Grey Scale #13
R G B WH GR BL C M Y K
Part Code ST1316
DANES-PICTA .COM
A 1 2 3 4 5 6 M 8 9 10 11 12 13 14 15 B 17 18 19

Colour Chart #13
Inches
Centimetres
Blue
Cyan
Green
Yellow
Red
Magenta
White
3/Color
Black
DANES-PICTA .COM

68375

AKADEMIA SZTABU GENERALNEGO
im. gen. broni K. Świerczewskiego

JAWNE
[redacted]
Egz. Nr 1

mjr dypl. mgr Cz. GOZDECKI

PROBLEM OPTYMALNEGO UGRUPOWANIA NAZIEMNYCH ŚRODKÓW OPL W SYSTEMIE OBRONY PUNKTOWEJ I STREFOWEJ W ŚWIETLE BADAŃ OPERACYJNYCH

ARCHIWUM BIBLIOTEKI SZKOLENIOWEJ KADAMII SZTABU GENERALNEGO
8 szkiców
32814

WARSZAWA MAJ 1966

68375

AKADEMIA SZTABU GENERALNEGO
im. gen. broni K. Świerczewskiego

JAWNE

[redacted]

Egz. Nr 1

mjr dypl. mgr Cz. GOZDECKI

PROBLEM OPTYMALNEGO UGRUPOWANIA NAZIEMNYCH ŚRODKÓW OPL W SYSTEMIE OBRONY PUNKTOWEJ I STREFOWEJ W ŚWIETLE BADAŃ OPERACYJNYCH

Biblioteka Szkoleniowa
68375

ARCHIWUM
BIBLIOTEKI SZKOLENIOWEJ
AKADEMII SZTABU GENERALNEGO
V 32814

8 sztuk
32814

WARSZAWA MAJ 1966

A K A D E M I A S Z T A B U G E N E R A L N E G O
im.gen.broni K. Świerczewskiego

Rękl. prot. 12657.

PODSTAWA
Ustawa z dnia 22 stycznia 1999 roku
art. 86 ust. 2
(Dz.U. RP Nr 11 poz. 95)
podpis

JAWNE

[redacted]

Egz. nr ... 1

mjr dypl. mgr Cz. GOZDECKI

PROBLEM OPTYMALNEGO UGRUPOWANIA NAZIEMNYCH ŚRODKÓW OPL W SYSTEMIE OBRONY PUNKTOWEJ I STREFOWEJ W ŚWIETLE BADAŃ OPERACYJNYCH

Biblioteka Szkoleniowa Dz. I
0.8375

ARCHIWUM
BIBLIOTEKI SZKOLENIOWEJ
AKADEMII SZTABU GENERALNEGO
im. gen. broni K. Świerczewskiego
A 32.814

WARSZAWA m a j 1966 r.

SPIS TREŚCI

str.

WSTĘP 4

Rozdział I. PROBLEM WYBORU OPTYMALNEGO UGRUPOWANIA ŚRODKÓW OPL W SYSTEMIE OBRONY PUNKTOWEJ

1. Postawienie problemu 7
2. Kryterium efektywności 11
3. Ogólny model matematyczny 24
4. Rozwiązanie modelu 41

Rozdział II. PROBLEM WYBORU OPTYMALNEGO UGRUPOWANIA NAZIEMNYCH ŚRODKÓW OPL W SYSTEMIE OBRONY STREFOWEJ

1. Sformułowanie problemu 56
2. Kryterium efektywności 58
3. Ogólny model matematyczny 61

Rozdział III. PODZIAŁ ŚRODKÓW OPL DO ZWALCZANIA CELÓW POWIETRZNYCH

1. Kryteria optymalizacji podziału środków OPL do zwalczania celów powietrznych 70
2. Podział środków OPL według nadziei matematycznej ilości rażonych celów 70
3. Podział środków OPL według prawdopodobieństwa rażenia wszystkich bez wyjątku celów 77
4. Podział środków OPL z uwzględnieniem manewru celów 78

Rozdział IV. ALGORYTMY OKREŚLANIA OPTYMALNEGO UGRUPOWANIA NAZIEMNYCH ŚRODKÓW OPL

1. Algorytm określania optymalnego ugrupowania małokalibrowej artylerii przeciwlotniczej 87
2. Algorytm określania optymalnego ugrupowania rakiet przeciwlotniczych 90

Rozdział V. PROBLEM OPTYMALNEGO ROZMIESZCZENIA PODODDZIAŁÓW TECHNICZNYCH /PUNKTÓW AMUNICYJNYCH/

1. Wymogi, jakim winny odpowiadać rejony przewidziane dla pododdziałów technicznych /punktów amunicyjnych/ 92
2. Sformułowanie problemu 93
3. Kryterium efektywności 94
4. Model matematyczny 95
5. Rozwiązanie modelu 98

str.

Rozdział VI. P r z y k ł a d y

1. Przykład wyboru optymalnego ugrupowania oddziału rakiet przeciwlotniczych w osłonie ważnego obiektu 104

2. Przykład wyboru optymalnego ugrupowania małokalibrowej artylerii przeciwlotniczej w osłonie obiektu punktowego . . . 106

WNIOSKI KOŃCOWE 111

ZAŁĄCZNIKI 113

BIBLIOGRAFIA 131

W S T Ę P

Praca niniejsza naświetla od strony ilościowej problem wyboru optymalnego ugrupowania naziemnych środków OPL w osłonie obiektów i omawia metodę rozwiązania tego problemu w oparciu o rachunek prawdopodobieństwa, teorię gier i programowanie liniowe.

Zasadniczym celem pracy jest próba opracowania ogólnej metody umożliwiającej wybór optymalnego ugrupowania w sposób możliwie ścisły. Praca ujmuje więc materiał traktujący o tym "jak robić" i "dlaczego celowym jest robić właśnie tak, a nie inaczej".

Główny akcent w pracy zostaje położony na możliwość praktycznego jej wykorzystania w wojskach OPL i OPK oraz w procesie szkolenia w ASG.

Powodem, który skłonił autora do podjęcia tematu jest to, że zagadnienie wyboru optymalnego ugrupowania naziemnych środków OPL w osłonie obiektów stanowi bardzo istotny problem występujący na szczeblach taktycznych wojsk OPL, a dotychczas nie było ono przedmiotem odrębnych i bardziej gruntownych studiów, szczególnie w zakresie użycia rakiet przeciwlotniczych. Wyznaczenie ugrupowania bojowego na podstawie ogólnych zasad obrony przeciwlotniczej obiektów oraz intuicyjnego sposobu uwzględniania czynników warunkujących ugrupowanie nie stanowi już dziś metody, która by zapewniała efektywne wykorzystanie sił i środków OPL. Wynika to stąd, że szereg czynników, które należy uwzględniać w ugrupowaniu bojowym warunkuje się wzajemnie, tworząc w ten sposób ścisłe zależności. Ustalenie tych zależności na drodze intuicji oraz uwzględnienie ich w ugrupowaniu bojowym, jest rzeczą trudną i prowadzi zwykle do nieścisłości. Zachodzi więc potrzeba opracowania ogólnej metody, która by umożliwiała bardziej ścisłe uwzględnianie wpływu poszczególnych czynników, a przez to dokonanie wyboru możliwie najkorzystniejszego wariantu ugrupowania. Metoda taka oparta na wykorzystaniu nowoczesnych działów matematyki: teorii gier, programowania liniowego i rachunku prawdopodobieństwa przedstawiona jest w niniejszej pracy.

W pracy dana jest również odpowiedź na następujące ważne zagadnienia:

a/ Czy w każdym przypadku istnieje jeden najbardziej korzystny /w świetle przyjętego kryterium efektywności/ wariant ugrupowania bojowego ?

b/ W jakim stopniu manewr oraz maskowanie ugrupowania bojowego wpływają na efektywność osłony obiektu.

Studia nad powyższymi zagadnieniami doprowadziły autora do wniosku, że mogą wystąpić sytuacje, w których optymalne rozwiązanie obej-

muje nie jeden lecz kilka korzystnych wariantów ugrupowania bojowego. Stosowanie tych wariantów z określonymi częstościami /stosowanie manewru/ w większości przypadków może wpłynąć na zwiększenie efektywności osłony obiektu, w granicach nawet do kilkunastu procent. Ustalenie tych prawidłowości stało się możliwe dzięki zbadaniu modelu matematycznego, w którym problem obrony przeciwlotniczej obiektu sprowadzony został do gry.

Całość pracy składa się z dwóch części. Część I zawiera dwa rozdziały i dotyczy głównie obrony punktowej[x/], chociaż wiele zagadnień da się również przenieść na obronę strefową. W rozdziale I przedstawiono model, który przy pewnych założeniach dotyczących posiadanego stopnia informacji o przeciwniku i własnych siłach i środkach, służy do naświetlenia zagadnienia ugrupowania rakiet i artylerii przeciwlotniczej, w systemie obrony punktowej.

Opracowany model należy do grupy modeli strategicznych i sprowadza problem obrony obiektu do gry dwuosobowej o sumie zero ze skończoną ilością strategii.

Możliwość sprowadzenia problemu obrony obiektu do tej klasy gier wynika wprost z celów i zadań, jakie stawia sobie przeciwnik i strona organizująca system obrony przeciwlotniczej obiektu. Wiadomo bowiem, że przeciwnik stara się zniszczyć /obezwładnić/ obiekt, a jednocześnie chce ponieść minimalne straty od obrony przeciwlotniczej. Cel ten przeciwnik osiągnie wówczas, gdy samoloty z ładunkiem bombowym, względnie pociski przenikną przez system OPL i wykonują atak /bombardowanie/ z dostateczną dokładnością. Natomiast założonego celu przeciwnik nie osiągnie, gdy środki biorące udział w nalocie zostaną zniszczone lub działalność ich zostanie utrudniona na tyle, że atak okaże się nieskuteczny.

Celem zaś strony organizującej obronę przeciwlotniczą jest niedopuszczenie do zniszczenia obiektu poprzez zadanie maksymalnych strat atakującym siłom przeciwnika, względnie utrudnienie im w wykonaniu ataku /bombardowania/ np. przez zakłócenie radiolokacyjne celowników bombowych, maskowanie obiektu itp.

Występuje tu wyraźnie sytuacja konfliktowa, w której cele obydwu stron są przeciwstawne, zaś to prowadzi do gry. W grze tej za funkcję kryterium, stanowiącą miarę efektywności systemu OPL, przyjęto prawdopodobieństwo obrony obiektu. Kryterium to w sposób

---

x/ Stosowany jest również termin "obrona lokalna".

właściwy odzwierciadla cele obu stron, a jednocześnie ma tę zaletę, że można je praktycznie określić oraz pozwala na uwolnienie się od założenia, iż naloty na broniony obiekt są ze wszystkich kierunków jednakowo prawdopodobne.

W końcowej części rozdziału I omówione są metody rozwiązywania ogólnego modelu matematycznego oraz podane przypadki, w których proces znajdowania rozwiązania optymalnego znacznie się upraszcza.

W rozdziale II przedstawiony jest model pozwalający wyznaczyć optymalne ugrupowanie naziemnych środków OPL w systemie obrony strefowej. W modelu tym za funkcję kryterium przyjęto średnią wartość prawdopodobieństwa obrony obiektów, zaś aparatem matematycznym jest rachunek prawdopodobieństwa i teoria gier.

W rozdziale III przedstawiony został model optymalnego podziału środków OPL do zwalczania celów powietrznych. Za funkcję kryterium przyjęto nadzieję matematyczną ilości rażonych celów, a w przypadku obrony szczególnie ważnych obiektów - prawdopodobieństwo rażenia wszystkich bez wyjątku celów. Jako aparat matematyczny został wykorzystany rachunek prawdopodobieństwa w połączeniu z kombinatoryką, programowanie liniowe oraz teoria gier.

Rozdział IV ujmuje dwa algorytmy wyboru optymalnego ugrupowania naziemnych środków OPL. Algorytm pierwszy dotyczy wyboru najkorzystniejszego ugrupowania małokalibrowej artylerii przeciwlotniczej, a drugi - rakiet przeciwlotniczych.

W rozdziale V przedstawiony jest model pozwalający wyznaczyć optymalne rozmieszczenie dywizjonów technicznych /składów amunicyjnych/ i jednocześnie najlepszy sposób zaopatrywania pododdziałów ogniowych w rakiety przeciwlotnicze /amunicję artyleryjską/ w systemie obrony punktowej. Model ten daje się przenieść w zupełności na obronę strefową.

W rozdziale VI podane zostały dwa przykłady ilustrujące opisaną w rozdziale I metodę wyboru optymalnego ugrupowania rakiet i artylerii przeciwlotniczej. Przykłady te zostały rozwiązane w oparciu o algorytmy podane w rozdziale IV.

Na końcu pracy zostały zebrane wnioski uogólniające.

ROZDZIAŁ I

PROBLEM WYBORU OPTYMALNEGO UGRUPOWANIA ŚRODKÓW OPL W SYSTEMIE OBRONY PUNKTOWEJ

1. P o s t a w i e n i e p r o b l e m u

Podczas planowania obrony przeciwlotniczej na szczeblach operacyjnych /np. na szczeblu Frontu i armii/ i operacyjno-taktycznych /np. w korpusie OPK/ typową sytuacją jest zwykle taka, że mamy do dyspozycji pewną liczbę oddziałów /związków/ OPL o określonym składzie i wyposażeniu technicznym oraz pewną ilość obiektów. Należy zdecydować, które z tych obiektów powinny być bronione oraz ile i jakie siły i środki trzeba wydzielić do ich osłony. Możemy nawet z obrony niektórych obiektów zrezygnować całkowicie lub na przeciąg określonego czasu, jeśli przy braku dostatecznej ilości środków, potrafimy uznać, że nie odgrywają one zasadniczego znaczenia z punktu widzenia operacyjnego.

Punktem wyjścia przy rozwiązywaniu powyższego zagadnienia jest wnikliwa ocena możliwych sposobów /wariantów/ działania przeciwnika oraz ocena samych obiektów, głównie w świetle ich charakteru i znaczenia. Po konfrontacji z własnymi możliwościami można następnie dokonać podziału sił i środków OPL.

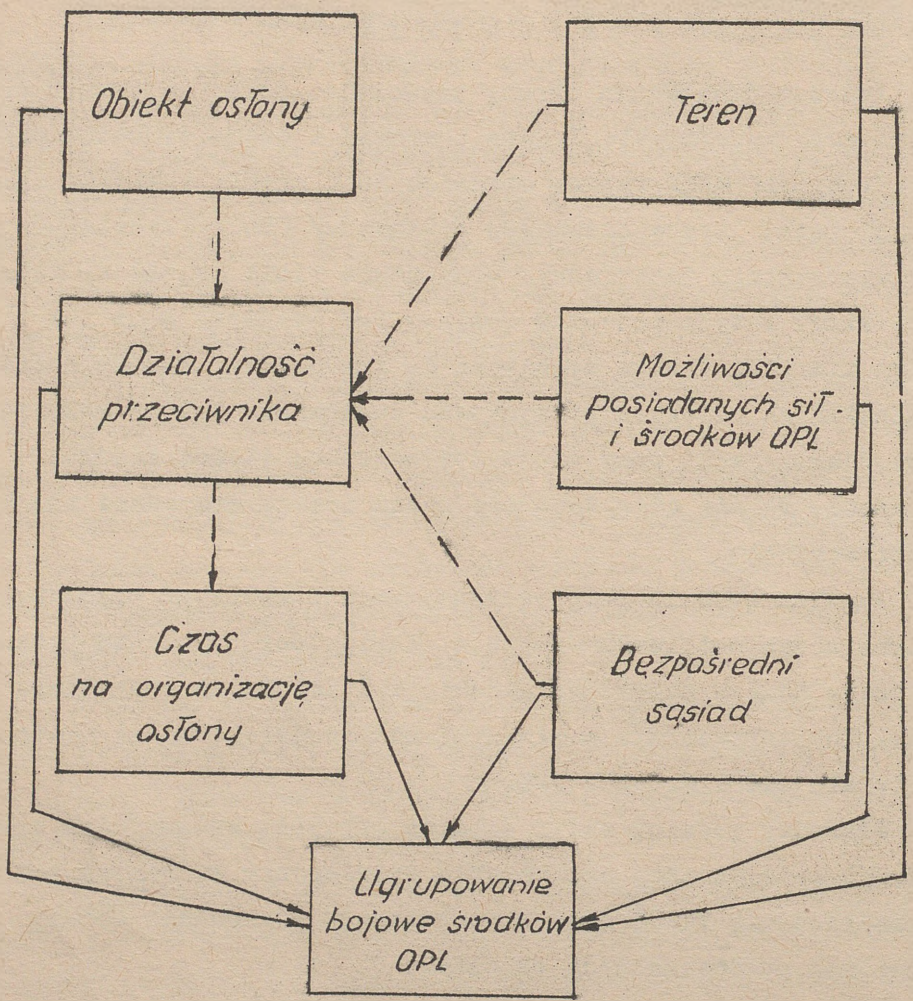
Właściwy podział sił i środków OPL jest zasadniczym elementem decyzji podejmowanej na szczeblu operacyjnym i stanowi podstawę do precyzowania zadań oraz szczegółowego planowania obrony przeciwlotniczej poszczególnych obiektów.

Szczegółowe planowanie obrony przeciwlotniczej obiektu odbywa się w sztabie związku taktycznego lub oddziału.

Podstawowym problemem występującym podczas planowania na tym szczeblu jest wypracowanie możliwie najkorzystniejszego ugrupowania bojowego. Chodzi tu o określenie wariantu, który by odpowiadał postawionemu zadaniu, stwarzał możliwie najkorzystniejsze warunki walki ze środkami napadu powietrznego przeciwnika, a ponadto zapewniał dobre warunki dowodzenia zaopatrywania, maskowania oraz obrony przed bronią masowego rażenia.

Należy podkreślić, że powyższy problem jest trudny do rozwiązania, a to z uwagi na złożone warunki taktyczne. Wchodzi tu bowiem w grę szereg czynników takich, jak: prawdopodobny zamiar działania przeciwnika, charakter i znaczenie osłanianego obiektu, warunki terenowe, możliwości posiadanych sił i środków, stopień oddziaływania

środków OPL bezpośredniego sąsiada oraz czas na organizację osłony. Czynniki te są ze sobą ściśle powiązane, co obrazuje rys. 1. Wpływ ich na ugrupowanie jest różny; najbardziej zdecydowany wpływ ma



---------- - wpływ bezpośredni;

- - - - - - wpływ pośredni /poprzez inny czynnik/.

Rys. 1. Czynniki warunkujące ugrupowanie bojowe środków OPL.

prawdopodobna działalność przeciwnika, teren, możliwości posiadanych sił i środków OPL oraz bezpośredni sąsiad. Różny jest także, zakres posiadanych informacji o tych czynnikach. Z reguły o przeciwniku posiadamy tylko pewną ilość wiadomości; im wiadomości te będą bardziej kompletne i pewne, tym łatwiej i lepiej będzie można obmyśleć i zorganizować obronę przeciwlotniczą obiektu. Najczęściej jednak nie posiadamy danych o tym w jakim czasie, jakimi siłami i w jaki sposób przeciwnik wykona uderzenie na osłaniany obiekt. Nie wiemy również

pewnie, z którego kierunku zostanie wykonany nalot. Danych tych nie możemy znać, ponieważ nie znamy zadania, jakie przeciwnik ma wykonać, nie znamy również wszystkich czynników, jakie bierze on pod uwagę przy obmyślaniu planu działania, nie wiemy także, jakie ma o nas wiadomości. W tych warunkach trudno jest twierdzić pewnie, w jaki sposób przeciwnik b ę d z i e działał. Staramy się wobec tego określić, w jaki sposób m o ż e on działać. Gruntowne studium znanych nam czynników i faktycznych wiadomości o przeciwniku powinno doprowadzić nas do ustalenia kilku najbardziej prawdopodobnych spo - sobów /wariantów/ działania na osłaniany obiekt. Im bardziej da się zawęzić zbiór możliwych sposobów /wariantów/ działania przeciwnika, tym łatwiej i lepiej będzie można zorganizować obronę przeciwlotniczą obiektu. Dochodząc drogą logicznego wnioskowania do prawdopodobnych sposobów /wariantów/ działania przeciwnika winniśmy jednocześnie być ostrożni. Dużym błędem byłoby chyba wyrobienie sobie pewnej myśli upartej o zamiarze przeciwnika, to jest powiedzenie sobie z góry, że postąpi on tak a nie inaczej. Mając ustalone te sposoby /warianty/ staramy się następnie przyjąć ugrupowanie, które by było dobre w wy- padku zastosowania przez przeciwnika dowolnego z nich, a jednocześ - nie by uwzględniało wpływ pozostałych czynników, co do których możemy przyjąć założenie że są nam znane. Do tego celu konieczna jest pewna metoda. Jeśli się postawi wymaganie by problem ugrupowania był rozwiązany w sposób możliwie ścisły, to w odniesieniu do czynników dających się wyrazić ilościowo metoda ta powinna polegać na wykorzystaniu odpowiedniego aparatu matematycznego, jako narzędzia ułatwiającego w du - żym stopniu ustalenie zakresu wpływu poszczególnych czynników na ugrupowanie bojowe.

W wyniku zastosowania aparatu matematycznego powinniśmy otrzymać zwięzłą analizę ugrupowania w świetle czynników dających się wyra - zić ilościowo.

Analiza ta łącznie z oceną czynników, których wpływu nie da się wyrazić ilościowo, powinna stanowić wystarczający materiał dla dowódcy do podjęcia decyzji.

Materiał opracowany przy użyciu aparatu matematycznego powinien przede wszystkim dawać obraz możliwości ogniowych przy różnych wariantach ugrupowania bojowego i różnych sposobach /wariantach/ działania przeciwnika oraz wskazywać dla jakiego wariantu możliwości te są maksymalne.

Jeśli uwzględnimy efektywność poszczególnych sposobów bombardowania i ataku przeciwnika, to powinniśmy otrzymać w zestawieniu z własnymi możliwościami ogniowymi, odpowiedź na zasadnicze pytanie: Jakie jest prawdopodobieństwo tego, że obiekt nie zostanie zniszczony, w świetle możliwych sposobów /wariantów/ działania przeciwnika ?

Wariant ugrupowania bojowego, dla którego prawdopodobieństwo niezniszczenia obiektu przyjmuje wartość maksymalną oraz spełniający podstawowe wymogi taktyczne możemy uznać za optymalny.

Do wielkości /parametrów/,które wyznaczają ugrupowanie bojowe, należą:

a/ ilość rubieży i ich oddalenie od środka obiektu;
b/ ilość i rodzaj pododdziałów, które należy rozmieścić na wybranych rubieżach;
c/ wzajemne położenie pododdziałów na poszczególnych rubieżach, z uwzględnieniem prawdopodobnych sposobów /wariantów/ działania przeciwnika oraz wymogów taktycznych.

Zatem wybór optymalnego wariantu ugrupowania polega na odpowiednim doborze wyżej wymienionych wielkości, aby prawdopodobieństwo obrony obiektu osiągało wartość możliwie największą. Stanowi to główną treść postawionego w pracy zagadnienia.

Chcąc rozwiązać to zagadnienie musimy przede wszystkim sprecyzować dokładnie warunki naszego zadania, tzn. ustalić jakie wielkości możemy uważać za znane, co należy dodatkowo określić oraz co chcemy wyznaczyć.

W odniesieniu do przeciwnika można założyć, że będą znane:

a/ dane taktyczno-techniczne i uzbrojenie środków napadu powietrznego;
b/ prawdopodobne sposoby /warianty/ działania[x/];
c/ ogólna ilość i bazowanie środków napadu powietrznego oraz kierunki operacyjne nalotów.

W odniesieniu do nas, tzn. strony organizującej obronę przeciwlotniczą obiektu możemy przyjąć za znane:

a/ rodzaj i ilość sił i środków OPL wydzielonych do osłony obiektu, stopień wyszkolenia obsług oraz ogólnie ich stan fizyczny i psychiczny;

---

x/ Na określenie każdego ze sposobów /wariantów/ działania składają się: rodzaj i ilość środków przenoszenia i środków rażenia, jaką przeciwnik może użyć do zniszczenia /obezwładnienia/ obiektu, prędkość, wysokość i kierunek zajścia na obiekt, sposób bombardowania /ataku/ danego obiektu.

b/ możliwości ogniowe i manewrowe sprzętu;

c/ obiekt osłony, zwłaszcza jego wielkość, kształt, odporność na uderzenia oraz znaczenie i położenie;

d/ teren w rejonie obiektu oraz przewidywane warunki meteorologiczne;

e/ ugrupowanie środków OPL bezpośredniego sąsiada oraz jego ogólne możliwości ogniowe;

f/ czas na organizację obrony przeciwlotniczej obiektu.

Tak więc rozwiązania postawionego problemu należy szukać w oparciu o powyższy zakres informacji. Dalsze zwiększenie ilości danych jest nierealne, gdyż w przeciętnych warunkach taktycznych bardziej wyczerpujących wiadomości, dotyczących przeciwnika i własnych wojsk z reguły mieć nie będziemy.

Mając powyższe dane nie możemy jeszcze przystąpić do rozwiązania postawionego problemu, ponieważ nie mamy określonego kryterium efektywności, w świetle którego można by było porównać z sobą różne warianty ugrupowania bojowego i dokonać odpowiedniego wyboru. Zatem przejdźmy do określenia kryterium stanowiącego miarę efektywności systemu obrony przeciwlotniczej obiektu przy różnych wariantach ugrupowania bojowego.

2. K r y t e r i u m e f e k t y w n o ś c i

Przeciwnikowi planującemu uderzenie na osłaniany obiekt, określoną ilością sił i środków zależy zawsze na wyborze takiego sposobu /wariant/ działania, przy którym prawdopodobieństwo wykonania zadania jest możliwie największe.

Chcąc podać formułę, jaką wyraża się to prawdopodobieństwo, należy zauważyć, że zadanie zniszczenia /obezwładnienia/ obiektu będzie wykonane wówczas, gdy zaistnieją dwa sprzyjające dla przeciwnika zdarzenia, a mianowicie:

1° że siły i środki biorące udział w nalocie przeniknq przez system OPL i osiągną nakazany obiekt;

2° że część sił i środków, której udało się przeniknąć przez system OPL zniszczy /obezwładni/ obiekt.

Jeśli przez Q_1 i Q_2 oznaczymy prawdopodobieństwo wystąpienia odpowiednio pierwszego i drugiego zdarzenia, a przez Q - prawdopodobieństwo wykonania zadania przez przeciwnika, to możemy przyjąć, że:

$$Q = Q_1 \cdot Q_2, \qquad /1/$$

gdzie prawdopodobieństwo wystąpienia drugiego zdarzenia /Q_2/ oblicza się przy założeniu, że zdarzenie pierwsze zaszło.

Łatwo jest zauważyć, że każde zdarzenie w równym stopniu wpływa na ostateczny wynik. Np. gdy Q_1 i Q_2 równe są 0,9, to prawdopodobieństwo wykonania zadania wynosi nie 0,9, ale 0,81. Jeśli natomiast prawdopodobieństwa Q_1 i Q_2 są różne, to prawdopodobieństwo wykonania zadania /Q/ nie przekracza nigdy mniejszej z dwóch liczb, czyli, że

$$Q \leq \min /Q_1, Q_2/ \qquad /2/$$

W ten sposób można zilustrować znaczenie dokładania starań przez przeciwnika, aby prawdopodobieństwo pojedynczych zdarzeń było odpowiednio duże. Oznacza to, że przeciwnikowi będzie zawsze zależało na wyborze takiego sposobu /wariantu/ działania, przy którym prawdopodobieństwo zadania strat przez system obrony przeciwlotniczej będzie możliwie małe, a jednocześnie prawdopodobieństwo zniszczenia /obezwładnienia/ celu będzie posiadało wartość możliwie największą.

Spójrzmy teraz na to zagadnienie od naszej strony, tzn.strony organizującej system obrony przeciwlotniczej obiektu.

Możemy powiedzieć, że w ostatecznym rachunku interesuje nas następujące zagadnienie: Jakie jest prawdopodobieństwo tego, że obiekt nie zostanie zniszczony w świetle możliwych sposobów /wariantów/działania przeciwnika ?

Zauważmy, że zdarzenie nie zniszczenia obiektu jest dokładnie przeciwne zdarzeniu, że obiekt zostanie zniszczony /obezwładniony/ i składa się z dwóch zdarzeń, a mianowicie:

1° że siły i środki biorące udział w nalocie nie przeniknął przez system obrony przeciwlotniczej obiektu;

2° że część sił i środków, której udało się przeniknąć przez system obrony wykona atak /bombardowanie/ z tak małą skutecznością, że obiekt nie zostanie zniszczony /obezwładniony/.

Jeśli przez P_1 i P_2 oznaczymy prawdopodobieństwo wystąpienia odpowiednio pierwszego i drugiego zdarzenia, a przez P prawdopodobieństwo tego, że obiekt nie zostanie zniszczony, to otrzymamy wyrażenie:

$$P = 1 - Q = 1 - Q_1 \cdot Q_2 = 1 - /1 - P_1/ /1 - P_2/ \qquad /3/$$

Naszym dążeniem jest sprowadzenie obu wielkości Q_1 i Q_2 do minimum lub w myśl nierówności /2/ przynajmniej jednej z nich, np. Q_1.

Sprowadzenie wielkości Q_1 i Q_2 do minimum może być dokonane przez:

a/ zadanie przeciwnikowi maksymalnych strat siłami lotnictwa myśliwskiego, rakiet przeciwlotniczych i artylerii przeciwlotniczej;

b/ utrudnienie przeciwnikowi wykonania zadania, np. przez zakłócenie radiolokacyjnych celowników bombowych, maskowanie obiektu,itp.

Ponieważ problemem do rozwiązania w pracy jest ugrupowanie naziemnych środków OPL, a ściślej mówiąc, ugrupowanie rakiet i artylerii przeciwlotniczej, przeto należy wyjść z pierwszego zadania i zbadać w jaki sposób można zadać przeciwnikowi maksimum strat przy danej ilości sił i środków OPL, tzn. tej ilości, jaka została wydzielona do osłony obiektu.

Możemy przyjąć, że określony wariant ugrupowania bojowego stwarza warunki do zadania przeciwnikowi maksimum strat wówczas, gdy nadzieja matematyczna ilości rażonych środków napadu powietrznego /samolotów, samolotów - pocisków, pocisków/ osiąga wartość możliwie największą.

Obliczenie nadziei matematycznej /wartości oczekiwanej/ ilości rażonych środków napadu powietrznego można przeprowadzić następująco:

Załóżmy, że prowadzimy ogień jednym pododdziałem /dywizjonem ogniowym lub baterią/ do celu grupowego składającego się z u samolotów /samolotów - pocisków, pocisków/. Niech p_i będzie prawdopodobieństwem rażenia i-tego samolotu /samolotu - pocisku, pocisku/ a x - liczbą rażonych środków napadu powietrznego. Liczbę x przedstawmy w postaci sumy:

$$x = x_1 + x_2 + \ldots + x_u = \sum_{i=1}^{U} x_i,$$

gdzie wielkość przypadkowa x_i przyjmuje jedność, jeśli i-ty samolot /samolot - pocisk, pocisk/ jest rażony i zero, gdy nie jest rażony. Odpowiadające tej wartości prawdopodobieństwa są równe:

x_i	0	1
$p/x_i/$	q_i	p_i

gdzie: $q_i = 1 - p_i$

Zatem nadzieja matematyczna ilości rażonych samolotów /samolotów-pocisków, pocisków/ przez jeden pododdział ogniowy będzie równa

$$M_{/x/} = \sum_{i=1}^{U} /0 \cdot q_i + 1 \cdot p_i/ = \sum_{i=1}^{U} p_i. \qquad /4/$$

Gdy do celu pojedynczego prowadzi ogień nie jeden, lecz kilka pododdziałów, wówczas prawdopodobieństwo rażenia tego celu będzie równe

$$p_{in} = 1 - \prod_{c=1}^{n} /1 - p_{ic}/, \qquad /5/$$

gdzie:

n - ilość pododdziałów ogniowych prowadzących ogień do celu;

o - numer pododdziału.

Zaś nadzieja matematyczna ilości rażonych samolotów /samolotów - pocisków, pocisków/ biorących udział w nalocie wyrazi się wzorem:

$$M = \sum_{i=1}^{U} p_{in}. \qquad /6/$$

Warto zwrócić uwagę na to, że gdy ilość środków biorących udział w nalocie /u/ równa się jedności, to nadzieja matematyczna wyrażona wzorami /4/ i /6/ pokrywa się z prawdopodobieństwem rażenia celu pojedynczego /jednego samolotu, samolotu - pocisku, pocisku/.

Załóżmy teraz, że dany obiekt jest atakowany z powietrza przez kilka celów pojedynczych lub grupowych/ i oznaczmy przez $M_{nł}$ wartość nadziei matematycznej przy strzelaniu ilości n pododdziałów do ł-tego celu, przy czym wielkość $M_{nł}$ równa się zero jeśli cel nie jest ostrzeliwany i jest większa od zera, w przypadku, gdy do celu prowadzony jest ogień.

Nadzieja matematyczna ilości rażonych celów przez wszystkie pododdziały, które wezmą udział w odparciu nalotu na dany obiekt będzie w tym przypadku równa.

$$M_G = \sum_{l=1}^{G} M_{nł}, \qquad /7/$$

gdzie: G - liczba atakujących celów /pojedynczych lub grupowych/;

ł/ - numer celu.

Stąd średnia wartość prawdopodobieństwa odparcia ataku z powietrza wyrazi się wzorem:

$$P_1 = \frac{M_G}{Ł}, \qquad /8/$$

gdzie: Ł - ogólna ilość samolotów biorących udział w ataku.

W ten sposób otrzymaliśmy wartość P_1 występującą we wzorze /3/.

Z powyższego widać, że zagadnienie obliczenia średniego prawdopodobieństwa odparcia danego ataku /P_1/ jest dość skomplikowane i żmudne. Nie wymaga ono jednak dużej wiedzy matematycznej lecz raczej umiejętności starannego rachowania. Cała trudność w tym zagadnieniu polega na obliczeniu nadziei matematycznej ilości rażonych samolotów, która zależy od ilości strzelających pododdziałów, skuteczności strzelania każdego pododdziału, ilości celów, ich składu i ugrupowania.

Nie czyni to jednak zbyt wielkich przeszkód w rozwiązaniu problemu ugrupowania bojowego, ponieważ jest to zagadnienie tego typu, że z powodzeniem może być zaprogramowane na maszynę matematyczną i ustabelaryzowane /dla danego rodzaju sprzętu/, bądź też można je obliczyć, stosując metody uproszczone.

W przypadku, gdy chodzi o rozwiązanie problemu ugrupowania artylerii przeciwlotniczej to średnią wartość prawdopodobieństwa P_1 można obliczyć, korzystając ze wzoru:

$$P_1 = 1 - \sum_{r=0}^{s} \frac{e^{-mp}(mp)^r}{r!}, \qquad /9/$$

gdzie: m - ilość strzałów przypadająca na jeden cel;

p - prawdopodobieństwo trafienia przy jednym strzale;

s - liczba trafień przy m strzałach.

Wzór /9/ wyraża /w funkcji mp/ prawdopodobieństwo, że liczba trafień przy m oddalonych strzałach będzie większa od danej wartości s.

Pod znakiem sumy występuje funkcja rozkładu prawdopodobieństwa wg prawa Poissona.

Wartości prawdopodobieństw P_1 wyrażonych wzorem /9/ podano w tabeli nr 1.

Tabela nr 1

s.	mp						
	0,2	0,5	1,0	2,0	3,0	4,0	5,0
1.	0,0175	0,0904	0,2642	0,5940	0,8008	0,9084	0,9595
2.	0,011	0,0146	0,0803	0,3233	0,5768	0,7619	0,8753
3.	0,001	0,019	0,0189	0,1429	0,3527	0,5665	0,7349
4.		0,004	0,0037	0,0526	0,1847	0,3711	0,5595
5.		0,002	0,0006	0,0166	0,0838	0,2148	0,3839
6.			0,0001	0,0045	0,0335	0,1106	0,2378
7.				0,0011	0,0199	0,0511	0,1333
8.				0,0002	0,0038	0,0213	0,0680
9.					0,0011	0,0081	0,0317
10.					0,0003	0,0028	0,0136

Gdy ilość oddanych strzałów jest duża, a prawdopodobieństwo rażenia przy jednym strzale jest małe, wówczas prawdopodobieństwo P_1 możemy obliczyć wprost ze wzoru:

$$P_1 = \frac{N}{G} \cdot p \,, \qquad /10/$$

gdzie: N - ogólna ilość strzałów, jaką może oddać dane ugrupowanie w czasie odpierania ataku;

$\frac{N}{G} = m$ - ilość strzałów przypadająca na jeden cel;

p - średnie prawdopodobieństwo trafienia celu przy jednym strzale.

Zwróćmy uwagę, że iloczyn N.p jest po prostu nadzieją matematyczną ilości rażonych samolotów, która występuje w rozkładach Poissona i dwumianowym.

Należy zastrzec, iż obliczenie prawdopodobieństwa odparcia ataku /P_1/ przy wykorzystaniu wzoru /10/ może mieć miejsce w przypadku, gdy ilość oddanych strzałów jest duża, a prawdopodobieństwo rażenia przy jednym strzale jest tak małe, że iloczyn N.p jest niewielki. Oczywiście pojęcia "duże", "małe" są względne i zależą od ważności zagadnienia. Przyjmuje się w zasadzie, że ten sposób obliczenia nadziei matematycznej /wartości średniej/ można stosować wówczas, gdy $N.p \leq 5$ oraz $N.p \leq G$ x/. Wielkość popełnionego błędu będzie się wówczas zawierała w granicach tysięcznych części całości. W odniesieniu do ugrupowania małokalibrowej artylerii przeciwlotniczej warunki powyższe prawie zawsze będą spełnione, gdyż choć ilość strzałów, jaką może oddać dane ugrupowanie jest stosunkowo duża, to prawdopodobieństwo rażenia przy jednym strzale jest bardzo małe, bo zawiera się w granicach tysięcznych części całości.

Mnożąc wyrażenie /10/ przez 100, otrzymamy procent rażonych celów, czyli procent strat, a więc:

$$P_1 = \frac{100}{G} \cdot N.p \qquad /11/$$

Podany wyżej sposób obliczenia wartości P_1 jest bardzo prosty i może być w praktyce stosowany. Uzyskano to dzięki założeniu, że prawdopodobieństwo rażenia przy jednym strzale jest stałe. W rzeczywistości w czasie strzelania p ulega zmianie.

---

x/ Zagadnienie to jest szczegółowo naświetlone w pracach: Grayson Merrill - "Studia Operacyjne" - tłum. "Przegląd Techniki Rakietowej" Zeszyt 45, 1962 r. Wyd. Politechniki Warszawskiej i T. Gerstenkorn i T. Śródka - "Ćwiczenia z kombinatoryki i rachunku prawdopodobieństwa", -Łódź wyd. 1961 r.

Jednak ze względów praktycznych można przyjąć pewną średnią wartość p/dla danej wysokości, średniego parametru i przyjętego sposobu strzelania/.

Chcąc posłużyć się wzorem /10/ lub /11/ należy znać:

a/ ilość strzałów jaką może oddać dane ugrupowanie w czasie odpierania ataku z powietrza /N/;

b/ prawdopodobieństwo rażenia przy jednym strzale.

Pierwszą wielkość, mianowicie N, można dla każdego wariantu ugrupowania praktycznie określić, posługując się odpowiednimi wykresami[x/].

Drugi parametr nie trudno znaleźć w odpowiednich podręcznikach[xx/] z zakresu teorii strzelania lub obliczyć, opierając się na znanym wzorze:

$$p_m = 1 - /1 - p/^m, \qquad /12/$$

gdzie p_m jest prawdopodobieństwem rażenia celu przy m strzałach. Aby wyznaczyć wartość p musimy znać p_m. Oczywiste jest, że wartość p_m powinna odpowiadać średnim warunkom strzelania, jakie mogą wystąpić podczas osłony obiektu, np. wysokość lotu celu od 200 - 1000 m, prędkość lotu celu w granicach 200 - 300 m/sek, średni parametr około 1000 m.

