeli i sposób jej wypełniania podany jest w przykładzie 2.

## 7. PRZYKŁADY ZASTOSOWANIA ALGORYTMÓW

W rozdziale tym podamy dwa przykłady, których zasadniczym celem jest zilustrowanie omawianej w pracy metody oraz algorytmów.

### A. Przykład wyboru optymalnego ugrupowania oddziału rakiet przeciwlotniczych

Przyjmujemy następujące założenia taktyczne:

W okresie podwyższonej gotowości obronnej państwa dokonuje się wzmocnienia systemu obrony powietrznej kraju ze szczególnym uwzględnieniem ważnych ośrodków życia politycznego, gospodarczego i kulturalnego oraz obiektów komunikacyjnych i wojskowych.

Obiektem osłony jest POZNAŃ. Do jego osłony wydzielono pułk rakiet przeciwlotniczych. Pułk posiada w swym składzie cztery dywizjony ogniowe oraz dywizjon techniczny. Ukompletowanie pułku: w ludziach - 95 %, w sprzęcie - 100 %. W położeniu wyjściowym pułk znajduje się w rejonie ześrodkowania 30km wsch POZNAŃ. Posiada jedną jednostkę ognia w dywizjonie technicznym i jedną przy sprzęcie.

Jako przeciwnika przyjmuje się siły powietrzne NATO oraz lotnictwo strategiczne Stanów Zjednoczonych i Wielkiej Brytanii, bazujące w południowej części ANGLII. Założmy, że dowódcy pułku znane są typy środków napadu powietrznego przeciwnika, ogólne rejony bazowania oraz zasady i sposoby ich działania. Ponadto jest mu znana ogólna sytuacja operacyjna, zadanie wyższego szczebla, tzn. korpusu obrony powietrznej kraju, charakterystyka obiektu oraz teren w rejonie POZNANIA.

Bezpośrednimi sąsiadami są: pułk rakiet przeciwlotniczych osłaniający m. BYDGOSZCZ oraz związek taktyczny rakiet

przeciwlotniczych osłaniający m. WROCŁAW.

Zakładamy, że zarówno ugrupowanie jak i ogólne możliwości ogniowe w/w jednostek są dowódcy pułku rakiet znane. Informacje te zostały przedstawione na schemacie nr 1.

Są więc niezbędne dane do wypracowania decyzji. Zgodnie z przedstawionym w poprzednim rozdziale algorytmem należy najpierw przeprowadzić analizę zadania i ocenę położenia. Wnioski z oceny położenia stanowią podstawę do optymalizacji ugrupowania bojowego.

#### a/ Przykładowa treść analizy zadania

Przed pułkiem rakiet przeciwlotniczych stoi zadanie osłony ważnego obiektu skupiającego w sobie dużą ilość zakładów przemysłowych, w tym również zakładów produkujących sprzęt wojskowy, a ponadto będącego jednym z najważniejszych na obszarze POLSKI węzłów komunikacyjnych.

Zadanie to nabiera już obecnie szczególnego znaczenia, z uwagi na mobilizację i mający wkrótce nastąpić przemarsz wojsk oraz ruch transportu w kierunku granicy zachodniej.

Nasuwa się wniosek, iż przeciwnik usiłuje wykonać uderzenie na obiekt POZNAŃ już w ramach pierwszego zmasowanego nalotu.

W okresie poprzedzającym uderzenie przeciwnik będzie się starał rozpoznać szczegółowo obiekt i rozmieszczenie środków OPL.

Zadanie osłony obiektu POZNAŃ będą realizował we współdziałaniu z następującymi sąsiadami:

- pułkiem rakiet przeciwlotniczych w składzie czterech dywizjonów ogniowych osłaniającym m. BYDGOSZCZ;
- związkami taktycznymi rakiet przeciwlotniczych w składzie pięciu dywizjonów ogniowych osłaniającym m. WROCŁAW;

- pułkiem lotnictwa myśliwskiego bazującym na terytorium tego samego węzła naprowadzania.

Obecnie pułk znajduje się w rejonie ześrodkowania 30 km wsch POZNAŃ. Skład pułku: cztery dywizjony ogniowe po sześć wyrzutni oraz dywizjon techniczny.

Ukompletowanie pułku: w ludziach - 95 % stanu, w sprzęcie - 100 %. Stan rakiet: w dywizjonie technicznym 1 jo, przy sprzęcie 1 jo.

Czynniki wpływające dodatnio na organizację osłony:

- pełne uko<sup>m</sup>pletowanie w sprzęcie i prawie pełne w ludziach;
- obecność bezpośrednich sąsiadów;
- położenie obiektu osłony na głębokości około 400 km od granicy NRD i około 220 km od morza, co umożliwia wczesne otrzymanie danych o sytuacji powietrznej i stwarza możliwości innym środkiem OPL do oddziaływania na przeciwnika wzdłuż tras lotu do osłanianego obiektu.

Czynniki ujemne:

- krótki czas na organizację osłony, szczególnie na rozbudowę inżynieryjną;
- położenie obiektu osłony na głównym kierunku operacyjnym, co stwarza szczególne zagrożenie.

b/ Przykładowa treść oceny położenia

Rozpatrywane zagadnienie	Posiadane dane i ich ocena	Wnioski
1	2	3
Obiekt osłony	POZNAŃ jest ważnym ośrodkiem przemysłowym i kulturalnym oraz jednym z najważniejszych węzłów kolejowych i drogowych na terytorium POLSKI; zbiega	1. Posiada duże znaczenie gospodarcze, komunikacyjne i kulturalne.

1	2	3.
	<p>się w nim 9 linii kolejowych i 8 magistrali kołowych. Znajduje się na głównym szlaku komunikacyjnym WARSZAWA-BERLIN. Jest siedzibą władz wojewódzkich.</p> <p>Największe zakłady przemysłowe, to: Cegielskiego, Stomil, fabryka urządzeń mechanicznych, wytwórnia gazów technicznych.</p> <p>Inne ważne obiekty:</p> <ul style="list-style-type: none"> <li>- trzy elektrownie;</li> <li>- gazownia;</li> <li>- dwie stacje wodociągowe;</li> <li>- składnice wojskowe;</li> <li>- warsztaty remontowe;</li> <li>- centrala telefoniczna miejska i międzymiastowa;</li> <li>- stocznia rzeczna.</li> </ul> <p>Powyższe zakłady i obiekty są rozmieszczone w promieniu 3.5 km od środka miasta. Ogólna powierzchnia około 40 km<sup>2</sup>. Zabudowa miasta zwarta, a jedynie na peryferiach półzwarta. POZNAŃ położony jest w otwartym, równinnym terenie, po obu stronach rz. WARTA. Nad ogólną sylwetką miasta dominują kominy fabryczne i wieże kościelne, a nad północną częścią miasta wznosi się fort /Cytadela/</p>	<p>2. Jest opłacalnym celem dla broni jądrowej.</p> <p>3. Zwarty i kolisty charakter obiektu umożliwia jego zniszczenie jedną bombą jądrową o mocy 300 - 400 KT.</p> <p>4. Ładunek tej mocy mogą przenieść samoloty bombowe i bezpilotowe środki napadu.</p> <p>5. Z uwagi na otwarty i równinny teren oraz dużą ilość punktów charakterystycznych POZNAŃ jest obiektem łatwym do wykrycia zarówno przy obserwacji wzrokowej, jak i radiolokac. Odległość wykrycia 100-140 km.</p>
<p>Nieprzyjaciel</p>	<p>Nieprzyjaciel czyni szybkie przygotowania do rozpoczęcia działań wojennych. Wskazuje na to koncentracja wojsk w pobliżu granic NRD oraz pośpieszne uzupełnianie jednostek skadrowanych. Loty rozpoznawcze nad obszarem powietrznym PRL mają prawdopodobnie na celu ustalenie obiektów uderzeń oraz ruchów wojsk.</p> <p>Przerzucanie szpiegów i dywersantów w różne rejony kraju ma na celu zdobycie</p>	<p>1. Należy się liczyć, iż w niedługim czasie npl może rozpocząć działania wojenne</p> <p>2. Przed rozpoczęciem wojny npl prawdopodobnie będzie nadal usiłował prowadzić rozpoznanie, szczególnie tych obiektów, które za-</p>

1	2	3
	<p>cennych informacji i dezorganizację pracy na zapleczu</p> <p>Działania wojenne najprawdopodobniej npl rozpocznie zmasowanym nalotem z udziałem lotnictwa taktycznego bazującego w NRF, lotnictwa strategicznego bazującego w południowej części W.BRYTANII oraz samolotów pocisków typu Mace TM-76A, rozmieszczonych w środkowej części NRF. Średnie odległości od rejonów baz do obiektu osłony wynoszą:</p> <ul style="list-style-type: none"> <li>- lotnictwo taktyczne - około 450-480 km;</li> <li>- lotnictwo strategiczne - 1100 km;</li> <li>- samoloty pociski Mace - około 550 km.</li> </ul> <p>Jeśli założyć, że m. POZNAŃ usiłuje niszczyć lotnictwo taktyczne, to w celu wykonania tego zadania musi ono przechodzić przez frontową strefę OPL i częściowo obszar OPK na głębokość 380-400 km, co stanowi ok. 80% ogólnej trasy lotu.</p> <p>Dla samolotów-pocisków głębokość tej strefy wynosi ok. 450 km, co stanowi również około 80% ogólnej trasy lotu. Natomiast dla lotnictwa strategicznego będzie tylko około 220 km /20% ogólnej trasy lotu/.</p> <p>Biorąc za podstawę taktykę npla oraz jego możliwości, należy przypuszczać, że może on wykonać uderzenie na obiekt POZNAŃ przy użyciu broni jądrowej, stosując jeden z następujących sposobów /wariantów/ działania:</p> <p>1/. Przed rozpoczęciem działań wojennych będzie się starał wykonać loty rozpoznawcze na dużych lub stratosferycznych wysokościach</p>	<p>mierza zniszczyć /obezwładnić/ w pierwszym zmasowanym nalocie.</p> <p>3. Należy przypuszczać, że w ramach zmasowanego nalotu npl usiłuje wykonać uderzenie na obiekt POZNAŃ.</p> <p>4. W Świetle odległości do rejonów baz uderzenie to może być wykonane zarówno przez lotnictwo taktyczne, samoloty, pociski, jak i lotnictwo strategiczne. Jednak najlepsze warunki /ze względu na odległość/ posiada lotnictwo taktyczne i samoloty pociski.</p> <p>5. W świetle bezpieczeństwa przelotu najlepsze warunki posiada lotnictwo strategiczne /najkrócej może przebywać nad naszym terytorium/. Chcąc osiągnąć taki stopień bezpieczeństwa lotnictwo taktyczne musi wykonywać lot do m. POZNAŃ od strony morza, co wydłuża trasę lotu o około 35%.</p> <p>6. W świetle zadań POZNAŃ może być niszczone przez lotnictwo taktyczne przede wszystkim jako węzeł komunikacyjny, a przy tym również jako obiekt przemysłowy. Może go niszczyć również lotnictwo strategiczne, mając na względzie jego znaczenie gospodarcze.</p> <p>7. Starannie zamaskować SO dywizjonów ogniowych szczególnie na głównym wysiłku osłony oraz stanowisko dywizjonu technicznego.</p>

1	2	3
	<p>celem rozpoznania rejonów stanowisk dywizjonów ogniowych i dywizjonu technicznego, lotnisk, systemu radiolokacyjnego oraz zasadniczych obiektów uderzeń.</p> <p>2/ W ramach pierwszego zmasowanego nalotu najpierw usiłuje obezwładnić środki OPK na głównym wysiłku osłony przy użyciu samolotów myśliwsko-bombowych, a następnie prawdopodobnie po 20-30 min. wykorzystując luki w systemie osłony wykonana jednoczesny nalot na obiekty: POZNAŃ, WROCŁAW, BYDGOSZCZ.</p> <p>Uderzenia na SO dywizjonów ogniowych npl prawdopodobnie usiłuje wykonać z małych wysokości z lotu nurkowego lub koszącego, stosując głównie broń raketową i strzelecką.</p>	<p>8. Do czasu rozpoczęcia działań wojennych do samolotów rozpoznawczych prowadzić ogień tylko dywizjonami dyżurnymi.</p> <p>9. Zaplanować wariant ugrupowania w celu wyjścia spod uderzenia oraz przewidzieć manewr z kierunku pomocniczego na wypadek obezwładnienia jednego z dywizjonów na głównym wysiłku osłony.</p> <p>10. Szczegółowa charakterystyka prawdopodobnych wariantów działania npla - jak punkt c/.</p>
<p>Teren</p>	<p>Teren w rejonie POZNANIA /w promieniu do 40 km/ jest na ogół równinny. Jedynie na płn wsch od POZNANIA teren jest pagórkowaty. Najwyższa wysokość bezwzględna występuje w okolicy MARASKA /1829/ i wynosi 154 m.</p> <p>Natomiast najniżej jest położony teren wzdłuż rz. WARTA /wysokość bezwzględna dochodzi nawet do 34 km/.</p> <p>Do ważniejszych przeszkód terenowych zaliczyć możemy rz. WARTĘ, trzy KANAŁY OBRZANSKIE /północny, środkowy i południowy/ KANAŁ MOSIŃSKI, rz. WELNĘ, pasma jezior od m. MUROWANA GOŚLINA do m. POBIEDZISKA, pasma jezior od m. BOROWIEC /9638/ do m. ZANIEMYSŁ oraz jeziora KIERSKIE, NIEPRUSZEWSKIE i jeziora w okolicy STESZEW. Najbardziej zabagniony teren występuje w dolinie KANAŁÓW OBRZANSKICH oraz w rejonie pld MOSINA.</p>	<p>1. Rzeźba terenu w okolicach POZNANIA pozwoli na wybór SO z małymi kątami ukrycia.</p> <p>2. Rzeki, kanały, jeziora utrudniają manewr, ograniczają wybór SO oraz stanowią dogodne punkty orientacyjne dla lotnictwa npla.</p>

1	2	3
	<p>Pokrycie terenu lasami jest na ogół słabe i nierówne /12% powierzchni/. Kompleksy i parcele leśne skupione są przy rubieżach wodnych /rzeki, kanały, pasma jezior/. Drzewostan przeważnie mieszany z przewagą drzew iglastych. Wysokość drzew w lasach od 15 do 25m.</p> <p>Drogi leśne i przesieki mają szerokość 4 do 8 m i są jezdne przez cały rok. Widoczność w lasach od 80 do 100 m.</p> <p>W okolicy POZNANIA występuje duża ilość dróg bitych i gruntowych.</p> <p>Ważniejsze drogi wybiegają promieniście z m. POZNAŃ. Do węzłów drogowych w okolicy POZNANIA możemy zaliczyć: SZAMOTUŁY, OBORNIKI, POBIE-DZISKA, SWARZĘDZ, KOSTRZYN, ŚRODA, ŚREM.</p> <p>Warunki prowadzenia robót ziemnych są w większości dogodne. Wyjątki stanowią doliny rzek, a szczególnie KANAŁÓW OBRZAŃSKICH, gdzie poziom wód wynoszący od 0,5 do 1,5 m pod powierzchnią oraz trawiaste podłoże uniemożliwiają prowadzenie prac ziemnych.</p>	<p>3. Słabe pokrycie terenu lasami stwarza trudności w maskowaniu ugrupowania. Zachodzi potrzeba stosowania sztucznych masek.</p> <p>4. Dobrze rozwinięta sieć dróg bitych i gruntowych stwarza dogodne warunki do wykonywania przegrupowań i manewrów pododdziałami. Ograniczenia stanowią jeziora, rzeki i kanały.</p> <p>5. Węzły drogowe są dobrymi punktami orientacyjnymi dla lotnictwa oraz mogą być obiektami uderzeń, stąd w ich pobliżu nie należy rozmieszczać elementów ugrupowania bojowego.</p> <p>6. W rejonach podmokłych i torfowiskach SO nie wybierać.</p> <p>7. Najdogodniejsze kierunki podejścia lotnictwa npla do obiektu - jak schemat nr 1.</p>
<p>Sąsiedzi</p>	<p>Do bezpośrednich sąsiadów pułku rakiet przeciwlotniczych należą:</p> <p>- pułk rakiet przeciwlotniczych w składzie czterech dywizjonów ogniowych i dywizjonu technicznego osłaniający BYDGOSZCZ. Główny wysiłek osłony pułk skupia na kierunku zach i półn zach.</p> <p>Rejony najbliższych SO - jak schemat nr 1 i 2.</p> <p>Odległość między BYDGOSZCZĄ a POZNANIEM wynosi</p>	<p>1. Obecność pułku rakiet w rejonie BYDGOSZCZY utrudnia podejście npla do osłanianego obiektu z kierunków półn wsch, półd wsch i wsch.</p> <p>2. Obecność związku rakiet przeciwlotniczych w rejonie WROCŁAWIA utrudnia podejście npla do osłanianego obiektu z kierunków półd zach, półd i półd wsch.</p>