Podany wyżej sposób określania wielkości p i m wskazuje na to, że w praktyce nie napotykamy większych trudności przy obliczaniu prawdopodobieństwa P_1 wyrażonego wzorem /10/.

Zdajemy sobie jednocześnie sprawę z tego, że jest to średnia wartość prawdopodobieństwa, gdyż występujące w tych wzorach prawdopodobieństwo rażenia przy jednym strzale jest średnie.

Jeśli we wzorach /10/ lub /11/ podstawimy za p najmniejszą lub największą wartość prawdopodobieństwa rażenia przy jednym strzale, to otrzymamy odpowiednio dolną lub górną wartość P_1.

Zwróćmy jeszcze uwagę na to, że jedyną wartością zmienną występującą we wzorach /10/lub /11/ dla danego sposobu /wariantu/ działania przeciwnika, jest m. Zatem zwiększenie prawdopodobieństwa odparcia ataku przeciwnika jest w tych warunkach możliwe na drodze maksymalizacji wielkości N.

---

x/ Szczegółowy opis wykresów oraz sposób posługiwania się nimi ujmują: Skrypt pt. "Obrona powietrzna obiektów przez naziemne środki OPL". Wyd. ASG z 1962 r. oraz praca doktorska mjr dypl. M. Nawryszczak.

xx/ Patrz "Zasady strzelania artylerii przeciwlotniczej małego kalibru" - Wyd. MON 1961 r.

Rozpatrzmy wobec powyższego co wpływa na ilość oddanych strzałów i czy możemy zwiększyć N przez odpowiedni dobór parametrów wyznaczających ugrupowanie bojowe.

W pierwszym rzędzie ilość oddanych strzałów zależy od parametrów charakteryzujących określony sposób /wariant/ działania przeciwnika takich, jak: prędkość, wysokość, czas przebywania na kursie bojowym, kąty nurkowania lub wznoszenia itp.

Prócz tego ilość oddanych strzałów zależy od: ilości pododdziałów, szybkostrzelności sprzętu, wielkości stref ostrzału /w płaszczyźnie poziomej i pionowej/, możliwości wykrycia i uchwycenia celu na czas przez każdy pododdział, stref martwych dział i przyrządów.

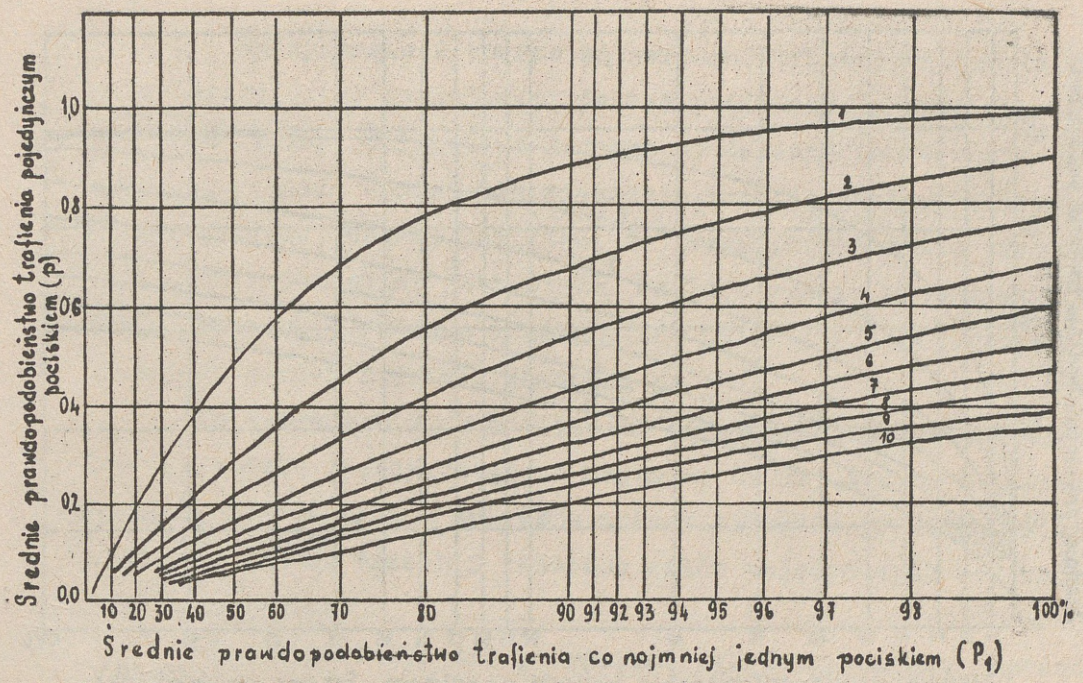
Wreszcie ilość oddanych strzałów zależy od promienia ugrupowania pododdziałów względem obiektu i odległości między pododdziałami. Zależność ta wynika stąd, że wraz ze zmianą promienia ugrupowania i odległości między pododdziałami zmienia się czas przebywania celu w strefie ognia, co bezpośrednio wpływa na ilość strzałów.

Tak więc dobierając odpowiednio promień ugrupowania pododdziałów i odległości między nimi możemy zwiększyć ilość strzałów. Sposób doboru zarówno promienia ugrupowania, jak i odległości między pododdziałami omówiony zo-stanie w następnych punktach niniejszego rozdziału.

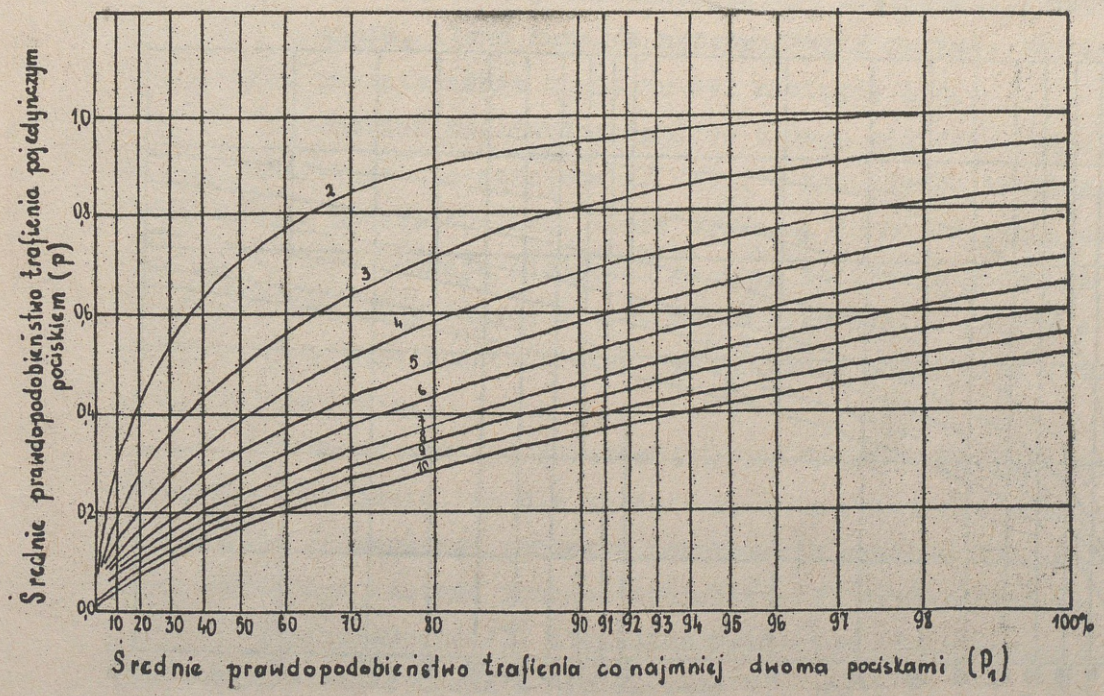
Dotychczas omówiony został sposób określania prawdopodobieństwa P_1 w przypadku rozwiązywania problemu ugrupowania środków OPL charakteryzujących się stosunkowo dużą szybkostrzelnością i małym prawdopodobieństwem rażenia celu przy jednym strzale, co może odnosić się szczególnie do artylerii przeciwlotniczej małego kalibru.

Przejdźmy teraz do omówienia sposobu określania wartości P_1 w przypadku, gdy w grę wchodzi mała ilość strzałów i stosunkowo duże prawdopodobieństwo rażenia przy jednym strzale, co ma miejsce przy rozwiązywaniu problemu ugrupowania rakiet przeciwlotniczych.

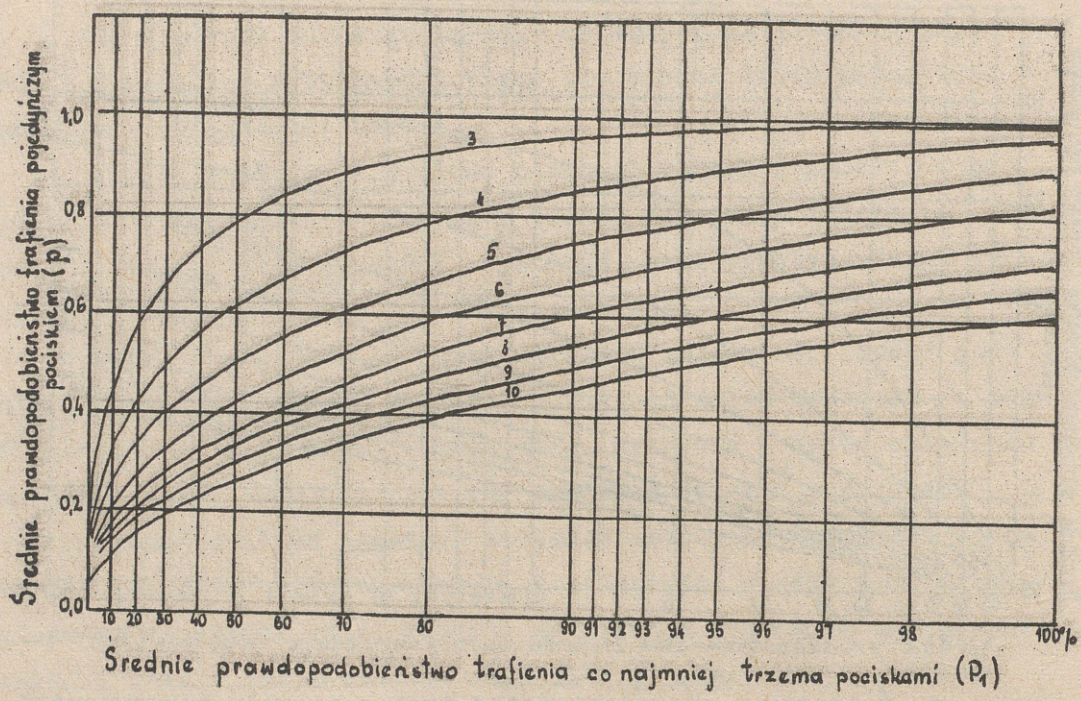
Przy założeniu, że znana jest średnia wartość prawdopodobieństwa rażenia jednym pociskiem, intersujące nas prawdopodobieństwo P_1 możemy określić, posługując się niżej podanymi wykresami /rys. 2, 3, 4 i 5/, które sporządzono w oparciu o wzór /12/, wykorzystując skalę kologarytmiczną.



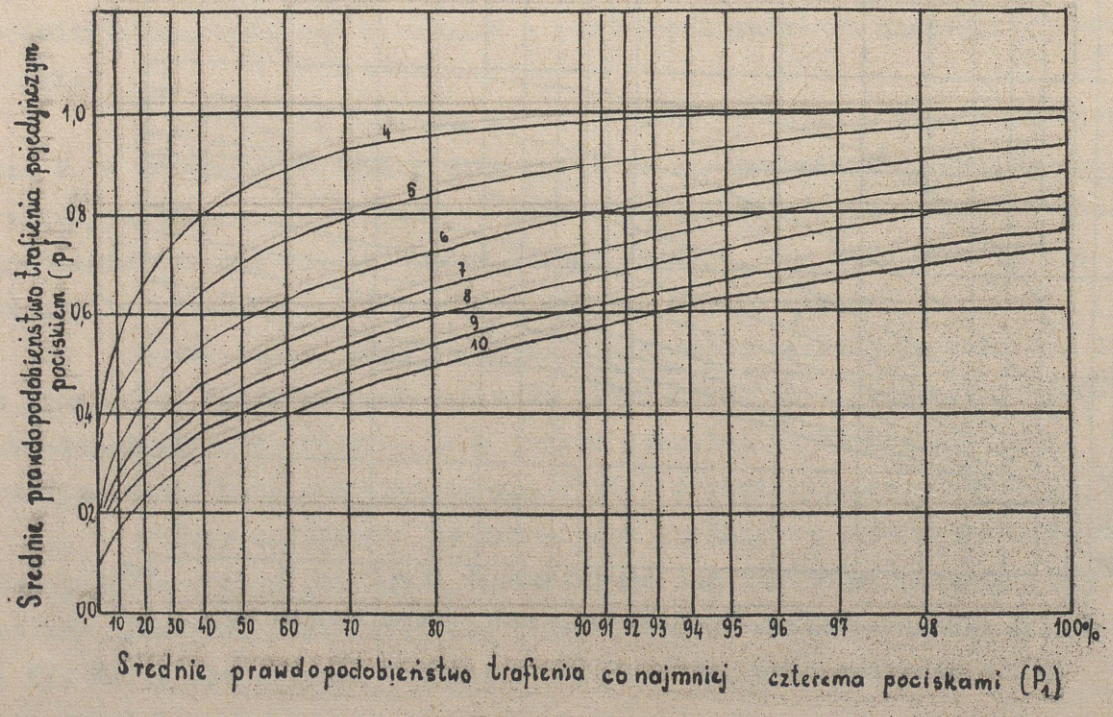
Rys. 2. Średnie prawdopodobieństwo trafienia celu pojedynczego co najmniej jednym pociskiem.



Rys. 3. Średnie prawdopodobieństwo trafienia celu pojedynczego co najmniej dwoma pociskami.



Rys. 4. Średnie prawdopodobieństwo trafienia celu pojedynczego co najmniej trzema pociskami.



Rys. 5. Średnie prawdopodobieństwo trafienia celu pojedynczego co najmniej czterema pociskami.

Na wykresie 2 podane są wartości prawdopodobieństw trafienia celu pojedynczego co najmniej jednym pociskiem. Krzywe wykreślone zostały dla liczby pocisków od jednego do dziesięciu. W razie potrzeby można sporządzić wykres dla większej liczby pocisków. Korzystając z tego wykresu, należy pamiętać, że prawdopodobieństwo trafienia celu jednym pociskiem jest stałe. Jeśli w czasie prowadzenia ognia p ulega zmianie, to krzywe mogą podawać tylko prawdopodobieństwo odpowiadające górnej i dolnej wartości p.

Na wykresach 3, 4 i 5 podane są wartości prawdopodobieństw trafienia celu pojedynczego co najmniej dwoma, trzema i czterema pociskami. Z tych samych wykresów możemy określić prawdopodobieństwo trafienia dwóch, trzech i czterech celów pojedynczych co najmniej jednym pociskiem.

Chcąc posłużyć się powyższymi wykresami musimy uprzednio określić liczbę rakiet, jaką może oddać dane ugrupowanie w czasie odpierania ataku z powietrza. Przy określaniu ilości rakiet należy uwzględnić parametry charakteryzujące sposób /wariant/ działania przeciwnika oraz parametry charakteryzujące możliwości sprzętu takie, jak: strefa ognia, ilość kanałów naprowadzania rakiet, odstęp strzelania, czas przeniesienia ognia na cel następny itd.

Analizując możliwości ogniowe danego wariantu ugrupowania zwykle interesuje nas zniszczenie celu, a nie liczba trafień, która to wywołuje. Liczba trafień, która prowadzi do zniszczenia określonego celu, jest funkcją zdolności rażącej pocisku i podatności celu na uszkodzenia. Pamiętając o tym, można wykorzystać powyższe wykresy do obliczenia prawdopodobieństwa zniszczenia celu, albo prawdopodobieństwa trafienia.

Przedstawione wyżej rozważania na temat możliwości ogniowych pozwalają stwierdzić, że dla każdego sposobu /wariantu/ działania przeciwnika i dowolnego wariantu ugrupowania środków OPL jesteśmy w stanie określić wartość prawdopodobieństwa P_1 występującą we wzorze/3/.

Aby wyrażenie /3/ stanowiło kryterium efektywności musimy ponadto znać występującą w nim wartość P_2, gdzie $P_2 = 1 - Q_2$.

Chcąc tę wartość określić należy znać stopień skuteczności poszczególnych sposobów /wariantów/ działania przeciwnika, który jest funkcją ilości i rodzaju środków napadu powietrznego przeciwnika, dokładności celowania, skuteczności środków rażenia i charakterystyk obiektu jako celu.

Należy jednak podkreślić, że nie zawsze dane te będą znane. Dotyczy to głównie sposobów ataku przy użyciu nowych środków rażenia. W takich przypadkach musimy się zadowolić jedynie przybliżonymi danymi, które można uzyskać np. przez porównanie sposobów bombardowania /ataku/ przeciwnika z odpowiednimi sposobami stosowanymi przez własne lotnictwo przy użyciu podobnych środków rażenia. Jeśli porównań takich przeprowadzić się nie da, to z konieczności za funkcję kryterium należy przyjąć tylko wartość P_1. Oznacza to, że na skutek braku danych, zmuszeni jesteśmy założyć, iż poszczególne sposoby /warianty/działania przeciwnika są jednakowo skuteczne. Z założeniem tym można się zgodzić, jeśli w grę wchodzi obiekt, który stanowi cel dla broni atomowej, jak np. ważny i duży obiekt przemysłowy. Jeśli natomiast wziąć pod uwagę obiekt punktowy, jak np. przeprawę, to może on być obezwładniany przez lotnictwo, bądź środkami klasycznymi, bądź też bronią atomową. W obu przypadkach sposoby /warianty/ działania przeciwnika będą z reguły różne i uznanie ich za jednakowo skuteczne nie będzie poprawne.

W takich przypadkach należy dążyć do uzyskania niezbędnych danych do określenia wartości P_2 dla każdego z prawdopodobnych sposobów /wariantów/ działania przeciwnika. Umożliwia to ustalenie ugrupowania bojowego, przy którym prawdopodobieństwo P_1 jest proporcjonalne do skuteczności danego ataku, co charakteryzuje wartość Q_2, gdzie $Q_2 = 1 - P_2$.

Proporcja ta orzeka, że w stosunku do ataku najbardziej skutecznego możliwości ogniowe powinny być największe, a w stosunku do ataku mniej skutecznego, który w mniejszym stopniu zagraża obiektowi - odpowiednio mniejsze. W świetle wzoru /1/ oznacza to, że przez odpowiedni dobór wielkości Q_1 możemy doprowadzić prawdopodobieństwo wykonania zadania przez przeciwnika /Q/ do wartości możliwie najmniejszej, lub co na jedno wychodzi, prawdopodobieństwo obrony obiektu /P/do wartości możliwie największej.

Tak więc wyrażenie:

$$Q_1 = 1 - P_1$$

spełnia tu rolę jak gdyby regulatora, który nie pozwala przeciwnikowi na osiągnięcie wyraźnych szans zniszczenia obiektu, mimo zastosowania nawet skutecznych sposobów ataku /bombardowania/.

W tym miejscu warto jeszcze raz podkreślić tę właściwość, że prawdopodobieństwo wykonania zadania /Q/ nie przekracza nigdy mniejszej z dwóch liczb Q_1 i Q_2, tzn.:

$$Q \leqslant \min /Q_1, Q_2/.$$

Jeśli np. prawdopodobieństwo przeniknięcia przez system obrony przeciwlotniczej przy danym sposobie /wariancie/ działania /Q_1/ wynosi 0,5, a prawdopodobieństwo /Q_2/ równe jest 0,9, to prawdopodobieństwo wykonania zadania /Q/ wynosi tylko 0,45, a więc spełnia warunek /2/, bo:

$$0{,}45 \leqslant \min /0{,}5,\ 0{,}9/.$$

Należy jednak mieć na uwadze, że ze względu na ograniczoną ilość środków wydzielonych do obrony przeciwlotniczej obiektu oraz ograniczone możliwości sprzętu, wartość $P_1 = 1 - Q_1$ możemy zmienić jedynie w pewnych granicach, określonych nierównością:

$$0 \leqslant P_1 \leqslant \max\ P_1, \qquad /13/$$

gdzie $\max P_1$ oznacza wartość prawdopodobieństwa, jaką można uzyskać przy zaangażowaniu do odparcia ataku z powietrza maksimum sił wydzielonych do osłony obiektu.

To samo odnosi się do przeciwnika tzn. może on przez stosowanie odpowiednich sposobów bombardowania /ataku/ zmieniać wartość Q_2 jedynie w pewnych granicach.

Należy się jednak liczyć z tym, że nigdy nie zmieni on wartości Q_2 w kierunku niekorzystnym dla siebie, czyli korzystnym dla nas, lecz będzie się starał wybrać ten sposób /wariant/ działania, który gwarantuje mu osiągnięcie możliwie największych wartości Q_1 i Q_2. Zdaje on sobie jednocześnie sprawę z tego, że strona broniąca się usiłuje zawsze sprowadzić wartość Q_1, a przez to i Q do minimum.

Występuje tu wyraźnie sytuacja konfliktowa, w której cele obu stron są przeciwstawne. To zaś prowadzi do gry. W grze tej jako kryterium efektywności można przyjąć wyrażenia /1/ lub /3/, gdyż w dostatecznym stopniu odzwierciedlają one zainteresowania obu stron.

Mając ustalone kryterium efektywności można już przystąpić do rozwiązania postawionego problemu, tzn. do wyboru ugrupowania bojowego, przy którym prawdopodobieństwo obrony obiektu /P/ w świetle prawdopodobnych sposobów /wariantów/ działania przeciwnika osiągnie wartość możliwie największą.

3. Ogólny model matematyczny

Przystępując do rozwiązania postawionego problemu należy przede wszystkim zbudować model matematyczny, który umożliwi przeprowadzenie zwięzłej analizy i dokonania wyboru optymalnego ugrupowania, w świetle przyjętego kryterium efektywności. Z uwagi na zakres posiadanych informacji o przeciwniku, model ten powinien być modelem strategicznym[x/]. W celu zbudowania jego wprowadźmy następujące oznaczenia:

S_l - ogólna ilość pododdziałów l-tego rodzaju wydzielona do obrony przeciwlotniczej obiektu, gdzie l = 1, 2, 3, ...L;

S_{l_i} - ilość pododdziałów l-tego rodzaju rozmieszczona na i-tej rubieży, gdzie i = 1,2,3,...,I;

r_{i_l} - promień i-tej rubieży ugrupowania pododdziałów l-tego rodzaju mierzony od środka obiektu;

ℓ_e - wycinek /sektor/ wielkości ℓ i o numerze e, gdzie e = 1,2,3,...,f;

d_{ie} - odległości pomiędzy pododdziałami na i-tej rubieży w sektorze o numerze e;

j - indeks oznaczający sposób /wariant/ działania przeciwnika, gdzie j = 1,2,3,...w;

k - indeks oznaczający wariant ugrupowania środków OPL wydzielonych do obrony obiektu /zależny od S_{l_i}, V_{i_l}, d_{ie}/, gdzie k = 1,2,3,...,u;

P_k^j - prawdopodobieństwo obrony obiektu przy j-tym sposobie /wariancie/ działania przeciwnika i k-tym wariancie ugrupowania środków OPL;

$Q_k^j = 1-P_k^j$ - prawdopodobieństwo wykonania zadania przy j-tym sposobie /wariancie/ działania przeciwnika i k-tym wariancie ugrupowania środków OPL wydzielonych do obrony obiektu;

$Q_{2k}^j = 1\ P_{2k}^j$ - prawdopodobieństwo zniszczenia /obezwładnienia/ obiektu przy j-tym sposobie działania przeciwnika i k-tym wariancie ugrupowania.

---

x/ Model, w którym choćby o jednym parametrze wiemy tylko tyle, że przyjmuje on jedną z wielu możliwych wartości, przy czym zbiór tych wartości jest nam na ogół znany - nazywamy modelem strategicznym. W naszym przypadku takimi parametrami są parametry charakteryzujące możliwe sposoby /warianty/ działania przeciwnika.

Wyrażenie P_k^j jest wielkością, którą przeciwnik stara się minimalizować przez wybór odpowiedniego sposobu /wariantu/ działania na osłaniany obiekt.

Wyboru takiego przeciwnik tym trafniej może dokonać, im dane o celu i systemie obrony powietrznej obiektu będą bardziej dokładne i aktualne. Dążność przeciwnika do minimalizowania wielkości P_k^j, lub co na jedno wychodzi, maksymalizowania wielkości Q_k^j możemy wyrazić matematycznie następująco:

$$\min_j P_k^j = \min_j /1 - Q_k^j/, \qquad /14/$$

lub

$$\max_j Q_k^j = \max_j /1 - P_k^j/. \qquad /15/$$

Ponieważ w myśl wzorów /1/ i /3/

$Q_k^j = Q_{1_k}^j \cdot Q_{2_k}^j = /1 - P_{1_k}^j / /1 - P_k^j/$, stąd

wyrażenie /14/ przyjmie postać:

$$\min_j P_k^j = \min_j /1 - Q_{1_k}^j \cdot Q_{2_k}^j / =$$

$$= \min_j \left[1 - /1-P_{1_k}^j / \ /1 - P_{2_k}^j / \right] .$$

W przypadku /15/ będzie:

$$\max_j Q_k^j = \max_j \left[/1 - P_{1_k}^j / \ /1-P_{2_k}^j / \right] .$$

Wyrażenie /14/ przedstawia najmniejszą wartość prawdopodobieństwa obrony obiektu ze względu na możliwe sposoby działania przeciwnika przy wariancie ugrupowania środków OPL o ideksie k, a wyrażenie /15/ największą wartość prawdopodobieństwa wykonania zadania przez przeciwnika.

Strona organizująca system obrony powietrznej obiektu znając prawdopodobne sposoby działania przeciwnika, własne możliwości, warunki terenowe i meteorologiczne oraz ugrupowanie i możliwości środków OPL bezpośredniego sąsiada, winna wybrać spośród wszystkich możliwych wariantów k /$1 \leq k \leq u$/ ten, dla którego wyrażenie /14/ przyjmie wartość największą, czyli /15/ najmniejszą, co w zapisie matematycznym wyrazi się:

$$\max_k \min_j P_k^j = \max_k \min_j /1 - Q_k^j/, \qquad /14'/$$

czyli:

$$\min_k \max_j Q_k^j = \min_k \max_j /1 - P_k^j/. \qquad /15'/$$

Oznaczmy przez V_1 wartość prawdopodobieństwa /14´/ - a przez k´wariant ugrupowania środków OPL, przy którym wartość ta zostaje osiągnięta. Po uwzględnieniu powyższych oznaczeń wyrażenie /14´/ zapiszemy[x]:

$$V_1 = \max_k \min_j P_k^j = \min_j P_{k'}^j \qquad /14''/$$

Z równania /14´´/ wynika, że dla wszystkich możliwych sposobów /wariantów/ działania przeciwnika /j/ będzie:

$$V_1 \leq P_{k'}^j \qquad /16/$$

Oznacza to, że przyjmując wariant ugrupowania k´, gwarantujemy sobie uzyskanie prawdopodobieństwa obiektu równego co najmniej

$$V_1 = \min_j P_{k'}^j,$$

bez względu na sposób /wariant/ działania przeciwnika, ponieważ wartość prawdopodobieństwa V_1 odnosi się do wariantu działania najbardziej niekorzystnego dla nas.

W odniesieniu do innych sposobów /wariantów/ działania przeciwnika prawdopodobieństwo to będzie odpowiednio większe, co wynika z nierówności /16/.

Ale przyjmując wariant ugrupowania k´/zależny/ od S_{1_i}, r_{i_1}, d_{i_g}/, bierzemy pod uwagę tę okoliczność, że przeciwnik może prawidłowo ocenić wszystkie czynniki składające się na jego decyzję i wybrać ten sposób działania, który zapewnia mu wykorzystanie słabych stron systemu obrony powietrznej obiektu, a jednocześnie daje możliwie dużą pewność zniszczenia /obezwładnienia/ obiektu. Można też powiedzieć, że strona broniąca się wybierając wariant ugrupowania k´ zakłada, że przeciwnik będzie działał w sposób przemyślany i dlatego zachowuje dużą ostrożność, tzn. liczy się z możliwością zastosowania przez przeciwnika najbardziej niekorzystnego dla niej sposobu /wariantu/ działania.

Należy zaznaczyć, że jeśli przeciwnik posiada informacje /dane/ dotyczące ilości i rodzaju sił i środków wydzielonych do obrony powietrznej obiektu oraz zna zasady ich wykorzystania, to może zastosować taki sposób działania, przy którym prawdopodobieństwo obrony obiektu będzie równe co najwyżej:

---

x/ Przy wprowadzonych oznaczeniach wartość wyrażenia /15´/ będzie równa: $1 - V_1 = \min_k \max_j Q_k^j = \max /1 - P_k^j /$. Interesuje nas jednak przede wszystkim wartość /14´/ i /14´´/.

$$V_2 = \min_j \max_k P_k^j . \qquad /17/$$

Po uwzględnieniu wzorów /1/ i /3/ będzie:

$$V_2 = \min_j \max_k /1 - Q_{1_k}^j \; Q_{2_k}^j / =$$

$$= \min_j \max_k \left[1 - /1 - P_{1_k}^j / /1 - P_{2_k}^j / \right] .$$

Wyrażenie /17/ stanowi górną wartość prawdopodobieństwa obrony obiektu, a wyrażenie /14´/ jest wartością dolną tego prawdopodobieństwa[x/].

Ze znaczenia obu tych wartości wynika oczywista nierówność:

$$\max_k \min_j P_k^j \leqslant \min_j \max_k P_k^j , \qquad /18/$$

czyli:

$$V_1 \leqslant V_2 \qquad /19/$$

Podczas rozwiązywania problemu ugrupowania naziemnych środków OPL może się zdarzyć, że $V_1 = V_2$ lub $V_1 < V_2$. Rozróżnienie tych dwóch przypadków jest bardzo ważne. W pierwszym przypadku, gdy $V_1 = V_2$ sytuacja jest prosta, bowiem strona broniąca się wybierając wariant ugrupowania k´zapewnia sobie uzyskanie prawdopodobieństwa obrony obiektu równego co najmniej wspólnej wartości V_1 i V_2, zdając sobie jednocześnie sprawę z tego, że przeciwnik może zapobiec temu, aby nie osiągnąć większego prawdopodobieństwa obrony obiektu, niż $V_1 = V_2$, przez zastosowanie najbardziej niekorzystnego dla nas sposobu /wariantu/ działania, który oznaczymy przez j´.

Ta wspólna wartość

$$V_1 = V_2 \qquad /20/$$

jest kompromisową wartością prawdopodobieństwa obrony obiektu i zgodnie z terminologią stosowaną w teorii gier, nazywa się w a r t o ś c i ą g r y. Tak więc, jeśli $V_1 = V_2$, to strona broniąca się posiada optymalny wariant ugrupowania k´, a przeciwnik - optymalny sposób /wariant/ działania /j´/.

W teorii gier dowodzi się między innymi, że warunkiem ko -

---

x/ Wartości prawdopodobieństw wyrażone wzorami /14´/ i /17/ zgodnie z terminologią stosowaną w teorii gier nazywają się odpowiednio d o l n ą i g ó r n ą w a r t o ś c i ą g r y.

niecznym i wystarczającym na to, aby zachodziła równość /20/ jest istnienie punktu siodłowego macierzy

$$A = \left[P_k^j \right] \quad , \qquad /21/$$

mającej u wierszy i w kolumn, tzn. istnienie pary rozwiązań /k', j'/, dla której P_k^j jest jednocześnie minimalną wartością swego wiersza i maksymalną wartością kolumny.

Przy założeniu, że przeciwnik zna ilość i rodzaj sił i środków wydzielonych do obrony obiektu oraz potrafi ustalić ich położenie x/, możemy wyrażenie /21/ łącznie z /20/ uważać za ogólny model gry.

W celu wyznaczenia optymalnego wariantu ugrupowania /k'/ oraz optymalnego sposobu /wariantu/ działania przeciwnika /j'/ należy w tym przypadku zbudować macierz /21/, która po rozpisaniu przyjmie postać:

Tablica 2

Możliwe warianty ugrupowania /k/	Prawdopodobne sposoby działania przeciwnika /j/							
	1	2	3	...	j	...	w	$\min_j P_k^j$
1	P_1^1	P_1^2	P_1^3	...	P_1^j	...	P_1^w	$\min_j P_1^j$
2	P_2^1	P_2^2	P_2^3	...	P_2^j	...	P_2^w	$\min_j P_2^j$
3	P_3^1	P_3^2	P_3^3	...	P_3^j	...	P_3^w	$\min_j P_3^j$
...	...	...	...	...	...	...	...	... /21'/
k	P_k^1	P_k^2	P_k^3	...	P_k^j	...	P_k^w	$\min_j P_k^j$
...	...	...	...	...	...	...	...	...
u	P_u^1	P_u^2	P_u^3	...	P_u^j	...	P_u^w	$\min_j P_u^j$
$\max_k P_k^j$	$\max_k P_k^j$	$\max_k P_k^j$	$\max_k P_k^j$	...	$\max_k P_k^j$	...	$\max_k P_k^j$	

x/ Przy takim założeniu możemy przyjąć, że jest to gra o pełnej informacji. Gdy do obrony obiektu zostaną wydzielone środki typu stacjonarnego, którymi manewr może być wykonywany jedynie w sporadycznych wypadkach, to założenie o znajomości przez przeciwnika ugrupowania można przyjąć za realne.

Mając tak zbudowaną macierz możemy z łatwością określić zarówno maksymalną wartość prawdopodobieństwa P_k^j, stojącą w ostatniej kolumnie, a więc:

$$V_1 = \max_k \min_j P_k^j , \qquad /22/$$

jak i minimalną wartość tego prawdopodobieństwa, stojącą w ostatnim wierszu, tzn.

$$V_2 = \min_j \max_k P_k^j \qquad /23/$$

Wariant ugrupowania k, zawarty w macierzy /21´/ i spełniający warunek /22/, możemy w danym przypadku uważać za optymalny. Niekiedy wariantów takich może być kilka np. dwa lub trzy.

W takim przypadku spośród równoważnych sobie wariantów z punktu widzenia prawdopodobieństwa obrony obiektu /P_k^j/, wybieramy ten, który zapewnia lepsze warunki dowodzenia, maskowania, przegrupowania, zaopatrywania, obrony przed bronią masowego rażenia itp. Należy dodać, że warianty, które nie odpowiadają w sposób wyraźny przytoczonym wymogom nie powinny być umieszczane w tablicy 2. Warianty te w dalszej części pracy będziemy zaliczali do wyraźnie niekorzystnych z punktu widzenia warunków taktycznych.

Dla przeciwnika optymalnym sposobem /wariantem/ działania /j´/ jest ten, który odpowiada warunkowi /22/.

Rozpatrzmy teraz drugi przypadek, wynikający z nierówności /19/, tzn. gdy:

$$V_1 < V_2, \qquad /19´/$$

zakładając jednocześnie, że środki wydzielone do obrony przeciwlotniczej obiektu pozwalają na zmianę co pewien czas ugrupowania bojowego /zmianę stanowisk ogniowych pododdziałów/, a więc posiadają możliwości manewrowe. Przypadek ten dotyczy szczególnie małokalibrowej artylerii przeciwlotniczej.

W tym przypadku strona organizująca obronę przeciwlotniczą obiektu może z reguły uzyskać większą wartość prawdopodobieństwa P_k^j niż:

$$V_1 = \max_k \min_j P_k^j,$$

jeśli będzie stosować nie jeden lecz kilka wariantów ugrupowania[x/].

x/ Jest to zgodne z zasadniczym twierdzeniem teorii gier nieskooperowanych o sumie zero, które mówi, że strona broniąca się może zwiększyć swoją wygraną, stosując t.zw. strategię mieszaną. Stosowanie kilku wariantów ugrupowania z określonymi częstościami stanowi strategię mieszaną.

Wynika to stąd, że przez stosowanie co pewien czas manewru /przejście pododdziałów na zapasowe SO/ oraz maskowania stworzymy przeciwnikowi znaczne trudności w uzyskaniu aktualnych danych o systemie obrony przeciwlotniczej obiektu.

Posiadanie przez przeciwnika tylko częściowych danych lub zupełny ich brak, jest czynnikiem, który zawsze ujemnie wpływa na wybór przez niego optymalnego sposobu działania i prowadzi najczęściej do błędów, co jest korzystne dla nas.

W niektórych jednak przypadkach przeciwnik może prawidłowo ocenić skuteczność systemu obrony przeciwlotniczej obiektu, mimo posiadania niepełnych danych. Jednak szanse bezbłędnej oceny są niewielkie.

Ale nawet w tym udanym przypadku prawdopodobieństwo wykonania zadania przez przeciwnika o wiele się nie zmieni w porównaniu z prawdopodobieństwem, które co najwyżej może on osiągnąć w przypadku nie stosowania przez nas manewru.

Jeżeli ponadto uwzględnić fakt, że przez wykonanie w odpowiednim czasie manewru możemy uniknąć uderzeń mających na celu obezwładnienie sił i środków CPL, to stosowanie z określoną częstością kilku korzystnych wariantów ugrupowania jest celowe.

W celu określenia prawdopodobieństwa obrony obiektu, jakie strona broniąca się może osiągnąć w przypadku stosowania manewru, wprowadźmy dodatkowo następujące oznaczenia:

x_k - częstość, z jaką strona broniąca się powinna stosować wariant ugrupowania o indeksie k /$1 \leq k \leq u$ /;

y_j - częstość, z jaką przeciwnik powinien stosować sposób działania j, gdzie $1 \leq j \leq w$.

W odniesieniu do wyraźnie niekorzystnych wariantów ugrupowania i sposobów działania przeciwnika częstości te będą równe zero.

Sumy wszystkich częstości x_k i y_j są równe

$$\sum_{k=1}^{u} x_k = 1 \quad \text{i} \quad \sum_{j=1}^{w} y_j = 1 \qquad /24/$$

Wartość prawdopodobieństwa obrony obiektu, z uwzględnieniem możliwych wariantów ugrupowania i prawdopodobnych sposobów działania przeciwnika, będzie w tym przypadku równa:

$$P_{/x_k \quad y_j /} = \sum_{k=1}^{u} \sum_{j=1}^{w} x_k \; y_j \; P_k^j \qquad /25/$$

Dolną i górną wartość gry oraz częstości optymalne: $x_k = x_k^*$ i $y_j = y_j^*$ obliczamy z wyrażeń:

$$V_1' = \max_x \min_y \sum_{k=1}^{u} \sum_{j=1}^{w} x_k\, y_j\, P_k^j \qquad /26/$$

$$V_2' = \min_y \max_x \sum_{k=1}^{u} \sum_{j=1}^{w} x_k\, y_k\, P_k^j, \qquad /27/$$

które określają odpowiednio dolną /V_1'/ i górną /V_2'/ wartość prawdopodobieństwa obrony obiektu, w przypadku stosowania manewru.

Zaznaczyć należy, iż wartość V_1' i V_2' zawsze istnieją i są sobie równe, jeśli tylko ilość możliwych wariantów ugrupowania /k/ i sposobów działania przeciwnika /j/ jest skończona[x/].

A więc:

$$V_1' = \max_x \min_y \sum_{k=1}^{u} \sum_{j=1}^{w} x_k\, y_j\, P_k^j =$$

$$= \min_y \max_x \sum_{k=1}^{u} \sum_{j=1}^{w} x_k\, y_j\, P_k^j = V_2'. \qquad /28/$$

Należy podkreślić, że wspólna wartość $V_1' = V_2' = V'$ jest oszacowaniem kompromisu odnoszącego się do przypadku $V_1 < V_2$, którego nie dałoby się ustanowić stosując jeden wariant ugrupowania i przewidując tylko jeden sposób działania przeciwnika.