1	2	3
	<p>około 100 km. Promień ugrupowania dywizjonów ogniowych w osłonie BYDGOSZ-CZY wynosi 20 km, dalsza granica strefy rażenia rakiet na wysokości 20 km - 28 km.</p> <ul style="list-style-type: none"> <li>- związek taktyczny rakiet przeciwlotniczych w składzie pięciu dywizjonów ogniowych i dywizjonu technicznego, który ma zadanie osłony m.WROCLAW. Główny wysiłek osłony skupia na kierunku zach i pld zach. Rejony najbliższych SO - jak schemat nr 1 i 2.</li> <li>- pułk lotnictwa myśliwskiego bazujący na lotnisku w rejonie INOWROCLAW.</li> </ul>	<ol style="list-style-type: none"> <li>3. Ze względu na znaczne odległości sąsiadów /ok. 100 i 140 km/ prawdopodobnie nie uda się z nimi uzyskać powiązania ogniowego.</li> <li>4. Współdziałanie z plm realizować na PPSD w rejonie SZAMOTUŁY.</li> <li>5. Nawiązać bezpośredni kontakt z Wojewódzkim Sztabem Wojskowym w celu wymiany niezbędnych informacji.</li> </ol>
<p>Własne możliwości</p>	<p>Stan i ukompletowanie pułku rakiet oraz stopień wyszkolenia obsługi, jak w analizie zadania.</p> <p>Pułk posiada możliwości zwalczania celów powietrznych na wysokościach od 2 do 28 km, lecących z prędkościami do 560 m/sek. Maksymalny zasięg rakiet wynosi 30 km, promień strefy martwej w granicach 6-12 km. Prawdopodobieństwo rażenia jedną rakieta w zależności od warunków prowadzenia ognia waha się w granicach od 0,3 do 0,5. Czas przeniesienia ognia dywizjonu na cel następny wynosi do 2 minut. Odstęp strzelania co 6 sek /przy strzelaniu serią trzech rakiet/. Czas lotu rakiety do najualszego punktu strefy ognia wynosi około 43 sek. Czas przejścia dywizjonu ogniowego z położenia manewrowego do bojowego około 4 godz. Czas zwijania około 3 godz.</p>	<ol style="list-style-type: none"> <li>1. Pułk praktycznie nie ma możliwości zwalczania celów na małych wysokościach. W granicach do 2000 m cele mogą być zwalczane jedynie przez plm.</li> <li>2. Długi czas na przeniesienie ognia /do dwóch minut/ poważnie ogranicza możliwości zwalczania celów przy nalotach potokowych.</li> <li>3. Długie czasy zwijania i rozwijania dywizjonów utrudniają manewr.</li> </ol>

Uwaga: Ze względu na zakres rozpatrywanego problemu /tylko ugrupowanie bojowe/ pominięto takie zagadnienia, jak: wytyczne dla oficerów sztabu w celu przygotowania meldunków, kalkulację czasu osobistego i ogólnego, ogłoszenie zarysu decyzji.

c/ Opis prawdopodobnych wariantów nalotów na obiekt POZNAŃ

WARIANT NR 1 /j=1/

Jednoczesny nalot na obiekt POZNAŃ trzech celów uruchomianych w głąb w odstępach od 30-60 sek. Wśród celów jeden jest nosicielem broni jądrowej, zaś dwa pozostałe są celami pozorującymi, np. pociski typu GAM-72 QUAIL. Prędkości lotu celów do około 1500 km/godz., wysokości do około 20 km, moc broni jądrowej 300-400 KT. Cele stosują zmienny profil lotu.

WARIANT NR 2 /j=2/

Jednoczesny nalot dwóch celów na obiekty POZNAŃ i BYDGOSZCZ lub POZNAŃ i WROCŁAW. Celami tymi są samoloty-nosiciele broni jądrowej. W odległości około 150 km od obiektów cele rozdzielają się i wykonują lot pojedynczo z kursami na obiekty POZNAŃ i BYDGOSZCZ lub POZNAŃ i WROCŁAW. W odległości około 45 km od obiektów cel, którego kurs był na BYDGOSZCZ lub WROCŁAW wykonuje energiczny skręt /zmiana kursu o  $60^{\circ}$  -  $70^{\circ}$ / w kierunku POZNANIA, natomiast cel lecący kursem na POZNAŃ zmienia kurs na BYDGOSZCZ lub WROCŁAW.

Parametry lotu celów - jak w wariantcie nr 1.

WARIANT NR 3 /j=3/

Na około 20-30 min przed wykonaniem uderzenia na obiekty POZNAŃ, BYDGOSZCZ, WROCŁAW nieprzyjaciół usiłuje obezwładnić dywizjony ogniowe, których SO zostały rozpoznane. Następnie wykorzystując powstałe luki w systemie osłony, siłami trzech samolotów - nosicieli broni jądrowej wykonuje jednoczesny nalot na wszystkie trzy obiekty. Do obezwładnienia dywizjonów ogniowych nieprzyjaciół prawdopodobnie wydzieli grupy samolotów myśliwsko-bombowych, które wykonują atak na SO z małych

wysokości z lotu koszącego lub nurkowego, stosując głównie broń raketową i strzelecką.

Maksymalne wartości parametrów lotu samolotów - nosicieli broni jądrowej - jak w wariancie nr 1.

WARIANT NR 4 /j=4/

Jak wariant nr 3, z tym że uderzenie na obiekt POZNAŃ nieprzyjaciel wykonuje przy użyciu samolotów pocisków, np. typu MACE TM 76A.

Najbardziej prawdopodobne parametry lotu samolotu - pocisku: wysokość około 14000 m, prędkość około 300 m/sek, kąt wejścia w lot nurkowy około  $30^{\circ}$  -  $40^{\circ}$ .

WARIANT NR 5 /j=5/

Nalot trzech celów z kierunku płn zach z kursem na obiekt BYDGOSZCZ. W odległości około 45 km od obiektu cele rozdzielają się.

Cel nr 1 podchodzi do prawdopodobnej rubieży bombardowania i wykonuje uderzenie bronią jądrową na obiekt BYDGOSZCZ, cel nr 2 stosując manewr przeciwraketowy kontynuuje dalszy lot z zadaniem obezwładnienia obiektu położonego w głębi.

Cel nr 3 stosując manewr kursem i wysokością przechodzi przez strefę ognia raket, po czym zmieniając kurs /jak schemat nr 1/ podchodzi do obiektu POZNAŃ z kierunku płn wsch lub wsch.

WARIANT NR 6 /j=6/

Jednoczesny nalot trzech celów z kierunku zach, w odstępach od 30 do 60 sek. Po osiągnięciu rubieży płd WROCŁAW cel nr 3 zmienia kurs na WROCŁAW, cel nr 2 kontynuuje dalszy lot z zadaniem obezwładnienia obiektu położonego w głębi,

cel nr 1 obchodzi strefę ognia rakiet przeciwlotniczych w rejonie WROCLAWIA i atakuje obiekt POZNAŃ z kierunku pld wsch lub wsch.

Parametry lotu celów - jak w wariancie nr 1.

We wszystkich wariantach nalotu nieprzyjaciel stosuje zakłócenia radioelektroniczne, wydzielając w tym celu specjalną grupę samolotów. Dla obezwładnienia dywizjonów ogniowych /głównie stacji naprowadzania rakiet/ nieprzyjaciel może użyć pocisków kierowanych klasy powietrze-ziemia samonaprowadzających się na źródło energii elektromagnetycznej /promieniowanej przez antenę SNR/.

Mając ustalone prawdopodobne warianty działania nieprzyjaciela oraz sprecyzowane wnioski dotyczące możliwości środków OPL /własnych i sąsiadów/, przechodzimy do drugiego etapu, w którym na podstawie algorytmu /rozdział szósty pracy/ wyznaczamy optymalny wariant ugrupowania dywizjonów.

Na schemacie nr 2 przedstawiona jest praktyczna realizacja pierwszych czterech punktów algorytmu.

Tabela 1 podaje wyniki obliczeń, jakie należy wykonać zgodnie z punktami g/, h/ oraz i/.

Tabela 2<sup>5.117</sup> jest macierzą gry, o której mowa w punkcie j/.

Macierz posiada punkt siodłowy, a optymalna rubież ugrupowania znajduje się w granicach 15-20 km. Dla rubieży pośredniej /18 km/ nie uzyskujemy lepszych wyników. Zatem rubież 15-20 km przyjmujemy jako optimum. Wariant ugrupowania ustalony na tej rubieży stanowi pierwszą kombinację rozmieszczenia pododdziałów ogniowych.

Uwzględniając teren oraz warianty, przy których istnieją luki w systemie osłony na niektórych kierunkach<sup>x/</sup>, dochodzimy

---

x/ Obliczenia wykazały, że warianty takie są wyraźnie niekorzystne.

zaledwie do ośmiu. Żadnego z tych wariantów bez wykonania obliczeń wyeliminować nie można.

W tabeli 3 podane są wyniki obliczeń. Tabela 4 jest macierzą gry.

Z macierzy wynika, że najkorzystniejszym wariantem jest  $k=3$ . Zapewnia on możliwość odpalania co najmniej trzech rakiet bez względu na wariant działania przeciwnika.

Ponieważ macierz posiada punkt siodłowy, to wariant  $k=3$  można przyjąć jako optymalny.

Przeciwnik posiada najkorzystniejszy wariant działania  $j=1$  oraz  $j=2$ .

Jako zapasowy wariant ugrupowania najcelowiej jest przyjąć  $k=4$ .

#### B. Przykład wyboru optymalnego ugrupowania oddziału małokalibrowej artylerii przeciwlotniczej

Przyjmiemy następujące założenie:

"Zachodni" czynią intensywne przygotowania do rozpoczęcia działań wojennych. Pod pozorem ćwiczeń dokonują przegrupowań wojsk celem poprawienia położenia operacyjnego.

Wobec grożącej napaści "Wschodni" przystąpili do realizacji przedsięwzięć organizacyjno-mobilizacyjnych w wojskach operacyjnych i OPK.

4 DZ realizując jeden z wariantów planu operacyjnego 2 A /zorganizowanej na bazie OW/, ma w czasie od 5.00. 10.9 do 21.00. 11.9 przejść transportem kombinowanym /kolejowym i kołowym/ z rejonu poligonu BIEDRUSKO do rejonu CECHLIN /60 km płn BERIN/.

Tabela 1

ŚREDNIA ILOŚĆ RAKIET JAKĄ MOGĄ ODPALIĆ CZTERY DWYZJONOWY OGNIOWE W ZALEŻNOŚCI OD  
PRAWDOPODOBNYCH WARIANTÓW DZIAŁANIA NIEPRZYJACIELA I PROMIENIA UGRUPOWANIA PODODZIAŁÓW

Promień rubieży ugrupowania dywizjonów ogniowych / $r_i$ /	Prawdopodobne warianty działania przeciwnika /j/												Minimalna ilość rakiet													
	j = 1			j = 2			j = 3			j = 4				j = 5			j = 6									
	1	3	4	4	5	9	10	1	2	3	4	1		2	3	1	2	3	1	2	3	5	6	7	8	9
$r_1 = 5$ km	2	2	3	4	4	4	3	4	4	4	4	4	1	1	2	3	3	3	2	2	3	3	3	3	2	2
$r_2 = 10$ km	2	2	2	3	3	4	3	3	3	3	3	3	3	3	3	3	3	3	3	3	3	3	3	3	3	3
$r_3 = 15$ km	2	2	2	3	3	4	3	3	3	3	3	3	3	3	3	3	3	3	2	2	3	3	3	3	3	3
$r_4 = 17,5$ km	2	2	2	3	3	4	3	3	3	3	3	3	3	3	3	3	3	3	2	2	3	3	3	3	3	3
$r_5 = 20$ km	2	2	2	3	3	3	3	3	3	3	3	2	3	2	2	3	3	3	3	3	3	3	3	3	3	3
$r_6 = 25$ km	1	2	1	3	1	3	3	3	3	3	0	2	2	0	0	3	3	3	1	0	3	1	3	3	3	3
$r_7 = 30$ km	1	2	1	3	0	3	3	3	3	3	0	0	0	0	0	3	3	3	0	0	3	0	3	3	3	3
$r_8 = 35$ km	1	1	1	3	0	2	3	3	3	3	0	0	0	0	0	3	3	3	0	0	3	0	3	3	3	3
Maksymalna ilość rakiet	2	2	3	4	3	4	3	4	4	4	4	4	4	4	3	3	3	3	2	3	3	3	3	3	3	3

Uwaga: W obliczeniach uwzględniono możliwość oddziaływania nieprzyjaciela na 50 dywizjonów ogniowych.

Tabela 2

ŚREDNIE WARTOŚCI PRAWDOPODOBIEŃSTW  $P_{jk}^j$  JAKIE MOŻNA UZYSKAĆ W ZALEŻNOŚCI  
OD PRAWDOPODOBNYCH WARIANTÓW DZIAŁANIA NIEPRZYJACIELA I PROMIENIA UGRUPOWANIA  
PODODZIAŁÓW

Promień rubieży ugrupowania dywizjonów ogniowych $r_i$	Prawdopodobne warianty działania nieprzyjaciela /j/										$\min P_{jk}^j$																							
	j = 1			j = 2			j = 3			j = 4			j = 5			j = 6																		
	1	3	4	4	5	9	10	1	2	3		4	1	2	3	4	1	2	3	4	1	2	3	4	5	6	7	8	9					
$r_1 = 5$ km	0,51	0,51	0,65	0,76	0,65	0,76	0,65	0,76	0,76	0,76	0,76	0,65	0,76	0,76	0,76	0,76	0,65	0,76	0,76	0,76	0,76	0,65	0,76	0,76	0,76	0,76	0,65	0,65	0,51	0,65	0,65	0,65	0,51	0,3
$r_2 = 10$ km	0,51	0,51	0,51	0,65	0,65	0,76	0,65	0,65	0,65	0,65	0,65	0,65	0,65	0,65	0,65	0,65	0,65	0,65	0,65	0,65	0,65	0,65	0,65	0,65	0,65	0,65	0,65	0,65	0,65	0,65	0,65	0,65	0,65	0,3
$r_3 = 15$ km	0,51	0,51	0,51	0,65	0,65	0,76	0,65	0,65	0,65	0,76	0,65	0,65	0,65	0,65	0,65	0,65	0,65	0,65	0,65	0,65	0,65	0,65	0,65	0,65	0,65	0,65	0,65	0,65	0,65	0,65	0,65	0,65	0,51	0,51
$r_4 = 17,5$ km	0,51	0,51	0,51	0,65	0,65	0,65	0,65	0,65	0,65	0,65	0,65	0,65	0,65	0,65	0,65	0,65	0,65	0,65	0,65	0,65	0,65	0,65	0,65	0,65	0,65	0,65	0,65	0,65	0,65	0,65	0,65	0,65	0,51	0,51
$r_5 = 20$ km	0,51	0,51	0,51	0,65	0,65	0,65	0,65	0,65	0,65	0,65	0,65	0,65	0,65	0,65	0,65	0,65	0,65	0,65	0,65	0,65	0,65	0,65	0,65	0,65	0,65	0,65	0,65	0,65	0,65	0,65	0,65	0,65	0,51	0,51
$r_6 = 25$ km	0,30	0,51	0,30	0,65	0,3	0,65	0,65	0,51	0	0,65	0	0,65	0,65	0	0,65	0	0,65	0,65	0	0,65	0	0,65	0,65	0,3	0,65	0,65	0,65	0,65	0,65	0,65	0,65	0,65	0	0
$r_7 = 30$ km	0,30	0,51	0,30	0,65	0	0,51	0,65	0	0	0,65	0	0,65	0,65	0	0,65	0	0,65	0,65	0	0,65	0	0,65	0	0	0,65	0,65	0,65	0,65	0,65	0,65	0,65	0,65	0	0
$r_8 = 35$ km	0,30	0,30	0,30	0,65	0	0,51	0,65	0	0	0,65	0	0,65	0,65	0	0,65	0	0,65	0,65	0	0,65	0	0,65	0	0	0,65	0,65	0,65	0,65	0,65	0,65	0,65	0,65	0	0
$\max P_{jk}^j$	0,51	0,51	0,65	0,76	0,65	0,76	0,65	0,76	0,76	0,76	0,76	0,65	0,76	0,76	0,76	0,76	0,65	0,76	0,76	0,76	0,76	0,65	0,76	0,65	0,65	0,65	0,65	0,65	0,65	0,65	0,65	0,65	-	-

Uwaga: W obliczeniach przyjęto prawdopodobieństwo rażenia jedną rakieta jako wartość średnią, równą 0,3.