Tak więc strona broniąca się stosując kilka wariantów ugrupowania np. dwa lub trzy z częstościami x_k może być pewna, że prawdopodobieństwo obrony obiektu osiągnie wartość równą V'.

W teorii gier dowodzi się, że zawsze zachodzi nierówność

$$V_1 \leqslant V_1' \qquad /29/$$

co łącznie z możliwością uniknięcia skutków uderzeń z powietrza /uderzeń na SO pododdziałów ogniowych/ przemawia za celowością stosowania manewru.

---

x/ Jest to zgodne z zasadniczym twierdzeniem gier macierzowych, które mówi, że dla każdej gry macierzowej wartości $\max_x \min_y E\,/X, Y/$ oraz $\min_y \max_x E\,/X, Y/$, gdzie $X = /X_1, X_2, \ldots, X_m/$ i $Y = /y_1, y_2, \ldots y_n/$ istnieją i są równe. To znaczy, że każda gra macierzowa ma rozwiązanie.

Macierz /21'/ oraz równania /26/ i /27/ stanowią ogólny model matematyczny, w przypadku stosowania manewru.

W modelu tym wzięto pod uwagę tę okoliczność, iż na skutek stosowania manewru i maskowania, przeciwnik nie zawsze jest w stanie określić w momencie podejmowania decyzji, położenia sił i środków OPL wydzielonych do obrony obiektu. Dlatego też wybrany przez niego sposób działania może nie być optymalny. To zaś stwarza możliwość uzyskania większego prawdopodobieństwa obrony obiektu niż W_1.
Przejdźmy teraz do naświetlenia zagadnienia uwzględniania w modelu kierunków zajścia przeciwnika na obiekt /kierunków/ nalotu oraz stopnia oddziaływania środków OPL bezpośredniego sąsiada.

Przy równomiernym rozkładzie pododdziałów na poszczególnych rubieżach prawdopodobieństwo zadania przeciwnikowi strat /do rubieży rozpoczęcia ataku/ w j-tym sposobie /wariancie/ działania /$P_{1_k}^{j}$ / jest na wszystkich kierunkach jednakowe. To zaś nie można uznać za optymalne rozwiązanie, gdyż w rzeczywistości naloty z poszczególnych kierunków nie są jednakowo prawdopodobne. Uwarunkowane jest to szeregiem czynników, które przeciwnik uwzględnia przy wyborze kierunku nalotu na obiekt /cel/. Do czynników tych możemy zaliczyć:

a/ położenie obiektu w stosunku do rejonu swego bazowania;
b/ stopień oddziaływania środków OPL na podejściach do obiektu ataku;
c/ charakterystyczne punkty terenowe, umożliwiające orientację i wyjście w rejon obiektu;
d/ kształt obiektu, od którego między innymi zależy prawdopodobieństwo jego zniszczenia /obezwładnienia/;
e/ położenie celów zapasowych[x/];
f/ pora doby i warunki meteorologiczne.

Chcąc ustalić prawdopodobne kierunki nalotu przeciwnika na dany obiekt, trzeba dokładnie ocenić wyżej wymienione czynniki i określić,w jakim stopniu każdy z nich wpływa na ich wybór. Na ogół nie da się pewnie ustalić kierunków, z których przeciwnik będzie atakował, a przez to trudno jest wykluczyć zupełnie jakieś kierunki. Wynika stąd potrzeba tworzenia obrony okrężnej. Jednak prawdopodobieństwo zadania strat przeciwnikowi na każdym z kierunków nie musi być jednakowe, ponieważ prawdopodobieństwo wykonania zadania przez przeciwnika z reguły nie posiada tej własności. Zatem nasuwa się potrzeba zróżnicowania na poszczególnych kierunkach prawdopodobieństwa P_1,proporcjonalnie do Q.

---

x/ W instrukcji zaleca się wybierać kierunek zajścia na cel zasadniczy w ten sposób, aby w każdej chwili można było wykonać uderzenie na cel zapasowy,nie wykonując przy tym skomplikowanych manewrów.

Gdyby prawdopodobieństwo wykonania zadania przez przeciwnika /Q/ było jednakowe przy nalocie z dowolnego kierunku, sytuacja byłaby prosta; równomierny rozkład pododdziałów byłby najbardziej korzystny. Jednak z reguły prawdopodobieństwo Q jest różne na różnych kierunkach. Wynika to stąd, że Q jest iloczynem prawdopodobieństw Q_1 i Q_2, z których każde zależy od szeregu czynników załamujących się nieco inaczej na poszczególnych kierunkach. Na wartość prawdopodobieństwa Q_1 wpływają takie czynniki, jak: trasa i profil lotu do rejonu celu, prędkość, skład i ugrupowanie środków wydzielonych do zniszczenia /obezwładnienia/ obiektu, sposób ataku /bombardowania/ oraz stopień oddziaływania środków OPL na trasie lotu do obiektu ataku. Ten ostatni czynnik będzie się kształtował nieco inaczej na każdym z kierunków, gdyż możliwości oddziaływania środków OPL będą różne dla różnych tras lotu środków napadu powietrznego przeciwnika. Możliwości te zależą głównie od ilości, rodzaju i ugrupowania środków OPL, co dla każdego kierunku jest najczęściej różne.

Z powyższego wynika, że łączne prawdopodobieństwo przeniknięcia przez system OPL na głębokość do obiektu ataku jest, ogólnie rzecz biorąc, funkcją odległości i kierunku podejścia do tego obiektu. Proces obliczania łącznego prawdopodobieństwa Q_1 dla każdego z możliwych kierunków podejścia do obiektu, jest zagadnieniem stosunkowo trudnym. Wymaga on przede wszystkim przyjęcia konkretnego położenia środków OPL i założenia wariantów nalotu, aby na tej podstawie można było określić liczbę i rodzaj środków OPL włączanych kolejno do akcji oraz możliwości obniżenia przez nich prawdopodobieństwa Q_1. Zagadnienie jeszcze bardziej się komplikuje, gdy uwzględnić ten fakt, że przeciwnik w czasie lotu do obiektu ataku może wykonywać różne manewry /zmiana kursu, wysokości i prędkości/. Ponadto sam kierunek ataku /bombardowania/ nie koniecznie musi się pokrywać z kierunkiem podejścia do obiektu.

Również prawdopodobieństwo Q_2 nie wykazuje cech stałości. Zależy ono od rodzaju i ilości środków, jakie przerwą się przez system OPL, sposobu ich wyjścia w rejon obiektu /chodzi tu głównie o prędkość i wysokość, co warunkuje możliwości wykrycia celu/ i sposobu ataku /bombardowania/ oraz od charakterystyk obiektu jako celu i skuteczności środków rażenia.

Elementem ułatwiającym rozwiązanie postawionego zagadnienia jest to, że nie ma potrzeby obliczania prawdopodobieństwa przeniknięcia przez system OPL, licząc od wejścia przeciwnika w nasz system ra-

diolokacyjnego wykrywania do rubieży rozpoczęcia ataku, gdyż na ugrupowanie środków OPL w osłonie obiektu ma wpływ właściwie bezpośredni sąsiad, z którym istnieje łączność ogniowa lub odległość do niego jest tak mała, że przeciwnik chcąc zaatakować obiekt z tego kierunku, musi najpierw przelatywać przez strefę ognia sąsiada. Za sąsiada można również uważać własne lotnictwo myśliwskie działające w strefie ognia lub w pobliżu tej strefy.

Chodzi o to, że przeciwnik dla zapewnienia sobie lepszych warunków wykonania zadania, dolot do obiektu może wykonywać z innego kierunku niż kierunek ataku /bombardowania/, ale w tym przypadku jest on bardziej narażony na ataki własnego lotnictwa myśliwskiego, gdyż prawdopodobieństwo przechwycenia celu przez lotnictwo jest między innymi funkcją drogi. W tym znaczeniu można mówić o bezpośrednim wpływie działalności własnego lotnictwa myśliwskiego na ugrupowanie bojowe.

Jeśli mimo zwiększenia prawdopodobieństwa oddziaływania własnego lotnictwa /na skutek wydłużenia drogi/, prawdopodobieństwo wykonania zadania przez przeciwnika zwiększy się dzięki dodatniemu wpływowi innych czynników, to manewr, którego celem jest wybranie odpowiedniego kierunku ataku /bombardowania/ można uznać za korzystny dla przeciwnika.

Kierunek dolotu do rejonu celu z reguły nie będzie się pokrywał z kierunkiem ataku /bombardowania/, w przypadku gdy przeciwnik:

a/ zastosuje manewr przeciwrakietowy. W manewrze tym samoloty z chwilą przekroczenia prawdopodobnej rubieży postawienia zadań pododdziałom ogniowym mogą zmienić kurs, w granicach 30° - 60°, omijając całkowicie strefy ognia tych pododdziałów, z których mogą być naprowadzane na nie rakiety. Wyjście na cel dokonywane jest z innego kierunku i przez wykonanie energicznego skrętu, w stronę strefy ognia. W wyniku tego manewru przeciwnik polepszy sobie możliwości przeniknięcia przez strefę ognia rakiet, a tym samym zwiększa prawdopodobieństwo wykonania zadania;

b/ wykona manewr dla obejścia strefy ognia bezpośredniego sąsiada, którego środki OPL są ugrupowane na kierunku lotu do rejonu celu lub też dla zaatakowania obiektu z tych kierunków, na których nasycenie środków osłaniających obiekt jest małe. W instrukcjach zaleca się np. wybieranie trasy lotu w ten sposób, by lot do rejonu celu był wykonywany nad rejonami słabo nasyconymi środkami OPL.

Do rejonów tych zalicza się między innymi tereny lesiste i bagniste, rejony nie zajęte przez wojska oraz rejony, które były uprzednio obiektami uderzeń atomowych;

c/ będzie się starał uzyskać zaskoczenie przez wykonanie ataku /bombardowania/ od tyłu lub od zaciemnionej strony horyzontu, względnie od strony słońca /w warunkach dobrej pogody/ przy równoczesnym wykorzystaniu ukształtowania terenu dla maskowania lotu. Tego rodzaju taktykę stosują głównie samoloty myśliwsko-bombowe;

d/ wykona dodatkowy manewr, w celu wybrania kierunku ataku /bombardowania/, przy którym prawdopodobieństwo zniszczenia /obezwładnienia/ obiektu jest możliwie największe. W instrukcji np. podkreśla się, że atak na cele wąskie i długie /mosty, przeprawy, stacje kolejowe itp/ najcelowiej jest wykonywać pod kątem w granicach 15-20°. Przy atakowaniu celów o małych wymiarach, szczególnie z małych wysokości wybór kierunku uzależniony jest możliwościami jego wykrycia z maksymalnej odległości.
Dla ułatwienia wyjścia na mały i dobrze zamaskowany obiekt, kierunek nalotu zaleca się wybierać w ten sposób, by wyjście na cel było wykonywane od strony dobrze widocznego obiektu /punktu/ orientacyjnego.

Podkreśla się jednocześnie, że przy atakowaniu celów powierzchniowych, prawdopodobieństwo ich rażenia praktycznie nie zależy od kierunku nalotu. W tym wypadku kierunek ataku /bombardowania/ jest uzależniony tylko od rozmieszczenia środków OPL;

e/ będzie stosował manewr przez zmianę kursu i wysokości przed wejściem w strefę ognia, aby jak najbardziej utrudnić myśliwcom wykonanie ataku.

Z powyższego wynika, że jest wiele sytuacji gdzie przeciwnik może zaatakować obiekt nie bezpośrednio z trasy, lecz po wykonaniu dodatkowego manewru przed wejściem w strefę ognia. Główny cel tego manewru polega na stworzeniu sobie lepszych warunków przeniknięcia przez system obrony przeciwlotniczej obiektu i skuteczniejszym wykonaniu ataku /bombardowania/, co w rezultacie zwiększa wartość Q.

Należy jednak mieć na uwadze to, że dopóki przeciwnik wykonuje manewry, dopóty odwleka on termin wykonania podstawowego zadania bojowego, narażając się jednocześnie przez dłuższy czas na oddziaływanie środków OPL, szczególnie lotnictwa myśliwskiego. Dlatego na celowość stosowania manewru muszą w warunkach konkretnej sytuacji taktycznej wpłynąć czynniki zwiększające w ostatecznym rachunku prawdopodobieństwo wykonania zadania /Q/.

Organizując system obrony przeciwlotniczej obiektu, powinniśmy dążyć do ustalenia tych czynników oraz oszacowania wartości prawdopodobieństw Q_k^j przy atakach z poszczególnych kierunków.

W celu podania ogólnego sposobu określania prawdopodobieństwa wykonania zadania przez przeciwnika, z uwzględnieniem kierunków nalotu i stopnia oddziaływania środków OPL bezpośredniego sąsiada, wprowadźmy dodatkowo następujące oznaczenia:

$Q_{kg}^{j/\alpha/}$ - prawdopodobieństwo wykonania zadania przez przeciwnika przy działaniu z kierunku α, k-tym wariancie ugrupowania środków OPL wydzielonych do osłony obiektu i wariancie ugrupowania g środków OPL bezpośredniego sąsiada;

$Q_{1_{kg}}^{j/\alpha/}$ - prawdopodobieństwo przeniknięcia przez system obrony przeciwlotniczej przy działaniu z kierunku α, k-tym wariancie ugrupowania i wariancie g rozmieszczenia środków OPL bezpośredniego sąsiada;

$Q_2^{j/\alpha/}$ - prawdopodobieństwo zniszczenia /obezwładnienia/ obiektu przy działaniu z kierunku α;

B_1^e - ilość pododdziałów 1-tego rodzaju rozmieszczonych na wszystkich rubieżach w e-tym sektorze.

Przy powyższych oznaczeniach $Q_{kg}^{j/\alpha/}$ wyrazi się wzorem:

$$Q_{kg}^{j/\alpha/} = Q_{1_{kg}}^{j/\alpha/} \cdot Q_2^{j/\alpha/} \qquad /30/$$

Pierwszy czynnik po prawej stronie wzoru /30/ równy jest iloczynowi dwóch prawdopodobieństw, a mianowicie:

a/ prawdopodobieństwa przeniknięcia przez strefę ognia bezpośredniego sąsiada $/Q_{1_g}^{j/\alpha/}/$;

b/ prawdopodobieństwa przeniknięcia przez strefę ognia środków OPL wydzielonych do obrony przeciwlotniczej obiektu $/Q_{1_k}^{j/\alpha/}/$.

Dla równomiernego rozkładu pododdziałów prawdopodobieństwo $Q_{1_k}^{j/\alpha/}$ będzie w przybliżeniu jednakowe we wszystkich sektorach. Tak więc wartość $Q_{1_{kg}}^{j/\alpha/}$ wyrazi się wzorem:

$$Q_{1_{kg}}^{j/\alpha/} = Q_{1_g}^{j/\alpha/} \cdot Q_{1_k}^{j/\alpha/} \qquad /31/$$

gdzie prawdopodobieństwo $Q_{1_k}^{j/\alpha/}$ oblicza się przy założeniu, że siły i środki biorące udział w $_k$ nalocie przeniknią przez system OPL bezpośredniego sąsiada.

Do obliczenia pierwszego czynnika występującego po prawej stronie wzoru /31/ konieczna jest znajomość położenia i możliwości środków OPL sąsiada. Na podstawie tych danych można już łatwo obliczyć $Q_{1_g}^{j/\alpha/}$. W przypadku rakiet i artylerii przeciwlotniczej obliczenia można wykonać sposobami podanymi w zagadnieniu 2 niniejszego rozdziału.

Chcąc pondato uwzględnić prawdopodobieństwo zadania przeciwnikowi strat przez własne lotnictwo myśliwskie za czas dodatkowego manewru, w celu zaatakowania obiektu z innego kierunku niż kierunek wyznaczający najkrótszą trasę lotu, należy najpierw określić drogę, jaką przeciwnik musi dodatkowo przebyć w czasie tego manewru oraz prawdopodobieństwo jego przechwycenia na tej drodze. Mając powyższe dane oraz zakładając ilość samolotów myśliwskich, jaka może wziąć udział w zwalczaniu środków biorących udział w j-tym sposobie /wariancie/ działania, można w przybliżeniu określić szukaną wartość prawdopodobieństwa.

Jest rzeczą oczywistą, że obliczenia te mają sens tylko dla znacznych odcinków drogi oraz dla wysokości, na których własne lotnictwo myśliwskie może skutecznie zwalczać cele powietrzne.

Praktycznie oznacza to, iż przy wyznaczaniu ugrupowania małokalibrowej artylerii przeciwlotniczej w osłonie obiektów, na które ataki będą wykonywane głównie na małych wysokościach /do 1000 m/, zagadnienie to można pominąć. Przy określaniu ugrupowania rakiet przeciwlotniczych należałoby je uwzględniać.

Drugi czynnik występujący we wzorze /30/, mianowicie $Q_2^{j/\alpha/}$ jest również iloczynem dwóch prawdopodobieństw:

a/ prawdopodobieństwa wyjścia celu na dany obiekt lub punkt orientacyjny /$Q_{2_\beta}^{j/\alpha/}$/ ;

b/ prawdopodobieństwa zniszczenia /obezwładnienia/ obiektu ilością sił i środków, które dotrą do obiektu / $Q_{2_\gamma}^{j/\alpha/}$ /.

Zatem $Q_2^{j/\alpha/}$ wyrazi się wzorem:

$$Q_2^{j/\alpha/} = Q_{2_\beta}^{j/\alpha/} \cdot Q_{2_\gamma}^{j/\alpha/} \qquad /32/$$

Pierwszy z czynników tego iloczynu zależy przede wszystkim od: prędkości i wysokości lotu samolotów, charakteru obiektu lub punktu orientacyjnego, terenu, urządzeń optycznych i radiolokacyjnych znajdujących się na samolotach oraz od stopnia wyszkolenia obsługi samolotu. Dla współczesnych samolotów wartość $Q_{2\beta}^{j/\alpha/}$ może się wahać w granicach od 0,6 do 0,9.

Drugi czynnik występujący we wzorze /32/, mianowicie $Q_{2\gamma}^{j/\alpha/}$, w odniesieniu do dużych obiektów lub obiektów zbliżonych swym kształtem do koła, można przyjąć za stały, tzn. dla tego rodzaju obiektów prawdopodobieństwo rażenia praktycznie nie zależy od kierunku ataku /bombardowania/. W odniesieniu do obiektów wąskich, a długich /np. mosty, stacje kolejowe/ prawdopodobieństwo rażenia zmienia się wraz ze zmianą kierunku ataku /bombardowania/.

Rozważania powyższe pozwalają stwierdzić, że zagadnienie obliczenia prawdopodobieństwa wykonania zadania $/Q_{k_g}^{j/\alpha/}$ / jest dość złożone. Z pewnością w wielu przypadkach przyjdzie się z konieczności zadowolić jedynie przybliżonymi danymi.
Dla rozpatrywanego w tej pracy problemu istotnym jest to, że można je obliczyć /choć często być może niezbyt dokładnie/.

Zastanówmy się teraz, w jaki sposób uwzględnić w modelu kierunki ataku /bombardowania/ oraz stopień oddziaływania środków OPL bezpośredniego sąsiada.

W ogólnym przypadku zagadnienie to sprowadza się do zbudowania, a następnie rozwiązania macierzy /21'/, w której ilość wierszy będzie równa ilości wszystkich możliwych wariantów ugrupowania k zależnych od S_{l_i}, r_{i_l}, d_{i_e}, zaś ilość kolumn wyniesie j . h, gdzie

h - ilość możliwych kierunków ataku /bombardowania/. Elementami tej macierzy będą wartości prawdopodobieństw $Q_{k_g}^{j/\alpha/}$, albo ich uzupełnienia do jedności. Po uwzględnieniu kierunku ataku /bombardowania/ i stopnia oddziaływania środków OPL bezpośredniego sąsiada, macierz /21'/ przyjmie postać:

$j/\alpha/$ k	$j = 1$			$j = 2$				$j = w$			$\min_j P_{kg}^{j/\alpha/}$
	$\alpha = 1$	...	$\alpha = h$	$\alpha = 1$	...	$\alpha = h$	...	$\alpha = 1$	...	$\alpha = h$	
$k = 1$	P_{1g}^{11}	...	P_{1g}^{1h}	P_{1g}^{21}	...	P_{1g}^{2h}	...	P_{1g}^{w1}	...	P_{1g}^{wh}	$\min_j P_{1g}^{j/\alpha/}$
$k = 2$	P_{2g}^{11}	...	P_{2g}^{1h}	P_{2g}^{21}	...	P_{2g}^{2h}	...	P_{2g}^{w1}	...	P_{2g}^{wh}	$\min_j P_{2g}^{j/\alpha/}$
...	...	...	...	...	...	...	...	...	...	...	...
$k = u$	P_{ug}^{11}	...	P_{ug}^{1h}	P_{ug}^{21}	...	P_{ug}^{2h}	...	P_{ug}^{w1}	...	P_{ug}^{wh}	$\min_j P_{ug}^{j/\alpha/}$
$\max_k P_{kg}^{j/\alpha/}$	$\max_k P_{kg}^{11}$	...	$\max_k P_{kg}^{1h}$	$\max_k P_{kg}^{2h}$	...	$\max_k P_{kg}^{2h}$	...	$\max_k P_{kg}^{w1}$	...	$\max_k P_{kg}^{wh}$	-

/21

Mimo wprowadzenia do modelu dodatkowych czynników / α i g/ istota jego pozostała taka sama. Poszerzona została jedynie macierz/21´/ i zmienione wartości prawdopodobieństw występujące w tej macierzy, co oczywiście nie naruszyło podstaw samego modelu matematycznego.

W niektórych przypadkach proces znajdowania optymalnego rozwiązania da się uprościć. Zachodzi to wówczas, gdy macierz /21´/, sporządzona dla równomiernego rozkładu pododdziałów na poszczególnych rubieżach[x/], posiada punkt siodłowy lub jeśli z macierzy tej wynika, że przeciwnik ma jeden najbardziej korzystny sposób /wariant/ działania /j´/, niezależnie od przyjętego przez nas wariantu ugrupowania. W tym przypadku obliczamy średnie dla wszystkich sektorów prawdopodobieństwo wykonania przez przeciwnika zadania, wg wzoru:

$$Q_{s_{k_g}}^{j/\alpha/} = \frac{Q_{kg}^{j/1/} + Q_{kg}^{j/2/} + \ldots + Q_{kg}^{j/h/}}{h}$$

Następnie z równania:

$$Q_{ś_{kg}}^{j/\alpha/} = Q_{1_{kg}}^{j/\alpha/} \cdot Q_2^{j/\alpha/},$$

w którym $Q_{ś_{kg}}^{j/\alpha/}$ i $Q_2^{j/\alpha/}$ są dane,

wyznaczamy $Q_{1_{kg}}^{j/\alpha/}$, czyli:

$$Q_{1_{kg}}^{j/\alpha/} = \frac{Q_{ś_{kg}}^{j/\alpha/}}{Q_2^{j/\alpha/}}$$

Dla każdego sektora wartość $Q_{1_{kg}}^{j/\alpha/}$ może być różna, gdyż występujące w mianowniku prawdopodobieństwa $Q_2^{j/\alpha/}$ zależy od α.

Otrzymamy więc ciąg wartości:

$$Q_{1_{kg}}^{j/1/} \cdot Q_{1_{kg}}^{j/2/}, \ldots, Q_{1_{kg}}^{j/h/},$$

---

x/ Zakłada się w tym przypadku, że prawdopodobieństwo nalotów na osłaniany obiekt ze wszystkich kierunków jest w przybliżeniu jednakowe.

a po uzupełnieniu każdego z wyrazów tego ciągu do jedności, otrzymamy nowy ciąg postaci

$$P_{1_{kg}}^{j\ /1/}\ ,\ P_{1_{kg}}^{j\ /2/}\ ,\ldots,\ P_{1_{kg}}^{j\ /h/}.$$

Wyrazy tego ciągu wskazują, jakie powinno być prawdopodobieństwo zadania przeciwnikowi strat na kierunku α /α = 1,2,3,...,h/. Na tej podstawie określamy ilość pododdziałów S_1^e , jaką należy rozmieścić na rubieżach w sektorze e.

Z powyższych rozważań można wyciągnąć następujące wnioski:

a/ W przypadku, gdy macierz /21´/ ma punkt siodłowy, tzn. istnieje para rozwiązań /k´, j´/,d-la której $P_{k'}^{j'}$ jest jednocześnie minimalną wartością swego wiersza i maksymalną wartością kolumny, wtedy prawdopodobieństwo obrony obiektu określone wzorem /14´´/ stanowi największą wartość, co do której możemy być pewni, że uda nam się osiągnąć. Żaden inny wariant tej pewności nam nie da.

Zatem wariant ugrupowania k´ jest w danym przypadku jedynym najbardziej korzystnym wariantem. Stosowanie manewru nie wpłynie już na zwiększenie prawdopodobieństwa obrony obiektu, a raczej na jego zmniejszenie.

b/ Gdy macierz /21´/ nie ma punktu siodłowego, to w myśl nierówności /29/ można z reguły osiągnąć nieco większą wartość prawdopodobieństwa obrony obiektu niż V_1, jeśli zostanie zastosowany manewr oraz przestrzegane będą zasady maskowania.
Jeżeli w tym przypadku manewru nie planujemy tzn. decydujemy się tylko na jeden wariant ugrupowania, to najcelowiej stosować jest wariant spełniający warunek /14´/.

c/ Jeśli różnica $V_2 - V_1$ /zwana rozwartością gry/ jest bardzo mała /np. mniejsza od 0,01/, to nie jest celowe stosowanie manewru dla podwyższenia prawdopodobieństwa obrony obiektu P_k^j. Wariant ugrupowania odpowiadający równaniu /14´/ oraz spełniający podstawowe wymogi taktyczne możemy uznać za optymalny.

4. Rozwiązanie modelu

Pierwszym i najważniejszym krokiem przy rozwiązywaniu modelu, a tym samym wyznaczaniu optymalnego rozwiązania, jest zbudowanie macierzy postaci /21´/.

Mając tak zbudowaną macierz możemy bezpośrednio z niej określić dolną wartość prawdopodobieństwa obrony obiektu /dolną wartość gry/, czyli

$$V_1 = \max_k \min_j P_k^j$$

oraz górną wartość tego prawdopodobieństwa /górną wartość gry/, tzn.

$$V_2 = \min_j \max_k P_k^j$$

Jeżeli $V_1 = V_2 = V$ - sytuacja jest prosta, bowiem wariant ugrupowania odpowiadający tej wspólnej wartości V oraz spełniający podstawowe wymogi taktyczne, takie jak: dobre warunki dowodzenia, maskowania, przegrupowania, zaopatrywania, obrony przed bronią masowego rażenia itp. można uznać jako optymalny.

Jeżeli natomiast $V_1 < V_2$, to rozwiązanie modelu nie jest proste i wymaga zastosowania pewnych metod matematycznych.

Mówiąc o rozwiązaniu modelu mamy oczywiście na myśli wyznaczenie częstości x_k i y_j, z jakimi należy stosować poszczególne warianty ugrupowania, dla uzyskania prawdopodobieństwa obrony obiektu równego

$$V' = V_1' = V_2' .$$

Jedną z metod, która w odniesieniu do rozpatrywanego problemu wydaje się być najbardziej odpowiednia, sprowadza się do wykonania kilku operacji na macierzy /21 / oznaczonej literą A.

Wstępną operacją jest odrzucenie wariantów ugrupowania wyraźnie niekorzystnych.

W taki sam sposób postępujemy ze sposobami działania przeciwnika, tzn. wyraźnie niekorzystne sposoby działania mamy prawo pominąć, gdyż częstości stosowania ich /y_j/ będą równe zeru.

Zatem dowolny wariant ugrupowania k^* spełniający nierówność

$$P_{k^*}^j \geqslant P_k^j \qquad /30/$$

dla $k \neq k^*$ i dla każdego j /j = 1,2,3,..., w/ może być wyłączony ze zbioru wariantów korzystnych, gdyż częstość, z jaką będzie on stosowany jest równa zeru.

Analogicznie dowolny sposób działania przeciwnika j^* spełniający nierówność

$$P_k^j \leqslant P_k^{j^*} \qquad /31/$$

dla $j \neq j^*$ i dla każdego k /k = 1,2,3,...,u/ możemy uznać za wyraźnie niekorzystny dla przeciwnika.

Po tej operacji macierz /21 / zredukuje się do u' wierszy i w' kolumn, gdzie u' - liczba korzystnych wariantów ugrupowania, a w' - liczba korzystnych /niepodporządkowanych/ sposobów działania przeciwnika.

Wartość gry w tych warunkach będzie równa

$$V_1' = \max_x \min_y \sum_{k=1}^{u} \sum_{j=1}^{w} y_j x_k P_k^j = \min_y \max_x \sum_{k=1}^{u} \sum_{j=1}^{w} x_k y_j P_k^j = V_2'$$

Następnie rozpatrujemy kolejno wszystkie podmacierze kwadratowe stopnia

$$b = \min /u', w'/ \qquad /33/$$

macierzy A i dla każdej z nich obliczamy x_k, y_j i V', korzystając ze wzorów[x/]

$$V' \frac{|B|}{I_b/\text{adj } B/J_b'} \qquad /34/$$

$$x_k = \frac{I_b \text{ adj } B}{I_b/\text{adj } B/I_b'} \qquad /35/$$

$$y_j = \frac{I_b/\text{adj } B/'}{I_b/\text{adj } B/I_b'}, \qquad /36/$$

przy założeniu, że $I_b/\text{adj } B/I_b' \neq 0$.

We wzorach /34 - 36/ poszczególne symbole oznaczają:

B - macierz kwadratowa stopnia b, utworzona z macierzy A. Jeżeli A jest macierzą kwadratową, tzn. $u' = w'$, wówczas $B = A$;

$|B|$ - wyznacznik macierzy B;

adjB - macierz dołączona, która w rozwiniętym zapisie przyjmie postać:

$$\text{adj } B = \begin{bmatrix} B_{11} & B_{21} & \cdots & B_{b1} \\ B_{12} & B_{22} & \cdots & B_{b2} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ B_{1b} & B_{2b} & \cdots & B_{bb} \end{bmatrix}, \qquad /37/$$

x/ Dowody wzorów /31- 33/ można znaleźć np. w książce J.C.C. Mc KINSEY pt. "INTRODUSTION TO THE THEORY OF GAMES". Tłumaczenie w języku ros. "WWIEDIENIJE W TIEORIJU IGR" wyd. 1960 r.

gdzie: B_{k_j} - algebraiczne dopełnienie elementu p_k^j

macierzy B, a wskaźnik b jest równy min /u', w'/;

I_b - wektor wierszowy, tj. macierz postaci

I_b = /1 1 ... 1/, gdzie ilość kolumn jest równa b;

I_b' - macierz transponowana macierzy I_b, tj.

$$I_b' = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ 1 \end{bmatrix},$$

/adj B/` - macierz transponowana macierzy dołączonej adj B, tzn.

$$/\text{adj } B/` = \begin{bmatrix} B_{11} & B_{12} & \cdots & B_{1b} \\ B_{21} & B_{22} & \cdots & B_{2b} \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ B_{b1} & B_{b2} & \cdots & B_{bb} \end{bmatrix} \qquad /38/$$

Po obliczeniu x_k, y_j i V' dla wszystkich podmacierzy B stopnia b utworzonych z macierzy A, wybieramy następnie rozwiązanie spełniające nierówność:

$$P/_{k,}\ y_j^* /\leqslant V' \leqslant P/x_k^*,\ j/, \qquad /39/$$

gdzie x_k^* i y_j^* są częstościami optymalnymi.

Jest rzeczą zupełnie zrozumiałą, że częstości x_k^* i y_j^* muszą być wartościami nieujemnymi oraz, że:

$$\sum_{k=1}^{u'} x_k^* = 1 \quad \text{i} \quad \sum_{j=1}^{w'} y_j^* = 1 \qquad /40/$$

Dla szczegółowego objaśnienia podanej metody rozwiążemy następujący przykład liczbowy:

Niech będzie dana macierz A, która po wyeliminowaniu wyraźnie niekorzystnych sposobów działania przeciwnika i wariantów ugrupowania środków OPL, ma postać:

Tablica 3

Możliwe warianty ugrupowania k \ j	Prawdopod. sposoby działania przeciwnika j = 1	j = 2	j = 3	$\min_j P_k^j$
k=1	0,72	0,61	0,33	0,33
k=2	0,51	0,63	0,58	0,51
k=3	0,71	0,57	0,71	0,57
$\max_k P_k^j$	0,72	0,63	0,71	-

/41/

Dolna wartość prawdopodobieństwa obrony obiektu /dolna wartość gry/ wynosi $V_1 = 0,57$, zaś wartość górna $V_2 = 0,63$. Stąd różnica $V_2 - V_1 = 0,63 - 0,57 = 0,06$. Częstości x_k^* i y_j^* oraz wartość gdy V' obliczamy następująco:

W celu łatwiejszego liczenia mnożymy każdy element macierzy /41/ przez liczbę 100 i odejmujemy od wszystkich elementów liczbę 33 /jest to najmniejszy element danej macierzy/. Po tej operacji macierz /41/ przyjmie postać:

k \ j	j = 1	j = 2	j = 3
k = 1	39	28	0
k = 2	18	30	25
k = 3	38	24	38

/42/

Ponieważ ilość wierszy równa jest ilości kolumn, zatem A=B. Obliczamy wyznacznik macierzy B:

$$|B| = \begin{vmatrix} 39 & 28 & 0 \\ 18 & 30 & 25 \\ 38 & 24 & 38 \end{vmatrix} \qquad /43/$$

Korzystając z własności wyznaczników dążymy do uzyskania możliwie dużej ilości zer w wyznaczniku /43/.

W tym celu od pierwszej kolumny odejmujemy kolumnę trzecią:

$$B = \begin{vmatrix} 39 & 28 & 0 \\ -7 & 30 & 25 \\ 0 & 24 & 38 \end{vmatrix}$$

Od drugiego wiersza odejmujemy wiersz trzeci:

$$|B| = \begin{vmatrix} 39 & 28 & 0 \\ -7 & 6 & -13 \\ 0 & 24 & 38 \end{vmatrix}$$

Od kolumny drugiej odejmujemy pierwszą:

$$|B| = \begin{vmatrix} 39 & 28 & 0 \\ -7 & 6 & -13 \\ 0 & 24 & 38 \end{vmatrix}$$

Do drugiej kolumny dodajemy trzecią:

$$|B| = \begin{vmatrix} 39 & -11 & 0 \\ -7 & 0 & -13 \\ 0 & 62 & 38 \end{vmatrix} = -62/-13/\cdot 39 - 38/-7/\ /-11/ =$$
$$= 31438 - 2926 = 28508.$$

Następnie obliczamy macierz dołączoną adj B.

W tym celu transponujemy macierz B:

$$B' = \begin{vmatrix} 39 & 18 & 38 \\ 28 & 30 & 24 \\ 0 & 25 & 38 \end{vmatrix}$$

oraz tworzymy macierz dopełnień algebraicznych macierzy transponowanej B':

$$\text{adj } B = \begin{bmatrix} /-1/^{1+1} \begin{vmatrix} 30 & 24 \\ 25 & 38 \end{vmatrix} & /-1/^{1+2} \begin{vmatrix} 28 & 24 \\ 0 & 38 \end{vmatrix} & /-1/^{1+3} \begin{vmatrix} 28 & 30 \\ 0 & 25 \end{vmatrix} \\ /-1/^{2+1} \begin{vmatrix} 18 & 38 \\ 25 & 38 \end{vmatrix} & /-1/^{2+2} \begin{vmatrix} 39 & 38 \\ 0 & 38 \end{vmatrix} & /-1/^{2+3} \begin{vmatrix} 39 & 18 \\ 0 & 25 \end{vmatrix} \\ /-1/^{3+1} \begin{vmatrix} 18 & 38 \\ 30 & 24 \end{vmatrix} & /-1/^{3+2} \begin{vmatrix} 39 & 38 \\ 28 & 24 \end{vmatrix} & /-1/^{3+3} \begin{vmatrix} 39 & 18 \\ 28 & 30 \end{vmatrix} \end{bmatrix} =$$

$$= \begin{bmatrix} 540 & -1064 & 700 \\ 266 & 1482 & -975 \\ -708 & 128 & 666 \end{bmatrix}$$

Mnożymy macierz adj B przez wektor wierszowy $I_3 = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$

$$I_3 \text{ adj } B = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 540 & -1064 & 700 \\ 266 & 1482 & -975 \\ -708 & 128 & 666 \end{bmatrix} =$$

$$= \begin{bmatrix} 98 & 546 & 391 \end{bmatrix}.$$

Mnożymy następnie macierz I_3 adj B przez wektor kolumnowy $I_3' = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$:

$$I_3/adjB/I_3' = \begin{bmatrix} 98 & 546 & 391 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 98 + 546 + 391 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1035 \end{bmatrix}.$$

Po tych operacjach możemy już przystąpić do obliczenia V' i x_k^*, korzystając ze wzorów /34/ i /35/ :

$$V' \frac{|B|}{I_3 /adjB/I_3'} = \frac{28508}{1035} = 27,64.$$

Po dodaniu liczby 33 /o tę wartość zmniejszono bowiem wszystkie elementy macierzy A/, będzie:

$$V' = 27,64 + 33 = 60,64\%.$$

$$x_k^* = \frac{I_3 \text{adj } B}{I_3 /adjB/I_3'} = \frac{\begin{bmatrix} 98 & 545 & 391 \end{bmatrix}}{\begin{bmatrix} 1035 \end{bmatrix}} =$$

$$= \begin{bmatrix} \frac{98}{1035} & \frac{546}{1035} & \frac{391}{1035} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0,1 & 0,5 & 0,4 \end{bmatrix}$$

W celu obliczenia częstości y_j^*, transponujemy macierz adj B, a więc:

$$/adjB/' = \begin{bmatrix} 540 & 266 & -708 \\ -1064 & 1482 & 128 \\ 700 & -975 & 666 \end{bmatrix}$$

Macierz /adjB/' mnożymy następnie przez wektor wierszowy $I_3 = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$:

$$I_3/adjB/' = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 540 & 266 & -708 \\ -1064 & 1482 & 128 \\ 700 & -975 & 666 \end{bmatrix} =$$

$$= \begin{bmatrix} 176 & 773 & 86 \end{bmatrix}.$$

Korzystając ze wzoru /33/ mamy:

$$y_j^* = \frac{I_3/adjB/'}{I_3/adjB/I_3'} = \frac{\left[176 \quad 773 \quad 86\right]}{\left[1035\right]} =$$

$$= \left[\frac{176}{1035} \quad \frac{773}{1035} \quad \frac{86}{1035}\right] = \left[0,16 \quad 0,76, \quad 0,08\right].$$

Z powyższych obliczeń wynika, że jeśli nie stosujemy manewru, to najkorzystniejszym wariantem ugrupowania jest wariant k = 3, ponieważ gwarantuje nam prawdopodobieństwo obrony obiektu, równe co najmniej 0,57, niezależnie od wyboru przez przeciwnika sposobu działania /widać to bezpośrednio z tab. 2/; żaden inny wariant nie zapewnia nam tak wysokiego prawdopodobieństwa obrony obiektu. Możemy jednak uzyskać nieco większą wartość prawdopodobieństwa /o 3,64%/, jeśli przyjmiemy koncepcję stosowania manewru. Częstości, z jakimi należy stosować poszczególne warianty ugrupowania, są następujące:

k = 1 - 0,1;
k = 2 - 0,5;
k = 3 - 0,4.

Dla przeciwnika, gdy strona broniąca się nie stosuje manewru, optymalnym sposobem działania jest j = 2, a w przypadku manewru - stosowanie wszystkich trzech sposobów, z częstościami:

j = 1 - 0,16;
j = 2 - 0,76;
j = 3 - 0,08.

Wówczas prawdopodobieństwo wykonania zadania wyniesie 39,36%.