Tabela 4

ŚREDNIE WARTOŚCI PRAWDOPODOBIENSTW  $P_{1k}^j$  JAKIE MOŻNA UZYSKAĆ W ZALEŻNOŚCI  
OD PRAWDOPODOBNYCH WARIANTÓW DZIAŁANIA NIEPRZYJACIELA I WARIANTÓW  
UGRUPOWANIA DYWIZJONÓW OGNIOWYCH

Warianty ugrupowania dywizjonów ogniowych /k/	Prawdopodobne warianty działania nieprzyjaciela /j/										$\min_j P_{1k}^j$											
	j = 1			j = 2			j = 3			j = 4			j = 5			j = 6						
	1	3	4	4	4	5	9	10	1	2		3	4	1	2	3	4	5	6	7	8	9
$k = 1$ Dywizjony rozmieścić w wycinkach: 2, 4, 7, 9.	0,51	0,51	0,51	0,51	0,65	0,65	0,76	0,65	0,65	0,65	0,65	0,65	0,65	0,65	0,65	0,65	0,65	0,65	0,65	0,65	0,65	0,51
$k = 2$ Dywizjony rozmieścić w wycinkach: 2, 4, 7, 10.	0,65	0,51	0,51	0,65	0,65	0,65	0,76	0,65	0,65	0,76	0,65	0,65	0,65	0,65	0,65	0,65	0,65	0,65	0,65	0,65	0,65	0,51
$k = 3$ Dywizjony rozmieścić w wycinkach: 2, 4, 6, 10.	0,65	0,65	0,65	0,65	0,65	0,65	0,76	0,65	0,65	0,76	0,65	0,65	0,65	0,65	0,65	0,65	0,65	0,65	0,65	0,65	0,65	0,65
$k = 4$ Dywizjony rozmieścić w wycinkach: 1, 3, 5, 8.	0,51	0,65	0,51	0,65	0,65	0,65	0,65	0,76	0,65	0,65	0,65	0,65	0,65	0,65	0,65	0,65	0,65	0,65	0,65	0,65	0,65	0,51
$k = 5$ Dywizjony rozmieścić w wycinkach: 1, 3, 6, 9.	0,51	0,65	0,51	0,65	0,65	0,65	0,65	0,76	0,65	0,65	0,65	0,65	0,65	0,65	0,65	0,65	0,65	0,65	0,65	0,65	0,65	0,51
$k = 6$ Dywizjony rozmieścić w wycinkach: 2, 4, 6, 9.	0,51	0,51	0,65	0,76	0,65	0,65	0,65	0,65	0,65	0,65	0,65	0,65	0,51	0,65	0,65	0,65	0,65	0,65	0,65	0,65	0,65	0,51
$k = 7$ Dywizjony rozmieścić w wycinkach: 1, 5, 7, 10.	0,51	0,51	0,51	0,65	0,65	0,65	0,76	0,65	0,65	0,65	0,65	0,65	0,51	0,51	0	0,65	0,65	0,65	0,65	0,65	0,65	0
$k = 8$ Dywizjony rozmieścić w wycinkach: 1, 3, 6, 8.	0,51	0,51	0,51	0,65	0,65	0,65	0,76	0,65	0,65	0,65	0,65	0,65	0,65	0,65	0,51	0,65	0,65	0,65	0,65	0,65	0,65	0,51
$\max_j P_{1k}$	0,65	0,65	0,65	0,76	0,65	0,65	0,76	0,65	0,65	0,76	0,65	0,65	0,65	0,65	0,65	0,65	0,65	0,65	0,65	0,65	0,65	-

Zgodnie z decyzją dowódcy 4 DZ organiczny pułk artylerii przeciwlotniczej otrzymał zadanie osłony załadowania na transport kolejowy części sił dywizji w rejonie OBORNIKI. Początek ładowania 5.30. 10.9. Eszelony kompletowane są na dwóch stacjach załadowniczych /schemat 3/.

Porządek ładowania jest następujący:

Najpierw ładuje się 4 pcz jednocześnie na dwóch stacjach załadowniczych. W następnej kolejności ładują się: na stacji nr 1 - dywizjon rakiet taktycznych, na stacji nr 2 - batalion łączności. Jako ostatni jednocześnie na dwóch stacjach - pułk artylerii przeciwlotniczej.

Czas załadowania pierwszego i drugiego rzutu około 6 godzin.

Dowódca pułku zdecydował osłaniać obydwie stacje załadownicze w rejonie OBORNIKI. Ocenia on jako najbardziej prawdopodobne dwa warianty działania przeciwnika:

a/ Wyjście w rejon celu na małych wysokościach i wykonanie ataku z lotu koszącego lub nurkowego pod kątami nurkowania do  $30^{\circ}$ . Bezpośrednio przed atakiem wydzielona grupa samolotów usiłuje obezwładnić wykryte środki obrony przeciwlotniczej.

b/ Wykonanie ataku z małych lub średnich wysokości /do 2500 m/ przy użyciu pocisków rakietowych "powietrze-ziemia" z jednoczesnym obezwładnieniem wykrytych środków obrony przeciwlotniczej.

Podstawowe parametry charakteryzujące prawdopodobne sposoby działania przeciwnika podaje tabela 5.

Należy określić jak najcelowiej jest ugrupować środki obrony przeciwlotniczej, aby zapewnić możliwie najlepsze warunki zwalczania samolotów wykonujących ataki na stacje załadownicze w rejonie OBORNIKI.

WARIANTY DZIAŁANIA ŚRODKÓW NAPADU POWIETRZNEGO NPLA  
NA STACJE ZAŁADOWCZE W M. OBORNIKI

Warianty działania npla /j/	Rodzaj lotnictwa	Ilość samol.	Wysokość /w m/	Prędkość w m/sek	Odległ. rozpocz. ataku	Wielkość odcinka kursu boj.	Rodzaj środków rażenia
<p><u>j=1</u></p> <p>Wyjście w rejon celu na małych wysokościach i wykonanie ataku z lotu koszącego lub nurkowego pod kątami w granicach do 30°.</p>	myśl.-bomb. F-84F	8 -12	do 1000 <sup>x</sup> / 1500 - -2500/	około 200-220	do 1000 m	około 2500 - -3000	Bomby odłamkowo-burzące lub napalm
<p><u>j=2</u></p> <p>wykonanie ataku z małych lub średnich wysokości z użyciem pocisków raketowych "powietrze-ziemia"</p>	myśl.-bomb. F-100D i F	do 6	do 2500	do 250	od 8000 do 3500	około 4500	Pociski kierowane z ładunkiem zwykłym lub jądrowym o mocy do 10 KT.

Uwaga: W wariantach działania j=1 i j=2 zakłada się możliwość uderzeń na SO baterii siłami jednego klucza samolotów myśliwsko-bombowych. Ponadto przyjmuje się, że w wariancie j=1 do ataku samoloty podchodzą parami.

x/ Dolot do rejonu celu samoloty wykonują na małych wysokościach /max do 1000 m/. W rejonie celu /w przypadku ataku z lotu nurkowego/ samoloty wychodzą na wysokość 1500-2500 m, wykonując 2-3 zajścia na wybrane cele. Atak może być wykonywany jednocześnie na stacje załadownicze nr 1 i 2 lub tylko na jedną z nich. Obiektami ataków mogą być także rozjazdy kolejowe.

we.

Tabela 6

Warianty ugrupowania pododdziałów ogniowych /k/	j = 1						j = 2						$\min P_{1k}^{j(\varphi)}$
	$\varphi_1$	$\varphi_2$	$\varphi_3$	$\varphi_4$	$\varphi_5$	$\varphi_6$	$\varphi_1$	$\varphi_2$	$\varphi_3$	$\varphi_4$	$\varphi_5$	$\varphi_6$	
<u>k=1</u> Wszystkie pododdziały ugrupować na rubieży do około 1 km	0,42	0,42	0,41	0,40	0,38	0,39	0,21	0,21	0,20	0,20	0,19	0,19	0,19
<u>k=2</u> Wszystkie pododdziały ugrupować na rubieży do około 2 km	0,30	0,31	0,29	0,26	0,24	0,27	0,31	0,31	0,30	0,27	0,27	0,28	0,24
<u>k=3</u> Wszystkie pododdziały ugrupować na rubieży do około 3 km	0,20	0,21	0,19	0,19	0,18	0,19	0,31	0,31	0,30	0,27	0,27	0,28	0,18
<u>k=4</u> Jeden pododdział ugrup. na rub. do 1 km a trzy na rub. do 2 km	0,30	0,31	0,29	0,29	0,28	0,29	0,28	0,29	0,28	0,27	0,27	0,27	0,27
<u>k=5</u> Jeden pododdział ugrup. na rubieży do 1 km, a trzy na rubieży około 3 km	0,26	0,27	0,25	0,25	0,24	0,25	0,28	0,29	0,28	0,27	0,26	0,27	0,24

Warianty ugrupowania pododdziałów ogniowych /k/ =====	j = 1						j = 2						min $P_{1k}^j(\varphi)$ =====
	$\varphi_1$	$\varphi_2$	$\varphi_3$	$\varphi_4$	$\varphi_5$	$\varphi_6$	$\varphi_1$	$\varphi_2$	$\varphi_3$	$\varphi_4$	$\varphi_5$	$\varphi_6$	
<u>k=6</u> Jeden pododdział ugrup. na rubieży do 2 km, a trzy na rubeży około 3 km	0,24	0,25	0,23	0,22	0,22	0,23	0,30	0,31	0,30	0,27	0,27	0,28	0,22
<u>k=7</u> Dwa pododdziały ugrup. na rubieży do 1 km i dwa na rubeży około 2 km	0,35	0,36	0,34	0,34	0,33	0,33	0,25	0,26	0,25	0,24	0,23	0,24	0,23
<u>k=8</u> Dwa pododdziały ugrup. na rubieży około 2 km i dwa na rubeży około 3 km	0,24	0,24	0,23	0,22	0,22	0,22	0,29	0,30	0,29	0,27	0,27	0,28	0,22
$\max P_{1k}^j(\varphi)$ K	0,42	0,42	0,41	0,40	0,38	0,39	0,31	0,31	0,30	0,27	0,27	0,28	-

Schemat nr 3 przedstawia praktyczną realizację pierwszych czterech punktów algorytmu. Wyniki obliczeń zostały zestawione w tabeli 6, która stanowi macierz gry.

Dla przykładu objaśnimy sposób obliczania jednego z elementów macierzy. Niech to będzie element odpowiadający wariantowi ugrupowania  $k=5$  oraz wariantowi działania przeciwnika  $j=2$  z kierunku  $\varphi_5$ . Wartość tego elementu jest równa 0,26.

Posługując się nomogramem /zał.6/ określamy dla każdej baterii i poszczególnych grup czasów lotu pocisku ilości strzałów, jaka przypada na każdy cel /samolot/. Otrzymane wyniki zestawiamy w tabeli 7.

Tabela 7

$k=5, j=2, \varphi_5$ .

Grupy czasów lotu pocisku /t/	Numery baterii				4 $\sum_{b=1} a_{tb} = s_t$	
	1	2	3	4		
10 - 8	3	-	3	3	9	0,03
8 - 6	3	-	5	5	13	0,06
6 - 4	-	-	5	5	10	0,07
4 - 2	-	-	5	4	9	0,11
2 - 1	-	-	2	-	2	0,03

Następnie dla sum częściowych z ostatniej kolumny / $s_t$ / odczytujemy z tabeli /zał.3/ odpowiadające im wartości  $A_t$  i zapisujemy je w formie tabeli 8.

Tabela 8

t	10-8	8-6	6-4	4-2	2-1	-
$s_t$	9	12	8	5	2	36
$A_t$	0,03	0,06	0,07	0,11	0,03	0,30

Mając obliczony wykładnik potęgi  $A$ , wartość średniego prawdopodobieństwa  $P_{1k}^j$  określamy na podstawie tabeli /zał.4/. Wynosi ono  $0,2592 \approx 0,26$ .

W analogiczny sposób obliczamy każdy z elementów macierzy gry.

Z tabeli 7 wynika, że najbardziej korzystnym wariantem ugrupowania jest wariant czwarty / $k=4$ /, ponieważ spełnia warunek /4.10/. Wartość gry wynosi  $0,27$ . Oznacza to, że grupując środki obrony przeciwlotniczej według wariantu czwartego, możemy uzyskać wartość prawdopodobieństwa  $P_{14}^{j(\varphi)}$  równą co najmniej  $0,27$  bez względu na to, który wariant działania przeciwnik zastosuje. Żaden inny wariant ugrupowania tak wysokiej efektywności osłony obiektu nie zapewnia.

Jako zapasowe warianty można przyjąć  $k=2$  i  $k=5$ ; są one równoważne pod względem efektywności osłony obiektu / $V_1 = 0,24$ /

Dla przeciwnika najbardziej korzystnym wariantem działania jest  $j=2$  z kierunków  $\varphi_4$  i  $\varphi_5$ , tzn. bezpośrednio przed atakiem na stacje załadowcze wykonać uderzenie siłami klucza samolotów na SO jednej z baterii /np. pierwszej lub trzeciej/ odwracając tym samym uwagę środków OPL, a następnie podchodząc z kierunków  $\varphi_4$  lub  $\varphi_5$  /stosunkowo najslabiej bronionych/ uderzyć przy użyciu pocisków kierowanych "powietrze-ziemia" /około 2 samoloty/ na obydwie stacje załadowcze lub tylko na jedną z nich.

Warto dodać, że w praktyce najczęściej podobny wariant ugrupowania jest stosowany, być może z pewnymi niedokładnościami, szczególnie jeśli chodzi o oddalenie pododdziałów ogniowych od osłanianego obiektu.

### WNIOSKI KONCOWE

Na zakończenie podamy kilka ogólnych wniosków, jakie nasuwają się z całości pracy. Wnioski te można sformułować następująco:

1. Problem obrony przeciwlotniczej obiektu /zespołu obiektów/ jest w swej istocie grą z reguły o niepełnej informacji; ogólny model matematyczny jest modelem gry dwuosobowej o sumie zero ze skończoną liczbą strategii.

2. Jako funkcję kryterium, stanowiącą miarę efektywności systemu OPL, najcelowiej jest przyjąć:

a/ dla pojedynczego obiektu - prawdopodobieństwo jego obrony, które wyraża się wzorem /2.3/;

b/ dla zespołu obiektów - średnią wartość prawdopodobieństwa z uwzględnieniem ważności poszczególnych obiektów, wyrażoną wzorem /2.19/.

3. Prawdopodobieństwo wykonania zadania przez przeciwnika /Q/ nie przewyższa mniejszej z dwóch liczb  $Q_1$  i  $Q_2$ , tzn.

$$Q \leq \min(Q_1, Q_2).$$

4. Ze wzoru /2.19/ oraz wniosków z rozdziału czwartego wynika, że tworząc ugrupowanie bojowe sił i środków OPL w osłonie zespołu obiektów, powinniśmy zawsze skupiać główny wysiłek osłony na obiektach o dużej ważności. Potwierdza to w pełni dotychczas przyjmowaną zasadę dotyczącą skupiania głównego wysiłku osłony. Sformułowany w rozdziale czwartym model /tabela <sup>s.81</sup> 17/ zasadę tę pozwala w praktyce skutecznie realizować.

5. Stosując opisaną w pracy metodę można praktycznie określić optymalne ugrupowanie bojowe z uwzględnieniem takich

czynników, jak: prawdopodobna działalność przeciwnika, stopień oddziaływania sił i środków OPL bezpośredniego sąsiada, skład i możliwości własnych środków OPL oraz teren.

Skuteczność jej stosowania zależy przede wszystkim od znajomości taktyki wojsk OPL, doświadczenia w rozwiązywaniu problemów operacyjno-taktycznych oraz znajomości elementów badań operacyjnych.

6. Z rozdziału szóstego wynika, że szereg czynności związanych z wyborem optymalnego ugrupowania można zaprogramować na maszynę cyfrową.

Wykorzystanie maszyny cyfrowej może skrócić wielokrotnie czas potrzebny na wypracowanie optymalnej decyzji, odciążając oficerów sztabu od wykonywania mechanicznych i żmudnych obliczeń. Tak więc przedstawiona metoda może być stosowana nawet w szybko zmieniającej się sytuacji operacyjnej.

Przy ręcznych obliczeniach, z uwagi na dużą pracochłonność, metoda ta może być przede wszystkim stosowana do ustalenia pewnych ogólnych zasad ugrupowania sił i środków OPL lub do weryfikacji zasad już istniejących.

7. Na podstawie analizy modelu matematycznego oraz przykładów podanych w rozdziale siódmym można sformułować kilka ogólnych zasad użycia rakiet i artylerii przeciwlotniczej do osłony obiektów:

a/ Przeciwnik w zasadzie jest w stanie zaatakować obiekt z dowolnego kierunku; będzie on jednak usiłował wykonać atak na kierunku najdogodniejszym /zapewniającym największe prawdopodobieństwo wykonania zadania/, wykorzystując w tym celu słabe punkty obrony. Istnienie takich punktów powinno być wykluczone, tzn. łączne prawdopodobieństwo

obrony obiektu<sup>x/</sup> na wszystkich kierunkach powinno być w przybliżeniu jednakowe. Chcąc to osiągnąć należy na wybranych kierunkach skupić główny wysiłek osłony, by odpowiednio zmniejszyć prawdopodobieństwo wykonania zadania przez przeciwnika.

- b/ Należy dążyć do zadania przeciwnikowi maksymalnych strat. W tym celu ugrupowanie rakiet i artylerii przeciwlotniczej musi zapewniać najdogodniejsze warunki prowadzenia ognia z uwzględnieniem prawdopodobnych sposobów ataku przeciwnika.
- c/ Przeciwnik musi być zwalczany w sposób ciągły przez cały czas przebywania w strefie ognia. Wynika stąd konieczność osłony martwych stref przez sąsiadujące z sobą pododdziały ogniowe.
- d/ Ogień należy prowadzić do możliwie największej liczby celów co oznacza, że dowódca pododdziału ogniowego w przypadku nie wskazania celu wybiera w pierwszej kolejności cele, które nie są zwalczane. Przerwanie ognia do danego celu może nastąpić wtedy, gdy pokaże się nowy cel bardziej zagrożający obiektowi.
- e/ Stanowiska ogniowe należy w miarę możliwości wybierać tak, aby można było z nich wykonywać również inne zadania /np. zwalczanie celów naziemnych lub nawodnych/ lecz bez większego uszczerbku dla zadania głównego, to jest walki z celami powietrznymi.

8. Problem wyboru najkorzystniejszego ugrupowania sił i środków OPL wiąże się ściśle z optymalizacją podziału ognia.

---

x/ Z uwzględnieniem stopnia oddziaływania środków OPL bezpośrednich sąsiadów, lotnictwa myśliwskiego, skuteczności poszczególnych sposobów ataku przeciwnika itp.

Określenie bowiem wartości funkcji kryterium dla każdego wariantu ugrupowania powinna zawsze poprzedzać optymalizacja podziału ognia. Szczegółowe obliczenia wskazują na celowość centralizacji kierowania ogniem całości sił i środków OPL wydzielonych do osłony obiektu; wartość oczekiwana liczby różnych celów jest z reguły większa w przypadku centralizacji podziału ognia pod warunkiem odpowiednio wczesnego wykrycia celów.

9. Przedstawiona w pracy metoda może być stosowana do określania optymalnego ugrupowania zarówno w odniesieniu do obiektów stałych położonych na zapleczu frontu, jak i obiektów ruchomych, znajdujących się w strefie wojsk operacyjnych.

10. Zastosowanie metod matematycznych i EMC w dziedzinie obrony przeciwlotniczej nie ma na celu wyeliminowania zespołów ludzkich z procesu wypracowywania i podejmowania decyzji, lecz zbliżenie tych zespołów do jednostek przez nie kierowanych oraz efektywniejsze wykorzystanie posiadanych sił i środków, odciążając ich od wykonywania pracochłonnych i żmudnych obliczeń.

DOWÓD TWIERDZENIA O OPTYMALNYM PODZIALE OGNI

Niech będzie dana macierz  $[p_{bg}]$ ,  $b = 1, 2, \dots, m$ ;  
 $g = 1, 2, \dots, r$ , której wyrazy spełniają nierówność:  
 $0 \leq p_{bg} \leq 1$ .

Danych jest więc  $m$  pododdziałów ogniowych /ponumerowa-  
nych od 1 do  $m$ / i  $r$  obiektów stanowiących cele dla tych pod-  
oddziałów /cele ponumerowane są liczbami od 1 do  $r$ /, przy  
czym liczba  $p_{bg}$  oznacza prawdopodobieństwo rażenia celu o in-  
deksie  $g$  przez pododdział o numerze  $b$ .

Założmy, że:

- 1<sup>o</sup> żaden pododdział nie ma możliwości przeniesienia  
ognia w tej samej sytuacji powietrznej;
- 2<sup>o</sup> nie ma potrzeby, aby dwa pododdziały prowadziły  
ogień do tego samego celu.

Przy tych założeniach mamy dać odpowiedź na następujące  
pytanie: Jak podzielić ogień, aby wartość oczekiwana liczby  
rażonych celów przez wszystkie pododdziały była maksymalna ?

Innymi słowy, w macierzy  $[p_{bg}]$  należy wyróżnić pewną  
ilość wyrazów /wyróżnienie np. wyrazu  $p_{25}$  oznacza, że drugi  
pododdział prowadzi ogień do piątego celu/ w ten sposób,  
ażeby:

- 1<sup>o</sup> w każdym wierszu i kolumnie wyróżniony został co  
najwyżej jeden wyraz;
- 2<sup>o</sup> suma wyrazów wyróżnionych była maksymalna.

Wybór spełniający warunki 1<sup>o</sup> i 2<sup>o</sup> nazwiemy wyborem  
optymalnym /lub optymalnym podziałem ognia/.

Formułujemy następujące twierdzenie:

Przy optymalnym wyborze istnieje co najmniej jeden wiersz, w którym wyróżniony został wyraz maksymalny.

W odniesieniu do zwalczania celów powietrznych przez środki obrony przeciwlotniczej twierdzenie to daje się sformułować następująco:

Przy optymalnym podziale ognia istnieje co najmniej jeden pododdział ogniowy, któremu przydzielony został cel najkorzystniejszy pod względem prawdopodobieństwa rażenia.

Podamy teraz przykład, w którym zaistnieje sytuacja taka, że optymalny podział ognia wyznaczy tylko jeden pododdział, który ma prowadzić ogień do najkorzystniejszego pod względem prawdopodobieństwa rażenia celu, pozostałe pododdziały będą prowadzić ogień do celów nie będących dla nich najdogodniejszymi:

Pododdziały ogniowe	C e l e		
	1	2	3
1	0,7	0	0
2	0,8	0,7	0
3	0	0,8	0,7

Optymalnym podziałem ognia jest podział następujący: pierwszy pododdział prowadzi ogień do pierwszego celu, drugi pododdział do drugiego celu i trzeci - do trzeciego celu.

W podanej sytuacji tylko jeden pododdział prowadzi ogień do celu najkorzystniejszego pod względem prawdopodobieństwa rażenia. Jest nim pododdział pierwszy.

Dowód twierdzenia. Rozpatrzmy najpierw przypadek, gdy  $m = r$ .

W dowodzie twierdzenia zastosujemy indukcję matematyczną.

1<sup>o</sup> dla  $r = 1$  twierdzenie jest prawdziwe.

2<sup>o</sup> założmy prawdziwość twierdzenia przy pewnym  $r \geq 1$ .

Wykażemy, że jest ono słuszne i dla  $r + 1$ : Gdyby bowiem dla  $r + 1$  twierdzenie było fałszywe, oznaczałoby to, że istnieje macierz kwadratowa  $M$  o wymiarach  $/r + 1/ \times /r + 1/$  i taki wybór optymalny  $a_1, a_2, \dots, a_{r+1}$ , że żaden z wyrazów  $a_g$  nie jest elementem maksymalnym w swoim wierszu. Wynika stąd, że w każdym wierszu istnieje wyraz  $a'_g > a_g$ . Bez zmniejszenia ogólności rozważań można założyć, że wyrazy  $a_1, a_2, \dots, a_{r+1}$  znajdują się na głównej przekątnej macierzy  $M$  /w razie potrzeby możemy kolumny w macierzy  $M$  przestawić/.

Jeżeli wszystkie  $a'_g$  znajdują się w różnych kolumnach, to wybór  $a'_1, a'_2, \dots, a'_{r+1}$  jest "lepszy" niż  $a_1, a_2, \dots, a_{r+1}$ , co jest niemożliwe wobec optymalności wyboru  $a_1, a_2, \dots, a_{r+1}$ , wobec czego nie wszystkie wyrazy  $a'_g /g = 1, 2, \dots, r+1/$  znajdują się w różnych kolumnach, czyli dwa z nich znajdują się w jednej kolumnie. Pociąga to za sobą istnienie kolumny, w której nie występuje żaden spośród wyrazów  $a'_1, a'_2, \dots, a'_{r+1}$ ; numer tej kolumny oznaczmy symbolem  $g'$ .

Wykreślmy teraz z macierzy  $M$  kolumnę o numerze  $g'$  i wiersz o numerze  $g'$ . W otrzymanej macierzy kwadratowej  $M'$  rzędu  $r$  wybór  $a_1, a_2, \dots, a_{g'-1}, a_{g'+1}, \dots, a_r$  — jest optymalny. Istotnie, gdyby w tej macierzy wybór  $\bar{a}_1, \bar{a}_2, \dots, \bar{a}_{g'-1}, \bar{a}_{g'+1}, \dots, \bar{a}_{r+1}$  był "lepszy" od wyboru  $a_1, a_2, \dots, a_{g'-1}, a_{g'+1}, \dots, a_{r+1}$ , to w macierzy  $M$  wybór  $\bar{a}_1, \bar{a}_2, \dots, \bar{a}_{g'-1}, \bar{a}_{g'}, \bar{a}_{g'+1}, \dots, \bar{a}_{r+1}$  byłby "lepszym" od wyboru  $a_1, a_2, \dots, a_{r+1}$ , co wobec optymalności tego ostatniego jest niemożliwe. Z drugiej jednak strony w każdym wierszu macierzy  $M'$  oprócz wyrazu  $a_g$  występuje rów-

niez większy od niego wyraz  $a'_g$  /wykreśliliśmy z macierzy  $M$  kolumnę nie zawierającą żadnego wyrazu spośród  $a'_1, a'_2, \dots, a'_{r+1}$ /, co przeczy przyjętemu przez nas założeniu indukcyjnemu, gdyż  $M'$  ma wymiary  $r \times r$ . Otrzymana sprzeczność dowodzi słuszności twierdzenia dla  $r+1$  i dzięki indukcji dla każdego  $r$ .

Przypadek, gdy  $r > m$ . Niech  $a_1, a_2, \dots, a_m$  będzie wyborem optymalnym w macierzy  $M$  o wymiarach  $m \times r$  i niech macierz  $M'$  będzie macierzą powstałą po skreśleniu z  $M$  tych kolumn, które nie zawierają żadnego spośród wyrazów  $a_b$  / $b = 1, 2, \dots, m$ /. Zgodnie z rozważaniami dotyczącymi przypadku  $m = r$ , istnieje co najmniej jeden taki wyraz  $a_b$ , który jest maksymalny w swoim wierszu w macierzy  $M'$  /gdyż  $M'$  ma wymiary  $m \times m$ /. Wyraz ten jest maksymalny w swoim wierszu również w macierzy  $M$ ; gdyby bowiem istniał wyraz  $a'_b > a_b$  w tym wierszu, to musiałby on należeć do którejś z wykreślonych kolumn, a wówczas wybór  $a_1, a_2, \dots, a_{b-1}, a'_b, a_{b+1}, \dots, a_m$  byłby "lepszy" od wyboru  $a_1, a_2, \dots, a_m$ , co jest niemożliwe.

Przypadek, gdy  $m > r$ . Niech  $a_1, a_2, \dots, a_m$  będzie wyborem optymalnym w macierzy  $M$  o wymiarach  $m \times r$  i niech macierz  $M'$  będzie macierzą powstałą po skreśleniu z  $M$  wszystkich tych wierszy, które nie zawierają żadnego z wyrazów  $a_b$  / $b=1, 2, \dots, m$ /. Macierz  $M'$  jest kwadratowa / $m \times m$ / i w ten sposób przypadek  $m > r$  sprowadza się do przypadku  $m = r$ , gdy wiersze w macierzy  $M'$  są wierszami macierzy  $M$ .

Twierdzenie więc zostało udowodnione.

ALGORYTM

OPTIMALNEGO PODZIAŁU PODODDZIAŁÓW OGNIOWYCH DO ZWALCZANIA  
CELÓW POWIETRZNYCH

1. Wypisać maksymalne wartości z każdego wiersza macierzy  $M = [p_{bg}]$  i liczbę zer w danym wierszu.
2. Spośród wypisanych wartości wybrać minimalną. Jeżeli takich wartości jest więcej niż jedna, wybrać tę, gdzie ilość zer w danym wierszu jest największa.
3. Sprawdzić, czy wybrana wartość  $\min_b \max_g p_{bg}$  jest jednocześnie wartością maksymalną w danej kolumnie. Jeżeli tak - piszemy liczbę 1, jeśli nie - sprawdzamy, czy w danym wierszu są wartości równe  $a = \min_b \max_g p_{bg}$ . Jeżeli tak, postępujemy z każdą z nich jak wyżej, jeśli nie - tworzymy różnicę  $d_{bg} = |a_{bg} - \bar{p}_{bg}|$ , gdzie  $\bar{p}_{bg}$  - największy element w wierszu  $b$  po  $a_{bg}$ . Gdy  $d_{bg} = a_{bg}$  - piszemy 1. Następnie tworzymy drugą różnicę w kolumnie, gdzie jest wartość  $a_{bg}$ , czyli  $\bar{d}_{bg} = |\bar{p}_{bg} - a_{bg}|$ , gdzie  $\bar{p}_{bg}$  - maksymalna wartość w kolumnie odpowiadającej  $a_{bg}$ .
4. W przypadku, gdy  $d_{bg} \geq \bar{d}_{bg}$  - wartość  $a_{bg}$  podlega wyborowi i wobec tego piszemy 1. Jeżeli  $d_{bg} < \bar{d}_{bg}$  - przechodzimy do wiersza odpowiadającego wartości  $\bar{d}_{bg}$  i wybieramy w nim wartość maksymalną, pisząc 1.
5. Wracamy ponownie do wiersza  $a_{bg}$  i tworzymy różnicę  $d_{bg}^1 = |a_{bg}^1 - p_{bg}|$  z wykluczeniem wierszy i kolumn, gdzie wybór został dokonany.
6. Postępujemy zgodnie z punktami 3 i 4, a następnie zgodnie z punktem 5.

7. Przechodzimy kolejno do następnych wierszy odpowiadających wartości  $\min_b \max_g p_{bg}$  z wykluczeniem wierszy, gdzie wybór został dokonany.