Opisana wyżej metoda rozwiązywania ogólnego modelu matematycznego, dla przypadku $V_1 < V_2$, może być stosowana wtedy, gdy macierz kwadratowa B stopnia min /u', w'/, utworzona z macierzy A jest nie - osobliwa, tzn. jej wyznacznik jest różny od zera.

Jeśli warunek ten nie jest spełniony, wówczas dla znalezienia rozwiązania celowym jest zastosowanie następującej metody:

Proces rozwiązywania modelu wg tej metody dzielimy na dwa etapy. W pierwszym etapie, podobnie jak uprzednio, redukujemy macierz A przez wyeliminowanie zbędnych wierszy i kolumn /odpowiadających wariantom niekorzystnym/ i przekształcamy ją tak, że jej elementy mają taką postać /np. bez wartości ułamkowych/, którą łatwiej jest operować, wreszcie bada się ją na istnienie punktu siodłowego.

Gdy istnieje punkt siodłowy, nie ma nic więcej do zrobienia; rozwiązanie zostało już znalezione. W przeciwnym razie, czyli zazwyczaj trzeba przejść do drugiego etapu. Tutaj rzecz polega na uzyskaniu optymalnych częstości x_k^* i y_j^* oraz odpowiadającego tym częstościom prawdopodobieństwa V'. W tym celu należy rozwiązać układ nierówności /wypisany na podstawie już zredukowanej macierzy A/ postaci:

$$
\begin{aligned}
&P_1^1 x_1 + P_2^1 x_2 + P_3^1 x_3 + \ldots + P_k^1 x_k + \ldots + P_u^1 x_u \geqslant V' \\
&P_1^2 x_1 + P_2^2 x_2 + P_3^2 x_3 + \ldots + P_k^2 x_k + \ldots + P_u^2 x_u \geqslant V' \\
&P_1^3 x_1 + P_2^3 x_2 + P_3^3 x_3 + \ldots + P_k^3 x_k + \ldots + P_u^3 x_u \geqslant V' \\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \qquad /44/ \\
&P_1^j x_1 + P_2^j x_2 + P_3^j x_3 + \ldots + P_k^j x_k + \ldots + P_u^j x_u \geqslant V' \\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\
&P_1^w x_1 + P_2^w x_2 + P_3^w x_3 + \ldots + P_k^w x_k + \ldots + P_u^w x_u \geqslant V' \\
&P_1^1 y_1 + P_1^2 y_2 + P_1^3 y_3 + \ldots + P_1^j y_j + \ldots + P_1^w y_w \leqslant V' \\
&P_1^1 x_1 + P_2^2 y_2 + P_2^3 y_3 + \ldots + P_2^j y_j + \ldots + P_2^w y_w \leqslant V' \\
&P_3^1 x_1 + P_3^2 y_2 + P_3^3 y_3 + \ldots + P_3^j y_j + \ldots + P_3^w y_w \leqslant V' \\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\
&P_k^1 y_1 + P_k^2 y_2 + P_k^3 y_3 + \ldots + P_k^j y_k + \ldots + P_k^w y_w \leqslant V' \\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\
&P_w^1 y_1 + P_u^2 y_2 + P_u^3 y_3 + \ldots + P_u^j y_j + \ldots + P_u^w y_w \leqslant V' \\
&x_1 + x_2 + x_3 + \ldots + x_k + \ldots + x_u = 1 \\
&y_1 + y_2 + y_3 + \ldots + y_j + \ldots + y_w = 1
\end{aligned}
$$

W powyższym układzie nierówności istnieje również to ograniczenie, że żadna wartość x_k i y_j nie może być ujemna, a więc:

$$0 \leqslant x_k \leqslant 1 \quad \text{i} \quad 0 \leqslant y_j \leqslant 1.$$

Dla $k \leqslant 3$ i $j \leqslant 3$ rozwiązanie układu nierówności jest zadaniem dość prostym: możemy je otrzymać w oparciu nawet o metodę graficzną, stosowaną w programowaniu liniowym.

Dla większych k i j uzyskanie rozwiązania jest zadaniem dość trudnym. Wtedy zachodzi potrzeba zastosowania, znanej w programowaniu

liniowym, metody simpleks, bądź też bardziej uproszczonej metody, którą objaśniamy na przykładzie /dla k = j = 3/. Dla większych k i j wystąpi tylko więcej zmiennych i więcej zależności między nimi, natomiast metoda postępowania jest taka sama.

Pierwszym krokiem jest wypisanie na podstawie już zredukowanej macierzy A, układu nierówności:

$$P_1^1 x_1 + P_2^1 x_2 + P_3^1 x_3 \geqslant V'$$

$$P_1^2 x_2 + P_2^2 x_2 + P_3^2 x_3 \geqslant V'$$

$$P_1^3 x_3 + P_2^3 x_3 + P_3^3 x_3 \geqslant V' \qquad /44'/$$

$$x_1 + x_2 + x_3 = 1$$

$$P_1^1 y_1 + P_1^2 y_2 + P_1^3 y_3 \leqslant V'$$

$$P_2^1 y_1 + P_1^2 y_2 + P_1^3 y_3 \leqslant V'$$

$$P_3^1 y_1 + P_3^2 y_2 + P_3^3 y_3 \leqslant V'$$

$$y_1 + y_2 + y_3 = 1$$

Widzimy, że siedem niewiadomych /x_1, x_2, x_3, y_1, y_2, y_3, V'/ muszą spełniać osiem zależności /warunków/. Ponadto istnieje to ograniczenie, że żadna wielkość x czy y nie może być ujemna.

Sytuacja jest więc tego rodzaju, że istnieje więcej zależności niż zmiennych i że wśród tych zależności występują głównie nierówności, co komplikuje rozwiązanie.

Istota tej metody polega na przeanalizowaniu całego zbioru zależności /44''/; na tej podstawie rozwiązuje się niektóre z tych zależności jako równania, a następnie zestawia się otrzymany wynik z pozostałymi zależnościami traktowanymi jako nierówności. A oto praktyczna metoda postępowania:

Piszemy najpierw wszystkie osiem zależności jako równości, rozwiązujemy którekolwiek siedem spośród nich, sprawdzamy, czy otrzymane wartości x^*i y są nieujemne i czy spełnione jest także ósme równanie. Jeżeli tak - otrzymaliśmy rozwiązanie. Jeżeli nie, to odrzucamy uzyskane wyniki i próbujemy innego sposobu. Piszemy mianowicie jakąś wybraną zależność w postaci ścisłej nierówności, a pozostałych siedem jako równości. Jeżeli ścisła nierówność jest jedną z zależności obejmujących szukane wielkości x, np.

$$P_1^2 x_1 + P_2^2 x_2 + P_3^2 x_3 > V',$$

to odpowiadająca tej nierówności wielkość y /w danym przypadku y_2/ równa się zeru, co oznacza, że sposób /wariant/ działania j = 2 jest dla przeciwnika wyraźnie niekorzystny i wobec tego nie powinien on go stosować jako swojego optimum.
Podobnie jest dla zależności między wielkościami y. Jeżeli np:

$$P_2^1 y_1 + P_2^2 y_2 + P_2^3 y_3 < V'$$

to odpowiadająca tej nierówności wielkość x_2 równa się zeru, co oznacza, że wariant ugrupowania k ≠ 2 jest dla nas wyraźnie niekorzystny i dlatego nie powinniśmy go stosować.

Jeżeli wyłączymy te przypadki, pozostaje jeszcze pewien układ zależności, gdzie porównuje się wielkości x z V' oraz takie, gdzie porównuje się wielkości y z V'. Odpowiada to optymalnym wartościom x i y, różnym od zera. Wynik jest taki, że gdy stosujemy korzystne warianty ugrupowania zgodnie z częstościami optymalnymi, wtedy każdy sposób /wariant/ działania przeciwnika stosowany z częstością optymalną pozwala osiągnąć wartość prawdopodobieństwa obrony obiektu równą dokładnie V'. Podobnie jest dla strony przeciwnej. Mamy tutaj najprostszy sprawdzian każdego przypuszczalnego rozwiązania optymalnego dla obu stron. Bierzemy nasze optymalne rozwiązanie i oceniamy wartość prawdopodobieństwa obrony obiektu dla każdego z korzystnych sposobów /wariantów/ działania przeciwnika; w wyniku powinniśmy otrzymać w każdym przypadku tę samą wartość /V'/. Podobnie znajdujemy tę samą wartość /V'/ oceniając optymalną taktykę strony przeciwnej, dla każdego z korzystnych wariantów ugrupowania środków OPL. Przykład liczbowy wyjaśni jeszcze bardziej opisaną wyżej metodę.

Niech będzie dana macierz A, która po wyeliminowaniu wyraźnie niekorzystnych sposobów /wariantów/ działania przeciwnika i wariantów ugrupowania środków OPL, ma postać:

j / k	j = 1			$\min_j P_k^{j/\alpha/}$
	= 1	= 2	= 3	
k = 1	0,8	0,2	0,2	0,2
k = 2	0,4	0,1	0,6	0,1
k = 3	0,6	0,5	0,0	0,0
$\max_k P_k^{j/\alpha/}$	0,8	0,5	0,6	-

/45/

Należy znaleźć optymalne częstości x_k^* i y_j^*.

W celu łatwiejszego liczenia mnożymy każdy element macierzy /45/ przez 10. Po tej operacji macierz przyjmie postać:

j / k	j = 1		
	= 1	= 2	= 3
k = 1	8	2	2
k = 2	4	1	6
k = 3	6	5	0

/45'/

Na podstawie macierzy /45/ wypisujemy układ warunków /44/:

$$8x_1 + 4x_2 + 6x_3 \geqslant V'$$

$$2x_1 + 1x_2 + 5x_3 \geqslant V'$$

$$2x_1 + 6x_2 + 0x_3 \geqslant V'$$

$$x_1 + x_2 + x_3 = 1$$

$$8y_1 + 2y_2 + 2y_3 \leqslant V'$$

$$4y_1 + 1y_2 + 6y_3 \leqslant V'$$

$$6y_1 + 5y_2 + 0y_y \leqslant V'$$

$$y_1 + y_2 + y_3 = 1$$

Przyjmujemy najpierw wszystkie zależności jako równości i rozwiązujemy układ równań dla wartości x, tzn.

$$8x_1 + 4x_2 + 6x_3 = V'$$
$$2x_1 + x_2 + 5x_3 = V'$$
$$2x_1 + 6x_2 = V'$$
$$x_1 + x_2 + x_3 = 1$$

Rozwiązując ten układ równań np. metodą podstawienia, otrzymamy:

$$x_1 = -\frac{1}{2},\quad x_2 = \frac{3}{4},\quad x_3 = \frac{3}{4},\quad V' = \frac{7}{2},$$

co nie jest dopuszczalne wobec $x_1 < 0$. Przyjmujemy teraz jedną z tych zależności, jako ścisłą nierówność np.:

$$8x_1 + 4x_2 + 6x_3 \lesssim V',$$

z czym łączy się $y_j = 0$. Równania są teraz następujące:

$$2x_1 + x_2 + 5x_3 = V', \qquad 2y_2 + 2y_3 = V'$$
$$2x_1 + 6x_2 = V', \qquad y_2 + 6y_3 = V'$$
$$5y_2 = V'$$
$$x_1 + x_2 + x_3 = 1, \qquad y_2 + y_3 = 1$$

Ostatnie dwa równania po prawej stronie dają:

$$y_2 = \frac{V'}{5},\qquad y_3 = \frac{1 - V'}{5},$$

co nie jest dopuszczalne wobec $y_3 < 0$, ponieważ jak wynika z macierzy /45'/ $2 \leqslant V' \leqslant 5$. Nie są też spełnione pozostałe równania. Dowolny wybór jednej zależności i przyjmowanie jej jako ścisła nierówność prowadzi do tego samego negatywnego wyniku.

Przyjmujemy następnie dwie zależności jako ścisłe nierówności. Podejście takie same, jak poprzednio nasuwa myśl, że dobrze być może spróbować jednej spośród zależności zawierających y, np.:

$8x_1 + 4x_2 + 6x_3 > V'$, przy czym $y_1 = 0$,

$8y_1 + 2y_2 + 2y_3 < V'$, przy czym $x_1 = 0$.

Pozostałe zależności przyjmujemy jako równania, tzn.:

$$x_2 + 5x_3 = V', \quad y_2 + 6y_3 = V'$$

$$6x_2 = V', \quad 5y_2 = V'$$

$$x_2 + x_3 = 1, \quad y_2 + y_3 = 1$$

Rozwiązanie daje:

$$x_1 = 0, \quad x_2 = \frac{1}{2}, \quad x_3 = \frac{1}{2};$$

$$y_1 = 0, \quad y_2 = \frac{3}{5}, \quad y_3 = \frac{2}{5};$$

$V' = 3$, a dzieląc przez 10, otrzymamy[x/]: $V' = 0,3$.

Zatem na optymalne rozwiązanie składają się dwa warianty ugrupowania: $k = 2$ i $k = 3$, które powinny być stosowane z częstościami 0,5. Dla przeciwnika najbardziej korzystne jest stosowanie sposobu działania $j = 1$ z kierunków: $\alpha = 2$ i $\alpha = 3$, odpowiednio z częstościami $y_2 = 0,6$ i $y_3 = 0,4$.

Wtedy prawdopodobieństwo obrony obiektu wyniesie 0,3.

x x

x

Z treści niniejszego rozdziału nasuwa się zasadnicze pytanie: Czy jest możliwe ustalenie na podstawie analizy rozwiązań otrzymanych wg opisanej metody, praktycznych zasad ugrupowania środków OPL w osłonie obiektu ?

Zarówno model matematyczny, jak i rozwiązanie jego, wskazują wyraźnie na pewną właściwość, która cechuje wielkości S_{1_i}, r_{i_1}. Zależą one od prawdopodobnych sposobów /wariantów/ działania przeciwnika, ilości i rodzaju środków OPL wydzielonych do obrony obiektu oraz ich możliwości. Wobec tego znając prawdopodobne sposoby /warianty/ działania przeciwnika oraz wariantując skład sił i środków wydzielonych do obrony obiektu możemy wartości S_{1_i} i r_{i_1} przedstawić w odpowiednich tabelach.

---

x/ Przez tę liczbę pomnożyliśmy wszystkie elementy macierzy /45/ wobec czego wartość prawdopodobieństwa obrony obiektu /wartość gry/ została również zwiększona o 10. Dla otrzymania rzeczywistej wartości gry należy podzielić otrzymaną z rozwiązania liczbę przez 10.

Nie da się natomiast ustalić żadnej zasady, jeśli chodzi o ilość sił i środków, jaką należy rozmieścić na poszczególnych kierunkach /S_1^e /, gdyż prawdopodobieństwo $P_{kg}^{j/\alpha/}$ na każdym z kierunków kształtuje się z reguły inaczej dla różnych obiektów. Zagadnienie to dla konkretnego przypadku da się ściśle rozwiązać w oparciu o powyższy model.

Warto na zakończenie dodać, że przedstawiony model umożliwia wyznaczenie optymalnego rozwiązania, w którym uwzględniony jest wpływ czynników dających się ująć ilościowo.
Czynnikami tymi są:

a/ prawdopodobne sposoby /warianty/ działania przeciwnika /w tym również kierunki nalotów/;

b/ oddziaływanie sił i środków OPL bezpośredniego sąsiada;

c/ skład oraz możliwości sił i środków OPL wydzielonych do osłony obiektu;

d/ warunki terenowe w świetle wymogów taktycznych.

Są to czynniki podstawowe. Uwzględnienie ich w sposób ścisły z pewnością przyczyni się do podniesienia efektywności osłony obiektu. Dodajmy, że decyzja podjęta przez dowódcę na podstawie tak otrzymanych danych posiada pełne i głębokie uzasadnienie w postaci konkretnych wskaźników liczbowych, obrazujących możliwości wykonania postawionego zadania.
Z tych względów nakład pracy jest celowy.

ROZDZIAŁ III

PROBLEM WYBORU OPTYMALNEGO UGRUPOWANIA NAZIEMNYCH ŚRODKÓW OPL W SYSTEMIE OBRONY STREFOWEJ

1. S f o r m u ł o w a n i e p r o b l e m u

W praktyce dość często zachodzi potrzeba organizowania jednolitego systemu osłony dla zespołu obiektów. Obiekty te z reguły nie są jednorodne i posiadają różną ważność z punktu widzenia operacyjnego. Najczęściej stanowią one odrębne cele dla przeciwnika, nawet w przypadku ataku bronią masowego rażenia.

Tworząc wspólny system osłony dla zespołu obiektów należy przede wszystkim właściwie ugrupować siły i środki OPL będące w naszej dyspozycji oraz zorganizować jednolity system dowodzenia.

W niniejszym rozdziale podana zostanie ogólna metoda wyboru optymalnego ugrupowania bojowego środków OPL w osłonie zespołu obiektów. Nie precyzujemy dokładnie charakteru obiektów osłony, ponieważ przedstawiona metoda może być stosowana zarówno w odniesieniu do obiektów stałych położonych na zapleczu frontu, jak i obiektów ruchomych, leżących w strefie wojsk operacyjnych. Jednak najcelowiej jest ją stosować do ustalania pewnych ogólnych zasad ugrupowania sił i środków OPL lub weryfikacji zasad już istniejących.

Mając tak ustalone zasady możemy podejmować decyzję do ugrupowania sił i środków OPL nawet w szybko zmieniającej się sytuacji operacyjnej.

Jeżeli jednak dysponujemy odpowiednim czasem na podjęcie decyzji, to celowe jest przeprowadzenie pełnej analizy i obliczeń zgodnie z podaną metodą. Wówczas podjęta przez dowódcę decyzja na podstawie tak otrzymanych danych posiada pełne i głębokie uzasadnienie w postaci konkretnych wskaźników liczbowych, obrazujących realne możliwości wykonania postawionego zadania. Z tych względów większy nakład pracy jest opłacalny.

Formułując ogólnie problem optymalnego ugrupowania sił i środków OPL w osłonie zespołu obiektów powiemy, że polega on na określeniu wariantu, który by odpowiadał postawionemu zadaniu, uwzględniał ważność poszczególnych obiektów z punktu widzenia operacyjnego, stwarzał możliwie najkorzystniejsze warunki walki ze środkami napadu powietrznego przeciwnika, a ponadto zapewniał dobre warunki dowodzenia, zaopatrywania, maskowania oraz obrony przed bronią masowego rażenia.

Należy stwierdzić, że powyższy problem jest trudny do rozwiązania, a to z uwagi na bardziej złożone warunki niż w przypadku obrony punktowej.

Wchodzą tu bowiem w grę następujące czynniki:

a/ prawdopodobne warianty nalotów środków napadu powietrznego przeciwnika i stosowane przez niego środki rażenia;

b/ obiekty osłony, zwłaszcza ich ilość, wzajemne położenie i odporność na uderzenia oraz znaczenie operacyjne;

c/ warunki terenowe i meteorologiczne;

d/ możliwości posiadanych sił i środków;

e/ stopień oddziaływania sił i środków OPL bezpośrednich sąsiadów;

f/ czas na organizację osłony.

Istotną różnicą w porównaniu do obrony punktowej jest większa różnorodność sposobów /wariantów/ działania przeciwnika w strefie ognia, ważność poszczególnych obiektów oraz kilka punktów odniesienia /obiektów/, względem których należy wyznaczać optymalne rubieże ugrupowania sił i środków OPL. Te czynniki w istotny sposób komplikują problem, szczególnie z punktu widzenia matematycznego.

Nim przejdziemy do określenia kryterium efektywności stanowiącego miarę skuteczności organizowanego systemu osłony, ustalmy jakie czynniki można przyjąć za znane.

W odniesieniu do przeciwnika można założyć, że będą znane:

a/ dane taktyczno-techniczne i uzbrojenie środków napadu powietrznego;

b/ prawdopodobne sposoby /warianty/ działania;

c/ ogólna ilość i bazowanie środków napadu powietrznego oraz kierunki operacyjne nalotów.

W odniesieniu do nas, tzn. strony organizującej obronę przeciwlotniczą zespołu obiektów możemy przyjąć za znane:

a/ rodzaj i ilość sił i środków OPL wydzielonych do osłony zespołu obiektów, stopień wyszkolenia obsług oraz ogólnie ich stan fizyczny i psychiczny;

b/ możliwości ogniowe i manewrowe sprzętu oraz stopień niezawodności poszczególnych urządzeń;

c/ obiekty osłony i ich charakterystykę;

d/ teren i warunki meteorologiczne;

e/ ugrupowanie sił i środków OPL bezpośrednich sąsiadów oraz ich ogólne możliwości ogniowe;

f/ czas na organizację obrony przeciwlotniczej zespołu obiektów.

Tak więc rozwiązania postawionego problemu należy szukać w oparciu o powyższy zakres informacji.

Mając powyższe dane możemy przejść do ustalenia kryterium efektywności systemu obrony przeciwlotniczej zespołu obiektów przy różnych sposobach działania przeciwnika i różnych wariantach ugrupowania sił i środków OPL.

2. K r y t e r i u m e f e k t y w n o ś c i

Przeciwnik planując uderzenia z powietrza na broniony zespół obiektów usiłuje dobrać takie sposoby /warianty/ działania, przy których prawdopodobieństwo wykonania zadania będzie możliwie największe. Zadanie to, może polegać na zniszczeniu lub obezwładnieniu całego zespołu, względnie niektórych tylko obiektów.

Dla jednego obiektu prawdopodobieństwo jego zniszczenia /obezwładnienia/ wyraża się wzorem:

$$Q = Q_p \cdot Q_z \qquad /1/$$

gdzie: Q_p - prawdopodobieństwo przeniknięcia środków napadu powietrznego przeciwnika przez system OPL;

Q_z - prawdopodobieństwo zniszczenia /obezwładnienia/ obiektu.

Oczywistym jest, że:

$$Q \leq \min /Q_1, Q_2/,$$

a ponieważ w praktyce czynnik Q_z z reguły jest mniejszy od jedności, stąd zachodzi nierówność:

$$Q \leq Q_p, \qquad /2/$$

która mówi, że prawdopodobieństwo wykonania zadania może być co najwyżej równe prawdopodobieństwu przeniknięcia przez system OPL, ale z reguły jest od niego mniejsze.

Oznacza to, że przeciwnikowi będzie zawsze zależało na wyborze takiego sposobu /wariantu/ działania, przy którym prawdopodobieństwo zadania strat przez system obrony przeciwlotniczej będzie możliwie małe, a jednocześnie prawdopodobieństwo zniszczenia /obezwładnienia/ obiektu będzie bliskie jedności. Jednak nie zawsze w praktyce przeciwnik jest w stanie to osiągnąć szczególnie jeśli chodzi o Q_z.

Z powyższego nasuwa się praktyczna uwaga. Wystarczy znać we wzorze /1/ czynnik Q_p, by móc sądzić o górnej wartości Q.

Strona organizująca OPL obiektu z reguły nie będzie znała dokładnie czynnika Q_z. Może co najwyżej znać jego wartość przybliżoną. Natomiast jest w stanie określić dla każdego z prawdopodobnych sposobów /wariantów/ działania czynnik Q_p i na tej podstawie oszacować górną wartość Q.

Średnia wartość prawdopodobieństwa Q_p wyraża się wzorem:

$$Q_p = \frac{M_j}{Ł}, \qquad /3/$$

gdzie: M_j - nadzieja matematyczna ilości nierażonych przez OPL środków napadu powietrznego przeciwnika w j-tym sposobie /wariancie/ działania;

Ł - liczba środków napadu powietrznego przeciwnika uczestniczących w danym sposobie /wariancie/ działania.

Gdy w nalocie bierze udział tylko jeden samolot np. nosiciel broni jądrowej, to nadzieja matematyczna M_j pokrywa się z prawdopodobieństwem przeniknięcia tego samolotu przez system OPL.

Wzór /3/ w swej istocie wyraża średnie prawdopodobieństwo pokonania systemu OPL przez każdy środek napadu powietrznego wykonujący uderzenie na broniony obiekt.

Spójrzmy teraz na powyższe zagadnienie od nas tzn. strony organizującej obronę przeciwlotniczą obiektu. W ostatecznym rachunku chodzi nam o odpowiedź na następujące pytanie: Jakie jest prawdopodobieństwo nie zniszczenia obiektu w świetle możliwych sposobów /wariantów/ działania przeciwnika ?

Zauważmy, że zdarzenie niezniszczenia obiektu jest dokładnie przeciwne zdarzeniu, że obiekt zostanie zniszczony i wyraża się wzorem:

$$P = 1 - Q = 1 - Q_p \cdot Q_z = 1 - /1-P_p/\ /1-P_z/, \qquad /1'/$$

gdzie: P_p, P_z są to prawdopodobieństwa zdarzeń przeciwnych zdarzeniom Q_p, Q_z.

Sposób obliczania wartości P_1 i P_2 omówiony został w rozdziale I.

Wyrażenie /1'/ stanowi kryterium efektywności dla pojedynczego obiektu, gdyż w dostatecznym stopniu odzwierciedla ono zainteresowania obu stron.

Dla zespołu obiektów kryterium efektywności musi ponadto uwzględniać ważność poszczególnych obiektów, czyli przyjmie postać:

$$P = \sum_{c=1}^{N} a_c \cdot P_c, \qquad /4/$$

gdzie: P - średnia wartość prawdopodobieństwa obrony zespołu N obiektów z uwzględnieniem ich wagi;

P_c - prawdopodobieństwo obrony obiektu o numerze c
/c = 1,2,...,N/;

a_c - waga obiektu o numerze c.

Oczywistym jest, że wagi obiektów winny spełniać warunek:

$$\sum_{c=1}^{N} a_c = 1 \qquad /5/$$

W ocenie ważności poszczególnych obiektów należy przede wszystkim brać pod uwagę ich ważność operacyjną, która może się zmieniać w czasie oraz wartość ekonomiczną. W oparciu o to winniśmy następnie przypisać każdemu obiektowi odpowiednią wagę tak, by spełniony był warunek /5/.

Jeśli sytuacja jest tego rodzaju, że nie jesteśmy w stanie ustalić relacji ważności między poszczególnymi obiektami, to należy przyjąć:

$$a_1 = a_2 = \ldots = a_N = \frac{1}{N}, \qquad /6/$$

wówczas wyrażenie /4/ staje się nie średnią ważoną lecz średnią arytmetyczną postaci:

$$P = \frac{\sum_{}^{N} P_c}{N} \qquad /4'/$$

Naszym dążeniem jest doprowadzenie wyrażenia /4/ do wartości maksymalnej. Możemy tego dokonać przez przyjęcie ugrupowania bojowego, które by akcentowało główny wysiłek osłony na obiektach o dużej ważności oraz zapewniało optymalne warunki walki ze środkami napadu powietrznego przeciwnika w czasie podchodzenia ich do obiektów ataku.

Dążeniem zaś przeciwnika jest sprowadzenie wyrażenia /4/ do minimum poprzez wybór najbardziej niekorzystnego dla nas wariantu nalotu i wykonanie najsilniejszych uderzeń na obiekty o dużej ważności. Wynika to bezpośrednio z wzoru /4/, bowiem zmniejszanie P_c w tych członach sumy, w których a_c są duże, obniża wyraźnie wartość P i odwrotnie; każde zwiększenie P_c przy dużych współczynnikach a_c podwyższa wydatnie P.

Wyrażenie /4/ przyjmiemy za ogólne kryterium efektywności będące jednocześnie miarą skuteczności działania sił i środków OPL w systemie osłony strefowej.

Mając ustalone kryterium efektywności możemy już przystąpić do rozwiązania postawionego problemu, tzn. do wyboru ugrupowania bojowego, przy którym średnia wartość prawdopodobieństwa obrony zespołu obiektów będzie maksymalna.

3. Ogólny model matematyczny

Dla sformułowania ogólnego modelu matematycznego wprowadźmy następujące oznaczenia:

l - indeks oznaczający rodzaj sił i środków OPL wydzielonych do osłony zespołu obiektów;
gdzie: $l = 1,2,3,\ldots, L$;

S_l - ilość pododdziałów l-tego rodzaju wydzielona do osłony zespołu obiektów;

$S = \sum_{l=1}^{L} S_l$ - ogólna ilość pododdziałów;

j - indeks oznaczający wariant działania przeciwnika, gdzie $j = 1,2,3,\ldots, w$;

k - indeks oznaczający wariant ugrupowania środków OPL, gdzie $k = 1,2,3,\ldots, u$;

$P^j_{c_k}$ - prawdopodobieństwo obrony obiektu c przy j-tym sposobie działania przeciwnika i k-tym wariancie ugrupowania środków OPL;

$P^j_k = \sum_{c=1}^{N} a_c P^j_{c_k}$ - średnia wartość prawdopodobieństwa obrony zespołu /N/ obiektów przy j-tym sposobie działania przeciwnika i k-tym wariancie ugrupowania środków OPL.

Wyrażenie P^j_k jest wielkością, którą przeciwnik usiłuje minimalizować przez wybór odpowiedniego wariantu nalotu i skupienie głównego wysiłku działania na obiektach o dużej ważności. Wyboru optymalnego przeciwnik tym łatwiej może dokonać, im dane o celach i systemie osłony powietrznej obiektów będą bardziej dokładne i aktualne.

Dążność przeciwnika do minimalizowania wielkości P^j_k możemy wyrazić matematycznie następująco:

$$\min_j P^j_k = \min_j \sum_{c=1}^{N} a_c P^j_{c_k} \qquad /7/$$

Wyrażenie /7/ przedstawia najmniejszą wartość prawdopodobieństwa obrony zespołu obiektów ze względu na możliwe sposoby działania przeciwnika przy wariancie ugrupowania środków OPL o indeksie k.

Strona organizująca system obrony przeciwlotniczej zespołu obiektów znając prawdopodobne sposoby działania przeciwnika, własne możliwości,

warunki terenowe i meteorologiczne oraz ugrupowanie i możliwości środków OPL bezpośrednich sąsiadów, winna wybrać spośród wszystkich możliwych wariantów k /$1 \leq k \leq u$/ ten, dla którego wyrażenie /7/ przyjmie wartość największą, co w zapisie matematycznym da się wyrazić:

$$\max_k \min_j P^j_k = \max_k \min_j \sum_{c=1}^{N} a_c P^j_{c_k} \qquad /8/$$

Oznaczmy przez V_1 wartość prawdopodobieństwa /8/ a przez k^*, wariant ugrupowania środków OPL, przy którym wartość ta zostaje osiągnięta. Po uwzględnieniu powyższych oznaczeń wyrażenie /8/ zapiszemy:

$$V_1 = \min_j P^j_{k^*} = \min_j \sum_{c=1}^{N} ac\, P^j_{c_{k^*}}$$

Łatwo zauważyć, że dla wszystkich możliwych sposobów działania przeciwnika /j/ i optymalnego wariantu ugrupowania k^* zachodzi nierówność:

$$V_1 \leq P^j_{k^*} \qquad /9/$$

Oznacza to, że przyjmując wariant ugrupowania k^*, gwarantujemy sobie uzyskanie prawdopodobieństwa obrony zespołu obiektów równego co najmniej:

$$V_1 = \min_j P^j_{k^*} = \min_j \sum_{c=1}^{N} a_c P^j_{c_{k^*}} , \qquad /10/$$

bez względu na sposób działania przeciwnika, ponieważ wartość prawdopodobieństwa V_1 odnosi się do wariantu nalotu najbardziej niekorzystnego dla nas.

W odniesieniu do innych wariantów nalotu przeciwnika prawdopodobieństwo to będzie odpowiednio większe, co wynika bezpośrednio z nierówności /9/.

Ale przyjmując wariant ugrupowania k^* bierzemy pod uwagę tę okoliczność, że przeciwnik może prawidłowo ocenić wszystkie czynniki warunkujące jego decyzję i wybrać ten sposób działania, który zapewni mu wykorzystanie słabych stron systemu obrony przeciwlotniczej zespołu obiektów, a jednocześnie daje możliwie dużą pewność zniszczenia /obezwładnienia/ poszczególnych obiektów. Inaczej powiemy, że strona broniąca się wybierając wariant ugrupowania k^* zakłada, że przeciwnik będzie działał w sposób przemyślany i dlatego zachowuje dużą ostrożność, tzn.

liczy się z możliwością zastosowania przez przeciwnika najbardziej niekorzystnego dla niej sposobu działania.

Warto podkreślić, że jeżeli przeciwnik posiada informacje dotyczące ilości i rodzaju sił i środków wydzielonych do obrony przeciwlotniczej zespołu obiektów oraz zna ogólne zasady ich ugrupowania, to może zastosować taki sposób działania, przy którym prawdopodobieństwo obrony zespołu obiektów będzie równe co najwyżej:

$$V_2 = \min_j \max_k P_k^j = \min_j \max_k \sum_{c=1}^{N} a_c P_{c_k}^j \qquad /11/$$

Wyrażenie /11/ stanowi górną wartość prawdopodobieństwa obrony zespołu obiektów, a wyrażenie /8/ jest wartością dolną tego prawdopodobieństwa. Zgodnie z terminologią stosowaną w teorii gier wyrażenia te noszą nazwę górnej i dolnej wartości gry.

Ze znaczenia obu tych wartości wynika nierówność

$$\max_k \min_j P_k^j \leqslant \min_j \max_k P_k^j , \qquad /12/$$

czyli:

$$V_1 \leqslant V_2 \qquad /12'/$$

W konkretnym przypadku może się zdarzyć, że:

$$V_1 = V_2 \qquad /13/$$

lub

$$V_1 < V_2 \qquad /14/$$

Rozróżnienie tych dwóch przypadków jest bardzo ważne. W pierwszym z nich, gdy $V_1 = V_2$ sytuacja jest prosta, bowiem strona broniąca się wybierając wariant ugrupowania k^* zapewnia sobie uzyskanie prawdopodobieństwa obrony zespołu obiektów równego co najmniej wspólnej wartości $V_1 = V_2$, zdając sobie jednocześnie sprawę z tego, że przeciwnik może zapobiec temu, aby nie osiągnąć większej wartości niż $V_1 = V_2$, przez zastosowanie najbardziej niekorzystnego dla nas sposobu /wariantu/ działania, który oznaczymy przez j^*.

Ta wspólna wartość $V_1 = V_2$ jest kompromisową wartością prawdopodobieństwa obrony zespołu obiektów i zgodnie z terminologią stosowaną w teorii gier nazywa się **wartością gry**.

Tak więc, jeśli $V_1 = V_2$, to stroną broniąca się posiada optymalny wariant ugrupowania k^*, a przeciwnik - optymalny sposób /wariant/ działania /j^*/.

Z teorii gier wiadomo, że na to aby zachodziła równość /13/ potrzeba i wystarcza, by istniał punkt siodłowy macierzy

$$\left[P^j_k\right] = \left[\sum_{c=1}^{N} a_c P^j_{c_k}\right] \qquad /15/$$

mającej "u" wierszy i "w" kolumn, tzn. istnienie pary rozwiązań /k^*, j^*/, dla której $P^{j^*}_{k^*}$ jest jednocześnie minimalną wartością swego wiersza i maksymalną wartością kolumny.

Przy założeniu, że przeciwnik zna ilość i rodzaj sił i środków OPL wydzielonych do osłony zespołu obiektów oraz potrafi ustalić ich położenie, możemy wyrażenie /15/ łącznie z /13/uważać za ogólny model gry. Jest to wówczas gra o pełnej informacji.

W celu wyznaczenia optymalnego wariantu ugrupowania /k^*/ oraz najbardziej korzystnego sposobu działania przeciwnika /j^*/ należy w tym przypadku zbudować macierz /15/, która po rozpisaniu przyjmie postać /tabl. 1/.

Tablica 1

Warianty ugrupowania (k)	$j=1$			$\sum_{c=1}^{N} a_c p^1_{c_k}$	$j=2$			$\sum_{c=1}^{N} a_c p^2_{c_k}$	...	$j=w$			$\sum_{c=1}^{N} a_c p^w_{c_k}$	$\min_{j} \sum_{c=1}^{N} a_c p^j_{c_k}$
	$c=1$	...	$c=N$		$c=1$	...	$c=N$			$c=1$	...	$c=N$		
$k=1$	$a_1 p^1_{11}$	$\sum_{c=1}^{N} a_c p^1_{c_1}$	$a_N p^1_{N1}$	$\sum_{c=1}^{N} a_c p^1_{c_1}$	$a_1 p^2_{11}$	...	$a_N p^2_{N1}$	$\sum_{c=1}^{N} a_c p^2_{c_1}$	...	$a_1 p^w_{11}$	...	$a_N p^w_{N1}$	$\sum_{c=1}^{N} a_c p^w_{c_1}$	$\min_{j} \sum_{c=1}^{N} a_c p^j_{c_1}$
$k=2$	$a_1 p^1_{12}$	...	$a_N p^1_{N2}$	$\sum_{c=1}^{N} a_c p^1_{c_2}$	$a_1 p^2_{12}$	...	$a_N p^2_{N2}$	$\sum_{c=1}^{N} a_c p^2_{c_2}$	...	$a_1 p^w_{12}$	...	$a_N p^w_{N2}$	$\sum_{c=1}^{N} a_c p^w_{c_2}$	$\min_{j} \sum_{c=1}^{N} a_c p^j_{c_2}$
...	...	...	...	...	...	...	...	...	...	...	...	...	...	...
$k=u$	$a_1 p^1_{1u}$	...	$a_N p^1_{Nu}$	$\sum_{c=1}^{N} a_c p^1_{c_u}$	$a_1 p^2_{1u}$	...	$a_N p^2_{Nu}$	$\sum_{c=1}^{N} a_c p^2_{c_u}$	...	$a_1 p^w_{1u}$	...	$a_N p^w_{Nu}$	$\sum_{c=1}^{N} a_c p^w_{c_u}$	$\min_{j} \sum_{c=1}^{N} a_c p^j_{c_u}$
$\max_{k} \sum_{c=1}^{N} a_c p^j_{c_k}$	—	—	—	$\max_{k} \sum_{c=1}^{N} a_c p^1_{c_k}$	—	—	—	$\max_{k} \sum_{c=1}^{N} a_c p^2_{c_k}$	...	—	—	—	$\max_{k} \sum_{c=1}^{N} a_c p^w_{c_k}$	—

Mając tak zbudowaną macierz możemy z łatwością określić zarówno maksymalną wartość prawdopodobieństwa P_k^j stojącą w ostatniej kolumnie, a więc:

$$V_1 = \max_k \min_j P_k^j = \max_k \min_j \sum_{c=1}^{N} a_c P_{c_k}^j , \qquad /16/$$

jak i minimalną wartość tego prawdopodobieństwa, stojącą w ostatnim wierszu, tzn.

$$V_2 = \min_j \max_k P_k^j = \min_j \max_k \sum_{c=1}^{N} a_c P_{c_k}^j \qquad /17/$$

Wariant ugrupowania stojący w k-tym wierszu macierzy /15/ i spełniający warunek /16/ możemy w danym przypadku uważać za optymalny. Wariantów takich może być niekiedy kilka, np. dwa lub trzy.

W takim przypadku spośród równoważnych sobie wariantów z punktu widzenia prawdopodobieństwa obrony zespołu obiektów /P_k^j/, wybieramy ten, który zapewnia lepsze warunki dowodzenia, maskowania, przegrupowania, zaopatrywania, obrony przed bronią masowego rażenia itp. Należy dodać, że warianty, które nie odpowiadają w sposób wyraźny przytoczonym wymogom, nie powinny być umieszczane w tabl. 1. Warianty te będziemy zaliczali do wyraźnie niekorzystnych.

Dla przeciwnika optymalnym sposobem działania /j^* / jest ten, który spełnia warunek /17/.

Rozpatrzmy teraz drugi przypadek, wynikający z nierówności /12/, tzn. gdy:

$$V_1 < V_2 ,$$

zakładając jednocześnie, że środki wydzielone do obrony przeciwlotniczej zespołu obiektów pozwalają na zmianę co pewien czas ugrupowania bojowego /zmianę stanowisk ogniowych pododdziałów/, a więc posiadają możliwości manewrowe. Wtedy strona organizująca obronę przeciwlotniczą zespołu obiektów może z reguły uzyskać większą wartość prawdopodobieństwa P_k^j niż:

$$V_1 = \max_k \min_j P_k^j ,$$

jeśli będzie stosować nie jeden lecz kilka wariantów ugrupowania, co jest zgodne z zasadniczym twierdzeniem teorii gier nieskooperowanych o sumie zero.