8. Sumujemy elementy macierzy:

$$\sum_{b=1}^m \sum_{g=1}^r p_{bg}.$$

T A B E L A 1

Wartości  $A_t = \sum_1^m p_{tb}$  dla 57 mm baterii /6 dział z P-6-60/

t/sek/	12-10	10-8	8-6	6-4	4-2	2 -1
$s_t$	$A_t$					
1	0,0024	0,0034	0,0050	0,0074	0,0130	0,0186
2	0,0048	0,0068	0,0100	0,0148	0,0260	0,0372
3	0,0072	0,0102	0,0150	0,0222	0,0390	0,0558
4	0,0096	0,0136	0,0200	0,0296	0,0520	0,0744
5	0,0120	0,0170	0,0250	0,0370	0,0650	0,0930
6	0,0144	0,0204	0,0300	0,0444	0,0780	0,1116
7	0,0168	0,0238	0,0350	0,0518	0,0910	0,1302
8	0,0192	0,0272	0,0400	0,0592	0,1040	0,1488
9	0,0216	0,0306	0,0450	0,0666	0,1170	0,1674
10	0,0240	0,0340	0,0500	0,0740	0,1300	0,1860
11	0,0264	0,0374	0,0550	0,0814	0,1430	0,2046
12	0,0288	0,0408	0,0600	0,0888	0,1560	0,2232
13	0,0312	0,0442	0,0650	0,0962	0,1690	0,2418
14	0,0336	0,0476	0,0700	0,1036	0,1820	0,2604
15	0,0360	0,0510	0,0750	0,1110	0,1950	0,2790
16	0,0384	0,0544	0,0800	0,1184	0,2080	0,2976
17	0,0408	0,0578	0,0850	0,1258	0,2210	0,3162
18	0,0432	0,0612	0,0900	0,1332	0,2340	0,3348
19	0,0456	0,0646	0,0950	0,1406	0,2470	0,3534
20	0,0480	0,0680	0,1000	0,1480	0,2600	0,3720
21	0,0504	0,0714	0,1050	0,1554	0,2730	0,3906
22	0,0528	0,0748	0,1100	0,1628	0,2860	0,4092
23	0,0552	0,0782	0,1150	0,1702	0,2990	0,4278
24	0,0576	0,0816	0,1200	0,1776	0,3120	0,4464
25	0,0600	0,0850	0,1250	0,1850	0,3250	0,4650
26	0,0624	0,0884	0,1300	0,1924	0,3380	0,4836
27	0,0648	0,0918	0,1350	0,1998	0,3510	0,5022
28	0,0672	0,0952	0,1400	0,2072	0,3640	0,5208
29	0,0696	0,0986	0,1450	0,2146	0,3770	0,5394
30	0,0720	0,1020	0,1500	0,2220	0,3900	0,5580
31	0,0744	0,1054	0,1550	0,2294	0,4030	0,5766
32	0,0768	0,1088	0,1600	0,2368	0,4160	0,5952
33	0,0792	0,1122	0,1650	0,2442	0,4290	0,6138
34	0,0816	0,1156	0,1700	0,2516	0,4420	0,6324
35	0,0840	0,1190	0,1750	0,2590	0,4550	0,6510
36	0,0864	0,1224	0,1800	0,2664	0,4680	0,6696
37	0,0888	0,1258	0,1850	0,2738	0,4810	0,6882
38	0,0912	0,1292	0,1900	0,2812	0,4940	0,7068
39	0,0936	0,1326	0,1950	0,2886	0,5070	0,7254
40	0,0960	0,1360	0,2000	0,2960	0,5200	0,7440

T A B E L A 2

Wartości  $A_t = \sum_1^m p_{tb}$  dla 57 mm baterii /8dział z P-6-60/

t/sek/	12-10	10-8	8-6	6-4	4-2	2-1
$s_t$	$A_t$					
1	0,0031	0,0046	0,0066	0,0099	0,0173	0,0247
2	0,0062	0,0092	0,0132	0,0198	0,0346	0,0494
3	0,0093	0,0138	0,0198	0,0297	0,0519	0,0741
4	0,0124	0,0184	0,0264	0,0395	0,0692	0,0988
5	0,0155	0,0230	0,0330	0,0495	0,0865	0,1235
6	0,0186	0,0276	0,0396	0,0594	0,1038	0,1482
7	0,0217	0,0322	0,0462	0,0693	0,1211	0,1729
8	0,0248	0,0368	0,0528	0,0792	0,1384	0,1976
9	0,0279	0,0414	0,0594	0,0891	0,1557	0,2223
10	0,0310	0,0460	0,0660	0,0990	0,1730	0,2470
11	0,0341	0,0506	0,0726	0,1089	0,1903	0,2717
12	0,0372	0,0552	0,0792	0,1188	0,2076	0,2964
13	0,0403	0,0598	0,0858	0,1287	0,2249	0,3211
14	0,0434	0,0644	0,0924	0,1386	0,2422	0,3458
15	0,0465	0,0690	0,0990	0,1485	0,2595	0,3705
16	0,0496	0,0736	0,1056	0,1584	0,2768	0,3952
17	0,0527	0,0782	0,1122	0,1683	0,2941	0,4199
18	0,0558	0,0828	0,1188	0,1782	0,3114	0,4446
19	0,0589	0,0874	0,1254	0,1881	0,3287	0,4693
20	0,0620	0,0920	0,1320	0,1980	0,3460	0,4940
21	0,0651	0,0966	0,1386	0,2079	0,3633	0,5187
22	0,0682	0,1012	0,1452	0,2178	0,3806	0,5434
23	0,0712	0,1058	0,1518	0,2277	0,3979	0,5681
24	0,0744	0,1104	0,1584	0,2376	0,4152	0,5928
25	0,0775	0,1150	0,1650	0,2475	0,4325	0,6175
26	0,0805	0,1196	0,1716	0,2574	0,4498	0,6422
27	0,0837	0,1242	0,1782	0,2673	0,4671	0,6669
28	0,0868	0,1288	0,1848	0,2772	0,4844	0,6916
29	0,0899	0,1334	0,1914	0,2871	0,5017	0,7163
30	0,0930	0,1380	0,1980	0,2970	0,5190	0,7410
31	0,0961	0,1426	0,2046	0,3069	0,5363	0,7657
32	0,0992	0,1472	0,2112	0,3168	0,5536	0,7904
33	0,1023	0,1518	0,2178	0,3267	0,5709	0,8151
34	0,1054	0,1564	0,2244	0,3366	0,5882	0,8398
35	0,1085	0,1610	0,2310	0,3465	0,6055	0,8645
36	0,1116	0,1656	0,2376	0,3564	0,6228	0,8892
37	0,1147	0,1702	0,2442	0,3663	0,6401	0,9139
38	0,1178	0,1748	0,2508	0,3762	0,6574	0,9386
39	0,1209	0,1794	0,2574	0,3861	0,6747	0,9633
40	0,1240	0,1840	0,2640	0,3960	0,6920	0,9880

T A B E L A 3

Wartości  $A_t = \sum_{1}^m p_{tb}$  dla 85 mm baterii / 8dział /

t/sek	30-25	25-20	20-16	16-14	14-12	12-10	10-8	8-6	6-4	4-2
$s_t$	$A_t$									
1	0,0042	0,0074	0,0150	0,0200	0,0245	0,0289	0,0330	0,0360	0,0382	0,0400
2	0,0084	0,0148	0,0300	0,0400	0,0490	0,0578	0,0660	0,0720	0,0764	0,0800
3	0,0126	0,0222	0,0450	0,0600	0,0735	0,0867	0,0990	0,1080	0,1146	0,1200
4	0,0168	0,0296	0,0600	0,0800	0,0980	0,1156	0,1320	0,1440	0,1528	0,1600
5	0,0210	0,0370	0,0750	0,1000	0,1225	0,1445	0,1650	0,1800	0,1910	0,2000
6	0,0252	0,0444	0,0900	0,1200	0,1470	0,1734	0,1980	0,2160	0,2292	0,2400
7	0,0294	0,0518	0,1050	0,1400	0,1715	0,2023	0,2310	0,2520	0,2674	0,2800
8	0,0336	0,0592	0,1200	0,1600	0,1960	0,2312	0,2640	0,2880	0,3056	0,3200
9	0,0378	0,0666	0,1350	0,1800	0,2205	0,2601	0,2970	0,3240	0,3438	0,3600
10	0,0420	0,0740	0,1500	0,2000	0,2450	0,2890	0,3300	0,3600	0,3820	0,4000
11	0,0462	0,0814	0,1650	0,2200	0,2695	0,3179	0,3630	0,3960	0,4202	0,4400
12	0,0504	0,0888	0,1800	0,2400	0,2940	0,3468	0,3960	0,4320	0,4584	0,4800
13	0,0545	0,0962	0,1950	0,2600	0,3185	0,3757	0,4290	0,4680	0,4966	0,5200
14	0,0588	0,1036	0,2100	0,2800	0,3430	0,4046	0,4620	0,5040	0,5348	0,5600
15	0,0630	0,1110	0,2250	0,3000	0,3675	0,4335	0,4950	0,5400	0,5730	0,6000
16	0,0672	0,1184	0,2400	0,3200	0,3920	0,4624	0,5280	0,5760	0,6112	0,6400
17	0,0714	0,1258	0,2550	0,3400	0,4165	0,4913	0,5610	0,6120	0,6494	0,6800
18	0,0756	0,1332	0,2700	0,3600	0,4410	0,5202	0,5940	0,6480	0,6876	0,7200
19	0,0798	0,1406	0,2850	0,3800	0,4655	0,5491	0,6270	0,6840	0,7258	0,7600
20	0,0840	0,1480	0,3000	0,4000	0,4900	0,5780	0,6600	0,7200	0,7640	0,8000

$$\text{Wartości } P_{m,s} = 1 - e^{-A} \sum_{1}^s p_l / \text{gdzie } A = \sum_{1}^s p_l /$$

Załącznik 4

A	$P_{m,s}$	A	$P_{m,s}$	A	$P_{m,s}$	A	$P_{m,s}$	A	$P_{m,s}$	A	$P_{m,s}$	A	$P_{m,s}$	A	$P_{m,s}$
0,01	0,0100	0,31	0,2666	0,61	0,4536	0,91	0,5975	1,21	0,7018	1,51	0,7791	1,81	0,8267	2,11	0,8780
0,02	0,0198	0,32	0,2739	0,62	0,4621	0,92	0,6015	1,22	0,7048	1,52	0,7813	1,82	0,8380	2,12	0,8800
0,03	0,0296	0,33	0,2811	0,63	0,4674	0,93	0,6054	1,23	0,7077	1,53	0,7835	1,83	0,8396	2,13	0,8812
0,04	0,0392	0,34	0,2882	0,64	0,4727	0,94	0,6094	1,24	0,7106	1,54	0,7856	1,84	0,8412	2,14	0,8823
0,05	0,0488	0,35	0,2953	0,65	0,4780	0,95	0,6133	1,25	0,7135	1,55	0,7878	1,85	0,8428	2,15	0,8835
0,06	0,0582	0,36	0,3023	0,66	0,4831	0,96	0,6171	1,26	0,7163	1,56	0,7899	1,86	0,8443	2,16	0,8847
0,07	0,0676	0,37	0,3093	0,67	0,4883	0,97	0,6209	1,27	0,7192	1,57	0,7920	1,87	0,8459	2,17	0,8858
0,08	0,0769	0,38	0,3161	0,68	0,4934	0,98	0,6247	1,28	0,7220	1,58	0,7940	1,88	0,8474	2,18	0,8870
0,09	0,0861	0,39	0,3229	0,69	0,4984	0,99	0,6284	1,29	0,7247	1,59	0,7961	1,89	0,8489	2,19	0,8881
0,10	0,0952	0,40	0,3297	0,70	0,5034	1,00	0,6321	1,30	0,7275	1,60	0,7981	1,90	0,8504	2,20	0,8898
0,11	0,1042	0,41	0,3363	0,71	0,5084	1,01	0,6358	1,31	0,7302	1,61	0,8001	1,91	0,8519	2,21	0,8903
0,12	0,1131	0,42	0,3430	0,72	0,5132	1,02	0,6394	1,32	0,7329	1,62	0,8021	1,92	0,8534	2,22	0,8914
0,13	0,1219	0,43	0,3495	0,73	0,5181	1,03	0,6430	1,33	0,7355	1,63	0,8041	1,93	0,8549	2,23	0,8925
0,14	0,1306	0,44	0,3560	0,74	0,5229	1,04	0,6465	1,34	0,7382	1,64	0,8060	1,94	0,8563	2,24	0,8935
0,15	0,1393	0,45	0,3624	0,75	0,5276	1,05	0,6501	1,35	0,7408	1,65	0,8080	1,95	0,8577	2,25	0,8946
0,16	0,1479	0,46	0,3687	0,76	0,5323	1,06	0,6535	1,36	0,7433	1,66	0,8099	1,96	0,8591	2,26	0,8956
0,17	0,1563	0,47	0,3740	0,77	0,5360	1,07	0,6570	1,37	0,7459	1,67	0,8118	1,97	0,8605	2,27	0,8967
0,18	0,1647	0,48	0,3812	0,78	0,5416	1,08	0,6604	1,38	0,7484	1,68	0,8136	1,98	0,8619	2,28	0,8977
0,19	0,1730	0,49	0,3874	0,79	0,5462	1,09	0,6638	1,39	0,7509	1,69	0,8155	1,99	0,8633	2,29	0,8887
0,20	0,1813	0,50	0,3935	0,80	0,5507	1,10	0,6671	1,40	0,7534	1,70	0,8173	2,00	0,8647	2,30	0,8997
0,21	0,1894	0,51	0,3995	0,81	0,5551	1,11	0,6704	1,41	0,7559	1,71	0,8191	2,01	0,8660	2,31	0,9007
0,22	0,1975	0,52	0,4055	0,82	0,5596	1,12	0,6737	1,42	0,7583	1,72	0,8209	2,02	0,8673	2,32	0,9017
0,23	0,2055	0,53	0,4114	0,83	0,5640	1,13	0,6770	1,43	0,7607	1,73	0,8227	2,03	0,8687	2,33	0,9027
0,24	0,2134	0,54	0,4173	0,84	0,5683	1,14	0,6802	1,44	0,7631	1,74	0,8245	2,04	0,8700	2,34	0,9037
0,25	0,2212	0,55	0,4231	0,85	0,5726	1,15	0,6834	1,45	0,7654	1,75	0,8268	2,05	0,8713	2,35	0,9046
0,26	0,2289	0,56	0,4288	0,86	0,5768	1,16	0,6865	1,46	0,7678	1,76	0,8280	2,06	0,8725	2,36	0,9056
0,27	0,2366	0,57	0,4345	0,87	0,5810	1,17	0,6896	1,47	0,7701	1,77	0,8297	2,07	0,8738	2,37	0,9065
0,28	0,2442	0,58	0,4401	0,88	0,5852	1,18	0,6927	1,48	0,7734	1,78	0,8314	2,08	0,8751	2,38	0,9074
0,29	0,2513	0,59	0,4457	0,89	0,5893	1,19	0,6958	1,49	0,7756	1,79	0,8330	2,09	0,8763	2,39	0,9084
0,30	0,2592	0,60	0,4512	0,90	0,5934	1,20	0,6988	1,50	0,7769	1,80	0,8347	2,10	0,8775	2,40	0,9093
0,21	0,1894	0,51	0,3995	0,81	0,5551	1,11	0,6704	1,41	0,7559	1,71	0,8191	2,01	0,8660	2,31	0,9007
0,22	0,1975	0,52	0,4055	0,82	0,5596	1,12	0,6737	1,42	0,7583	1,72	0,8209	2,02	0,8673	2,32	0,9017
0,23	0,2055	0,53	0,4114	0,83	0,5640	1,13	0,6770	1,43	0,7607	1,73	0,8227	2,03	0,8687	2,33	0,9027
0,24	0,2134	0,54	0,4173	0,84	0,5683	1,14	0,6802	1,44	0,7631	1,74	0,8245	2,04	0,8700	2,34	0,9037
0,25	0,2212	0,55	0,4231	0,85	0,5726	1,15	0,6834	1,45	0,7654	1,75	0,8268	2,05	0,8713	2,35	0,9046
0,26	0,2289	0,56	0,4288	0,86	0,5768	1,16	0,6865	1,46	0,7678	1,76	0,8280	2,06	0,8725	2,36	0,9056
0,27	0,2366	0,57	0,4345	0,87	0,5810	1,17	0,6896	1,47	0,7701	1,77	0,8297	2,07	0,8738	2,37	0,9065
0,28	0,2442	0,58	0,4401	0,88	0,5852	1,18	0,6927	1,48	0,7734	1,78	0,8314	2,08	0,8751	2,38	0,9074
0,29	0,2513	0,59	0,4457	0,89	0,5893	1,19	0,6958	1,49	0,7756	1,79	0,8330	2,09	0,8763	2,39	0,9084
0,30	0,2592	0,60	0,4512	0,90	0,5934	1,20	0,6988	1,50	0,7769	1,80	0,8347	2,10	0,8775	2,40	0,9093

BIBLIOGRAFIA

1. W.O.Aszkenazy. Primienienije teorii igr w wojennom diele. Moskwa 1961 r.
2. C.Karlin. Matematyckije metody w teorii igr, programmirowanii i ekonomike. Moskwa 1964 r.
3. R.D.Luce i H.Raiffa. Gry i decyzje. PWN Warszawa 1964 r.
4. Mac Kinsi. Wwiedienije w teoriju igr. Moskwa 1960 r.
5. K.Bierz. Obszczaja teorija igr nieskolkich lic. Moskwa 1961
6. N.N.Worobiew. Matricznyje igry. Moskwa 1961r.
7. R.G.D.Allen. Ekonomia matematyczna. PWE Warszawa 1961 r.
- ✓ 8. O.Lange. Optymalne decyzje. WPW Warszawa 1964r.
9. Praca zbiorowa. Zastosowanie matematyki i maszyn elektronicznych w planowaniu. PWE Warszawa 1963 r.
- ✓ 10. Saul I.Gass. Programowanie liniowe. PWN Warszawa 1963 r.
- ✓ 11. A.S.Barsow. Co to jest programowanie liniowe. PWN Warszawa 1961 r.
12. G.Polya. Jak to rozwiązać? PWN Warszawa 1964 r.
13. T.Śródka. Ćwiczenia z kombinatoryki i rachunku prawdopodobieństwa. PWN Warszawa 1962 r.
14. B.Birkhoff i Mac Lane. Przegląd algebry współczesnej. PWN Warszawa 1963 r.
15. I.Birman i L.E.Minc. Matematyckije metody i problemy rozmieszczenia proizwodstwa. Moskwa 1963 r.
- ✓ 16. A.Przeniczny. Zasady ugrupowania bojowego artylerii przeciwlotniczej lufowej w osłonie mostów. Rozprawa doktorska, ASG Warszawa 1963 r. Nr 02613.
17. J.Zabłotni. Zwalczenie przez artylerię przeciwlotniczą małego i średniego kalibru samolotów działających na małych wysokościach z dużymi prędkościami lotu. Rozprawa doktorska, ASG Warszawa 1964 r. Nr 05054.

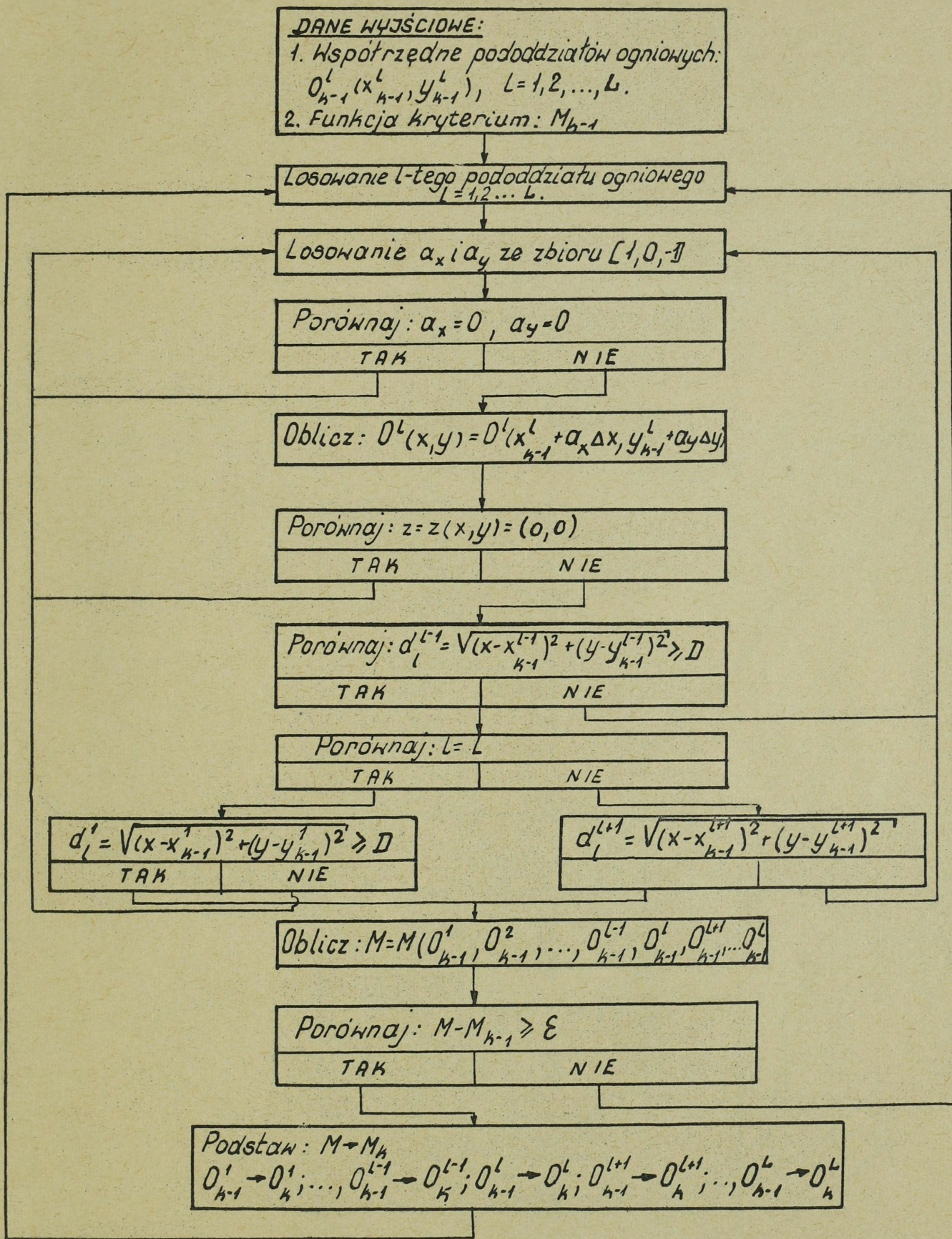
18. Praca zbiorowa pod redakcją B.T.Houldena. Z praktyki badań operacyjnych. PWN Warszawa 1964 r.
19. Hugon Steinhaus: Elementy nowoczesnej matematyki dla inżynierów. PWN Warszawa - Wrocław 1964 r.
20. E.S.Wentcel. W wiedenije w issledowanije opieraczi.  
"Sowietskoje Radio" Moskwa 1964 r.
21. Opracowanie zbiorowe. Tieorija bojowej efektiwnosti.  
Monino 1964 r.
22. Zbiór Prac ASG Nr 4 /39/ z grudnia 1967 r.
23. Wskaźniki skuteczności i ekonomiczności zwalczania celów powietrznych przez artylerię przeciwlotniczą. Wyd. ASG Warszawa 1967 r.
24. Cz.Gozdecki. Problem optymalnego ugrupowania naziemnych środków OPL w systemie obrony punktowej i strefowej w świetle badań operacyjnych. Wyd.ASG Warszawa Nr 08375.
25. S.I.Zuchowickij, L.I.Awdiejew. Liniejnoje i wypukłoje programiowanije. Moskwa 1967 r. Izdatielstwo "Nauka".
26. H.P.Künzi, W.Krelle. Programowanie nieliniowe /tłumaczenie/.  
Wyd.ASG
27. K.J.Arrow, L.Hurwicz, H.Uzawa. Issledowanija po liniejnomu i nieliniejnomu programiowaniju. Moskwa 1962 r. Izdatielstwo Inostrannoj Litieratury.
28. J.W.Czujew, P.M.Mielnikow, S.I.Pietuchow, G.F.Stiepanow, J.B.Szor. Osnowy issledowanija opieraczi w wojennoj tiechnike. Izdatielstwo "Sowietskoje Radio". Moskwa 1965 r.
29. E.B.Trius. Odnazadacza celoczislennego nieliniejnogo programiowanija i rozlicznyje podchody k jego reszeniju.  
Soobszczenije na Wsiesojuznej konferenczi po techniczeskoj Kibernetike. Erewan 1964 r.

30. W.F.Demianow, Ł.I.Chudiakow. Odná zadacza celoczislennogo wypukłogo programirowanija. Tech.Kibernet.Nr 6 1965 r.
31. A.M.Lietow. Optimalnyje sistemy automaticzeskogo uprawlenij Moskwa 1967 r. Izdatielstwo "Nauka".
- 32. I.Anuriejew, A.Tatarczenko. Primienienije matiematiczeskich mietodow w wojennom diele. Wojennoje Izdatielstwo Ministstierstwa Oborony ZSRR. Moskwa 1967 r.

Wykonano w 35 egz.

1-5-Bibl.Szkol.ASG  
6-35-Biblioteka Inst.Dowodz.  
Wykonał ppłk GOZDECKI  
dnia 27.3.68 r.  
nr ks. 0979/WW.

ALGORYTM WYBORU OPTIMALNEGO UGRUPOWANIA PODODZIAŁÓW OGNIOWYCH

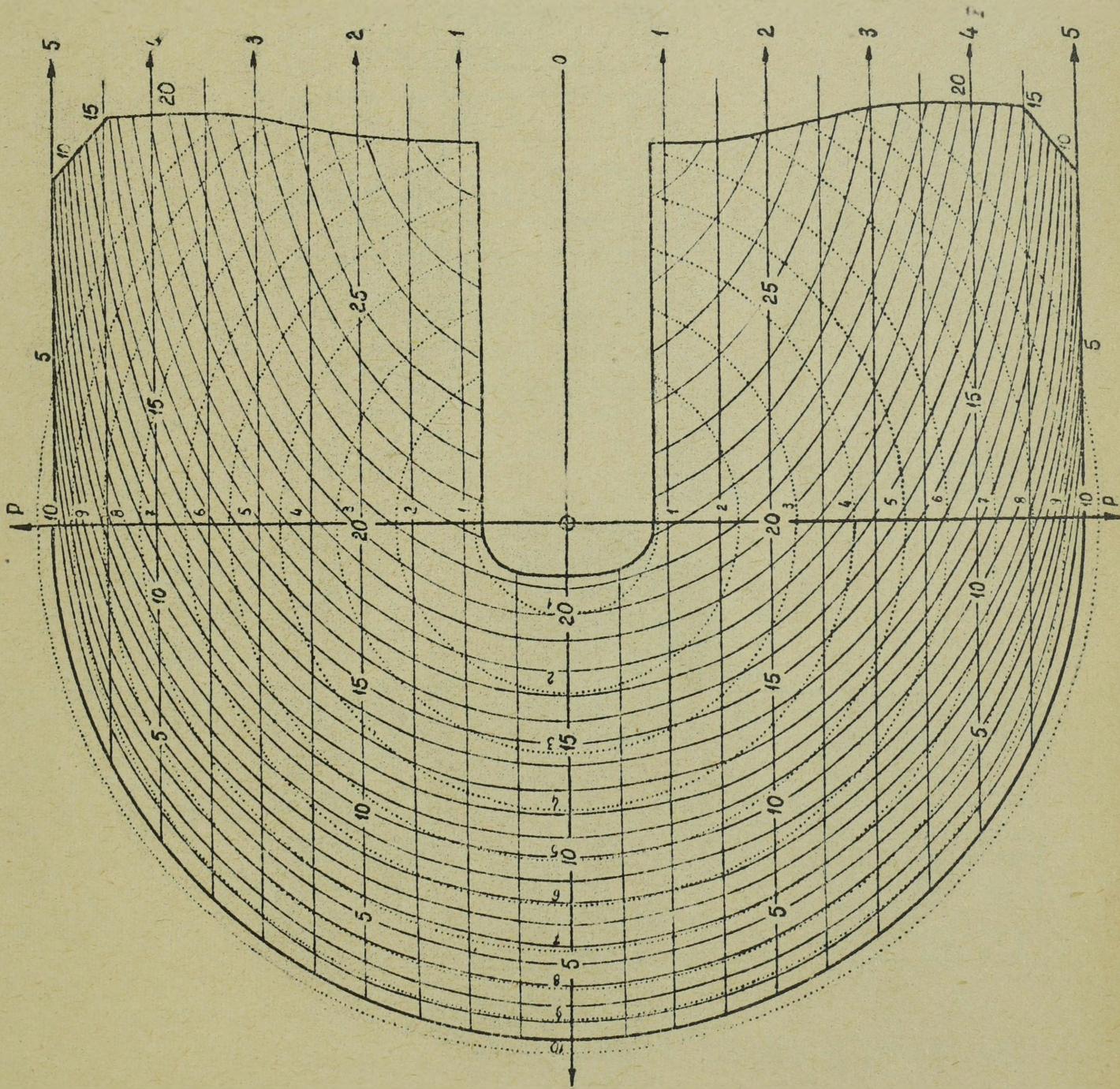


**LEGENDA:**

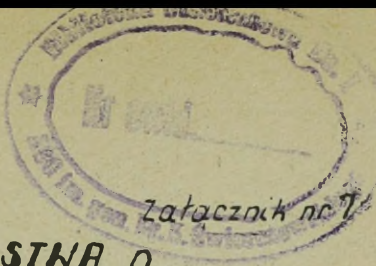
- $M_k$  - wartość oczekiwana dla k-tego wariantu ugrup.
- $l$  - numer pododdziału ogniowego
- $D$  - dopuszczalna odległość pomiędzy pododdz ogn.
- $O^l(x,y)$  - współrzędne SO l-tego pododdz. ogn.
- $\Delta x, \Delta y$  - przyrosty współrzędnych
- $\alpha_x, \alpha_y$  - współczynniki liczbowe ze zbioru  $[1,0,-1]$ .

NCMOGRAM DO OKRESZANIA ILOSCI STRZAŁÓW (57 mm armata plot)

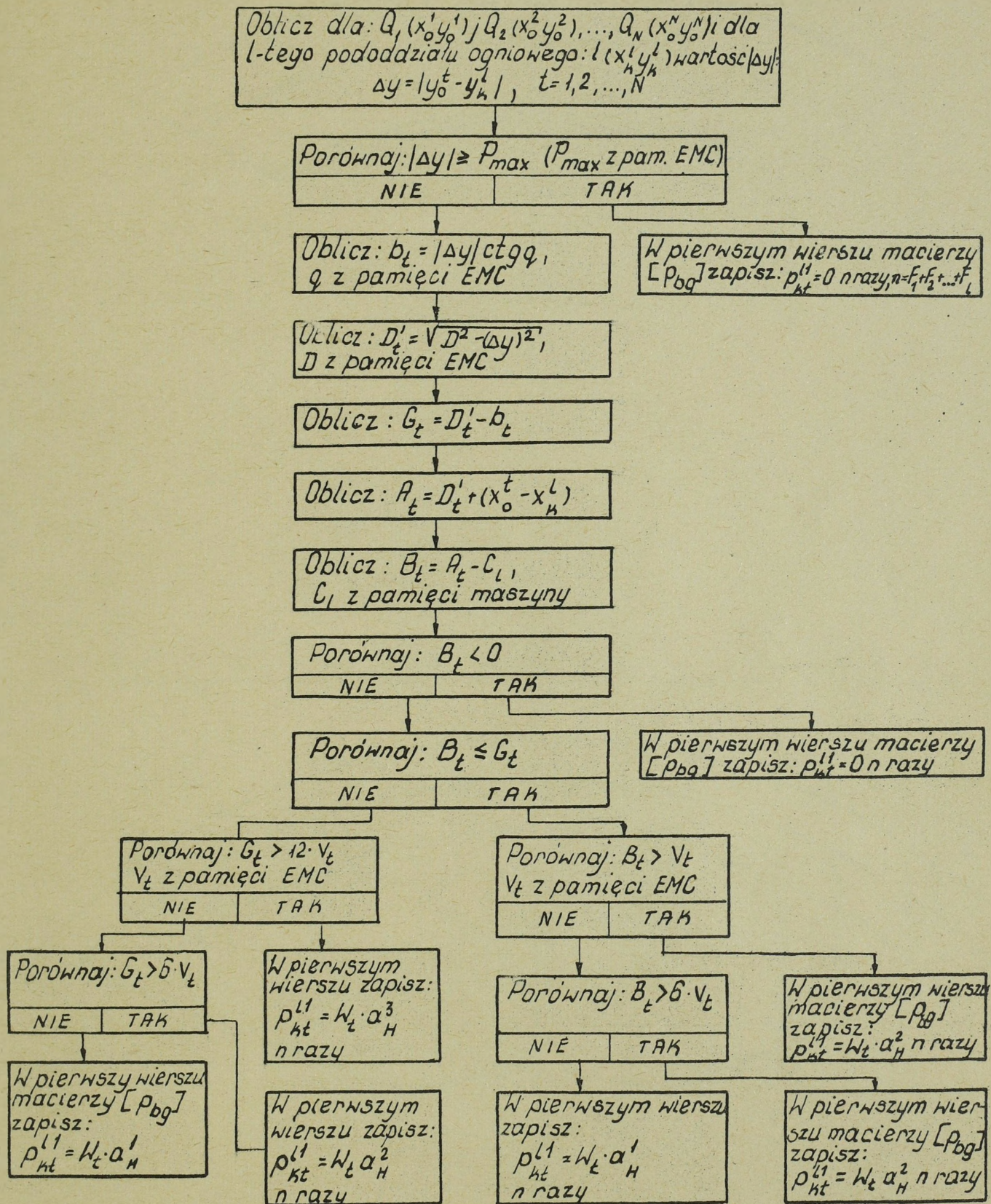
Załącznik 8



$V_0 = 300 \text{ m/s}$   
 $H = 300 - 1000 \text{ m}$



# ALGORYTM OBLICZENIA PRAWDOPODOBIEŃSTWA $P_{bg}$



## LEGENDA:

$Q_t(x^t y^t)$  - współrzędne obiektu  $Q_t$  ( $t=1, 2, \dots, N$ );