Wynika to stąd, że przez stosowanie co pewien czas manewru /przejście pododdziałów na zapasowe SO/ oraz maskowania stworzymy przeciwnikowi znaczne trudności w uzyskaniu aktualnych danych o systemie obrony przeciwlotniczej zespołu obiektów.

Posiadanie przez przeciwnika tylko częściowych danych lub zupełny ich brak jest czynnikiem, który zawsze ujemnie wpływa na wybór przez niego optymalnego sposobu działania i prowadzi najczęściej do błędów, co jest korzystne dla nas.

W niektórych jednak przypadkach przeciwnik może prawidłowo ocenić skuteczność systemu obrony przeciwlotniczej zespołu obiektów, mimo posiadania niepełnych danych. Jednak szanse bezbłędnej oceny są niewielkie.

Ale nawet w tym udanym przypadku prawdopodobieństwo wykonania zadania przez przeciwnika o wiele się nie zmieni w porównaniu z prawdopodobieństwem, jakie co najwyżej może on osiągnąć w przypadku niestosowania przez nas manewru.

Jeśli ponadto uwzględnić fakt, że przez wykonanie w odpowiednim czasie manewru możemy uniknąć uderzeń mających na celu obezwładnienie sił i środków OPL, to stosowanie z określoną częstością kilku korzystnych wariantów ugrupowania jest celowe.

W celu określenia prawdopodobieństwa, jakie możemy uzyskać stosując manewr, wprowadźmy dodatkowo następujące oznaczenia:

x_k - częstość, z jaką strona broniąca się powinna stosować wariant ugrupowania o indeksie k $/1 \leqslant k \leqslant u/$;

y_j - częstość, z jaką przeciwnik powinien stosować sposób działania j $/1 \leqslant j \leqslant w/$.

W odniesieniu do wyraźnie niekorzystnych wariantów ugrupowania i sposobów działania przeciwnika częstości te będą równe zeru.

Sumy wszystkich częstości x_k i y_j są równe

$$\sum_{k=1}^{u} x_k = 1 \quad i \quad \sum_{j=1}^{w} y_j = 1 \qquad /18/$$

Wartość prawdopodobieństwa P_k^j z uwzględnieniem częstości x_k i y_j wyrazi się wzorem:

$$P\,/x_k, y_j/ = \sum_{k=1}^{u} \sum_{j=1}^{w} x_k y_j P_k^j \qquad /19/$$

Dolną i górną wartość gry oraz częstości optymalne:

$x_k = x_k^*$, $y_j = y_j^*$ obliczamy z wyrażeń:

$$V_1' \leq \max_x \min_y \sum_{k=1}^{u} \sum_{j=1}^{w} x_k y_j p_{kk}^j , \qquad /20/$$

$$V_2' = \min_y \max_x \sum_{k=1}^{u} \sum_{j=1}^{w} x_k y_j p_k^j , \qquad /21/$$

stosując metody obliczeniowe, jak w pierwszej części pracy[x/].

Zgodnie z zasadniczym twierdzeniem gier macierzowych wartości V_1' i V_2' zawsze istnieją i są sobie równe, jeśli tylko ilość możliwych wariantów ugrupowania i prawdopodobnych sposobów działania przeciwnika jest skończona. A więc:

$$V_1' = V_2' = \max_x \min_y \sum_{k=1}^{u} \sum_{j=1}^{w} x_k y_j p_k^j =$$

$$= \min_y \max_x \sum_{k=1}^{u} \sum_{j=1}^{w} x_k y_j p_k^j \qquad /22/$$

Należy podkreślić, że wspólna wartość $V_1' = V'_2 = V'$ jest oszacowaniem kompromisu odnoszącego się do przypadku $V_1 < V_2$, którego nie dałoby się ustanowić stosując jeden wariant ugrupowania i przewidując tylko jeden sposób działania przeciwnika.

Tak więc strona broniąca się stosując kilka wariantów ugrupowania z częstościami x_k może być pewna, że prawdopodobieństwo obrony zespołu obiektu osiągnie wartość równą V'.

W teorii gier dowodzi się, że zawsze zachodzi nierówność:

$$V_1 \leqslant V_1' , \qquad /23/$$

co łącznie z możliwością uniknięcia skutków uderzeń z powietrza /uderzeń na SO pododdziałów ogniowych/ przemawia za celowością stosowania manewru.

Macierz /15/ oraz równania /20/ i /21/ stanowią ogólny model matematyczny w przypadku stosowania manewru.

---

x/ Patrz rozdział I punkt 4.

W modelu tym wzięto pod uwagę tę okoliczność, iż na skutek stosowania manewru i maskowania, przeciwnik nie zawsze jest w stanie określić w momencie podejmowania decyzji położenia sił i środków OPL wydzielonych do obrony zespołu obiektów. Dlatego też wybrany przez niego sposób działania może nie być optymalny. To zaś stwarza możliwość uzyskania większego prawdopodobieństwa niż V_1.

ROZDZIAŁ III

PODZIAŁ ŚRODKÓW OPL DO ZWALCZANIA CELÓW POWIETRZNYCH

1. Kryteria optymalizacji podziału środków OPL do zwalczania celów powietrznych

Z problemu optymalizacji podziału środków OPL do zwalczania celów powietrznych spotykamy się wówczas, gdy w nalocie bierze udział więcej niż jeden cel, a w jego odparciu mogą uczestniczyć co najmniej dwa pododdziały.

Problem ten komplikuje się wraz ze wzrostem liczby celów i ilości środków OPL będących w dyspozycji. W ogólności polega on na określeniu optymalnego wariantu podziału środków OPL do zwalczania celów powietrznych zgodnie z przyjętym kryterium efektywności.

Jako kryterium efektywności w zależności od warunków można przyjąć:

- nadzieję matematyczną ilości rażonych celów;
- prawdopodobieństwo rażenia wszystkich bez wyjątku celów.

W pierwszym przypadku zakłada się, że skutki uderzeń z powietrza są proporcjonalne do liczby przepuszczonych przez system OPL celów. Zadaniem więc środków OPL jest razić możliwie dużą liczbę celów.

W odniesieniu do szczególnie ważnych obiektów, na które mogą być wykonane uderzenia środkami jądrowymi, lepszym kryterium efektywności wydaje się być prawdopodobieństwo rażenia wszystkich bez wyjątku celów.

Rozpatrzmy podział środków OPL do zwalczania celów powietrznych wg obydwu kryteriów efektywności.

2. Podział środków OPL wg nadziei matematycznej ilości rażonych celów.

Wprowadźmy następujące oznaczenia:

m - liczba pododdziałów ogniowych uczestniczących w odparciu nalotu;

n - liczba celów /pojedynczych lub grupowych/ wykonujących nalot;

p_{ij} - prawdopodobieństwo rażenia i-tym pododdziałem j-tego celu. W odniesieniu do celu grupowego prawdopodobieństwo to wyraża się wzorem:

$$p_{ij} = \frac{M_j}{\Sigma}, \qquad /1/$$

gdzie: M_j - nadzieja matematyczna ilości rażonych środków w celu grupowym;

Ł - liczba środków w celu grupowym.

Należy znaleźć optymalny wariant podziału środków OPL do zwalczania celów powietrznych.

Zadanie to rozwiązujemy w dwóch etapach. W pierwszym etapie obliczamy prawdopodobieństwo p_{ij}, zestawiając macierz

$$\left[p_{ij}\right] = \begin{bmatrix} p_{11}, & p_{12}, \ldots, & p_{1n} \\ p_{21}, & p_{22}, \ldots, & p_{2n} \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots & & \\ p_{m1}, & p_{m2}, \ldots, & p_{mn} \end{bmatrix} \qquad /2/$$

W drugim etapie wyznaczamy optymalny wariant podziału środków OPL do zwalczania celów powietrznych na podstawie tabl. 1.

Tabl. 1

Numer pod-oddziału	Numer celu 1	2	...	j	...	n
1	p_{11}/x_{11}	p_{12}/x_{12}	...	p_{1j}/x_{1j}	...	p_{1n}/x_{1n}
2	p_{21}/x_{21}	p_{22}/x_{22}	...	p_{2j}/x_{2j}	...	p_{2n}/x_{2n}
...	....	....	...	....	...	...
i	p_{i1}/x_{i1}	p_{i2}/x_{i2}	...	p_{ij}/x_{ij}	...	p_{in}/x_{in}
...	...	...	...	...	...	...
m	p_{m1}/x_{m1}	p_{m2}/x_{m2}	...	p_{mj}/x_{mj}	...	p_{mn}/x_{mn}

W tablicy tej danymi wejściowymi są numery pododdziałów OPL, numery celów i wartości prawdopodobieństw p_{ij}. Jeśli i-ty pododdział jest przydzielony do zwalczania j-tego celu, to w klatce /i,j/ pod p_{ij} kładziemy $X_{ij} = 1$. Jeśli natomiast i-ty pododdział nie otrzymuje zadania zwalczania j-tego celu, to w klatce /i,j/ piszemy $x_{ij} = 0$.

Tak więc zmienna x_{ij} może przyjmować dwie wartości: 1 lub 0.

Zadanie określenia optymalnego wariantu podziału środków OPL do zwalczania celów powietrznych sprowadza się do wyznaczenia takich x_{ij}, dla których nadzieja matematyczna ilości rażonych celów

$$M = \sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} x_{ij} p_{ij} \qquad /3/$$

przyjmuje wartość maksymalną przy warunkach:

$$\sum_{j=1}^{n} x_{ij} = 1 \quad , \qquad /i = 1,2,3,\ldots,m/; \qquad /4/$$

$$\sum_{i=1}^{m} x_{ij} = 1 \quad , \qquad /j \leqslant m/. \qquad /5/$$

Warunek /4/ mówi nam, że w przypadku gdy nie ma możliwości przeniesienia ognia i-ty pododdział ostrzeliwuje tylko jeden cel. Jeśli istnieje możliwość przeniesienia ognia na cel następny, to dany pododdział winien być wykazany dwukrotnie w tabeli /1/, ponieważ zwalcza dwa cele w tej samej sytuacji powietrznej. W przypadku dwukrotnego przeniesienia ognia i-ty pododdział wykazujemy trzykrotnie w tabeli /1/.

Warunek /5/ mówi nam, że j-ty cel może być ostrzeliwany przez 1 pododdział.

Maksymalizacja wyrażenia /3/ przy warunkach /4/ i /5/ może być dokonana metodami programowania liniowego.

W prostych przypadkach, kiedy liczby m i n są niewielkie, optymalne rozwiązanie możemy wyznaczyć, wypisując wszystkie możliwe warianty podziału środków OPL do zwalczania celów powietrznych i porównując je kolejno ze sobą. Objaśnimy to na przykładzie.

Niech będzie dana macierz prawdopodobieństwa p_{ij}:

Numer pododdziału	Numer celu	
	1	2
1	0,3	0,2
2	0,5	0,4
3	0,1	0,3

Przy warunku ostrzelania obydwu celów, mamy sześć wariantów:

I	II	III	IV	V	VI
i j	i j	i j	i j	i j	i j
1 1	1 2	1 2	1 1	1 1	1 2
2 2	2 1	2 1	2 1	2 2	2 2
3 2	3 2	3 1	3 2	3 1	3 1

Tu warunek /5/ nie musi być spełniony, tzn. do jednego celu mogą strzelać dwa pododdziały.

Obliczamy dla każdego wariantu nadzieję matematyczną M:

$$M_I = 0,3 + 1 - /1 - 0,4/ \ /1 - 0,3/ = 0,3 + 0,58 = 0,88;$$

$$M_{II} = 1 - /1 - 0,2/ \ /1-0,3/ + 0,5 = 0,44 + 0,5 = 0,94;$$

$$M_{III} = 0,2 + 1 - /1 - 0,5/ \ /1-0,1/ = 0,2 + 0,37 = 0,75;$$

$$M_{IV} = 1 - /1 - 0,3/ \ /1 - 0,5/ + 0,3 = 0,65 + 0,3 = 0,95;$$

$$M_V = 1 - /1 - 0,3/ \ /1 - 0,1/ + 0,4 = 0,37 + 0,4 = 0,77;$$

$$M_{VI} = 1 - /1 - 0,2/ \ /1-0,4/ + 0,3 = 0,52 + 0,3 = 0,82.$$

Optymalnym jest wariant IV, tzn. pierwszy i drugi pododdział powinny prowadzić ogień do pierwszego celu, a trzeci pododdział do drugiego celu. Wówczas nadzieja matematyczna osiąga wartość maksymalną, równą 0,95.

Przy dużych m i n wyznaczenie optymalnego wariantu powyższą metodą staje się uciążliwe. Celowiej jest w takich przypadkach stosować następującą metodę:

Niech będzie dana macierz prawdopodobieństw p_{ij}:

Tabl. 2

Numer pododdz.	Numer celu				
	1	2	3	4	5
1	0,32	0,29	0,27	0,18	0,15
2	0,14	0,45	0,5	0,22	0,19
3	0,42	0,26	0,17	0,16	0,21
4	0,28	0,2	0,24	0,43	0,37

Znajdujemy największy element pierwszego wiersza; jest nim $p_{11} = 0,32$. Patrzymy, czy w kolumnie odpowiadającej temu elementowi jest większa liczba. W danym przypadku większą liczbą jest $p_{31} = 0,42$ i jednocześnie jest to największy element w trzecim wierszu,

stąd kładziemy $x_{31} = 1$ /tabl. 3/.

Wracamy do pierwszego wiersza i szukamy największego elementu po 0,32; jest nim $p_{12} = 0,29$, lecz w kolumnie drugiej większą liczbą jest $p_{22} = 0,45$. Z tego względu przenosimy się do drugiego wiersza i szukamy w nim liczby największej; jest to $p_{23} = 0,5$. W kolumnie trzeciej większej liczby od 0,5 nie ma, dlatego kładziemy $x_{23} = 1$.

Wracamy ponownie do pierwszego wiersza i bierzemy liczbę największą po 0,32, tzn. 0,29. Ponieważ drugiemu pododdziałowi cel został już przydzielony, to w drugiej kolumnie największą liczbą po 0,45 jest 0,29, stąd kładziemy $x_{12} = 1$.

W pierwszym wierszu największą liczbą po 0,32 i 0,29 jest 0,27, lecz trzeci cel został już przydzielony dla drugiego pododdziału i dlatego $p_{13} = 0,27$ pomijamy. Następną liczbą największą jest $p_{14} = 0,18$, lecz w czwartej kolumnie większą od niej jest $p_{44} = 0,43$. W czwartym wierszu większej liczby od 0,43 nie ma, więc kładziemy $x_{44} = 1$.

Tabl. 3

Numer pododdz.	Numer celu 1	2	3	4	5
1	0,32 / 0	0,29 / 1	0,27 / 0	0,18 / 0	0,15 / 0
2	0,14 / 0	0,45 / 0	0,5 / 1	0,22 / 0	0,19 / 0
3	0,42 / 1	0,26 / 0	0,17 / 0	0,16 / 0	0,21 / 0
4	0,28 / 0	0,2 / 0	0,24 / 0	0,43 / 1	0,37 / 0

Wartość nadziei matematycznej odpowiadająca temu podziałowi środków OPL w myśl wzoru /4/ wyniesie:

$$M = p_{12} + p_{23} + p_{32} + p_{44} = 0,29 + 0,5 + 0,42 + 0,43 = \underline{1,64}$$

Można się przekonać, stosując metodę objaśnioną na poprzednim przykładzie, że jest to największa wartość nadziei matematycznej, jaką możemy uzyskać przy wszystkich możliwych wariantach podziału środków OPL.

Tak więc optymalnym jest wariant:

i	j
1	2
2	3
3	1
4	4

W wariancie tym piąty cel pozostaje nie ostrzelany.

Z powyższego przykładu wynika, że nawet przy znacznych m i n proces określania najlepszego wariantu podziału środków OPL jest stosunkowo prosty. Dla szybkiego otrzymywania optymalnych rozwiązań należy zbudować algorytm i opracować program na maszynę cyfrową. Algorytm taki jest przedstawiony w rozdziale V.

Dotychczas przyjęte było założenie, że wszystkie cele w danej sytuacji powietrznej posiadają jednakową ważność. Wprawdzie bardzo często trudno jest ustalić na podstawie danych rozpoznania radiolokacyjnego typ samolotu i rodzaj ładunku bojowego oraz określić trasę dalszego jego lotu. W tych warunkach, z uwagi na brak pełnych informacji, przypisanie jednakowej wagi wszystkim celom jest dopuszczalne.

Jeśli w praktyce uda nam się zdobyć pełniejsze informacje, wtedy należy ustalić relację ważności między celami. Tak np. nosiciele broni jądrowej lub samoloty stosujące zakłócenia mogą być uznane za ważniejsze od pozostałych.

A więc jeżeli cele nie są jednakowo ważne, to należy przypisać im wagi: k_1, k_2, ..., k_n, a kryterium efektywności będzie nie średnia liczba rażonych celów, lecz średnia ważona:

$$M_w = \sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} x_{ij} k_{ij} p_{ij} \qquad /6/$$

Zilustrujmy to na przykładzie:

Rozpatrzmy nalot, w którym biorą udział trzy cele, przy czym pierwszy cel jest dwa razy ważniejszego od drugiego i trzeciego /$k_1 = 2$, $k_2 = 1$, $k_3 = 1$/.

Macierz prawdopodobieństw jest następująca:

Numer pododdz.	Numer celu		
	1	2	3
1	0,32	0,26	0,18
2	0,41	0,24	0,33
3	0,21	0,4	0,25

Postawmy dodatkowo warunek, że wszystkie cele winny być ostrzelane.

Mamy 3! = 6 wariantów podziału środków OPL:

I		II		III		IV		V		VI	
i	j	i	j	i	j	i	j	i	j	i	j
1	1	1	2	1	2	1	3	1	3	1	1
2	2	2	1	2	3	2	1	2	2	2	3
3	3	3	3	3	1	3	2	3	1	3	2

Średnia ważona ilości rażonych celów dla poszczególnych wariantów będzie:

$M_I = 2 \cdot 0{,}32 + 1 \cdot 0{,}24 + 1 \cdot 0{,}25 = 1{,}13$

$M_{II} = 1 \cdot 0{,}26 + 2 \cdot 0{,}41 + 1 \cdot 0{,}25 = 1{,}33$

$M_{III} = 1 \cdot 0{,}26 + 1 \cdot 0{,}33 + 2 \cdot 0{,}21 = 1{,}01$

$M_{IV} = 1 \cdot 0{,}18 + 2 \cdot 0{,}41 + 1 \cdot 0{,}4 = 1{,}40$

$M_V = 1 \cdot 0{,}18 + 1 \cdot 0{,}24 + 2 \cdot 0{,}21 = 0{,}84$

$M_{VI} = 2 \cdot 0{,}32 + 1 \cdot 0{,}33 + 1 \cdot 0{,}4 = 1{,}37$

Najbardziej korzystnym jest więc czwarty wariant podziału środków OPL.

Gdyby nie przypisywać wagi poszczególnym celom, to optymalnym wariantem byłby wariant szósty /$M_{VI} = 1{,}05$/.

3. Podział środków OPL wg prawdopodobieństwa rażenia wszystkich bez wyjątku celów

Rozpatrzymy przypadek podziału środków OPL, kiedy kryterium efektywności stanowi prawdopodobieństwo rażenia wszystkich bez wyjątku celów /P_n/. W tym przypadku jeśli liczba pododdziałów jest mniejsza od liczby celów, to $P_n = 0$.

Aby P_n nie było równe zeru, należy mieć możliwości ostrzelania wszystkich celów, to znaczy musi być spełniony warunek $m \geqslant n$.

Prawdopodobieństwo rażenia wszystkich bez wyjątku celów jest równe iloczynowi prawdopodobieństw rażenia poszczególnych celów:

$$P_n = \prod_{j=1}^{n} p_{ij} \quad , \qquad /i = 1,2,3,\ldots,m/ \qquad /7/$$

Należy tak podzielić środki OPL do zwalczania celów powietrznych, aby prawdopodobieństwo P_n było maksymalne.

Metody postępowania przy wyznaczaniu optymalnego rozwiązania nie różnią się w swej istocie od metod opisanych w poprzednim punkcie. Pokażemy to na przykładzie.

Niech będzie dana macierz prawdopodobieństw p_{ij}:

Numer pododdz.	Numer celu		
	1	2	3
1	0,51	0,45	0,30
2	0,20	0,50	0,25
3	0,40	0,30	0,38

Przy warunku ostrzelania wszystkich trzech celów mamy 6 wariantów podziału środków OPL:

I	II	III	IV	V	VI
i j	i j	i j	i j	i j	i j
1 1	1 2	1 3	1 3	1 #	1 1
2 2	2 3	2 1	2 2	2 1	2 3
3 3	3 1	3 2	3 1	3 3	3 2

Wartości prawdopodobieństw P_n dla tych wariantów są następujące:

$P_I = 0,51 \cdot 0,50 \cdot 0,38 = 0,097,$
$P_{II} = 0,45 \cdot 0,25 \cdot 0,40 = 0,045,$
$P_{III} = 0,30 \cdot 0,20 \cdot 0,30 = 0,018,$
$P_{IV} = 0,30 \cdot 0,50 \cdot 0,40 = 0,060,$
$P_V = 0,45 \cdot 0,20 \cdot 0,38 = 0,034,$
$P_{VI} = 0,51 \cdot 0,25 \cdot 0,30 = 0,038.$

Najlepszym jest wariant pierwszy /$P_I = 0,097$/. Jest on także optymalnym wg kryterium nadziei matematycznej /$M_I = 1,39$/.

4. Podział środków OPL z uwzględnieniem manewru celów

Dotychczas rozpatrywano podział sił i środków OPL przy założeniu, że cele nie stosują manewru przeciwartyleryjskiego lub przeciwrakietowego.

W rzeczywistości jednak prawie zawsze należy się liczyć z ewentualnością stosowania przez cele manewrów. W tych warunkach optymalizacja podziału sił i środków OPL komplikuje się jeszcze bardziej. Przeciwnik bowiem przez stosowanie manewru stara się obniżyć efektywność działania sił i środków OPL. Zaś strona broniąca się chcąc

zadać przeciwnikowi możliwie duże straty winna określić prawdopodobne warianty manewru celów i na tej podstawie wybrać możliwie najlepszy wariant podziału sił i środków OPL. Uwidacznia się tu sytuacja konfliktowa, w której cele obydwu stron są przeciwstawne. Zatem jako aparat matematyczny służący do optymalizacji podziału sił i środków OPL może być stosowana teoria gier. Za funkcję kryterium najcelowiej jest przyjąć nadzieję matematyczną ilości rażonych celów, tzn.

$$M = \sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} p_{ij} \quad . \qquad /8/$$

gdzie: p_{ij} - prawdopodobieństwo rażenia i-tym pododdziałem j-tego celu;

m - liczba pododdziałów;

n - liczba celów.

Dla każdego z prawdopodobnych wariantów manewru przeciwnika i każdej z możliwych kombinacji podziału środków OPL, będzie ściśle określona wartość nadziei matematycznej M. Możemy więc zestawić tablicę, która stanowi jednocześnie macierz gry:

Tabl. 3

Możliwe warianty podziału sił i środków OPL: e \ f	Prawdopodobne warianty manewru przeciwnika: 1	2	3	...	f	...	s
1	M_1^1	M_1^2	M_1^3	...	M_1^f	...	M_1^s
2	M_2^1	M_2^2	M_2^3	...	M_2^f	...	M_2^s
3	M_3^1	M_3^2	M_3^3	...	M_3^f	...	M_3^s
...	...	...	...	...	...	...	...
e	M_e^1	M_e^2	M_e^3	...	M_e^f	...	M_e^s
...	...	...	...	...	...	...	...
r	M_r^1	M_r^2	M_r^3	...	M_r^f	...	M_r^s

Przeciwnik stara się dobrać taki wariant manewru, by wielkość M_e^f była możliwie minimalna. W zapisie matematycznym wyrazimy to tak:

$$\min_f \; M_e^f = \min_f \left[\sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} p_{ij} \right]_e^f \qquad /9/$$

Wyrażenie /9/ przedstawia najmniejszą wartość nadziei matematycznej ze względu na prawdopodobne warianty manewru przeciwnika przy kombinacji podziału środków OPL o indeksie e.

Strona broniąca się znając prawdopodobne warianty manewru przeciwnika oraz ugrupowanie i możliwości środków OPL, winna wybrać spośród wszystkich możliwych wariantów e /$1 \leqslant e \leqslant r$/ ten, dla którego wyrażenie /9/ przyjmie wartość największą, co możemy zapisać:

$$\max_{e} \min_{f} M_e^f = \max_{e} \min_{f} \left[\sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} p_{ij} \right]_e^f \qquad /10/$$

Wyrażenie /10/ stanowi dolną wartość gry /V_1/. Wariant podziału środków OPL odpowiadający V_1 oznaczymy przez e^*. Zapewnia on uzyskanie wartości nadziei matematycznej, równej co najmniej V_1 bez względu na możliwe manewry przeciwnika, co wynika bezpośrednio z nierówności:

$$V_1 \leqslant M_e^f \qquad /11/$$

Jeżeli jednak przeciwnik posiada aktualne dane dotyczące ilości i rodzaju sił i środków wydzielonych do obrony obiektu /zespołu obiektów/ oraz zna chociaż w ogólnym zarysie ich ugrupowanie, to może zastosować taki wariant manewru, przy którym nadzieja matematyczna ilości rażonych celów będzie równa co najwyżej:

$$V_2 = \min_{f} \max_{e} M_e^f = \min_{f} \max_{e} \left[\sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} p_{ij} \right]_e^f \qquad /12/$$

Wyrażenie /12/ stanowi górną wartość gry.

W przypadku, gdy $V_1 = V_2$ istnieje jeden najbardziej korzystny wariant podziału środków OPL; jest nim e^*. Przeciwnik posiada również jeden najkorzystniejszy wariant manewru f^* /odpowiadający wartości V_2/. Rozwiązanie gry znajdujemy bezpośrednio z tabl. 3.

Jeżeli natomiast $V_1 < V_2$, to optymalne rozwiązanie możemy uzyskać, wprowadzając strategie mieszane.

Niech więc x_e oznacza częstość, z jaką strona broniąca się powinna stosować wariant podziału środków OPL o indeksie e, a y_f - częstość, z jaką dla przeciwnika najcelowiej jest stosować wariant manewru f. W odniesieniu do wyraźnie niekorzystnych wariantów e i f częstości te będą równe zeru.

Sumy częstości x_e i y_f spełniają warunki:

$$\sum_{e=1}^{r} x_e = 1 \quad \text{i} \qquad \sum_{f=1}^{s} y_f = 1 \,. \qquad /13/$$

Wartość nadziei matematycznej M_e^f z uwzględnieniem częstości x_e i y_f wyrazi się wzorem:

$$M\,/x_e\, y_f/ = \sum_{e=1}^{r}\sum_{f=1}^{s} x_e y_f M_e^f \qquad /14/$$

Dolną $/V_1'/$ i górną $/V_2'/$ wartość gry oraz częstości optymalne: $x_e = x_e^*$, $y_f = y_f^*$ obliczamy z równań:

$$V_1' = \max_x \min_y \sum_{e=1}^{r}\sum_{f=1}^{s} x_e y_f M_e^f \qquad /15/$$

$$V_2' = \min_y \max_x \sum_{e=1}^{r}\sum_{f=1}^{s} x_e y_f M_e^f \,, \qquad /16/$$

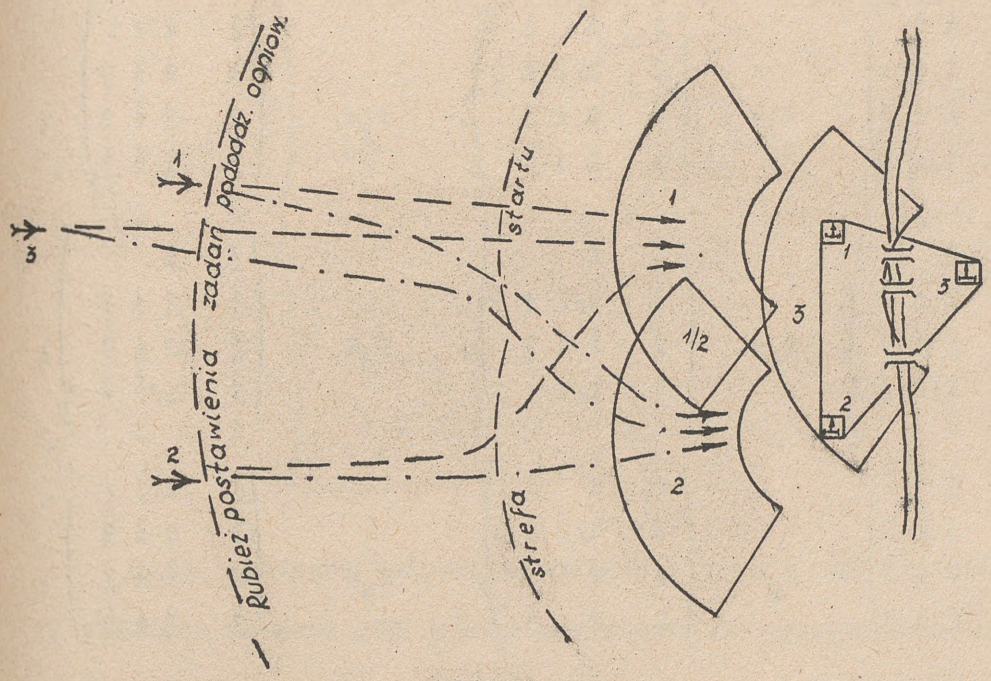
stosując te same metody obliczeniowe, co w pierwszej części pracy /rozdz. I punkt 4/.

Jeśli liczba wariantów e i f jest skończona, to wartości V_1' i V_2' istnieją i są sobie równe na mocy fundamentalnego twierdzenia teorii gier.

Przedstawiony model nie zakłada posiadanie pełnych informacji o ważności celów. Chcąc wprowadzić wagę poszczególnych celów należy za funkcję kryterium przyjąć nie nadzieję matematyczną ilości rażonych celów, lecz średnią ważoną, czyli funkcję daną wzorem /6/. Zmiana ta nie naruszy istoty modelu ani sposobu jego rozwiązywania.

Dla ilustracji zagadnienia optymalnego podziału sił i środków OPL w warunkach stosowania przez cele manewru, rozpatrzmy następujący przykład:

Przyjmijmy, że pułkmakiet przeciwlotniczych w składzie trzech dywizjonów osłania zespół przepraw na ważnej rubieży wodnej, jak rys. 1.



Rys. 1

Na podstawie danych rozpoznania radiolokacyjnego wiadomo, że w powietrzu znajdują się trzy cele: cel nr 1 i 2 podchodzą do rubieży postawienia zadań bojowych dywizjonom, zaś cel nr 3 leci w odstępie 40-50 sek. za celami 1 i 2. Brak jest informacji odnośnie składu celów i typów samolotów.

Prawdopodobnie wiadome jest przeciwnikowi, iż zespół ważnych przepraw znajduje się pod osłoną rakiet przeciwlotniczych. Należy się więc liczyć z możliwością stosowania przez cele manewrów dla wyraźnego obniżenia efektów ogniowych.

Położenie celów wskazuje, że nie ma możliwości przeniesienia ognia przez ten sam dywizjon na cel 3 po ostrzelaniu celu 1 lub 2.

Uwzględniając powyższe dane należy wyznaczyć optymalny wariant podziału dywizjonów ogniowych do wszystkich trzech celów.

Możliwe są następujące kombinacje wejścia trzech celów w strefy ognia trzech dywizjonów:

$$f_1 = \begin{pmatrix} j & i \\ 1 & 1\ i\ 3 \\ 2 & 2\ i\ 3 \\ 3 & 1\ i\ 3 \end{pmatrix}, \quad f_2 = \begin{pmatrix} j & i \\ 1 & 1/2\ i\ 3 \\ 2 & 2\ i\ 3 \\ 3 & 1\ i\ 3 \end{pmatrix}, \quad f_3 = \begin{pmatrix} j & i \\ 1 & 2\ i\ 3 \\ 2 & 2\ i\ 3 \\ 3 & 1\ i\ 3 \end{pmatrix},$$

$$f_4 = \begin{pmatrix} j & i \\ 1 & 1\ i\ 3 \\ 2 & 2\ i\ 3 \\ 3 & 1/2\ i\ 3 \end{pmatrix}, \quad f_5 = \begin{pmatrix} j & i \\ 1 & 1/2\ i\ 3 \\ 2 & 2\ i\ 3 \\ 3 & 1/2\ i\ 3 \end{pmatrix}, \quad f_6 = \begin{pmatrix} j & i \\ 1 & 2\ i\ 3 \\ 2 & 2\ i\ 3 \\ 3 & 1/2\ i\ 3 \end{pmatrix},$$

$$f_7 = \begin{pmatrix} j & i \\ 1 & 1\ i\ 3 \\ 2 & 2\ i\ 3 \\ 3 & 2\ i\ 3 \end{pmatrix}, \quad f_8 = \begin{pmatrix} j & i \\ 1 & 1/2\ i\ 3 \\ 2 & 2\ i\ 3 \\ 3 & 2\ i\ 3 \end{pmatrix}, \quad f_9 = \begin{pmatrix} j & i \\ 1 & 2\ i\ 3 \\ 2 & 2\ i\ 3 \\ 3 & 2\ i\ 3 \end{pmatrix},$$

$$f_{10} = \begin{pmatrix} j & i \\ 1 & 1\ i\ 3 \\ 2 & 1\ i\ 3 \\ 3 & 1\ i\ 3 \end{pmatrix}, \quad f_{11} = \begin{pmatrix} j & i \\ 1 & 1\ i\ 3 \\ 2 & 1/2\ i\ 3 \\ 3 & 1\ i\ 3 \end{pmatrix}, \quad f_{12} = \begin{pmatrix} j & i \\ 1 & 1/2\ i\ 3 \\ 2 & 1/2\ i\ 3 \\ 3 & 1/2\ i\ 3 \end{pmatrix}$$

$$f_{13} = \begin{pmatrix} j & i \\ 1 & 1\ i\ 3 \\ 2 & 1\ i\ 3 \\ 3 & 1/2\ i\ 3 \end{pmatrix}, \quad f_{14} = \begin{pmatrix} j & i \\ 1 & 1\ i\ 3 \\ 2 & 1\ i\ 3 \\ 3 & 2\ i\ 3 \end{pmatrix}, \quad f_{15} = \begin{pmatrix} j & i \\ 1 & 2\ i\ 3 \\ 2 & 1/2\ i\ 3 \\ 3 & 1\ i\ 3 \end{pmatrix}$$

W sumie jest więc 15 kombinacji. Dla przykładu opiszemy słownie kombinacje f_1 i f_2.

f_1 - cele nr 1 i 3 wchodzą najpierw w strefę ognia pierwszego, a następnie trzeciego dywizjonu, zaś cel nr 2 - w strefę ognia dru - giego i trzeciego dywizjonu;

f_2 -cel nr 1 wchodzi najpierw w zazębiające się strefy ognia pierwszego i drugiego dywizjonu /1/2/, a następnie w strefę ognia trzeciego dywizjonu, zaś cele nr 2 i 3 odpowiednio w strefy ognia drugiego i trzeciego oraz pierwszego i trzeciego dywizjonu.

Przy warunku ostrzelania wszystkich trzech celów, mamy 3! = 6 wariantów podziału dywizjonów ogniowych:

$$e_1 = \begin{pmatrix} i & j \\ 1 & 1 \\ 2 & 2 \\ 3 & 3 \end{pmatrix}, \quad e_2 = \begin{pmatrix} i & j \\ 1 & 1 \\ 2 & 3 \\ 3 & 2 \end{pmatrix}, \quad e_3 = \begin{pmatrix} i & j \\ 1 & 2 \\ 2 & 1 \\ 3 & 3 \end{pmatrix},$$

$$e_4 = \begin{pmatrix} i & j \\ 1 & 2 \\ 2 & 3 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}, \quad e_5 = \begin{pmatrix} i & j \\ 1 & 3 \\ 2 & 1 \\ 3 & 2 \end{pmatrix}, \quad e_6 = \begin{pmatrix} i & j \\ 1 & 3 \\ 2 & 2 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}$$

Mając wypisane wszystkie możliwe warianty manewru celów i warianty podziału środków OPL możemy przystąpić do zestawienia tabl. 3, stanowiącej jednocześnie macierz gry.

Elementami tej macierzy będzie nadzieja matematyczna ilości rażonych celów $/M_e^f/$.
Przyjmiemy, że jeśli cel wchodzi w strefę ognia dywizjonu, to istnieje możliwość oddania do niego serii trzech rakiet i wobec tego prawdopodobieństwo jego rażenia jest bliskie jedności. Dla prostoty liczenia przyjmiemy $p_{ij} = 1$. Uproszczenie to nie wpłynie na zmianę rozwiązania optymalnego.

Macierz gry jest rzędu 6 x 15 i ma postać:

Tabl. 4

e \ f		Prawdopodobne warianty manewru przeciwnika															$\min_f M_e^f$
		f_1	f_2	f_3	f_4	f_5	f_6	f_7	f_8	f_9	f_{10}	f_{11}	f_{12}	f_{13}	f_{14}	f_{15}	
Możliwe warianty podziału środków OPL	e_1	3	3	2	3	3	2	3	3	2	2	3	3	2	2	2	2
	e_2	2	2	1	3	3	2	3	3	2	2	2	3	3	3	1	1
	e_3	1	2	2	1	2	2	1	2	2	2	2	3	2	2	3	1
	e_4	1	1	1	2	2	2	2	2	2	2	2	3	3	3	2	1
	e_5	2	3	3	2	3	3	1	2	2	2	2	3	2	1	3	1
	e_6	3	3	3	3	3	3	2	2	2	2	3	3	2	1	3	1
$\max_e M_e^f$		3	3	3	3	3	3	3	3	2	2	3	3	3	3	3	-

Z macierzy widać, że $V_1 = V_2 = 2$. Istnieje więc punkt siodłowy. Strategie optymalne odpowiadające punktowi siodłowemu są:

a/ dla nas:

$$e_1 = \begin{pmatrix} i & j \\ 1 & 1 \\ 2 & 2 \\ 3 & 3 \end{pmatrix}$$

b/ dla przeciwnika:

$$f_9 = \begin{pmatrix} j & i \\ 1 & 2\ i\ 3 \\ 2 & 2\ i\ 3 \\ 3 & 2\ i\ 3 \end{pmatrix} \quad \text{lub } f_{10} = \begin{pmatrix} j & i \\ 1 & 1\ i\ 3 \\ 2 & 1\ i\ 3 \\ 3 & 1\ i\ 3 \end{pmatrix}$$

A więc najcelowiej jest skierować pierwszy dywizjon na cel 1, drugi dywizjon na cel 2 i trzeci dywizjon na cel 3. Taki podział gwarantuje ostrzelanie co najmniej dwóch celów niezależnie od tego, jaki wariant manewru przeciwnik zastosuje.

W praktyce mimo zazwyczaj intuicyjnego podejścia do tego problemu, najczęściej ten wariant podziału środków OPL w podobnych sytuacjach powietrznych jest stosowany.

Przeciwnik posiada dwa optymalne warianty manewru: f_9 i f_{10}. W obu przypadkach powinien on stosować nalot potokowy, tzn. cele winny być ugrupowane w głąb, w odstępach uniemożliwiających przeniesienie ognia, a kursy ich nie powinny przechodzić przez zazębiające się strefy ognia dywizjonów pierwszej linii. Taka taktyka stwarza przeciwnikowi korzystne warunki przenikania przez system OPL i zapewnia poniesienie stosunkowo najmniejszych strat. W danym przypadku co najwyżej dwóch celów.