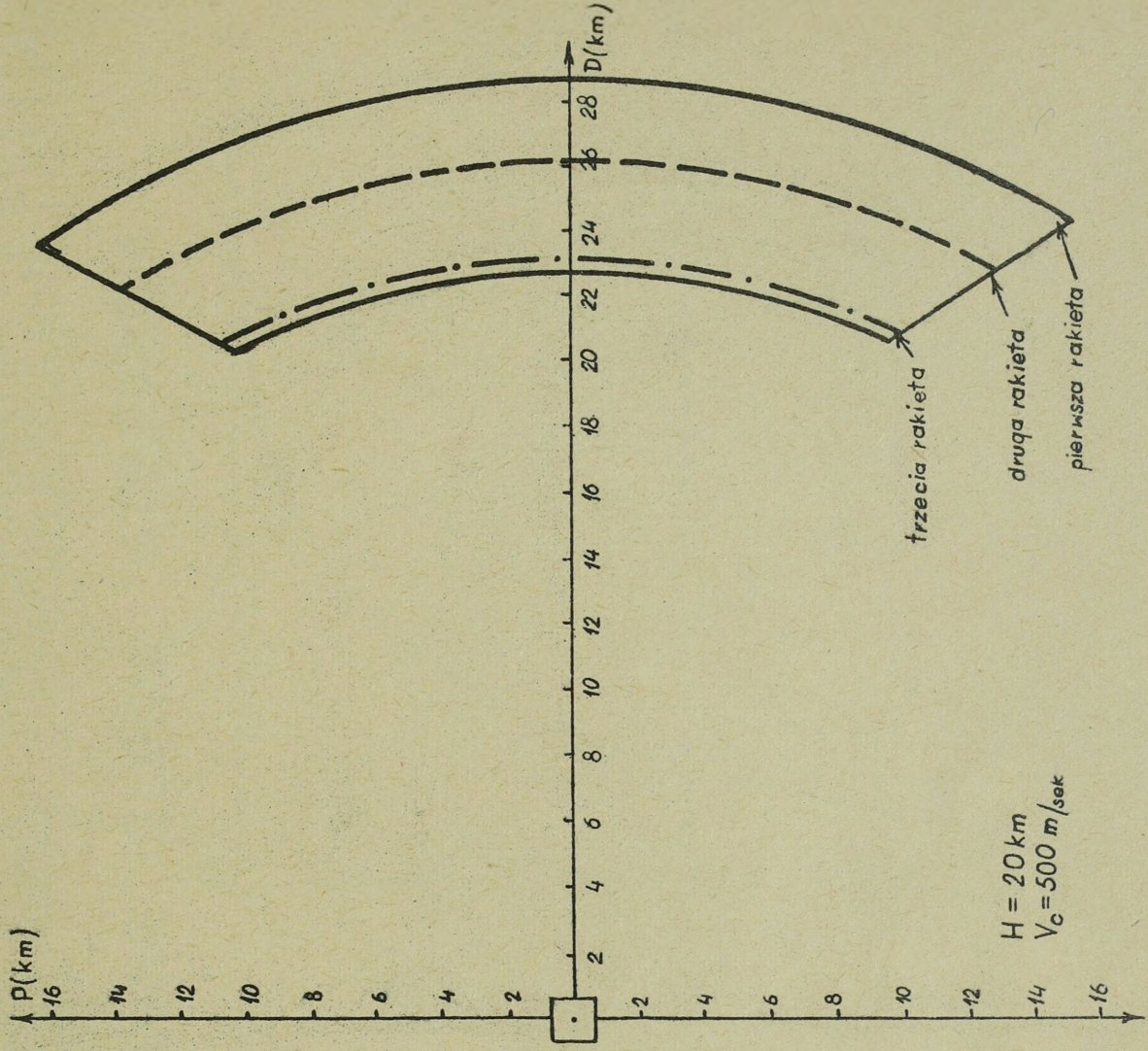
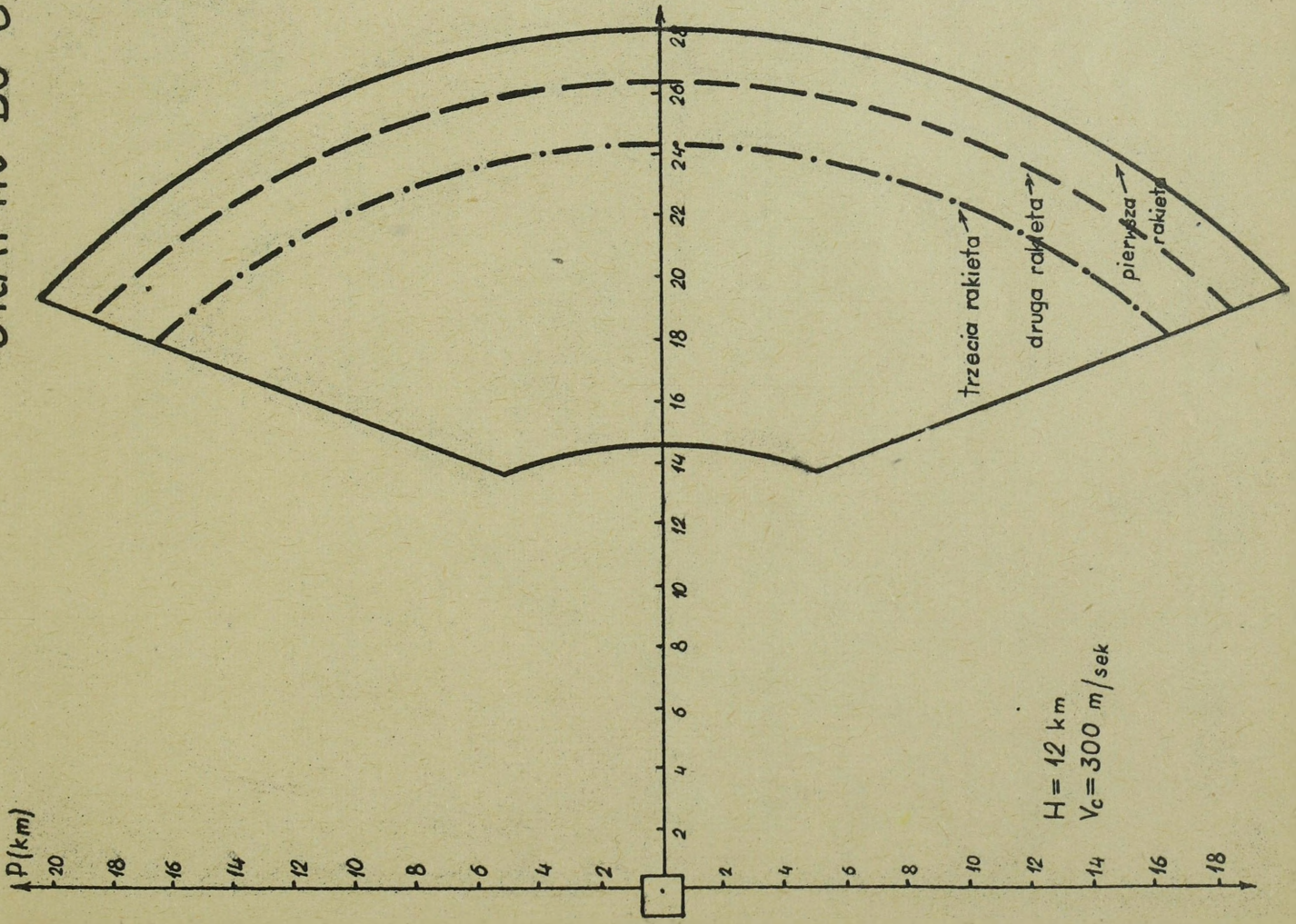
$q$  - kąt kursowy;

$P_{max}$  - maksymalny parametr kursowy;

$p_{kt}^{lc}$  - prawdopodobieństwo rażenia celu przez  $l$ -ty pododdział przy  $k$ -tym wariancie ugrupow. ( $c$  - numer celu;  $t$  - numer obiektu)

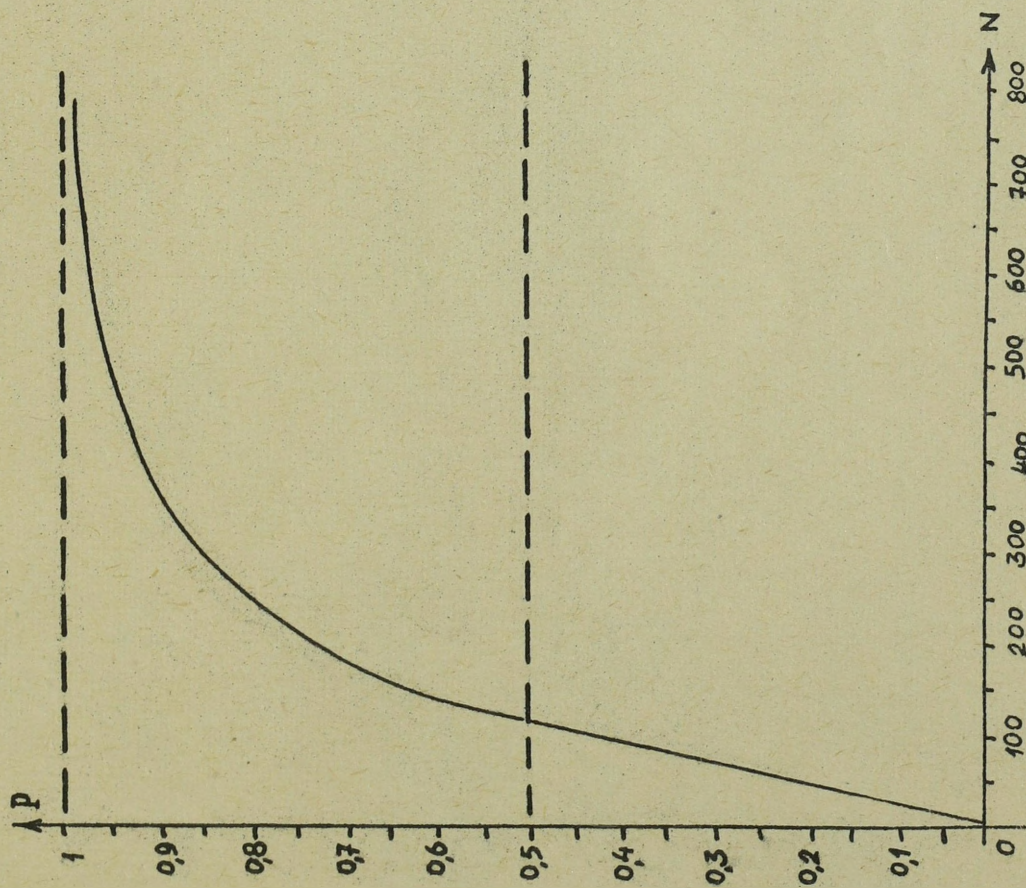
$F_t$  - gęstość nalotu na obiekt

# GRAFIK DO OKREŚLANIA JŁOŚCI RAKIET

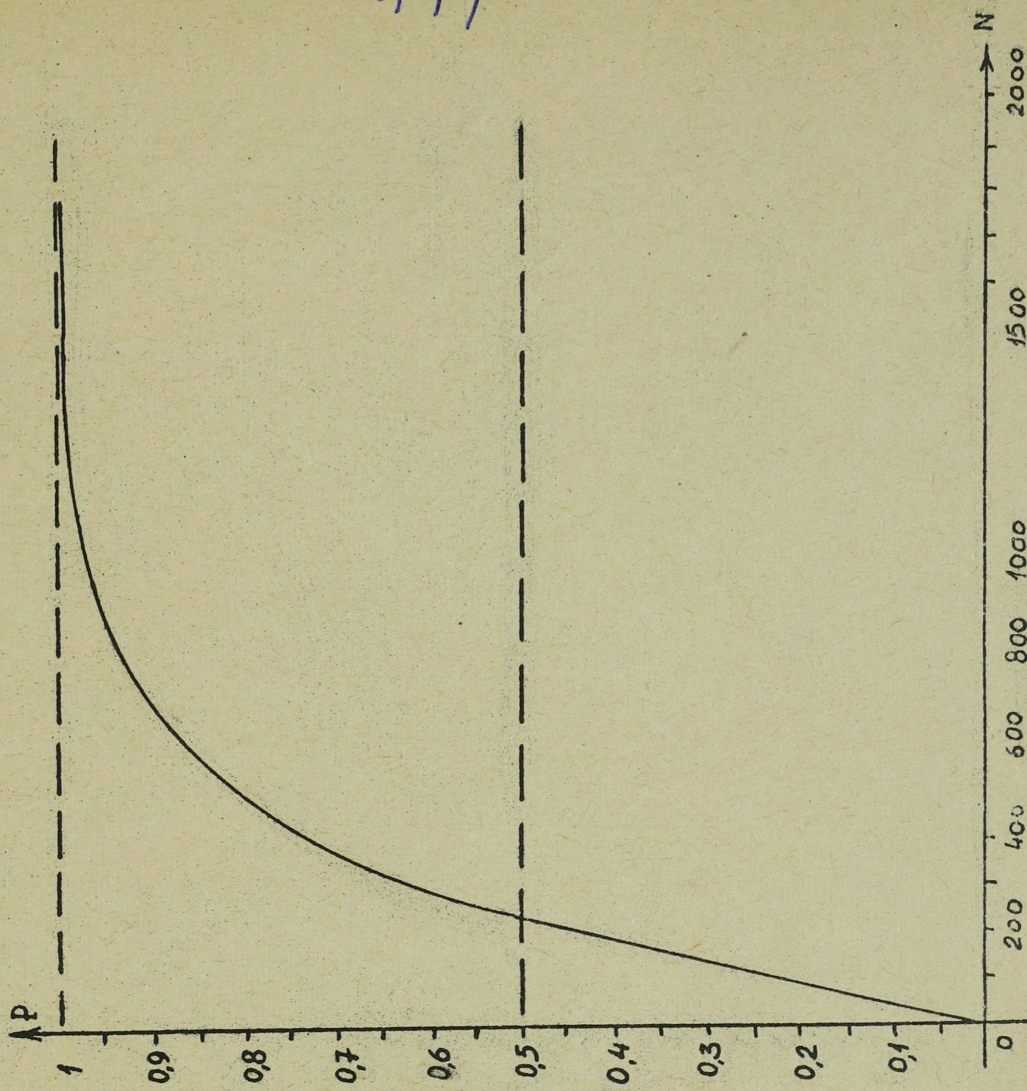


# WYKRESY DO OKREŚLANIA PRAWDOPODOBIEŃSTWA NA PODSTAWIE ILOŚCI STRZAŁÓW

- 147 -



Zależność prawdopodobieństwa rażenia pojedynczego samolotu od ilości strzałów przy strzelaniu z celownikiem.

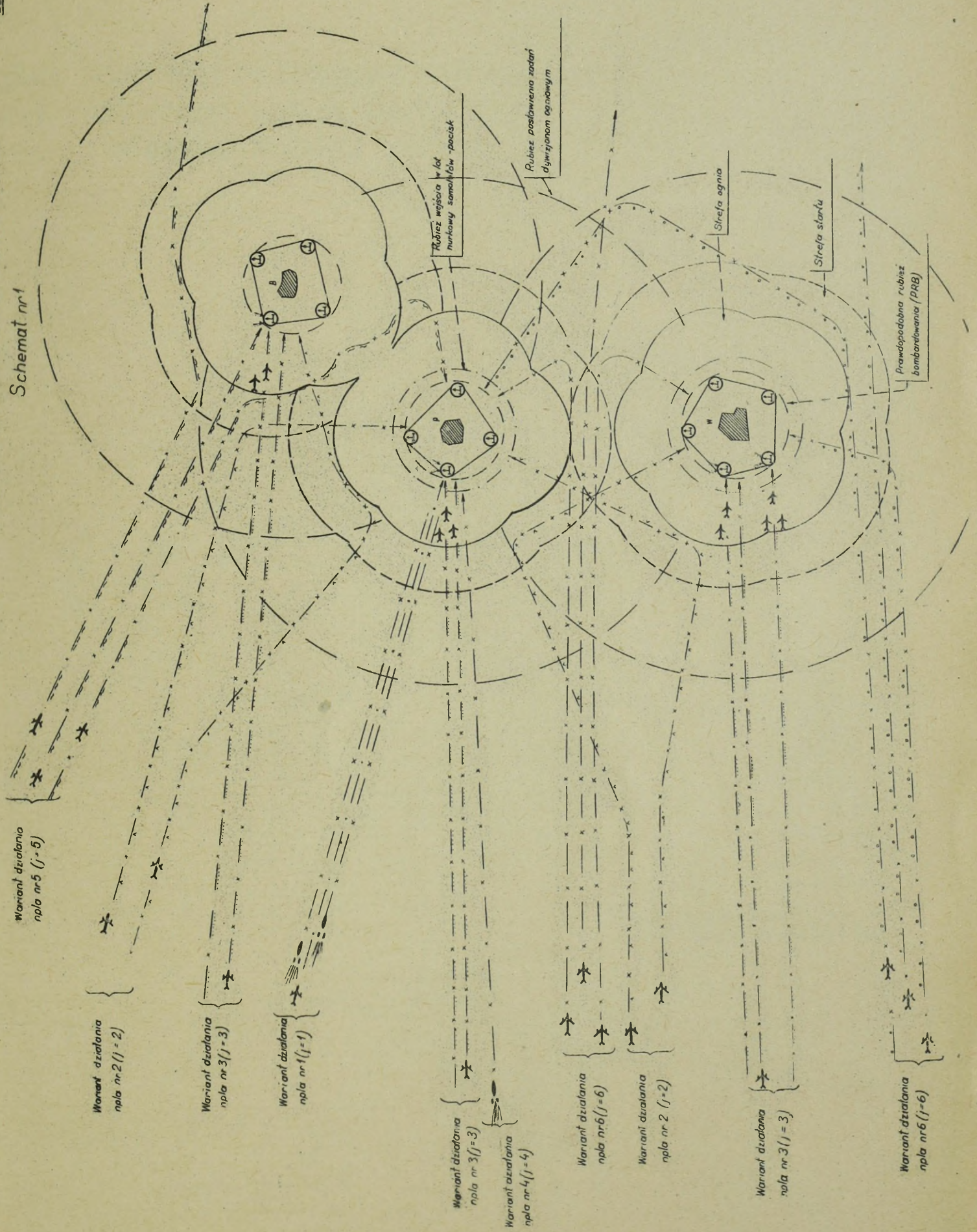


Zależność prawdopodobieństwa rażenia pojedynczego samolotu od ilości strzałów przy strzelaniu z przelicznikiem

# NIEPRZYJACIELA NA m. POZNAŃ

Załącznik Nr 10

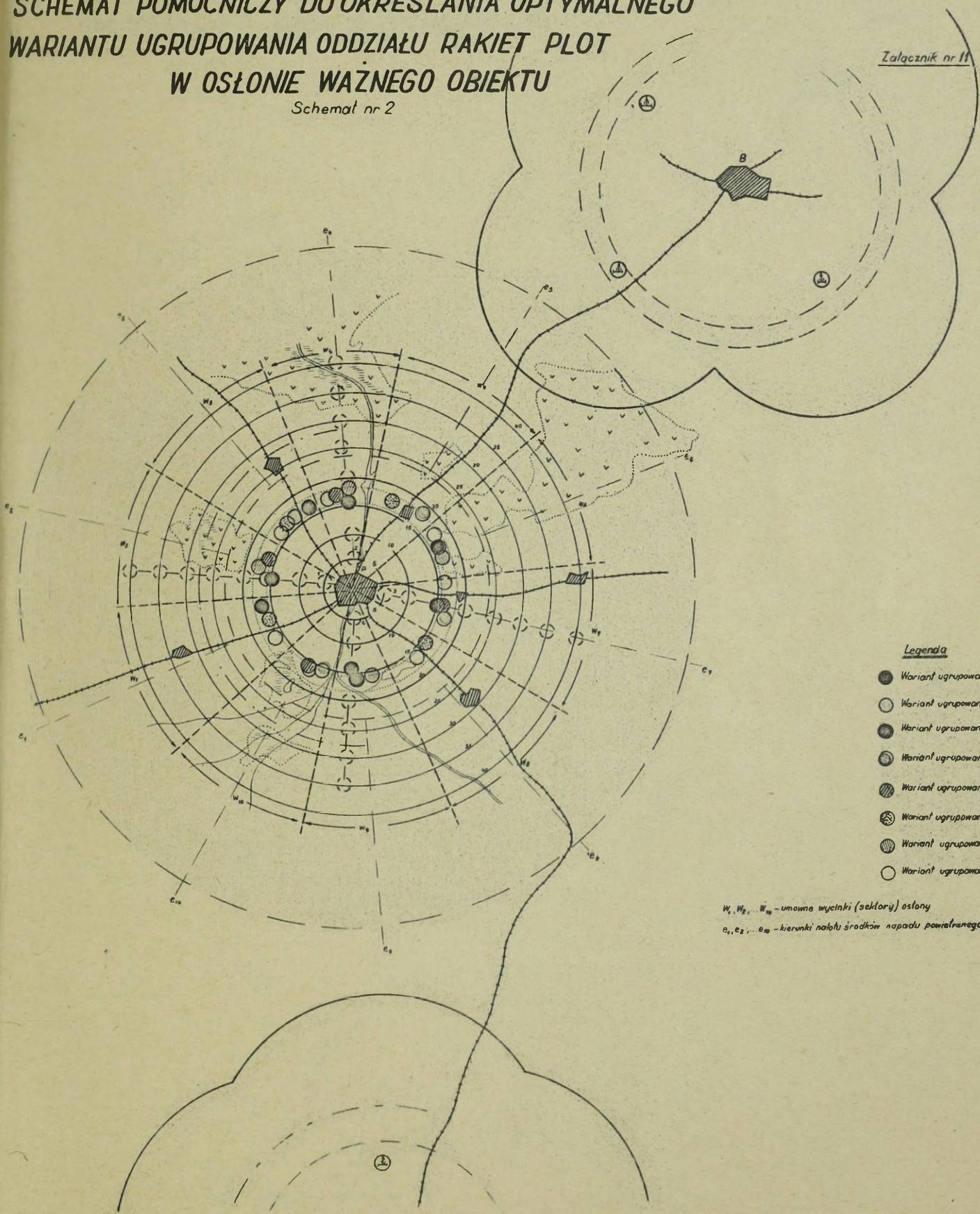
Schemat nr 1



**SCHEMAT POMOCNICZY DO OKREŚLANIA OPTYMALNEGO  
WARIANTU UGRUPOWANIA ODDZIAŁU RAKIET PLOT  
W OSŁONIE WAŻNEGO OBIEKTU**

Schemat nr 2

Załącznik nr 11

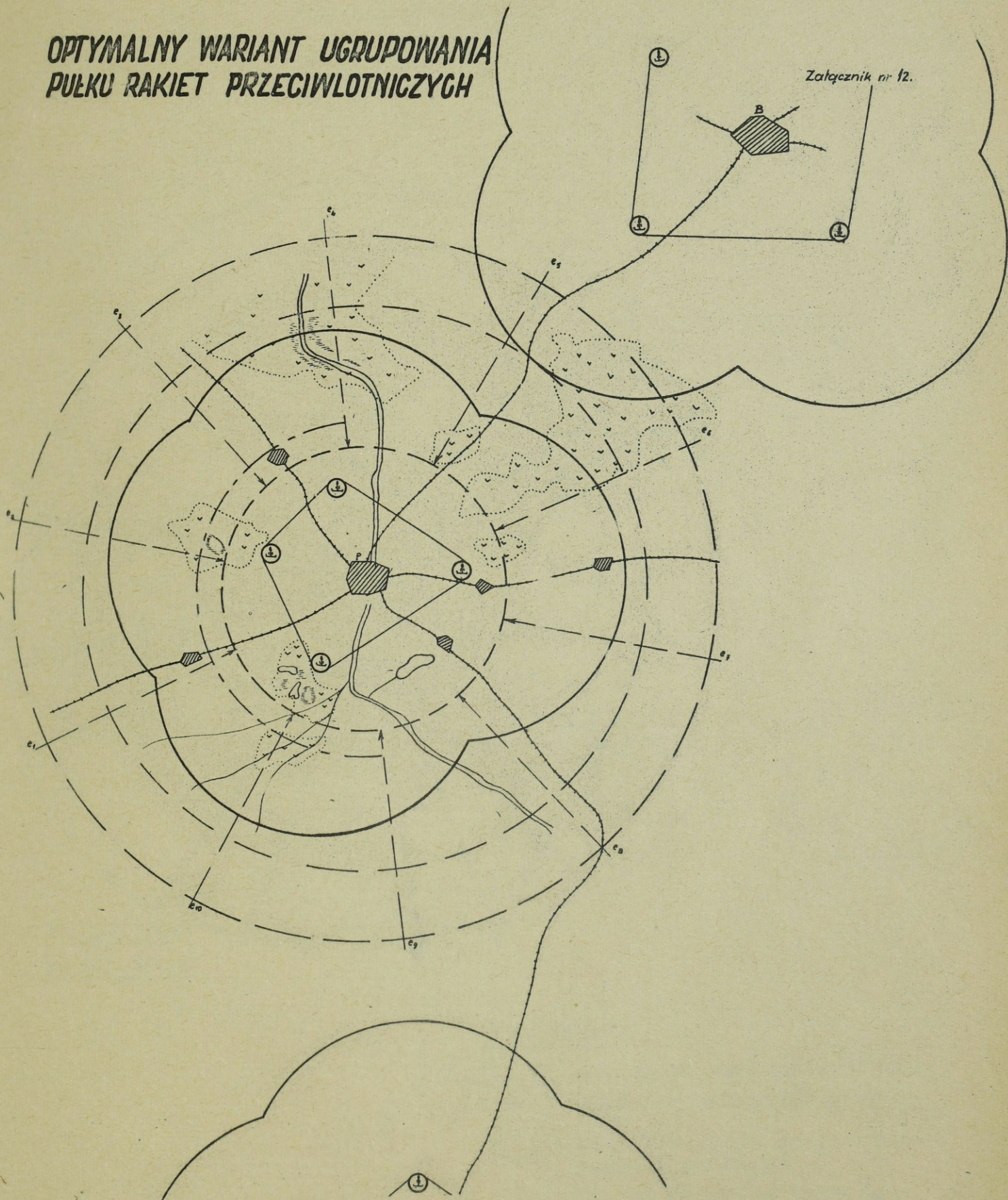


Legenda

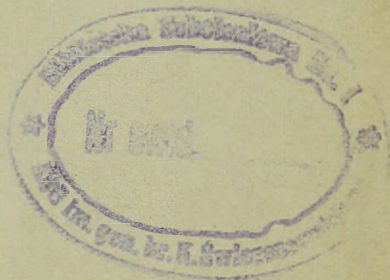
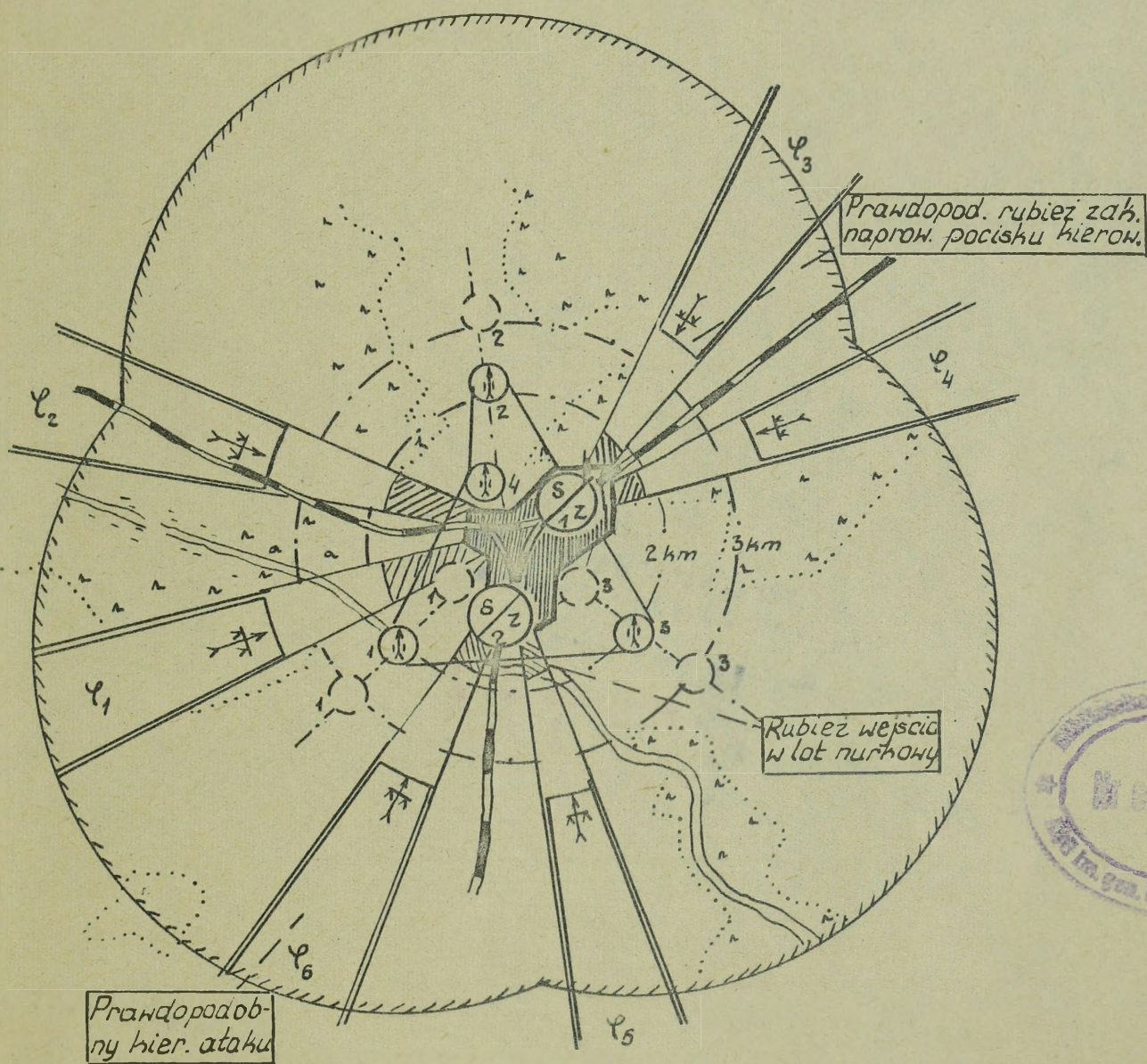
- Wariant ugrupowania nr 1
- Wariant ugrupowania nr 3
- Wariant ugrupowania nr 5
- Wariant ugrupowania nr 7
- Wariant ugrupowania nr 2
- Wariant ugrupowania nr 4
- Wariant ugrupowania nr 6
- Wariant ugrupowania nr 8

$W_1, W_2, \dots, W_{10}$  - umowna wycinki (sektory) osłony  
 $e_1, e_2, \dots, e_{10}$  - kierunki napływu środków napadu powietrznego napa

**OPTYMALNY WARIANT UGRUPOWANIA  
PUŁKU RAKIET PRZECIWLOTNICZYCH**



**SCHEMAT OPTYMALNEGO WARIANTU UGRUPROWANIA ODDZIAŁU  
MAŁOKALIBROWEJ ARTYLERII PRZECIWLOTNICZEJ**  
(Schemat nr 3)



**LEGENDA:**

- $L_1, L_2, \dots, L_6$  - prawdopodob. kierunku ataku lotu.
- ▨▨▨▨ - dalsza granica strefy ognia
- ⊕ - optymalny wariant ugrupow. boj. pododdz. ogniowych
- - możliwy wariant ugrupow. boj. pododdziałów ogniowych
- ⊗ - stacja załadoncza nr 1

BIBLIOTEKA NAUKOWA ASG WP  
Archiwum Biura Zborów Specjalnych

№ ewid.

40777