Na zakończenie należy dodać, że z uwagi na szybko zmieniającą się sytuację powietrzną stosowanie powyższych metod w toku trwania nalotu jest przy ręcznej technice obliczeniowej bezcelowe.

Niemniej jednak przedstawione metody optymalizacji podziału sił i środków OPL mogą być z pewnością stosowane przy ustalaniu pewnych ogólnych zasad i wskazówek dotyczących zwalczania celów w typowych sytuacjach powietrznych oraz przy określaniu optymalnego ugrupowania bojowego, które jak wiadomo zależy w głównej mierze od taktyki działania środków napadu powietrznego przeciwnika.

ROZDZIAŁ III

ALGORYTMY OKREŚLANIA OPTYMALNEGO UGRUPOWANIA NAZIEMNYCH ŚRODKÓW OPL

1. Algorytm określania optymalnego ugrupowania małokalibrowej artylerii przeciwlotniczej

Dla znalezienia optymalnego ugrupowania małokalibrowej artylerii przeciwlotniczej w systemie obrony punktowej należy przeprowadzić analizę zadania i ocenę położenia, wykonać pracę graficzną na mapie oraz obliczenia. Celowym jest z punktu widzenia ekonomii pracy i czasu wykonywać poszczególne czynności w pewnym ustalonym porządku.

Spis czynności i porządek ich wykonywania stanowi algorytm znajdowania rozwiązania optymalnego. W pewnych punktach algorytmu do wykonania bardziej złożonych i pracochłonnych obliczeń może być wykorzystana elektroniczna maszyna cyfrowa. A oto algorytm:

a/ Przeprowadzamy analizę zadania i ocenę położenia według zasad i punktów przyjmowanych w taktyce wojsk OPL.

b/ Zestawiamy w tabeli[x/] dane dotyczące taktyki działania środków napadu powietrznego przeciwnika.

c/ Zestawiamy w tabeli[xx/] ilość sił i środków OPL oraz parametry charakteryzujące możliwości ogniowe i manewrowe sprzętu.

d/ Zestawiamy informacje dotyczące bezpośrednich sąsiadów[xxx/].

e/ Na mapie najcelowiej w skali 1:50 000 nanosimy obiekt osłony, prawdopodobne warianty działania przeciwnika, położenie własnych sił i środków OPL, ugrupowania najbliższych sąsiadów oraz ogólną sytuację operacyjną w zakresie nas dotyczącym.

f/ Wykreślamy w skali mapy co jeden kilometr poczynając od środka obiektu możliwe rubieże ugrupowania baterii. Należy z góry wykluczyć te rubieże, które z uwagi na warunki terenowe nie pozwalają na rozmieszczenie baterii.

g/ Wykreślamy w odniesieniu do środka obiektu sektory /wycinki/ najcelowiej co 36° lub 45°. Sektory te powinny jednocześnie obejmować prawdopodobne kierunki podejścia przeciwnika do obiektu ataku.

---

x/ Wzór takiej tabeli podany jest w przykładzie 2 rozdz. VI.

xx/ Wzór takiej tabeli podano w przykładzie 2 rozdz. VI.

xxx/ Dane o których mowa w punktach b, c i d mogą być zestawiane w trakcie oceny położenia lub nawet wcześniej. Wypisujemy je oddzielnie dla podkreślenia ich ważności.

h/ Ustalamy pierwszy wybór, tzn. uwzględniając prawdopodobne kierunki ataku przeciwnika, teren i sąsiadów ugrupowujemy baterie na pierwszej rubieży licząc od obiektu. Sektory, w których zostały ugrupowane baterie, znaczymy.

i/ Posługując się grafikiem /zał. 19/ określamy ilość strzałów, jaką mogą oddać poszczególne baterie w odniesieniu do każdego z wariantów i kierunków działania przeciwnika. Dane zapisujemy w gabeli[x/].

j/ Ustalamy drugi wybór, tzn. uwzględniając czynniki, jak w punkcie i/, grupujemy baterie w tych samych co poprzednio sektorach, lecz na drugiej rubieży. W analogiczny sposób określamy dla każdej z baterii możliwą do oddania ilość strzałów, a dane zapisujemy w tabeli.

k/ W podobny sposób ustalamy trzeci i następne wybory. Powstaje więc pewien ciąg wyborów ze względu na promień ugrupowania baterii. Ostatnim wyborem będzie ten, dla którego wyraźnie zarysowuje się spadek ilości strzałów.

l/ W oparciu o tabelę ilości strzałów sporządzamy macierz gry by móc następnie określić optymalną rubież /optymalne rubieże/ ugrupowania pododdziałów. Elementami tej macierzy winny być w zasadzie wartości prawdopodobieństw P_k^j. Możemy jednak pójść na uproszczenie, przyjmując za kryterium efektywności ilość oddanych strzałów /N_k^j/. Uproszczenie to jest w zupełności do przyjęcia, gdy do osłony obiektu /obiektów/ został wydzielony tylko jeden rodzaj środków OPL oraz posiadamy skąpe informacje o skuteczności poszczególnych sposobów działania przeciwnika /Q_2^j/, względnie skuteczność tych sposobów jest w przybliżeniu jednakowa lub jeśli nie zmienia ona relacji mniejszości /większości/ pomiędzy elementami dowolnych dwóch kolumn macierzy.

ł/ Jeżeli gra posiada punkt siodłowy, bezpośrednio z macierzy określamy optymalną rubież ugrupowania baterii oraz sposoby i kierunki działania przeciwnika odpowiadające punktowi siodłowemu. Jeżeli punktu siodłowego nie ma, optymalne rozwiązanie znajdujemy na drodze wprowadzenia strategii mieszanych. Sposób postępowania, jak w rozdz. I punkt 4. Wtedy mogą wystąpić dwie lub nawet trzy rubieże ugrupowania baterii oraz częstości stosowania manewru. Najczęściej jednak będziemy mieli do czynienia z punktem siodłowym.

m/ Optymalną rubież /rubieże/ ugrupowania wykreślamy na mapie oraz uwypuklamy wybrane już uprzednio stanowiska ogniowe baterii. Jest

x/ Wzór tabeli podano w przykładzie 2 rozdz. VI.

to pierwsza kombinacja rozmieszczenia baterii na ustalonych rubieżach.

n/ Biorąc za podstawę uprzednio wykreślone sektory /wycinki/ i liczbę pododdziałów, obliczamy ilość wszystkich możliwych kombinacji /K/ rozmieszczenia S baterii w M sektorach, korzystając ze wzoru:

$$K = \frac{M!}{(M-S)!\,S!} \qquad -/1/$$

W praktyce po uwzględnieniu terenu i prawdopodobnych kierunków podejścia przeciwnika do obiektu ataku, liczba M ulegnie znacznej redukcji, a przez to zmniejszy się ilość kombinacji.

o/ Dla każdej z kombinacji ugrupowania baterii analogicznie, jak w punkcie i/ obliczamy ilość strzałów, a dane zapisujemy w tabeli[x/].

p/ W oparciu o tabelę ilości strzałów sporządzamy macierz gry, by móc następnie określić optymalny wariant ugrupowania baterii. Dalsze postępowanie, jak w punktach l i ł/.

Jeśli macierz ma punkt siodłowy, to wariant ugrupowania odpowiadający temu punktowi należy uznać za optymalny. W przeciwnym razie wprowadzamy strategie mieszane i dla wyznaczenia częstości x_k, y_j oraz wartości gry V' rozwiązujemy macierz, stosując metody, jak w rodz.I punkt 4.

r/ Uwypuklamy na mapie optymalne rozwiązanie, wykreślamy strefy ognia baterii, nanosimy SD oddziału i RSWP oraz elementy tyłowe, sporządzamy legendę, w której m.in. umieszczamy tabelę możliwości ogniowych.

x x

x

Opisane wyżej czynności nasuwają myśl, że proces określenia optymalnego rozwiązania jest dość złożony i pracochłonny. Istnieje jednak realna możliwość zaprogramowania czynności od h/ do p/ na maszynę cyfrową. Prace nad zbudowaniem takiego programu są prowadzone.

Wykorzystanie maszyny cyfrowej skróci wielokrotnie czas otrzymywania optymalnego rozwiązania i wobec tego przedstawiona metoda może być stosowana nawet w szybko zmieniającej się sytuacji taktycznej. Przy ręcznej technice obliczeniowej, z uwagi na dużą praco -

x/ Wzór tabeli podany jest w przykładzie 2 rozdz. VI.

chłonność, metoda ta może być przede wszystkim stosowana do ustalania pewnych ogólnych zasad ugrupowania sił i środków OPL lub weryfikacji zasad już istniejących.

2. Algorytm określania optymalnego ugrupowania rakiet przeciwlotniczych

Przy określaniu ugrupowania rakiet przeciwlotniczych technika postępowania jest podobna jak w punkcie 1. Podamy więc tylko istotne różnice, odwołując się jednocześnie tam, gdzie jest to możliwe do algorytmu podanego wyżej.

W pierwszym etapie przeprowadzamy analizę zadania, ocenę położenia i zestawiamy dane dotyczące taktyki działania środków napadu powietrznego przeciwnika, własnych sił i środków oraz wszelkie informacje o sąsiadach.

W drugim etapie wykonujemy następujące czynności:

a/ Na mapie w skali 1:100 000 lub 1:200 000 nanosimy te same elementy co w punkcie 1 c/.

b/ Wykreślamy w skali mapy co pięć kilometrów poczynając od środka obiektu możliwe rubieże ugrupowania pododdziałów ogniowych. Należy z góry wykluczyć te rubieże, które z uwagi na warunki terenowe nie pozwalają na rozmieszczenie pododdziałów ogniowych.

c/ Wykreślamy w stosunku do środka obiektu sektory co 36° lub 45°, które powinny obejmować prawdopodobne kierunki nalotów.

d/ Ustalamy pierwszy wybór, kierując się czynnikami, jak w punkcie 1. h.

e/ Posługując się grafikiem /zał. 17/ określamy ilość rakiet, jaką mogą odpalić poszczególne pododdziały ogniowe w odniesieniu do każdego z wariantów i kierunków działania przeciwnika. Dane zapisujemy w tabeli[x/].

f/ W analogiczny sposób, jak w punkcie 1. j/ ustalamy drugi wybór oraz określamy ilość rakiet. Dane zapisujemy w tabeli.

g/ Tworzymy ciąg wyborów, jak w punkcie 1. k/. Ostatnim wyborem będzie ten, dla którego wyraźnie zarysowuje się spadek ilości rakiet. Dla dokładnego ustalenia maksimum wykreślamy jedną lub dwie rubieże pośrednie między sąsiednimi rubieżami, z których pododdziały ogniowe mają możliwości odpalenia najwięcej rakiet.

x/ Wzór tabeli i sposób jej wypełniania podano w przykładzie 1 rozdz. VI.

h/ Budujemy macierz gry, jak w punkcie 1. l/ Dalsze postępowanie jak w punktach od 1. ł/ do 1 r/.

Sposób praktycznego postępowania pokażemy na przykładzie w rozdz. IV.

ROZDZIAŁ V

PROBLEM OPTYMALNEGO ROZMIESZCZENIA PODODDZIAŁÓW TECHNICZNYCH /PUNKTÓW AMUNICYJNYCH/

1. Wymogi, jakim winny odpowiadać rejony przewidziane dla pododdziałów technicznych /punktów amunicyjnych/

Pododdziały techniczne rozmieszcza się z zasady wewnątrz ugrupowania bojowego, w obszarze pomiędzy osłanianym obiektem i pododdziałami ogniowymi. Mogą one być w uzasadnionych przypadkach rozmieszczane także poza ugrupowaniem bojowym /z tyłu lub z boku/. Podobnie rzecz się ma z punktami amunicyjnymi.

Główne zadanie pododdziału technicznego polega na przechowywaniu określonego zapasu pocisków rakietowych, przygotowaniu ich /montaż i sprawdzenie/ oraz dostarczaniu do pododdziałów ogniowych. Zadaniem zaś punktu amunicyjnego będzie nagromadzenie odpowiedniego zapasu amunicji i zaopatrywanie na bieżąco pododdziały ogniowe. Dowóz w przypadku rakiet odbywa się na samochodach transportowo-załadowczych. Na każdy taki samochód można załadować tylko jeden pocisk.

Praktycznie rzecz polega na tym, że w pododdziale technicznym formuje się kolumny z pociskami rakietowymi dla odpowiednich dywizjonów ogniowych. Kolumnę skierowuje się na miejsce przeznaczenia po osiągnięciu przez nią gotowości do wykonania marszu.

Dowóz amunicji artyleryjskiej odbywa się na samochodach ciężarowych drużyn amunicyjnych pododdziałów ogniowych.

Rejony przewidziane dla pododdziałów technicznych powinny:

a/ zapewniać dobry dojazd do poszczególnych pododdziałów ogniowych, ze szczególnym uwzględnieniem pododdziałów znajdujących się na najbardziej prawdopodobnych kierunkach nalotu środków napadu powietrznego przeciwnika;

b/ stwarzać dogodne warunki maskowania oraz zapewniać dobre warunki pracy /przy montażu i sprawdzaniu pocisków rakietowych/;

c/ znajdować się w pobliżu linii kolejowej /bocznicy z rampami/, co umożliwi dowóz pocisków i paliw ze składów;

d/ znajdować się w miejscu umożliwiającym korzystanie z przemysłowej sieci elektrycznej, a jednocześnie z dala od ważnych punktów newralgicznych /obiektów/, na które przeciwnik może intensywnie oddziaływać;

e/ w warunkach pokoju znajdować się na gruntach państwowych;
f/ odpowiadać wymaganiom OPBMaR.

Punkty a, b, c i f określają jednocześnie wymogi, jakim winny odpowiadać rejony przewidziane dla punktów amunicyjnych.

Na podstawie tak sprecyzowanych wymogów, znajomości terenu i ogólnej sytuacji taktycznej możemy wyznaczyć rejony nadające się do rozmieszczenia pododdziałów technicznych /punktów amunicyjnych/. Rejonów takich najczęściej będzie więcej niż pododdziałów technicznych /punktów amunicyjnych/. Dla każdego z tych rejonów warunki dowozu pocisków rakietowych /amunicji artyleryjskiej/ do poszczególnych pododdziałów ogniowych będą na ogół różne, ponieważ zmieniać się będą odległości i drożnia, a wraz z nimi czas dowozu. Postawmy więc sobie za zadanie ustalenie rejonów, które by spełniały podane wymogi, a jednocześnie stwarzały możliwie najlepsze warunki zaopatrywania pododdziałów ogniowych w pociski rakietowe /amunicję artyleryjską/.

Problemem tym zajmiemy się w dalszej części rozdziału. Przedtem musimy w sposób możliwie ścisły sformułować istotę samego problemu, by móc go matematycznie rozwiązać.

2. S f o r m u ł o w a n i e p r o b l e m u

Do osłony dużych i ważnych obiektów może być wydzielonych kilka lub nawet kilkanaście pododdziałów rakiet przeciwlotniczych i kilka pododdziałów technicznych. Pododdziały te mogą być zorganizowane w jeden związek taktyczny lub kilka /np. dwa - trzy/ oddziały. Do osłony mniejszych obiektów wydziela się nie więcej niż jeden oddział rakiet przeciwlotniczych, mający w swym składzie kilka pododdziałów ogniowych i jeden pododdział techniczny. Do osłony ważnych obiektów punktowych może być wydzielony oddział artylerii przeciwlotniczej, w składzie do sześciu pododdziałów ogniowych. Zaopatrywanie pododdziałów ogniowych w amunicję artyleryjską dokonywane jest z jednego lub dwóch punktów amunicyjnych.

W celu zbudowania modelu matematycznego, który by odpowiadał każdej sytuacji taktycznej musimy sformułować problem bardzo ogólnie.

Załóżmy, więc, że pewien obiekt[x/] osłaniają A_1, A_2,..., A_S, pododdziały ogniowe, gdzie S oznacza ogólną ilość pododdziałów. Pododdziały te zaopatrywane są przez B_1, B_2,..., B_N pododdziały techniczne /punkty amunicyjne/, gdzie N - ogólna ilość pododdziałów

---

x/ Obiektem tym może być zgrupowanie wojsk, przeprawy, węzły komunikacyjne lub inne obiekty w strefie Frontu lub na obszarze kraju.

technicznych /punktów amunicyjnych/. Mogą one być rozmieszczone w rejonach R_1, R_2,..., R_M, gdzie M - ilość rejonów spełniających wymogi, o których była mowa wyżej. W każdym z tych rejonów możemy rozmieścić tylko jeden pododdział techniczny /punkt amunicyjny/.

Zaopatrywanie ma być realizowane w pewnym okresie czasu /0, T_z/, w którym ilość pocisków rakietowych /ilość amunicji wyrażona w jednostkach ognia pododdziału lub w tonach/, jaką może dostarczyć i-ty pododdział techniczny /punkt amunicyjny/ wynosi b_i. Ogólna ilość pocisków rakietowych /amunicji/, jaka może być przeznaczona na zaopatrzenie pododdziałów ogniowych wyniesie:

$$W = \sum_{i=1}^{N} b_i \qquad (1)$$

Wymagane zapotrzebowanie j-tego pododdziału ogniowego w okresie /0,T_z/ może wynieść a_j pocisków rakietowych /jednostek ognia/. W sumie zapotrzebowanie wszystkich pododdziałów może się kształtować:

$$U = \sum_{j=1}^{S} a_j \qquad (2)$$

Zakładamy oczywiście, że $U \leq W$.

W świetle wprowadzonych założeń problem sprowadza się do tego, aby z ogólnej ilości M rejonów wybrać N takich rejonów, które by odpowiadały wymogom podanym w punkcie pierwszym i jednocześnie zapewniały możliwie najkorzystniejsze warunki dowozu potrzebnej ilości pocisków rakietowych /amunicji artyleryjskiej/ do pododdziałów ogniowych.

Oczywistym jest, że rozważania nad postawionym problemem tylko wtedy mają sens, gdy $M \geq N$.

3. Kryterium efektywności

Przy planowaniu dowozu środków materiałowo-technicznych /w tym również pocisków rakietowych i amunicji artyleryjskiej/ do pododdziałów ogniowych, niezmiernie ważną rzeczą jest ekonomia czasu. Chodzi nam bowiem głównie o to, aby dowóz środków materiałowo-technicznych mógł być zrealizowany w czasie możliwie najkrótszym.

Zadanie tego typu jest zadaniem transportowym z kryterium czasu.

Ogólny czas, w jakim może być zrealizowany dowóz środków materiałowo-technicznych, zależy m.in. od:

a/ ilości pododdziałów ogniowych oraz ich zapotrzebowania;

b/ ilości pododdziałów technicznych /składów amunicyjnych/ i ich możli-

wości technologicznych /możliwości uzupełniania zapasów amunicji/;

c/ ilości i rodzaju środków transportowych oraz możliwości załadowczych i wyładowczych;

d/ odległości do pododdziałów ogniowych i rodzaju dróg;

e/ organizacji dowozu.

Czynniki od a/ do e/ w każdej konkretnej sytuacji będą na ogół znane. W oparciu o ich znajomość powinniśmy wybrać rejony R_1, R_2,...,R_M oraz zorganizować dowóz w ten sposób, by potrzebna ilość pocisków rakietowych /amunicji artyleryjskiej/ była dostarczona do pododdziałów ogniowych w czasie możliwie najkrótszym. Tak więc za kryterium optymalizacji przyjmiemy czas dowozu, będący funkcją podanych wyżej czynników. Czas ten należy zminimalizować.

4. Model matematyczny

W celu matematycznego sformułowania problemu postawionego w punkcie drugim i zbudowania modelu, wprowadźmy dodatkowo następujące oznaczenia:

t_{mj} - czas /w godzinach/ potrzebny do przewiezienia pocisków rakietowych /amunicji/ z rejonu R_m /gdzie m = 1,2,..., M/ do pododdziału ogniowego A_j, z uwzględnieniem czasu załadunku i rozładunku;

x_{ij} - ilość pocisków rakietowych /jednostek ognia pododdziału/, jaką zamierzamy przewieźć z B_i-tego pododdziału technicznego /punktu amunicyjnego/ do A_j - tego pododdziału ogniowego;

n_{ij} - ilość środków transportowych przeznaczonych do przewozu pocisków rakietowych /amunicji z B_i-tego pododdziału technicznego /punktu amunicyjnego/ do A_j-tego pododdziału ogniowego;

c - ładowność jednego środka transportowego wyrażona w jednostkach takich, jak x_{ij};

$\bar{x}_{ij} = \frac{x_{ij}}{n_{ij} \cdot c}$ - liczba kolumn środków transportowych przeznaczona do przewozu pocisków rakietowych /amunicji/ z B_i-tego pododdziału technicznego /punktu amunicyjnego/ do A_j-tego pododdziału ogniowego[x/];

---

x/ Jeśli środki transportowe w kolumnie są o różnej ładowności, to iloczyn w mianowniku: $n_{ij} \cdot c$ należy zastąpić sumą $\sum_{i=1}^{n} c_i$, gdzie c_1 - ładowność 1-tego środka transportowego.

K_E - liczba kombinacji rozmieszczenia N pododdziałów technicznych /punktów amunicyjnych/ w M wybranych rejonach, która wyrazi się wzorem:

$$K_E = \frac{M!}{/M-N/!\ N!} ;$$ (1) (3)

K_e - kombinacja rozmieszczenia pododdziałów technicznych /punktów amunicyjnych/ o numerze e, gdzie e = 1,2,3,...,E/.

T_e - ogólny czas dowozu odpowiadający kombinacji o numerze e.

Trzeba znaleźć taką kombinację K_e i taki plan dowozu /tzn.takie wielkości $\bar{x}_{ij}$/, przy których czas dostarczania potrzebnej ilości pocisków rakietowych /amunicji artyleryjskiej/ w okresie /0, T_z/ do pododdziałów ogniowych byłby minimalny.

W tym celu zbudujemy najpierw macierz czasów dowozu /t_{mj}/ w formie tablicy.

A_j / R_m	A_1	A_2	...	A_j	...	A_S
R_1	t_{11}	t_{12}	...	t_{1j}	...	t_{1s}
R_2	t_{21}	t_{22}	...	t_{2j}	...	t_{2s}
...	...	...	...	...	...	...
R_m	t_{m1}	t_{m2}	...	t_{mj}	...	t_{ms}
...	...	...	...	...	...	...
R_M	t_{M1}	t_{M2}	...	t_{Mj}	...	t_{MS}

/1/

Czasy t_{mj} obliczamy, biorąc pod uwagę: odległości od R_m do A_j, stan drożni, porę roku i doby, stopień wyszkolenia kierowców, stan techniczny pojazdów, średnią ilość pojazdów w kolumnie, możliwe do przewidzenia zakłócenia w ruchu, powstające najczęściej na skrzyżowaniach dróg /przejazdach kolejowych/. Ponadto uwzględniamy czas załadunku i rozładunku ilości pocisków rakietowych /amunicj/ przewożonej przez środki transportowe jednej kolumny[x/]. Jeśli dowóz amunicji odbywa się

x/ Przyjmujemy średnią ilość środków transportowych w kolumnie. Powstającą z tej racji różnicę możemy wyeliminować w trakcie rozwiązywania przez wprowadzenie do wzoru x^x_{ij} pewnego współczynnika k, uwzględniającego różnicę w ilości środków transportowych.

w kilku rzutach, /co najczęściej ma miejsce/, to należy wliczać również czas powrotu środków transportowych.

Oczywiście, sporządzenie macierzy czasów nie jest rzeczą prostą. Konieczne jest tu duże doświadczenie oraz znajomość sytuacji taktycznej, szczególnie terenu i możliwości środków transportowych.

Po zbudowaniu macierzy czasów, może się okazać, że niektóre rejony są wyraźnie niekorzystne, ze względu na zbyt długie czasy dowozu. Wiersze, odpowiadające takim rejonom wykreślamy. Za rejony wyraźnie niekorzystne możemy uznać te, dla których czasy dowozu są większe od odpowiednich czasów dowozu innych rejonów /porównanie wierszy/. Po tej operacji ilość wierszy macierzy może się zmniejszyć, co ułatwia rozwiązanie.

Dla macierzy zredukowanej obliczamy następnie ilość kombinacji K_E, według podanego uprzednio wzoru, z tym, że liczba M odpowiada aktualnej ilości wierszy macierzy czasów.

Dla każdej kombinacji rozmieszczenia pododdziałów technicznych /punktów amunicyjnych/ określamy następnie minimalny czas dowozu, w oparciu o warunki:

$$\sum_{j=1}^{S} \bar{x}_{ij} = b_i, \qquad \sum_{i=1}^{N} \bar{x}_{ij} = a_j \qquad /2/$$

przy czym zakładamy, że[x]:

$$\sum_{i=1}^{N} b_i = \sum_{j=1}^{S} a_j, \qquad /3/$$

czyli określamy minimum formy liniowej:

$$T_e = \sum_{i=1}^{N} \sum_{j=1}^{S} t_{ij}^{/e/} \bar{x}_{ij} \qquad /4/$$

Otrzymamy w ten sposób minimalne czasy dowozu T_{1min}, T_{2min},..., Te_{min},..., T_{Emin}. Najmniejszy z tych czasów będzie stanowił optymalne rozwiązanie. Oznacza to, że kombinacja K_e^* rozmieszczenia pododdziałów,technicznych/punktów amunicyjnych/, przy której:

---

x/ Założenie to nie odbiega od realności i sprawia, że model matematyczny jest tzw. modelem zamkniętym.

$$Te^{*}_{min} = \min /T_{1min}, T_{2min}, \ldots, T_{Emin}/ \qquad /5/$$

oraz plan dowozu /tzn. obliczone wartości $X = /\bar{x}_{ij}/$ odpowiadający temu czasowi stanowią rozwiązanie optymalne.

W przypadku gdy dowóz pocisków rakietowych /amunicja/ będzie realizowany w jednym rzucie, tzn. przy jednym kursie środków transportowych[x/], wtedy dla każdej kombinacji K_e trzeba znaleźć takie nieujemne rozwiązanie $X_{opt} = /\bar{x}_{ij}/_{opt}$, dla którego t_{xopt} będzie najmniejszy spośród wszystkich t_{xmax}, odpowiadających różnym nieujemnym rozwiązaniom $X = /\bar{x}_{ij}/$.

Mając obliczone minimalne czasy dowozu $t^{/1/}_{xopt}$, $t^{/2/}_{xopt}$, ..., $t^{/e/}_{xopt}$, ..., $t^{/E/}_{xopt}$, wybieramy następnie tę kombinację K^{*}_{e} i to rozwiązanie X^{*}_{opt}, dla których:

$$t^{/e/}_{xopt} = \min /t^{/1/}_{xopt}, t^{/2/}_{xopt}, \ldots, t^{/E/}_{xopt} / \qquad /5'/$$

Macierz /1/, warunki /2/ i /3/ oraz równania /5/ i /5'/ stanowią ogólny model matematyczny. Jeżeli ilość kombinacji K_E jest niewielka oraz mało jest pododdziałów technicznych /punktów amunicyjnych/, to problem znalezienia rozwiązania optymalnego w oparciu o powyższy model nie przedstawia większych trudności i może być z powodzeniem rozwiązany bez użycia elektronowych maszyn cyfrowych. Jednak przy dużej liczbie kombinacji K_E oraz większej ilości pododdziałów technicznych /punktów amunicyjnych/ i pododdziałów ogniowych zachodzi potrzeba zastosowania maszyn cyfrowych.

5. Rozwiązanie modelu

Przejdziemy teraz do omówienia metody znajdowania rozwiązania optymalnego $X_{opt} = /\bar{x}_{ij}/_{opt}$ dla kombinacji K_e.

Celowym jest najpierw wypisać dla każdej kombinacji K_e macierz, która by zawierała czasy t_{ij} oraz wartości szukane $\bar{x}_{ij}$, tzn.:

---

x/ Przypadek ten może mieć miejsce wówczas, gdy czas o, T_z/ jest krótki, zapotrzebowanie pododdziałów ogniowych niewielkie oraz dysponujemy dostateczną ilością środków transportowych. Bardziej typowy jest jednak przypadek rozpatrzony na początku.

Tabl. N.2

B_i \ A_j	A_1	A_2	...	A_j	...	A_S	b_i
B_1	t_{11} / $\bar{x}_{11}$	t_{12} / $\bar{x}_{12}$	...	t_{1j} / $\bar{x}_{1j}$	...	t_{1s} / $\bar{x}_{1s}$	b_1
B_2	t_{21} / $\bar{x}_{21}$	t_{22} / $\bar{x}_{22}$	...	t_{2j} / $\bar{x}_{2j}$	...	t_{2s} / $\bar{x}_{2s}$	b_2
...	...	...	...	...	...	...	...
B_i	t_{i1} / $\bar{x}_{i1}$	t_{i2} / $\bar{x}_{i2}$	...	t_{ij} / $\bar{x}_{ij}$	...	t_{is} / $\bar{x}_{is}$	b_i
...	...	...	...	...	...	...	...
B_N	t_{N1} / $\bar{x}_{N1}$	t_{N2} / $\bar{x}_{N2}$	...	t_{Nj} / $\bar{x}_{Nj}$	...	t_{Ns} / $\bar{x}_{Ns}$	b_N
a_j	a_1	a_2	...	a_j	...	a_s	-

/6/

Ilość takich macierzy będzie równa liczbie K_E. Metoda postępowania przy znajdowaniu rozwiązania optymalnego dla każdej macierzy jest taka sama. Polega ona na tym, że zaczynając od pewnego początkowego wyboru, przechodzimy kolejno do innych wyborów o mniejszej wartości:

$$T_e = \sum_{i=1}^{N} \sum_{j=1}^{S} t_{ij}^{(e)} \bar{x}_{ij}$$

i w skończonej liczbie kroków dochodzimy do rozwiązania optymalnego /X_{opt}/. Stąd wynika zadanie zbudowania pierwszego wyboru.

Rozpatrzmy następujący sposób zbudowania pierwszego wyboru.

Znajdujemy elementy pierwszego wiersza macierzy /6/, tj. wartości $\bar{x}_{ij}$. W tym celu w pierwszym wierszu tej macierzy odszukujemy najmniejszy element t_{1j}. Niech to będzie element t_{1j1}. Wtedy kładziemy $\bar{x}_{1j1} = \min /a_{j1}, b_1/$. Jeżeli $b_1 > a_{j1}$, szukamy w tym samym wierszu następnego najmniejszego elementu t_{1j2}, spełniającego warunek $t_{1j2} \geq t_{1j1}$ i kładziemy $\bar{x}_{1j2} = \min /a_{j2}, b_1 - \bar{x}_{1j1}/$. Postępowanie kontynuujemy, dopóki całkowicie nie spełnimy pierwszego równania

$$b_1 = \sum_{j=1}^{S} x_{1j}$$

Jeżeli w pewnym kroku tego procesu okaże się, że reszta z b_1 równa się dokładnie odpowiedniemu a_{ju}, to położymy $\bar{x}_{1ju}$ równe tej reszcie $\bar{x}_{1ju} = a_{ju}$, dodatkowo kładziemy następną, odpowiednią co do wielkości

wartość zmiennej $\bar{x}_{lju+1} = 0$. Potem przechodzimy do drugiego wiersza, do trzeciego itd. Przy tym w kolumnach, których odpowiednie równania, tj.

$$a_j = \sum_{(=1}^{N} \bar{x}_{ij}$$

są całkowicie spełnione, nie zapisuje się zera.

Z konstrukcji wynika, że otrzymane w ten sposób pierwsze rozwiązanie jest wyborem, gdyż liczba zaznaczonych elementów t_{ij} równa się N + S - 1 i wśród nich nie ma ani jednego zamkniętego łańcucha[x/].

Następnie elementy t_{ij} pierwszego wyboru przekształcamy w zera. Jeżeli przy tym pozostałe elementy przekształcanej macierzy są nieujemne, to pierwszy wybór jest optymalny.

Jeśli po uczynieniu elementów pierwszego wyboru równymi zeru w macierzy są liczby ujemne, to znajdujemy największy /co do wartości bezwzględnej/ element ujemny.

Tworzymy w następnym kroku łańcuch zamknięty największego elementu ujemnego z elementami pierwszego wyboru, które uczyniliśmy równe zeru oraz budujemy drugi wybór, przenosząc z łańcucha liczbę $\bar{x}_{ij}$, równą najmniejszej liczbie w parzystym półłańcuchu.

Ponieważ największy element ujemny stał się wybranym przez pierwszy wybór, przeto doprowadzamy go do wartości równej zeru, ale tak, żeby pozostałe elementy pierwszego wyboru, odpowiadające nowemu wyborowi, pozostały także równe zeru.

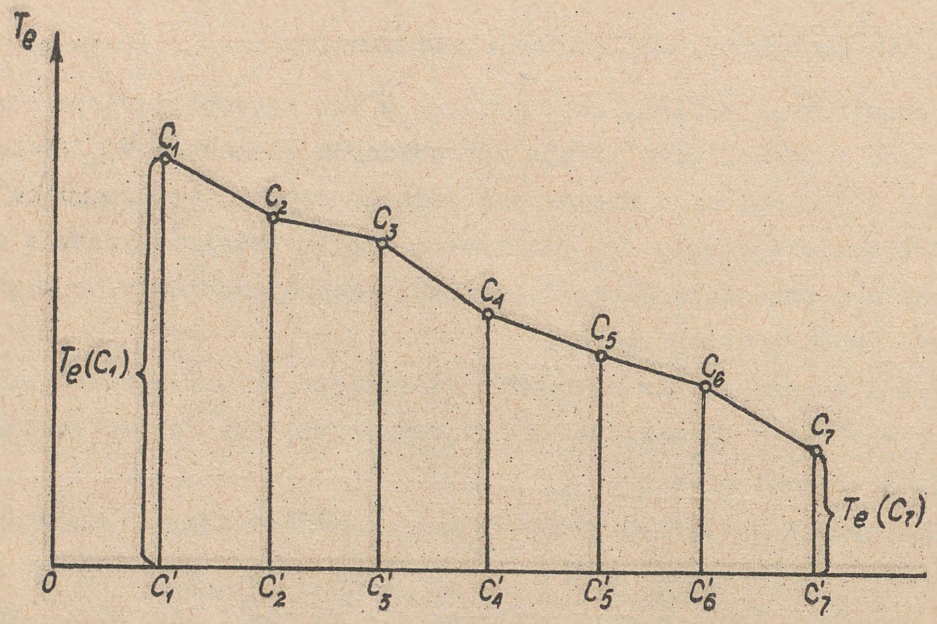
Operację tę powtarzamy dopóty, dopóki nie dojdziemy do wyboru, w którym w przekształconej macierzy wszystkie elementy pierwszego wyboru są równe zeru, a pozostałe - nieujemne. Ten ostatni wybór będzie rozwiązaniem optymalnym.

Dla obliczenia czasu dowozu, odpowiadającego rozwiązaniu optymalnemu, należy połączyć w jedną tablicę macierz czasów i ostatnie rozwiązanie. Suma iloczynów par liczb, stojących w klatkach tablicy stanowi czas dowozu T_{emin}, odpowiadający kombinacji K_e. Obliczamy następnie czasy dowozu odpowiadające innym kombinacjom i w oparciu o wzór /5/ znajdujemy T^*_{emin}, a stąd K^*_e.

---

x/ Łańcuchem zamkniętym nazywamy ciąg postaci i_1j_1, i_1j_2, i_2j_2, ... i_uj_u, i_uj_1. Jeśli elementy zamkniętego łańcucha ponumerujemy, obchodząc je np. w kierunku wskazówek zegara, to powiemy, że elementy tego łańcucha o nieparzystych numerach tworzą nieparzysty półłańcuch, zaś elementy o numerach parzystych - półłańcuch parzysty. Elementami typu są i_uj_u.

Dla ilustracji opisanej metody znajdowania rozwiązania optymalnego warto podać jej interpretację geometryczną /rys. 6/.



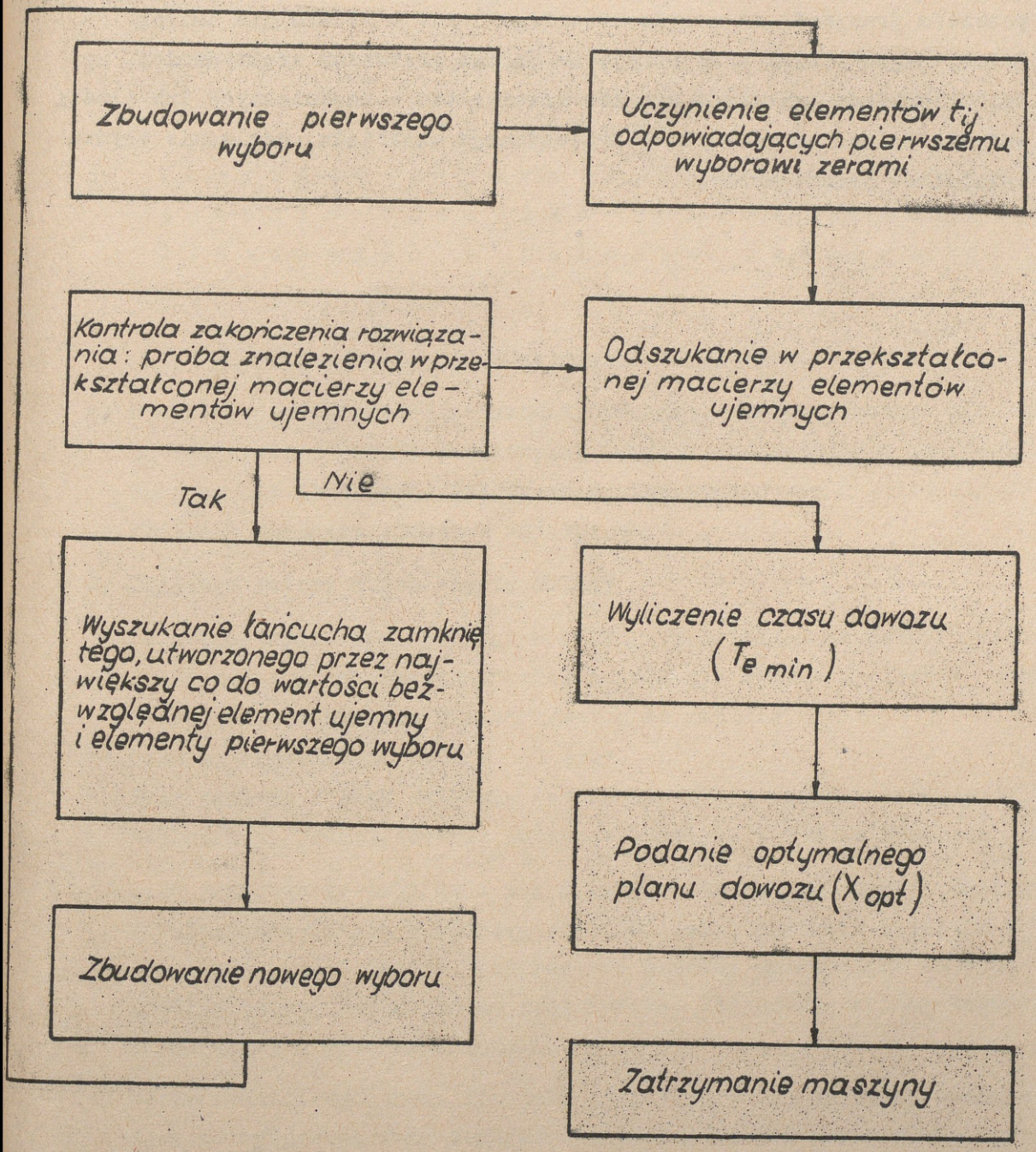
Rys 6.

Na osi poziomej odłóżmy numer rozwiązania, a na osi pionowej odpowiadające mu wielkości czasu. Z początku, po zbudowaniu pierwszego rozwiązania, znajdujemy jeden z punktów C_1. Uczynienie elementów pierwszego wyboru zerami sprowadza nas na oś poziomą do punktu C_1'. Jeżeli w tym punkcie przekształcana tablica nie ma elementów ujemnych, to rozwiązanie odpowiadające punktowi C_1, jest rozwiązaniem optymalnym. Jeżeli przekształcana tablica nie ma tej własności, to znajdujemy punkt C_2 i ponownie wracamy do osi w punkcie C_2', gdzie badamy, czy nie otrzymaliśmy już rozwiązania optymalnego. Jeżeli nie, znajdujemy punkt C_3 itd.

Po skończonej liczbie kroków napewno osiągniemy ostatni punkt, który odpowiada rozwiązaniu optymalnemu.

Otrzymujemy łamaną czasu /rys. 6/. Jak widać z rysunku, po każdym kroku czas dowozu się zmniejsza /w żadnym wypadku nie rośnie/.

Warto jeszcze na zakończenie podać schemat znajdowania rozwiązania optymalnego według opisanej metody, w oparciu o który może być zbudowany program dla maszyny cyfrowej. Schemat taki przedstawiony jest na rys. 7.



Rys. 7.

Na zakończenie wskażemy tylko, że opracowany model może mieć zastosowanie zarówno w systemie obrony punktowej, jak i strefowej. Można go również wykorzystać w innych przypadkach, jak np. przy planowaniu dowozu środków materiałowo-technicznych na szczeblu armii. Wtedy wystąpić może

potrzeba przejścia do modelu otwartego[x] /co w niczym nie zmieni istoty zagadnienia/ oraz przyjęcia innego kryterium efektywności, np. tonokilometrów przewozów środków materiałowo - technicznych lub ilości zużycia paliwa na jedną tonę przewożonego materiału, względnie obydwu wskaźników jednocześnie.

---

x/ Model nazywamy otwarty, jeśli $\sum_{i=1}^{N} b_i > \sum_{j=1}^{S} a_j$

ROZDZIAŁ VI

P R Z Y K Ł A D Y

1. P r z y k ł a d w y b o r u o p t y m a l n e g o u g r u - p o w a n i a o d d z i a ł u r a k i e t p r z e c i w - l o t n i c z y c h w o s ł o n i e w a ż n e g o o b i e k - t u

Przyjmijmy następujące założenie taktyczne:

a/ W okresie podwyższonej gotowości obronnej państwa dokonuje się wzmocnienia systemu obrony powietrznej kraju, ze szczególnym uwzględnieniem ważnych ośrodków życia politycznego, gospodarczego i kulturalnego oraz obiektów komunikacyjnych i wojskowych.

b/ Obiektem osłony niech będzie POZNAŃ.

c/ Do osłony wyżej wymienionego obiektu wydzielono pułk rakiet przeciwlotniczych, który uprzednio stał na osłonie WARSZAWY, lecz w ramach reorganizacji systemu OPK otrzymał nowe zadanie.
Czas na organizację osłony - 3 doby.
Pułk posiada w swym składzie cztery dywizjony ogniowe oraz dywizjon techniczny. Ukompletowanie pułku: w ludziach - 95%, w sprzęcie -100%.

d/ Jako przeciwnika przyjmuje się siły powietrzne NATO oraz lotnictwo strategiczne Stanów Zjednoczonych i Wielkiej Brytanii bazujące w południowej części Anglii. Załóżmy, że dowódcy pułku znane są typy środków napadu powietrznego przeciwnika, ich ogólne rejony bazowania oraz zasady i sposoby działania.

e/ Bezpośrednimi sąsiadami są: pułk rakiet przeciwlotniczych osłaniający m. Bydgoszcz oraz związek taktyczny rakiet przeciwlotniczych osłaniający Wrocław.

Zakładamy, że zarówno ugrupowanie, jak i ogólne możliwości ogniowe w/w jednostek są dowódcy pułku znane. Informacje te zostały przedstawione na schemacie 1.

f/ Pułk znajduje się w rejonie ześrodkowania 30 km wsch Poznań. Posiada jedną jednostkę ognia w dywizjonie technicznym oraz 1 j.o. przy sprzęcie.

Dla skrócenia opisu założymy również, że dowódca pułku zna ogólną sytuację operacyjną, charakterystykę obiektu oraz teren w rejonie Poznania. Jest mu także znane zadanie wyższego szczebla, tzn. KOPK.

Ma więc w myśl przyjętych założeń niezbędne dane do wypracowania decyzji. Pierwszym etapem jego pracy będzie wybór optymalnego ugrupowania bojowego.

Zgodnie z przedstawionym w poprzednim rozdziale algorytmem musi on najpierw przeprowadzić analizę zadania i ocenę położenia. Załącznik nr 1 podaje przykładowo treść analizy zadania i oceny położenia, przeprowadzonej w roli dowódcy pułku. Wnioski z oceny położenia stanowią podstawę do optymalizacji ugrupowania bojowego.

Na schemacie 2 pokazano praktyczną realizację pierwszych czterech punktów algorytmu.

Tabela 1 podaje wyniki obliczeń, jakie należy wykonać zgodnie z punktami e/, f/ i g/.

Tabela ta stanowi jednocześnie macierz gry, o której mowa w punkcie h/.

Ponieważ do osłony obiektu został wydzielony tylko jeden rodzaj sprzętu, a poszczególne warianty działania przeciwnika ocenia się jako w przybliżeniu jednakowo skuteczne[x], elementami macierzy są ilości rakiet.

Macierz posiada punkt siodłowy, a optymalna rubież ugrupowania mieści się w granicach 15 - 20 km. Dla rubieży pośredniej /18 km/ także nie uzyskujemy wyraźnego maksimum. Zatem rubież 15-20 km przyjmujemy jako optimum. Wariant ugrupowania ustalony na tej rubieży stanowi pierwszą kombinację rozmieszczenia środków. Wszystkich takich kombinacji będzie:

$$K = \frac{10!}{/10-4/\ !4!} = \frac{10.9.8.7}{1.2.3.4} = 210$$

Uwzględniając jednak teren oraz warianty, przy których istnieją otwarte luki w systemie osłony na niektórych kierunkach[xx], dochodzimy zaledwie do ośmiu. Żadnego z tych wariantów bez wykonania obliczeń wyeliminować się nie da.

Tabela 2 przedstawia wyniki obliczeń. Jest ona jednocześnie macierzą gry.

---

x/ Z uwagi na ważność obiektu i ogólną sytuację operacyjną założono, że przeciwnik może stosować broń jądrową we wszystkich wariantach działania /moc 300-400 KT/.

xx/ Obliczenia wskazują, że warianty takie są z punktu widzenia teorii gier wyraźnie niekorzystne.

Z macierzy wynika, że najkorzystniejszym wariantem jest k = 3. Zapewnia on możliwości odpalenia co najmniej trzech rakiet bez względu na to, jaki wariant działania przeciwnik zastosuje. Ponieważ macierz ma punkt siodłowy, to wariant k = 3 należy uznać jako optimum.

Przeciwnik posiada najkorzystniejszy wariant działania j = 1 oraz j = 2 /kierunek c_5/.

Jako zapasowy wariant ugrupowania najcelowiej jest przyjąć k = 4.

Tabela nr 3 podaje wartości prawdopodobieństw dla wariantów ugrupowania k = 3 i k = 4.

Na schemacie nr 3 pokazany jest optymalny wariant ugrupowania tzn. k = 3.

2. **P r z y k ł a d w y b o r u o p t y m a l n e g o u g r u p o w a n i a m a ł o k a l i b r o w e j a r t y l e r i i p r z e c i w l o t n i c z e j w o s ł o n i e o b i e k t u p u n k t o w e g o**

Przyjmiemy następujące założenie:

a/ "Zachodni" czynią pośpieszne przygotowania do rozpoczęcia działań wojennych. Pod pozorem ćwiczeń dokonują przegrupowań wojsk celem poprawienia położenia operacyjnego.

Na poligonach intensywnie szkoli się załogi samolotów do wykonywania ataków z małych wysokości, szczególnie przy użyciu taktycznych pocisków rakietowych "powietrze-ziemia". Loty wykonywane są pojedynczymi samolotami i małymi grupami na 0,7 - 0,9 prędkości maksymalnej dla poszczególnych typów samolotów.

b/ Wobec grożącej napaści "Wschodni" przystąpili do realizacji przedsięwzięć organizacyjno-mobilizacyjnych w wojskach operacyjnych i OPK.

4 DZ realizując jeden z wariantów planu operacyjnego 2 A /zorganizowanej na bazie OW/, ma w czasie od 5.00 10.9 do 21.00 11.9 przejść transportem kombinowanym /kolejowym i kołowym/ z rejonu poligonu Biedrusko do rejonu Cechlin /60 km płn Berlin/.

c/ Zgodnie z decyzją dowódcy 4 DZ organiczny pułk artylerii przeciwlotniczej ma osłaniać załadowanie na transport kolejowy części sił dywizji w rejonie OBORNIKI. Początek ładowania 5.30 10.9. Eszelony kompletowane są na trzech stacjach załadowczych /schemat nr 4/, z których dwie /w rejonie Oborniki/ są najważniejsze.

Kolejność ładowania jest następująca:

Najpierw ładuje się 4 poz jednocześnie na trzech stacjach załadowczych. W następnej kolejności ładują się: na stacji nr 1 - dywizjon rakiet taktycznych, na stacji nr 2 - batalion łączności. Jako ostatni ładuje się pułk artylerii przeciwlotniczej.

Czas załadowania pierwszego i drugiego rzutu około 5 godzin /bez pułku artylerii przeciwlotniczej/.

d/ Dowódca pułku zdecydował osłaniać najważniejsze stacje załadowcze, tj. w rejonie Oborniki.

Na podstawie znajomości zasad działania środków napadu powietrznego przeciwnika i wnikliwej oceny położenia, dowódca pułku doszedł do następujących sposobów ataku stacji załadowczych:

a/ Wyjście w rejon celu na małych wysokościach i wykonanie ataku z lotu koszącego lub z lotu nurkowego pod kątami w granicach 15° - 20°.

b/ Wykonanie ataku z małych wysokości z lotu poziomego bezpośrednio z trasy z użyciem pocisków rakietowych "powietrze - ziemia".

c/ Dolot do rejonu celu na małych wysokościach i wykonanie bombardowania ze wznoszenia pod kątami w granicach 40° - 50°.

Podstawowe parametry charakteryzujące prawdopodobne sposoby działania przeciwnika zostały zestawione w tabeli /zał. nr 6/.

Skład pułku i możliwości sprzętu przedstawia tabela /zał.nr 7/.

Na schemacie 4 pokazane jest położenie jednostek dywizji, w tym również rejon zgrupowania pułku artylerii przeciwlotniczej.

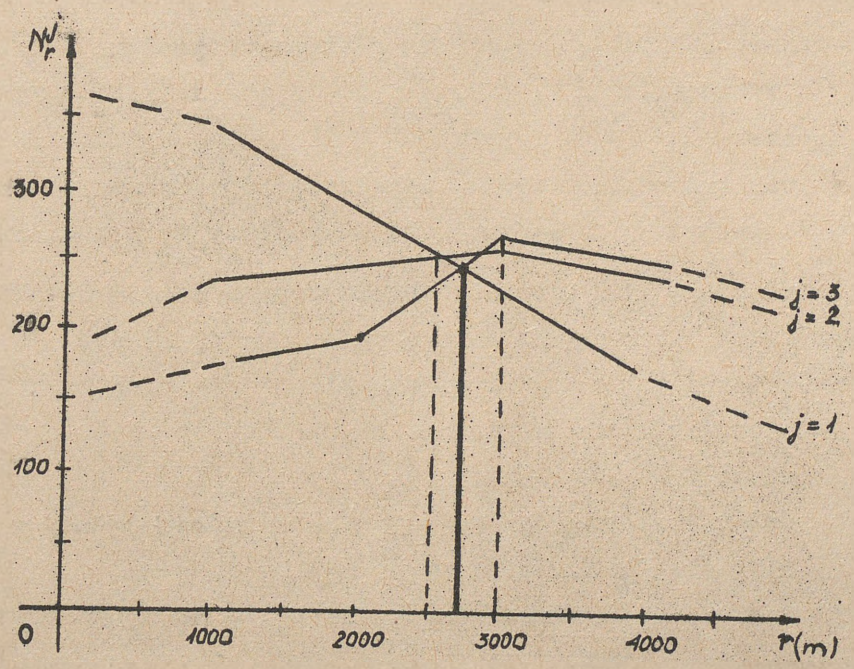
Na podstawie powyższych informacji oraz w oparciu o algorytm możemy przystąpić do określenia optymalnego wariantu ugrupowania pułku w obrębie stacji załadowczych.

Schemat 4 przedstawia praktyczną realizację punktów od c/ do k/ algorytmu podanego w rozdziale III /punkt 1/. Wyniki obliczeń zostały zestawione w tabeli 4. Na ich podstawie zestawiamy macierz gry /tabela 6 zał. 10/.

Bezpośrednio z tabeli wynika, że grupując baterie na rubieże o promieniu do 1 km uzyskujemy największe możliwości ogniowe /343 strzały/ w stosunku do pierwszego sposobu działania przeciwnika /j = 1/, zaś w odniesieniu do trzeciego sposobu /j = 3/ możliwości te są niewielkie, bo wynoszą zaledwie 179 strzałów. Grupując baterie na rubieże o promieniu około 3 km polepszamy znacznie możliwości ogniowe w stosunku do drugiego i szczególnie trzeciego sposobu działania /j = 2 i j = 3/, a równocześnie nie pogarszamy zbyt wyraźnie możliwości w stosunku do pierwszego sposobu działania /j = 1/. Tak więc rubież o promieniu około 3 km stanowi kompromisowe rozwiązanie w świetle trzech prawdopodobnych sposobów działania przeciwnika.

Z punktu widzenia przeciwnika najbardziej korzystnym jest sposób j = 2, ponieważ gwarantuje mu najmniejsze straty w świetle możliwych wariantów ugrupowania środków OPL oraz braku pełnych informacji o ich położeniu i możliwościach. Ponadto skuteczność pocisków rakietowych "powietrze-ziemia" w niszczeniu stacji kolejowych i transportu kolejowego jest stosunkowo duża.

Dla dokładniejszego ustalenia optymalnej rubieży ugrupowania baterii, sporządzamy w oparciu o tabelę 6 wykres /rys. 2/.



Rys. 2

Z wykresu wynika, że optymalna rubież jest położona na odległości 2500 - 3000 m licząc od rozjazdu torów kolejowych w m. Oborniki. Grupując baterie na tej rubieży mamy możliwość oddania co najmniej 235 strzałów niezależnie od wybranego przez przeciwnika sposobu działania. Idealną rubieżą jest rubież o promieniu 2750 m, lecz ze względu na warunki terenowe trudno wymagać takiej dokładności, stąd przedział w granicach 2500 - 3000 m.

Formalnie rzecz biorąc, gra przedstawiona w tabeli 6 punktu siodłowego nie ma, dolna wartość gry V_1 = 235, a górna V_2 = 259, co w przeliczeniu na prawdopodobieństwa daje odpowiednio 0,52 i 0,57.

Różnica pomiędzy górną i dolną wartością gry jest stosunkowo mała i wynosi zaledwie 24 strzały, czyli 0,05. Z tego względu oraz ze względu na sytuację taktyczną /czas ładowania oddziałów dywizji na stacjach będzie trwał do 5 godzin/ stosowanie manewru, polegającego na przechodzeniu co pewien czas baterii z rubieży r_1 na r_3 traci sens. Możemy w ten sposób poprawić sytuację co najwyżej o 0,05 osłabiając jednocześnie osłonę w okresie dokonywania manewru.

Nasuwa się myśl, czy nie lepiej będzie ugrupować środki na dwóch rubieżach: r_1 i r_3. Uwzględniając teren oraz liczbę baterii mamy dwie możliwe kombinacje:

k_1 - trzy baterie ugrupować na rubieży optymalnej /r_3/, w wycinkach: 1, 3 i 5, a jedną na rubieży r_1 w wycinku 1;

k_2 - trzy baterie ugrupować na rubieży optymalnej w wycinkach 1, 3 i 6 , a jedną na rubieży r_1 w wycinku 3.

Ponadto musimy uwzględnić kombinacje ugrupowania baterii na rubieży optymalnej. Biorąc pod uwagę rejony nadające się do rozmieszczenia baterii /schemat 5/ mamy dwie kombinacje:

k_3 - cztery baterie ugrupować na rubieży optymalnej w wycinkach: 1, 3, 6, 7;

k_4 - cztery baterie ugrupować na rubieży optymalnej w wycinkach: 1, 3, 5, 7.

Graficzne przedstawienie kombinacji od k_1 do k_4 pokazano na schemacie 4.

Tabela 5 /zał. 9/ podaje wyniki obliczeń przeprowadzone dla każdej z kombinacji. W oparciu o nie zestawiono tabele 8 i 9 /zał. 11/. Bezpośrednio z obu tabel wynika, że najlepiej jest ugrupować środki według kombinacji k = 2. Zapewniamy sobie wówczas możliwość oddania co najmniej 263 strzały, czyli w przeliczeniu na wskaźnik prawdopodobieństwa 0,58. Tak więc kombinacja k = 2 stanowi optymalne rozwiązanie.

Z tabeli 9 wynika, że istnieje punkt siodłowy /k = 2 i j=2/. Dla przeciwnika i w tym przypadku najbardziej korzystnym sposobem działania jest j = 2.

Warto dodać, że w praktyce najczęściej ten wariant ugrupowania środków OPL jest przyjmowany, być może z pewnymi niedokładnościami, szczególnie jeśli chodzi o rubież optymalną i rozkład pododdziałów na poszczególnych kierunkach.

Przerobiony przykład potwierdza więc przyjmowane w praktyce zasady ugrupowania małokalibrowej artylerii przeciwlotniczej, stawiając je jednocześnie na mocniejszych podstawach.

WNIOSKI KOŃCOWE

Z przeprowadzonych rozważań nad problemem wyboru optymalnego ugrupowania naziemnych środków OPL można wyciągnąć następujące wnioski:

1. Zagadnienie obrony przeciwlotniczej obiektów jest w swej istocie grą z reguły o niepełnej informacji, stąd ogólny model matematyczny należy do grupy modeli strategicznych i sprowadza problem obrony obiektów do gry dwuosobowej o sumie zero ze skończoną ilością strategii.

2. Jako funkcję wyboru decyzji w systemie obrony punktowej najcelowiej jest przyjąć prawdopodobieństwo obrony obiektu, a w systemie obrony strefowej - średnią wartość prawdopodobieństwa obrony zespołu obiektów z uwzględnieniem ich wagi.

3. Z przeprowadzonej w rozdziale pierwszym analizy wynika słuszność przyjmowanej dotychczas zasady, dotyczącej skupiania głównego wysiłku obrony przeciwlotniczej na obiektach o dużej ważności.

   Dla przeciwnika jest również korzystne skierowanie głównego wysiłku swych działań na obiekty najważniejsze. Jest to typowy przykład sytuacji konfliktowej, w której cele obydwu stron są zdecydowanie przeciwstawne.

4. Przy praktycznym rozwiązywaniu przykładów można napotkać dwa przypadki: albo wystąpi jeden względnie kilka punktów siodłowych i wtedy manewr /przejście pododdziałów na zapasowe SO/ nie wpłynie na zwiększenie prawdopodobieństwa obrony obiektów, albo punktu siodłowego nie będzie, a na optymalne rozwiązanie złożą się dwa lub trzy warianty ugrupowania wraz z częstościami stosowania manewru.

5. Opisana w pracy metoda pozwala wyznaczyć optymalną decyzję uwzględniającą takie czynniki, jak: prawdopodobna działalność przeciwnika, stopień oddziaływania sił i środków OPL bezpośredniego sąsiada, skład i możliwości własnych środków OPL, teren oraz warunki meteorologiczne i hydrograficzne.

   Skuteczność jej stosowania zależy przede wszystkim od znajomości taktyki wojsk OPL, doświadczenia w rozwiązywaniu problemów operacyjno-taktycznych oraz znajomości niektórych metod nowoczesnej matematyki.

6. Z podanych w rozdz. IV algorytmów wynika, że szereg czynności związanych z wyborem optymalnej decyzji da się zaprogramować na maszynę cyfrową.

Wykorzystanie maszyny cyfrowej może skrócić wielokrotnie czas niezbędny do wypracowania najkorzystniejszej decyzji, odciążając oficerów sztabu od wykonywania mechanicznych i żmudnych obliczeń. W tym świetle przedstawiona metoda może być stosowana nawet w szybko zmieniającej się sytuacji operacyjno-taktycznej.

Przy założeniu ręcznej techniki obliczeniowej, z uwagi na dużą pracochłonność, metoda ta może być przede wszystkim stosowana do ustalania ogólnych zasad ugrupowania sił i środków OPL lub do weryfikacji zasad już istniejących. Ilustracją tego są podane w pracy przykłady.

7. Problem wyboru najkorzystniejszego ugrupowania wiąże się ściśle z optymalizacją podziału sił i środków OPL do zwalczania celów powietrznych. Zarówno funkcja kryterium /P_k^j/, jak i ogólny model matematyczny zakładają optymalny podział sił i środków OPL w czasie odpierania nalotów. Z tych względów zaszła potrzeba włączenia do pracy rozdz. III.

8. Podany w rozdz. II model matematyczny jest uogólnieniem modelu z rozdziału I i może być w zupełności stosowany do wyboru optymalnego wariantu użycia sił i środków OPL na szczeblach operacyjnych /Front, armia lub korpus OPK/. Łatwo się o tym przekonać studiując dwa pierwsze rozdziały. Przy takim potraktowaniu modelu zajdzie potrzeba korzystania z pomocy maszyny cyfrowej.

Jednak zastosowanie modelu na szczeblach operacyjnych może przynieść największe efekty.

9. Podstawową zaletą modeli przedstawionych w rozdziałach I i II jest to, że mogą one być traktowane jako modele dynamiczne, tzn. w oparciu o nie można dokonywać wyboru optymalnych decyzji w szeregu następujących po sobie sytuacji operacyjno-taktycznych. Należy w tym celu uwzględnić prawdopodobne straty powstałe w wyniku uderzeń przeciwnika, względnie przydział nowych sił i środków OPL. Wystąpi przez to więcej kombinacji, co przy zastosowaniu maszyn matematycznych nie wpłynie w istotny sposób na szybkość otrzymywania rozwiązania optymalnego.

Załącznik nr 1
do przykł. pierwszego

PRZYKŁAD ANALIZY ZADANIA I OCENY POŁOŻENIA DOWÓDCY PUŁKU RAKIET

1. P r z y k ł a d o w a t r e ś ć a n a l i z y z a d a n i a

a/ Przed pułkiem rakiet przeciwlotniczych stoi zadanie osłony bardzo ważnego obiektu skupiającego w sobie dużą ilość zakładów przemysłowych, w tym również zakładów produkujących sprzęt wojskowy, a ponadto będącego jednym z najważniejszych na obszarze Polski węzłów komunikacyjnych.

b/ Zadanie to nabiera już obecnie szczególnego znaczenia, z uwagi na mobilizację i mający wkrótce nastąpić przemarsz wojsk oraz ruch transportu w kierunku granicy zachodniej.

Nasuwa się wniosek, iż przeciwnik może wykonać uderzenie na obiekt Poznań już w ramach pierwszego zmasowanego nalotu. W okresie poprzedzającym uderzenie przeciwnik będzie się starał rozpoznać szczegółowo obiekt i rozmieszczenie środków OPL.

c/ Zadanie osłony obiektu Poznań będę realizował we współdziałaniu z następującymi sąsiadami:

- pułkiem rakiet przeciwlotniczych w składzie czterech dywizjonów ogniowych, osłaniającym m. Bydgoszcz;
- związkiem taktycznym rakiet przeciwlotniczych w składzie pięciu dywizjonów ogniowych, osłaniającym m. Wrocław;
- pułkiem lotnictwa myśliwskiego, bazującym na terytorium tego samego węzła naprowadzania.

d/ Obecnie pułk znajduje się w rejonie ześrodkowania 30 km wsch Poznań. Skład pułku - cztery dywizjony ogniowe po sześć wyrzutni oraz dywizjon techniczny.
Ukompletowanie pułku: w ludziach - 95% stanu, w sprzęcie-100%.
Stan rakiet: w dywizjonie technicznym 1 j.o, przy sprzęcie 1 j.o.

e/ Czynniki wpływające dodatnio na organizację osłony:

- pełne ukompletowanie w sprzęcie i prawie pełne w ludziach;
- dobry stopień wyszkolenia i zgrania obsług /pułk dotychczas osłaniał Warszawę/;
- obecność bezpośrednich sąsiadów, o których mowa w punkcie c/;

- rozmieszczenie SD pułku bezpośrednio przy węźle naprowadzania, co pozwoli na korzystanie z danych rozpoznania radiolokacyjnego;
- położenie obiektu osłony na głębokości około 400 km od granic NRD i około 220 od morza, co umożliwia wczesne otrzymywanie danych o sytuacji powietrznej i stwarza możliwości innym środkom OPL do oddziaływania na przeciwnika wzdłuż tras lotu do osłanianego obiektu.

f/ Czynniki ujemne:

- krótki czas na organizację osłony, szczególnie na rozbudowę inżynieryjną;
- położenie obiektu osłony na głównym kierunku operacyjnym, co stwarza szczególne zagrożenie.

2. Przykładowa treść oceny położenia

Rozpatrywane zagadnienie	Posiadane dane i ich ocena	Wnioski
1	2	3
Obiekt osłony	Poznań jest ważnym ośrodkiem przemysłowym i kulturalnym oraz jednym z najważniejszych węzłów kolejowych i drogowych w Polsce; zbiega się w nim 9 linii kolejowych i 8 magistrali kołowych. Leży na głównym szlaku komunikacyjnym Warszawa-Berlin. Jest siedzibą władz wojewódzkich. Największe zakłady przemysłowe, to: Cegielskiego, Stomil, fabryka urządzeń mechanicznych, wytwórnia gazów technicznych. Inne ważne obiekty: - trzy elektrownie; - gazownia; - dwie stacje wodociągowe; - składnice wojskowe; - warsztaty remontowe; - centrala telefoniczna miejska i międzymiastowa; - stocznia rzeczna. Powyższe zakłady i obiekty są rozmieszczone w promieniu 3,5 km od środka miasta. Ogólna powierzchnia około 40 km^2. Zabudowa miasta zwarta, a jedynie na peryferiach półzwarta. Poznań położony jest w otwartym równinnym terenie, po obu stronach rz. WARTA. Nad ogólną sylwetką miasta dominują liczne kominy fabryczne i wieże	1. Posiada duże znaczenie gospodarcze, komunikacyjne i kulturalne. 2. Jest b. opłacalnym celem dla broni jądrowej. 3. Zwarty i kolisty charakter obiektu umożliwia jego zniszczenie jedną bombą jądrową o mocy 300-400 KT. 4. Bombę o tej mocy mogą przenieść samoloty /nosiciele broni jądrowej/ lotnictwa taktycznego, samoloty-pociski np. typu Mace, bombowce

1	2	3
	kościelne, a nad północną częścią miasta wznosi się fort /cytadela/.	strategiczne. 5. Z uwagi na otwarty i równinny teren oraz dużą ilość punktów charakterystycznych Poznań jest obiektem łatwym do wykrycia zarówno przy obserwacji wzrokowej, jak i radiolok. Odległość wykrycia 100-140 km.
Nieprzyjaciel	Nieprzyjaciel czyni szybkie przygotowania do rozpoczęcia działań wojennych. Wskazuje na to koncentracja wojsk w pobliżu granic NRD oraz pośpieszne uzupełnianie jednostek skadrowanych. Loty rozpoznawcze nad obszarem powietrznym PRL mają prawdopodobnie na celu ustalenie obiektów uderzeń oraz ruchów wojsk. Przerzucanie szpiegów i dywersantów w różne rejony kraju ma na celu zdobycie cennych informacji i dezorganizację pracy na zapleczu. Działania wojenne najprawdopodobniej npl rozpocznie zmasowanym nalotem z udziałem lotnictwa taktycznego, bazującego w NRF, lotnictwa strategicznego bazującego w południowej części W. Brytanii oraz samolotów-pocisków typu Mace TM-76A, rozmieszczonych w środkowej części NRF. Średnie odległości od rejonów baz do obiektu osłony wynoszą: - lotnictwo taktyczne-około 450--480 km; - lotnictwo strategiczne-1100km; - samoloty-pociski Mace-około 550 km. Jeśli założyć, że m. Poznań usiłuje zniszczyć lotnictwo taktyczne, to w celu wykonania tego zadania musi ono przechodzić przez strefę OPL Frontów i częściowo obszar OPK na głębokość 380-400 km, co stanowi około 80% ogólnej trasy lotu. Dla samolotów-pocisków głębokość tej strefy wynosi około 450 km, co stanowi również około 80% ogólnej trasy lotu. Natomiast	1. Należy się liczyć, iż w niedługim czasie npl może rozpocząć działania wojenne. 2. Przed rozpoczęciem wojny npl prawdopodobnie będzie nadal usiłował prowadzić rozpoznanie, szczególnie tych obiektów, które zamierza zniszczyć /obezwładnić/ w pierwszym zmasowanym nalocie. 3. Należy przypuszczać, że w ramach pierwszego zmasowanego nalotu npl usiłuje wykonać uderzenie również na obiekt Poznań. 4. W świetle odległości do rejonów baz uderzenie to może być wykonane zarówno przez lotnictwo taktyczne, samoloty-pociski, jak i lotnictwo strategiczne. Jednak najlepsze warunki /w świetle odległości/ posiada lotnictwo taktyczne i samoloty pociski. 5. W świetle bezpieczeństwa przelotu najlepsze warunki posiada lotnictwo strategiczne, gdyż

1	2	3
	dla lotnictwa strategicznego będzie tylko około 220 km /20% ogólnej trasy lotu/.	najkrócej może przebywać nad naszym terenem. By osiągnąć taki stopień bezpieczeństwa, jak lotnictwo strategiczne, lotnictwo taktyczne musi wykonywać lot do m. Poznań od strony morza, co wydłuża trasę lotu o około 35%. 6. W świetle zadań Poznań może być niszczony przez lotnictwo taktyczne przede wszystkim jako węzeł komunikacyjny, a przy tym również jako obiekt przemysłowy. Może go niszczyć również lotnictwo strategiczne, mając na względzie jego znaczenie gospodarcze.
	Biorąc za podstawę obecną taktykę npl^{a} oraz jego możliwości, należy przypuszczać, że usiłuje on wykonać uderzenie na obiekt Poznań przy użyciu broni jądrowej, stosując jeden z następujących sposobów /wariantów/ działania: a/ Przed rozpoczęciem działań wojennych będzie się starał wykonać loty rozpoznawcze na dużych lub stratosferycznych wysokościach celem rozpoznania rejonów stanowisk dywizjonów ogniowych i dywizjonu technicznego, lotnisk, systemu radiolokacyjnego oraz zasadniczych obiektów uderzeń. b/ W ramach pierwszego zmasowanego nalotu najpierw usiłuje obezwładnić środki OPK na głównym wysiłku osłony przy użyciu samolotów myśliwsko-bombowych, a następnie prawdopodobnie po 20-30 min wykorzystując luki w systemie osłony siłami 3-6 samolotów nosicieli broni jądrowej wykona jednoczesny nalot na obiekty: POZNAŃ, WROCŁAW, BYDGOSZCZ. Uderzenia na SO dywizjonów ogniowych npl prawdopodobnie usiłuje wykonać z małych wysokości	7. Starannie zamaskować SO dywizjonów ogniowych, szczególnie na głównym wysiłku osłony oraz stanowisko dywizjonu technicznego. 8. Do czasu rozpoczęcia działań wojennych do samolotów rozpoznawczych prowadzić ogień tylko dywizjonami dyżurnymi. 9. Zaplanować wariant ugrupowania w celu wyjścia spod uderzenia oraz przewidzieć manewr z kierunku pomocniczego na wypadek obezwładnienia jednego z dywizjonów na głównym wysiłku osłony. 10. Parametry charakteryzujące poszczególne warianty działania npla przedstawione są w legendzie na schemacie nr 1.

1	2	3
	z lotu nurkowego lub koszącego stosując głównie broń rakietową i strzelecką. c/ Pozostałe warianty działania npla - jak schemat nr 1 i załącznik nr 2.	
Teren	Teren w okolicach Poznania /w promieniu do 40 km/ jest na ogół równinny. Jedynie na płn wsch od Poznania teren jest pagórkowaty. Najwyższa wysokość bezwzględna występuje w okolicy Maraska/1829/ i wynosi 154 m. Natomiast najniżej jest położony teren wzdłu rz.Warta /wysokość bezwzględna dochodzi nawet do 34 m/.	1. Rzeźba terenu w okolicach Poznania pozwoli na wybór SO z małymi kątami ukrycia.
	Do ważniejszych przeszkód terenowych zaliczyć możemy rz. Wartę, trzy Kanały Odrzańskie /Północny, Środkowy i Południowy/, Kanał Mosiński, rz. Wełne, pasma jezior od m. Murowana Goślina do m.Pobiedziska, pasma jezior od m.Borowiec /9638/ do m. Zaniemyśl oraz jeziora Kierskie,Niepruszewskie i jeziora w okolicy Stoszew. Najbardziej zabagniony teren występuje w dolinie Kanałów Odrzańskich oraz w rejonie płd Mosina.	2. Rzeki, kanały, jeziora utrudniają manewr, ograniczają wybór SO oraz stanowią dogodne punkty orientacyjne dla lotnictwa npla.
	Pokrycie terenu lasami jest na ogół słabe i nierównomierne /12% powierzchni/. Kompleksy i parcele leśne skupione są przy rubieżach wodnych /rzeki,kanały,pasma jezior/. Drzewostan przeważnie mieszany z przewagą drzew iglastych. Wysokość drzew w lasach waha się od 15 do 25 m. Drogi leśne i przesieki mają szerokość 4 do 8 m i są jezdne przez cały rok. Widoczność w lasach od 80 do 100 m.	3. Słabe pokrycie terenu lasami stwarza trudności w maskowaniu ugrupowania. Zachodzi potrzeba stosowania sztucznych masek.
	W okolicy Poznania występuje duża ilość dróg bitych i gruntowych. Ważniejsze drogi wybiegają promieniście z m. Poznań. Do węzłów drogowych w okolicy Poznania możemy zaliczyć:Szamotuły,Oborniki,Pobiedziska,Swarzedz, Kostrzyń, Środa, Śrem. Warunki prowadzenia robót ziemnych są w większości dogodne. Wyjątki stanowią doliny rzek,a szczególnie Kanałów Obrzańskich, gdzie poziom wód wynoszący od 0,5	4. Dobrze rozwinięta sieć dróg bitych i gruntowych stwarza dogodne warunki do wykonywania przegrupowań i manewrów pododdziałami. Jak wyżej wspomniano,ograniczenia narzucają jeziora,rzeki i kanały. 5. Węzły drogowe stanowią dobre punkty orientacyjne dla lotnictwa npla oraz mogą być

1	2	3
	do 1,5 m pod powierzchnią oraz torfiaste podłoże uniemożliwiają prowadzenie prac ziemnych.	obiektami uderzeń, stąd w ich pobliżu nie należy rozmieszczać elementów ugrupowania bojowego. 6.W rejonach podmokłych i torfiastych SO nie wybierać. 7.Najdogodniejsze kierunki podejścia lotnictwa wroga do obiektu - jak schemat nr 1.
Sąsiedzi	Do bezpośrednich sąsiadów pułku rakiet przeciwlotniczych należą: a/ pułk rakiet przeciwlotniczych w składzie czterech dywizjonów ogniowych i dywizjonu technicznego, który ma zadanie osłony obiektu Bydgoszcz. Główny wysiłek osłony pułk skupia na kierunku zach i płn zach. Rejony najbliższych SO - jak schemat nr 1 i 2. Odległość między Bydgoszczą a Poznaniem wynosi około 100 km. Promień ugrupowania dywizjonów ogniowych w osłonie Bydgoszczy - 20 km, dalsza granica strefy rażenia rakiet na wysokości 20 km-28 km; b/ związek taktyczny rakiet przeciwlotniczych w składzie pięciu dywizjonów ogniowych i dywizjonu technicznego, który ma zadanie osłony m. Wrocław. Główny wysiłek osłony skupiony zostaje na kierunku zach i płd zach. Rejony najbliższych SO - jak schemat nr 1 i 2; c/ pułk lotnictwa myśliwskiego bazujący na lotnisku w rejonie Inowrocław.	1.Obecność pułku rakiet w rejonie Bydgoszczy obniża możliwości zniszczenia Poznania przy atakach z kierunków płn wsch, płd wsch i wsch. 2.Obecność związku rakiet przeciwlotniczych w rejonie Wrocławia obniża szanse zniszczenia Poznania przy atakach z kierunków płd zach, płd i płd wsch. 3.Ze względu na znaczne odległości sąsiadów /około 100 i 140 km/ prawdopodobnie nie uda się z nimi uzyskać powiązania ogniowego. 4.Współdziałanie z plm realizować na PPSD w rejonie Szamotuły. 5.Nawiązać bezpośredni kontakt z Wojewódzkim Sztabem Wojskowym w celu wymiany niezbędnych informacji.
Własne możliwości	Stan i ukompletowanie pułku rakiet oraz stopień wyszkolenia obsług, jak punkty d/ i e/ analizy zadania. Pułk posiada możliwości zwalczania celów powietrznych na wysokościach od 2 do 28 km, lecących z prędkościami do 560 m/sek.	1.Pułk praktycznie nie ma możliwości zwalczania celów na małych wysokościach. W granicach do 2000 m cele mogą być zwalczane jedynie przez plm.

1	2	3
	Maksymalny zasięg wynosi 30 km, a promień strefy martwej waha się w granicach 6-12 km. Prawdopodobieństwo rażenia jedną rakietą w granicach 0,65-0,76. Czas przeniesienia ognia dywizjonu na cel następny wynosi do 2 minut. Odstęp strzelania co 6 sek. /przy strzelaniu serią trzech rakiet/. Czas lotu rakiety do maksymalnego punktu strefy ognia około 43 sek. Czas zwijania dywizjonu ogniowego do 3 godzin. Czas rozwijania do 4 godz. Prędkość marszu średnio 20 km/godz. Czas zwinięcia i rozwinięcia dywizjonu technicznego do 8 godzin.	2. Zbyt długi czas na przeniesienie ognia /do 2 minut/ daje ograniczone możliwości zwalczania celów przy nalocie potokowym. 3. Długie czasy zwinięcia i rozwinięcia dywizjonów utrudniają manewr.

Uwaga: Ze względu na zakres rozpatrywanego problemu /tylko ugrupowanie bojowe/ pominięto takie zagadnienia, jak: wytyczne dla oficerów sztabu w celu przygotowania meldunków, kalkulację czasu osobistego i ogólnego, ogłoszenie zarysu decyzji. Przy wypracowywaniu pełnej decyzji zagadnień tych pominąć nie sposób.

Załącznik nr 2

OPIS PRAWDOPODOBNYCH WARIANTÓW NALOTÓW NA OBIEKT POZNAŃ /Schemat nr 1/

WARIANT NR 1 /j = 1/

Jednoczesny nalot na obiekt Poznań trzech celów pojedynczych urzutowanych w głąb w odstępach od 30-60 sek. Wśród celów jeden jest nosicielem broni jądrowej, zaś dwa pozostałe są celami pozorującymi, np. pociski typu GAM-72 QUAIL. Prędkości lotu celów do około 1500 km/godz., wysokości do około 20 km, moc broni jądrowej 300 - 400 KT.

WARIANT NR 2 /j = 2/

Jednoczesny nalot dwóch celów na obiekty Poznań i Bydgoszcz lub Poznań i Wrocław. Celami tymi są samoloty - nosiciele broni jądrowej. W odległości około 150 km od obiektów cele rozdzielają się i wykonują lot pojedynczo z kursami na obiekty Poznań i Bydgoszcz lub Poznań i Wrocław. W odległości około 45 km od obiektów cel, którego kurs był na BYDGOSZCZ lub WROCŁAW wykonuje energiczny skręt /zmiana kursu o 60-70°/ w kierunku Poznania, natomiast cel lecący kursem na Poznań zmienia kurs na Bydgoszcz lub Wrocław.

Parametry lotu celów - jak w wariancie nr 1.

WARIANT NR 3 /j = 3/

Na około 20-30 min. przed wykonaniem uderzenia na obiekty: Poznań, Bydgoszcz, Wrocław nieprzyjaciel usiłuje obezwładnić dywizjony ogniowe, których SO zostały rozpoznane.

Następnie wykorzystując powstałe luki w systemie osłony, siłami trzech samolotów - nosicieli broni jądrowej wykonuje jednoczesny nalot na wszystkie trzy obiekty. Do obezwładnienia dywizjonów ogniowych nieprzyjaciel najprawdopodobniej wydzieli grupy samolotów myśliwsko - bombowych, które wykonają atak na SO z małych wysokości z lotu koszącego lub nurkowego, stosując głównie broń rakietową i strzelecką.

Maksymalne wartości parametrów lotu samolotów - nosicieli broni jądrowej - jak w wariancie nr 1.

WARIANT NR 4 /j = 4/

Jak wariant nr 3, z tym, że uderzenie na obiekt Poznań nieprzyjaciel wykonuje przy użyciu samolotu - pocisku, np. typu Mace Tm 76A.

Najbardziej prawdopodobne parametry lotu samolotu - pocisku: wysokość około 14 000 m, prędkość około 300 m/sek, kąt wejścia w lot nurkowy około 30° - 40°.

WARIANT NR 5 /j = 5/

Nalot trzech celów z kierunku płn zach z kursem na obiekt Bydgoszcz. W odległości około 45 km od obiektu cele rozdzielają się: cel nr 1 podchodzi do prawdopodobnej rubieży bombardowania i wykonuje uderzenie bronią jądrową na obiekt Bydgoszcz, cel nr 2 stosując manewr przeciwrakietowy kontynuuje dalszy lot z zadaniem obezwładnienia obiektu położonego w głębi. Cel nr 3 stosując manewr kursem i wysokością przechodzi przez strefę ognia rakiet, po czym zmieniając kurs /jak schemat nr 1/ podchodzi do obiektu Poznań z kierunku płn wsch lub wsch.

WARIANT NR 6 /j = 6/

Jednoczesny nalot trzech celów z kierunku zach, w odstępach od 30 do 60 sek. Po osiągnięciu rubieży płd Wrocław cel nr 3 zmienia kurs na Wrocław, cel nr 2 kontynuuje dalszy lot z zadaniem obezwładnienia obiektu położonego w głębi, cel nr 1 obchodzi strefę ognia rakiet przeciwlotniczych w rejonie Wrocławia i atakuje obiekt Poznań z kierunku płd wsch lub wsch.

Parametry lotu celów - jak w wariancie nr 1.

Wyk. w 50 egz.
Egz. nr 1-50-Bibl.Tajna
Wyk. mjr Gozdecki
Druk JD, dnia 10.VI.66r.
nr ks. 01461/WW.

Załącznik nr 3

Tabela 1

ŚREDNIA ILOŚĆ RAKIET JAKĄ MOGĄ ODDAĆ CZTERY DYWIZJONY OGNIOWE W ZALEŻNOŚCI OD PRAWDOPODOBNYCH WARIANTÓW DZIAŁANIA NIEPRZYJACIELA I PROMIENIA UGRUPOWANIA PODODDZIAŁÓW

Promień rubieży ugrupowania dywizjonów ogniowych /r_i/	Prawdopodobne warianty działania przeciwnika /j/																			min N_r^j j
	j = 1			j = 2				j = 3				j = 4			j = 5		j = 6			
	e_2	e_3	e_4	e_4	e_5	e_9	e_{10}	e_1	e_2	e_3	e_4	e_1	e_2	e_3	e_5	e_6	e_7	e_8	e_9	
r_1 = 5 km	2	2	3	4	3	6	3	4	4	4	5	1	1	2	3	2	3	2	2	1
r_2 = 10 km	2	2	2	3	3	6	3	3	3	3	3	1	3	3	3	3	3	3	3	1
r_3 = 15 km	2	2	2	3	3	6	3	3	3	3	3	2	3	3	3	3	3	3	3	2
r_4 = 17,5 km	2	2	2	3	3	6	3	3	3	3	3	2	3	3	3	3	3	3	3	2
r_5 = 20 km	2	2	2	3	3	5	3	3	2	3	2	2	2	3	3	3	3	3	3	2
r_6 = 25 km	1	2	1	3	1	3	3	2	0	3	0	1	0	3	1	3	3	3	3	0
r_7 = 30 km	1	2	1	3	0	3	3	0	0	3	0	0	0	3	0	3	3	2	3	0
r_8 = 35 km	1	1	1	3	0	2	3	0	0	3	0	0	0	3	0	3	3	2	3	0
$\max_r N_r^j$	2	2	3	4	3	6	3	4	4	4	5	2	3	3	3	3	3	3	3	-

Załącznik nr 4

Tabela 2

ŚREDNIA ILOŚĆ RAKIET JAKĄ MOGĄ ODDAĆ CZTERY DYWIZJONY OGNIOWE W ZALEŻNOŚCI OD PRAWDOPODOBNYCH SPOSOBÓW DZIAŁANIA NIEPRZYJACIELA I WARIANTÓW UGRUPOWANIA NA OPTYMALNEJ RUBIEŻY /15-20 km/

Warianty ugrupowania dywizjonów ogniowych /k/	Prawdopodobne sposoby /warianty/ działania nieprzyjaciela /j/																		$\min_j N_k^j$
	j = 1			j = 2				j = 3				j = 4			j = 5			j = 6		
	e_2	e_3	e_4	e_4	e_5	e_9	e_{10}	e_1	e_2	e_3	e_4	e_1	e_2	e_3	e_5	e_6	e_7	e_8	e_9	
k = 1 Dywizjony rozmieszczone w wycinkach: 6,9,7,2.	2	2	2	3	3	6	3	3	3	3	3	3	3	3	3	3	3	3	3	2
k = 2 Dywizjony rozmieszczone w wycinkach: 2,4,7,10.	3	2	2	3	3	6	3	3	3	3	3	3	3	3	3	3	3	3	3	2
k = 3 Dywizjony rozmieszczone w wycinkach: 2,4,6,10.	3	3	3	3	3	6	3	3	6	3	4	3	4	3	3	3	3	3	3	3
k = 4 Dywizjony rozmieszczone w wycinkach: 1,3,5,8.	2	3	2	3	3	3	5	3	3	6	3	3	3	4	5	6	4	3	4	2
k = 5 Dywizjony rozmieszczone w wycinkach: 1,3,6,9.	2	3	2	3	3	3	5	3	3	3	3	3	3	4	5	6	4	4	4	2
k = 6 Dywizjony rozmieszczone w wycinkach: 2,4,6,9.	2	2	3	5	3	3	3	3	3	3	3	2	3	3	3	3	3	5	3	2
k = 7 Dywizjony rozmieszczone w wycinkach: 1,5,7,10.	2	2	2	3	3	6	3	3	2	2	3	2	2	0	6	6	6	5	5	0
k = 8 Dywizjony rozmieszczone w wycinkach: 1,3,6,8.	2	2	2	3	3	5	4	3	3	2	3	3	3	2	3	5	6	3	5	2
$\max_k N_k^j$	3	3	3	5	3	6	5	2	6	6	4	2	4	4	6	6	6	5	5	-

Załącznik nr 5

WARTOŚCI PRAWDOPODOBIEŃSTW DLA WARIANTÓW UGRUPOWANIA k = 3 i k = 4 /GŁÓWNEGO I ZAPASOWEGO/

Tabela 3

Warianty ugrupowania dywizjonów ogniowych	Prawdopodobne warianty działania nieprzyjaciela /j/																			$\min_j P_k^j$
	j = 1			j = 2				j = 3				j = 4			j = 5		j = 6			
	e_2	e_3	e_4	e_4	e_5	e_9	e_{10}	e_1	e_2	e_3	e_4	e_1	e_2	e_3	e_5	e_6	e_7	e_8	e_9	
k = 3 /główny/ Dywizjony rozmieszczone w wycinkach: 2,4,6,10.	0,973	0,973	0,973	0,973	0,973	0,999	0,973	0,973	0,999	0,973	0,992	0,973	0,992	0,973	0,973	0,973	0,973	0,973	0,973	0,973
k = 4 /zapasowy/ Dywizjony rozmieszczone w wycinkach: 1,3,5,8.	0,91	0,973	0,91	0,973	0,973	0,973	0,998	0,973	0,973	0,973	0,973	0,973	0,973	0,992	0,998	0,999	0,992	0,973	0,992	0,910
$\max_k P_k^j$	0,973	0,973	0,973	0,973	0,973	0,999	0,998	0,973	0,999	0,999	0,992	0,973	0,992	0,992	0,998	0,999	0,992	0,973	0,992	-

Uwaga: Obliczenia przeprowadzono w oparciu o wzór: $P = 1 - /1-p/^N$, przyjmując średnią wartość prawdopodobieństwa p równą 0,7. Przy stosowaniu przez nieprzyjaciela zakłóceń prawdopodobieństwo to może spaść do około 50%.

Załącznik nr 6

SPOSOBY DZIAŁANIA ŚRODKÓW NAPADU POWIETRZNEGO NPLA NA STACJE ZAŁADOWCZE
W m. OBORNIKI

Tabela

Sposób działania nieprzyjaciela /j/	Rodzaj lotnictwa	Ilość samol.	Wysokość /w m/	Prędkość /w m/sek/	Odległość rozpoczęcia ataku	Wielkość odcinka kursu bojow.	Rodzaj środków rażenia
j = 1 Wejście w rejon celu na małych wysokościach i wykonanie ataku z lotu koszącego względnie nurkowego pod kątami w granicach 15^{o} - 20^{o}.	Myśliwsko-bombowe F-84F	8-12	do 1000	około 200-220	do około 1000	około 2500-3000	Bomby odłamkowo-burzące lub napalm
j = 2 Wykonanie ataku z małych wysokości z lotu poziomego bezpośrednio z trasy z użyciem pocisków rakietowych "powietrze-ziemia".	Myśliwsko-bombowe F-100 D i F	1-2	do 500	do 250	od 9000 do 4000	około 5000	Pociski kierowane z głowicą jądrową o mocy do 10 KT
j = 3 Dolot do rejonu celu na małych wysokościach i wykonanie bombardowania ze wznoszenia pod kątami w granicach 40^{o} - 50^{o}.	Myśliwsko-bombowe F-101 A i B	1	do 500	do 250	od 8000 do 3200	około 4800	Bomba atomowa o mocy do 20 KT

Uwaga: W sposobie działania j = 1 zakłada się możliwość uderzeń na SO baterii siłami jednego klucza samolotów myśliwsko - bombowych. Ponadto przyjmuje się, że do ataku samoloty podchodzą parami.

Załącznik nr 7

SKŁAD PUŁKU I NIEKTÓRE DANE DOTYCZĄCE MOŻLIWOŚCI SPRZĘTU[x/]

Rodzaj środków	Ilość	Szybkostrzelność	Promień płaskiej strefy ostrzału		Promień strefy martwej na wysokościach do 1000 m	Średnia szybkość marszu baterii
			H=500 m	H=1000 m		
57 mm armaty przeciwlotnicze S-60	Cztery baterie po 6 armat plot, w sumie 24 armaty	60 strzałów na minutę			około 730	około 30 km/godz.

Uwaga: Wykresy do określania ilości strzałów[xx/] podane są w załączniku nr .
Zależność prawdopodobieństwa rażenia pojedynczego samolotu przy strzelaniu z przelicznikiem i celownikiem pokazana jest na wykresach - załącznik nr .

---

x/ Szczegółowe dane dotyczące możliwości 57 mm armat plot można znaleźć w pracy doktorskiej ppłk dypl. J. Zabłotniego, nr bibl. 05054 ASG wyd. 64 r.

xx/ Wykresy wzięto z pracy doktorskiej mjr dypl. M. Hawryszczaka.

Załącznik nr 8

Tabela 4

ŚREDNIA ILOŚĆ STRZAŁÓW JAKĄ MOGĄ ODDAĆ CZTERY BATERIE W ZALEŻNOŚCI OD PRAWDOPODOBNYCH SPOSOBÓW DZIAŁANIA NIEPRZYJACIELA I PROMIENIA UGRUPOWANIA PODODDZIAŁÓW

Promień ugrupowania baterii /r_i/	Numer baterii	Prawdopodobne sposoby działania nieprzyjaciela /j/																			
		j = 1						N_r^1	j = 2						N_r^2	j = 3						N_r^3
		e_1	e_2	e_3	e_4	e_5	e_6	średnie	e_1	e_2	e_3	e_4	e_5	e_6	średnie	e_1	e_2	e_3	e_4	e_5	e_6	średnie
r_1=1000 m	1	0	0	96	132	108	0	56	90	96	24	24	60	96	65	90	90	0	0	48	84	52
	2	144	150	0	138	108	90	105	72	90	78	60	30	36	61	60	90	60	48	0	0	43
	3	150	150	150	0	120	108	113	30	0	78	90	72	48	53	0	0	60	90	60	0	35
	4	120	108	78	108	0	0	69	60	36	30	36	90	90	57	60	24	0	30	90	90	49
	Razem	414	408	324	378	336	198	343	252	222	210	200	252	270	236	210	204	120	168	198	174	179
r_2=2000 m	1	0	0	60	72	108	0	40	132	120	20	0	0	60	120	75	66	90	0	0	108	52
	2	138	180	0	108	90	78	99	72	102	90	60	0	30	59	72	108	96	42	0	0	53
	3	72	108	144	0	132	84	90	0	0	78	120	90	30	53	0	0	78	108	90	0	45
	4	108	72	60	78	0	0	53	60	30	0	30	132	102	59	60	24	0	0	66	108	43
	Razem	318	360	264	258	330	162	282	264	252	188	210	282	282	246	198	222	174	150	216	210	195
r_3= 3000 m	1	0	0	48	36	96	0	30	150	132	0	0	60	138	80	192	150	0	0	48	150	90
	2	150	180	0	72	48	60	85	102	138	96	48	0	0	64	120	156	96	12	0	0	63
	3	30	78	138	0	138	72	76	0	0	78	138	102	24	57	0	0	72	132	96	0	50
	4	96	60	48	60	0	0	44	60	0	0	0	150	138	58	24	0	0	12	192	150	63
	Razem	276	318	234	168	282	132	235	312	270	174	186	312	300	259	336	300	168	156	336	300	266
r_4=4000 m	1	0	0	24	0	90	0	19	180	180	0	0	42	132	81	192	150	0	0	36	150	87
	2	156	186	0	60	0	42	74	60	180	78	0	0	0	46	120	162	72	0	0	0	59
	3	0	36	132	0	132	48	58	0	0	78	138	102	0	53	0	0	42	150	192	0	47
	4	60	42	0	42	0	0	24	42	0	0	0	180	150	62	12	0	0	0	132	168	65
	Razem	216	264	156	102	222	90	175	282	282	156	138	324	282	242	344	312	114	150	316	318	258

Załącznik nr 9

ŚREDNIA ILOŚĆ STRZAŁÓW, JAKĄ MOGĄ ODDAĆ CZTERY BATERIE W ZALEŻNOŚCI OD PRAWDOPODOBNYCH SPOSOBÓW DZIAŁANIA NIEPRZYJACIELA I WARIANTÓW UGRUPOWANIA PODODDZIAŁÓW NA OPTYMALNEJ RUBIEŻY

Tabela 5

Warianty ugrupowania baterii	Numer baterii	Prawdopodobne sposoby działania nieprzyjaciela																				
		j = 1						N_k^1 średn.	j = 2						N_k^2 średn.	j = 3						N_k^3 średn.
		e_1	e_2	e_3	e_4	e_5	e_6		e_1	e_2	e_3	e_4	e_5	e_6		e_1	e_2	e_3	e_4	e_5	e_6	
k = 1	1	0	0	48	36	96	0	30	150	132	0	0	60	138	80	192	150	0	0	48	150	90
Trzy baterie na rubieży optym. w wycinkach: 1,3,5, a jedna bateria na rubieży r_1 w wycinku 1.	2	150	180	0	72	48	60	85	102	138	96	48	0	0	64	120	150	96	12	0	0	63
	3	30	78	138	0	138	72	76	0	0	78	38	102	24	57	0	0	72	132	96	0	50
	4	60	60	96	132	108	42	83	90	96	24	24	60	96	65	90	90	0	0	48	84	52
	Razem	240	318	282	240	390	174	274	342	366	198	110	222	258	266	402	390	168	144	192	234	255
k = 2	1	0	36	48	36	96	0	36	150	132	0	0	60	138	80	192	150	0	0	48	150	90
Trzy baterie na rubieży optym. w wycinkach: 1,3,6 a jedna bateria na rubieży r_1 w wycinku 3.	2	138	60	60	96	36	36	71	102	132	102	60	0	0	66	96	150	120	48	0	0	69
	3	24	60	96	150	0	96	71	0	0	60	102	138	60	60	0	0	48	120	150	48	61
	4	144	150	0	138	108	90	105	72	90	78	60	30	36	62	60	90	60	48	0	0	43
	Razem:	306	306	204	420	240	222	283	324	354	240	222	228	234	267	348	390	228	216	198	198	263
k = 3	1	1	0	0	48	96	0	30	150	132	0	0	60	138	80	192	150	0	0	48	150	90
Cztery baterie na rubieży optym. w wycinkach: 1,3,6,7.	2	150	180	0	72	48	60	85	102	138	96	48	0	0	64	120	150	96	12	0	0	63
	3	30	78	138	0	138	72	76	0	0	78	38	102	24	57	0	0	72	132	96	0	50
	4	96	60	48	60	0	0	44	60	0	0	0	150	138	58	24	0	0	12	192	150	63
	Razem	276	318	234	168	282	132	235	312	270	174	186	312	300	259	336	300	168	156	336	300	266
k = 4	1	0	36	48	36	96	0	36	150	132	0	0	60	138	80	192	150	0	0	48	150	90
Cztery baterie na rubieży optym. w wycinkach: 1,3,5,7.	2	138	60	60	96	36	36	71	102	132	102	60	0	0	66	96	150	120	48	0	0	69
	3	24	60	0	0	96	66	41	0	0	132	50	60	36	62	0	0	150	192	48	12	67
	4	96	60	48	60	0	0	44	60	0	0	0	150	138	58	24	0	0	12	192	150	63
	Razem	258	216	156	192	228	102	192	312	264	234	210	270	312	267	312	300	270	252	288	312	289

Załącznik nr 10

OGÓLNA ILOŚĆ STRZAŁÓW, JAKĄ MOGĄ ODDAĆ CZTERY BATERIE W ZALEŻNOŚCI OD PRAWDOPODOBNYCH SPOSOBÓW DZIAŁANIA NPLA I PROMIENIA UGRUPOWANIA PODODDZIAŁÓW

Tabela 6

Promień ugrupow. baterii /r_i/	Prawdopodob. sposoby działania npla			$\min_j N_r^j$
	j = 1	j = 2	j = 3	
$r_1 \leq$ 1000 m	343	236	179	179
r_2 = 2000 m	282	246	195	195
r_3 = 3000 m	235	259	266	235
r_4 = 4000 m	175	242	258	175
$\max_r N_r^j$	343	259	266	-

WARTOŚCI PRAWDOPODOBIEŃSTW DLA ILOŚCI STRZAŁÓW PODANYCH W TABELI nr 6

Tabela 7

Promień ugrupow. baterii /r_i/	Prawdopodob. sposoby działania npla			$\min_j P_r^j$
	j = 1	j = 2	j = 3	
$r_1 \leq$ 1000 m	0,67	0,53	0,45	0,45
r_2 = 2000 m	0,60	0,55	0,48	0,48
r_3 = 3000 m	0,52	0,57	0,58	0,52
r_4 = 4000 m	0,42	0,53	0,57	0,42
$\max_r P_r^j$	0,67	0,57	0,58	-

Uwaga: Przeliczeń z N_r^j na P_r^j dokonano na podstawie wykresów zał. 18.

Załącznik nr 11

OGÓLNA ILOŚĆ STRZAŁÓW JAKĄ MOGĄ ODDAĆ CZTERY BATERIE W ZALEŻNOŚCI OD PRAWDOPODOBNYCH SPOSOBÓW DZIAŁANIA NPLA I MOŻLIWYCH WARIANTÓW UGRUPOWANIA PODODDZIAŁÓW

Tabela 8

Warianty ugrupow. baterii /k/	Prawdopod. sposoby działania npla			$\min_j N_k^j$
	j = 1	j = 2	j = 3	
k = 1	274	266	255	255
k = 2	283	267	263	263
k = 3	235	259	266	235
k = 4	192	267	289	192
$\max_k N_k^j$	283	267	289	-

WARTOŚCI PRAWDOPODOBIEŃSTW DLA ILOŚCI STRZAŁÓW PODANYCH W TABELI NR 8

Tabela 9

Warianty ugrupow. baterii /k/	Prawdopod. sposoby działania npla			$\min_j P_k^j$
	j = 1	j = 2	j = 3	
k = 1	0,42	0,58	0,57	0,42
k = 2	0,60	0,58	0,58	0,58
k = 3	0,52	0,57	0,58	0,52
k = 4	0,48	0,58	0,61	0,48
$\max_k P_k^j$	0,60	0,58	0,61	-

BIBLIOGRAFIA:

1. W.O. Aszkenazy: Primienienije tieorii igr w wojennom diele; Moskwa 1961 r.
2. C.Karlin: Matiematiczeskije mietody w tieorii igr, programirowanii i ekonomikie, Moskwa 1964 r.
3. R.D. Luce i H. Raiffa: Igry i rieszenija, Moskwa 1961 r.
4. Mak Kinsi: W wiedienije w tieoriju igr, Moskwa 1960 r.
5. K. Bierz: Obszczaja tieorija igr niekolkich lic, Moskwa 1961 r.
6. N.N. Worobiew: Matricznyje igry, Moskwa 1961 r.
7. R.G.D. Allen: Ekonomia matematyczna, Warszawa 1961 r.
8. O Lange: Optymalne decyzje, Warszawa 1964 r.
9. Praca zbiorowa: Zastosowanie matematyki i maszyn elektronicznych w planowaniu, Warszawa 1963 r.
10. Saul I. Gass: Programowanie liniowe, Warszawa 1963 r.
11. A.S. Barsow: Co to jest programowanie liniowe, Warszawa 1961 r.
12. G. Polya: Jak to rozwiązać? Warszawa 1964 r.
13. T. Sródka: Ćwiczenia z kombinatoryki i rachunku prawdopodobieństwa, Warszawa 1962 r.
14. B. Birkhoff i Mac Lane: Przegląd algebry współczesnej, Warszawa 1963 r.
15. I. Birman i Ł.E. Minc: Matiematiczeskije mietody i problemy rozmieszczenija proizwodstwa, Moskwa 1963 r.
16. ppłk dr A. Przeniczny: Zasady ugrupowania bojowego artylerii przeciwlotniczej lufowej w osłonie mostów. Rozprawa doktorska, ASG 1963 r. nr bibl. 02613.
17. ppłk dypl. J. Zabłotni: Zwalczanie przez artylerię przeciwlotniczą małego i średniego kalibru samolotów działających na małych wysokościach z dużymi prędkościami lotu. Rozprawa doktorska, ASG 1964r., nr bibl. 05054.
18. Praca zbiorowa pod redakcją B.T. Houldena: Z praktyki badań operacyjnych, Warszawa 1964 r.
19. Hugon Steinhaus: Elementy nowoczesnej matematyki dla inżynierów, Warszawa-Wrocław 1964 r.
20. E.S. Wentcel: W wiedienije w issliedowanije opieracji, "Sowietskoje radio", Moskwa 1964 r.
21. Opracowanie zbiorowe: Tieorija bojewoj effektiwnosti, Monino 1964 r.

Wyk. w 50 egz.

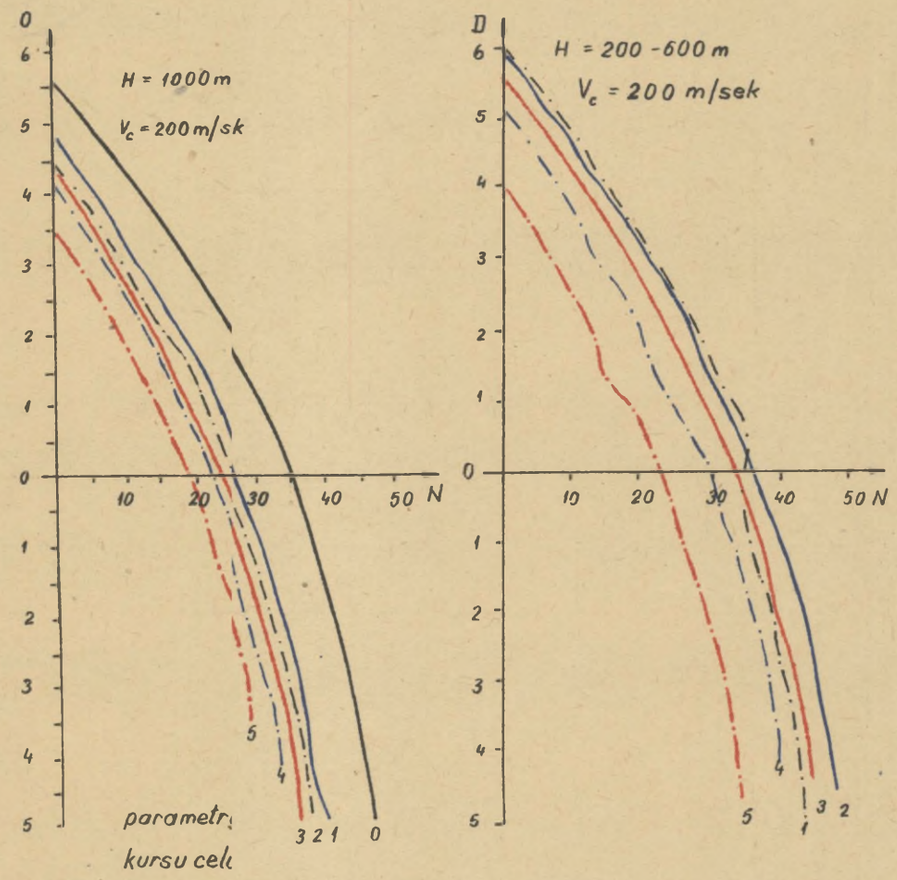
Egz. nr 1-50-bibl.tajna, Wyk. mjr mgr GOZDECKI
Druk JD, dn. 11.5.66r., nr ks. 01461/WW.

GRAFIK DO OKREŚLANIA ILOŚCI STRZAŁÓW

57 mm armat plot

TAJNE
EGZ. NR...
KS. NR 01462/ww

Załącznik Nr 19



wykonano 50 egz.
egz. nr 1-50/Biblioteka Tajna
ref. GOZDECKI mjr
rys. Z. Ldn. 6.6.66

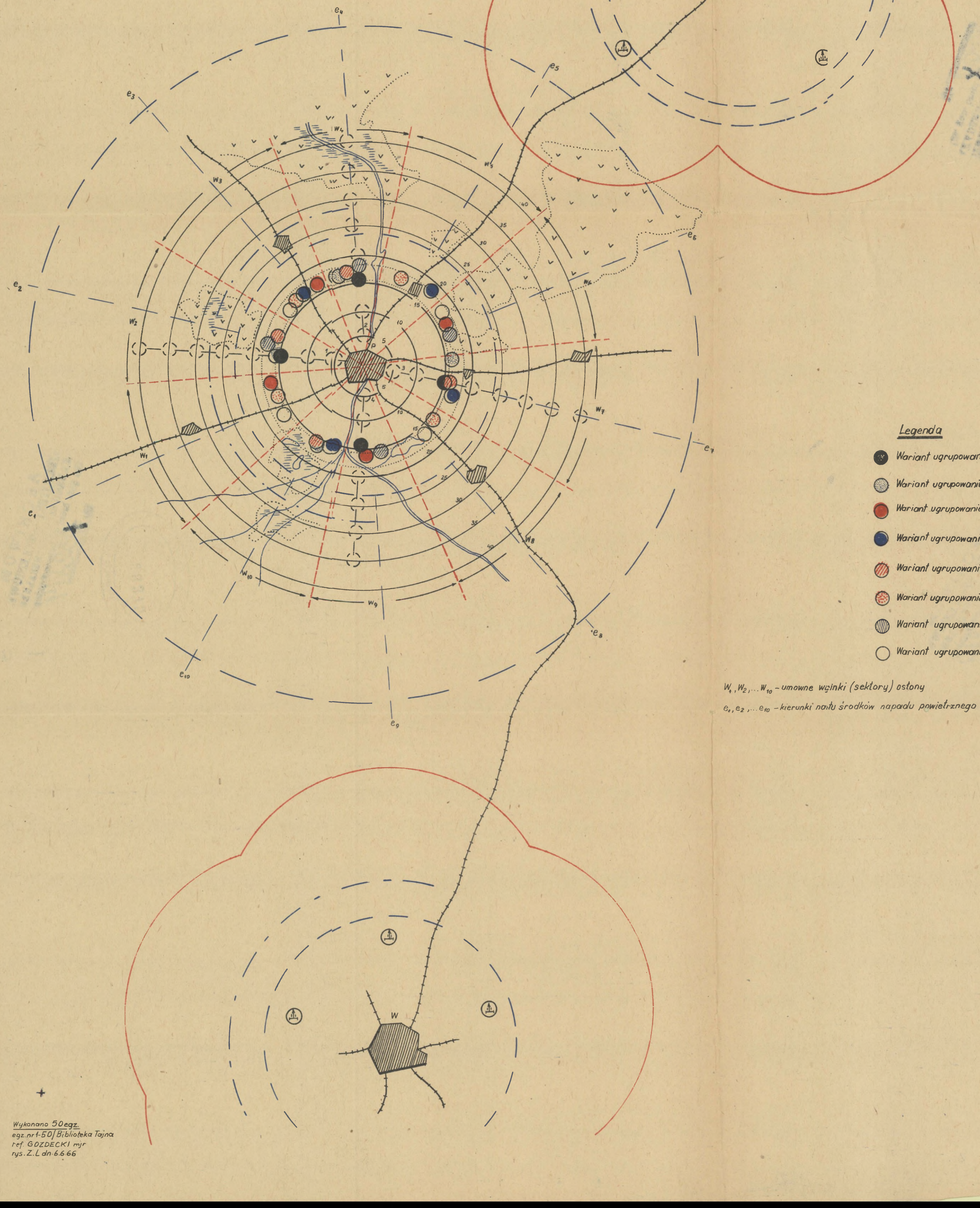
SCHEMAT POMOCNICZY DO OKREŚLANIA OPTYMALNEGO WARIANTU UGRUPOWANIA ODDZIAŁU RAKIET PLOT W OSŁONIE WAŻNEGO OBIEKTU

Schemat nr 2

~~TAJNE~~

EGZ. NR...
KS. NR 01468/ww

~~Załącznik nr 13~~ Załącznik nr 13



Legenda

- Wariant ugrupowania nr 1
- Wariant ugrupowania nr 3
- Wariant ugrupowania nr 5
- Wariant ugrupowania nr 7
- Wariant ugrupowania nr 2
- Wariant ugrupowania nr 4
- Wariant ugrupowania nr 6
- Wariant ugrupowania nr 8

$W_1, W_2, \ldots W_{10}$ – umowne wąinki (sektory) osłony

$e_1, e_2, \ldots e_{10}$ – kierunki naitu środków napadu powietrznego npla

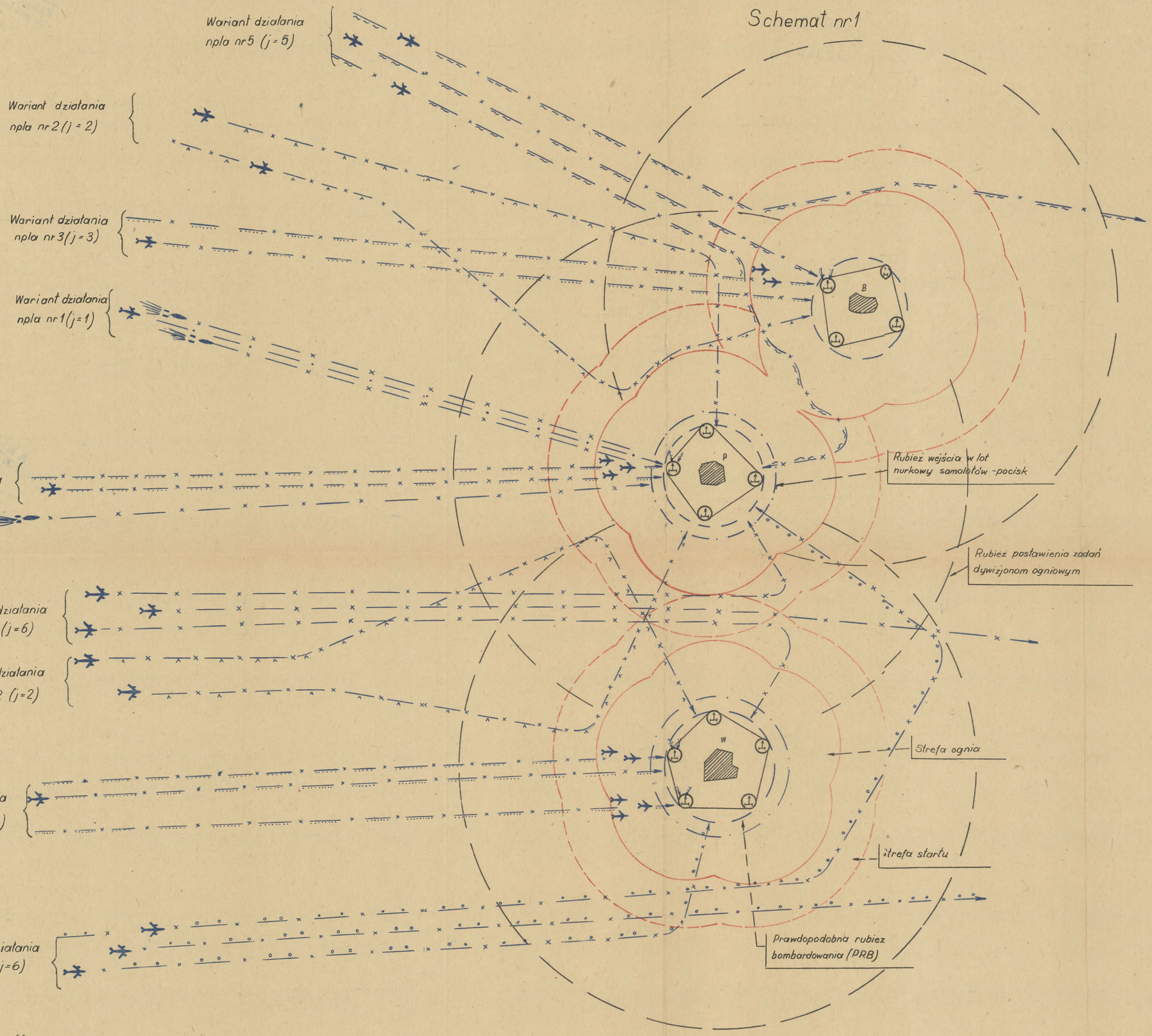
Wykonano 50 egz.
egz. nr 1-50 / Biblioteka Tajna
ref. GOZDECKI mjr
rys. Z. L dn. 6.6.66

PRAWDOPODOBNE WARIANTY DZIAŁANIA ŚRODKÓW NAPADU POWIETRZNEGO NIEPRZYJACIELA NA m. POZNAŃ

TAJNE
EGZ. NR...
KS. NR 01469/ww

Załącznik Nr 12

Schemat nr1



Wykonano 50 egz.

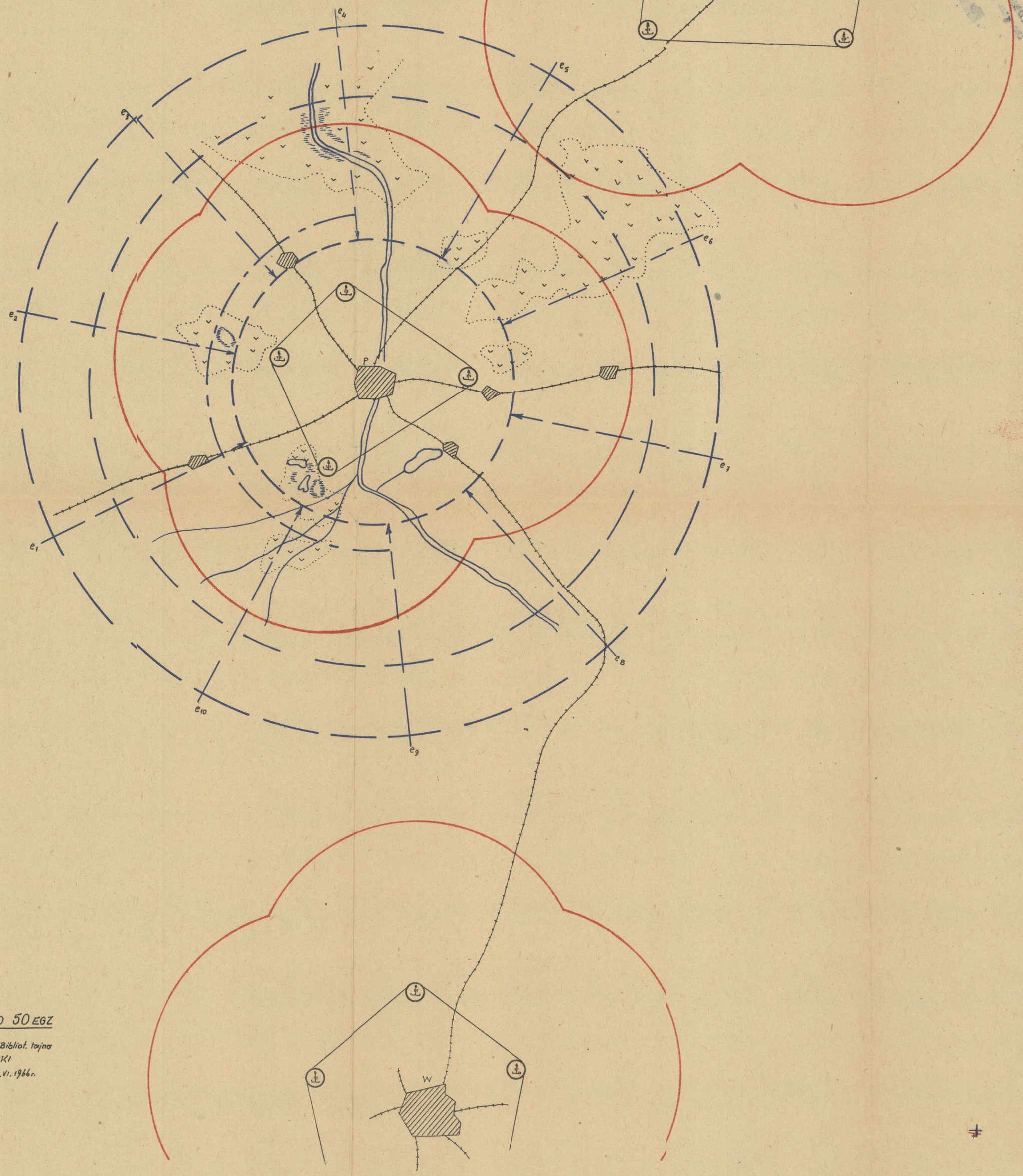
egz nr 1-50/Biblioteka Tajna
ref. GOZDECKI mjr
kreśl. Z. Ldn. 6.6.66

OPTYMALNY WARIANT UGRUPOWANIA PUŁKU RAKIET PRZECIWLOTNICZYCH

~~TAJNE~~

Egz. Nr.....
Nr Ks. 01467/WW

Załącznik nr 14.



WYKONANO 50 EGZ

Egz. Nr 1-50 Bibliot. tajna
ref. mjr GOZDECKI
rys. R.S. dn. 2.VI.1966 r.

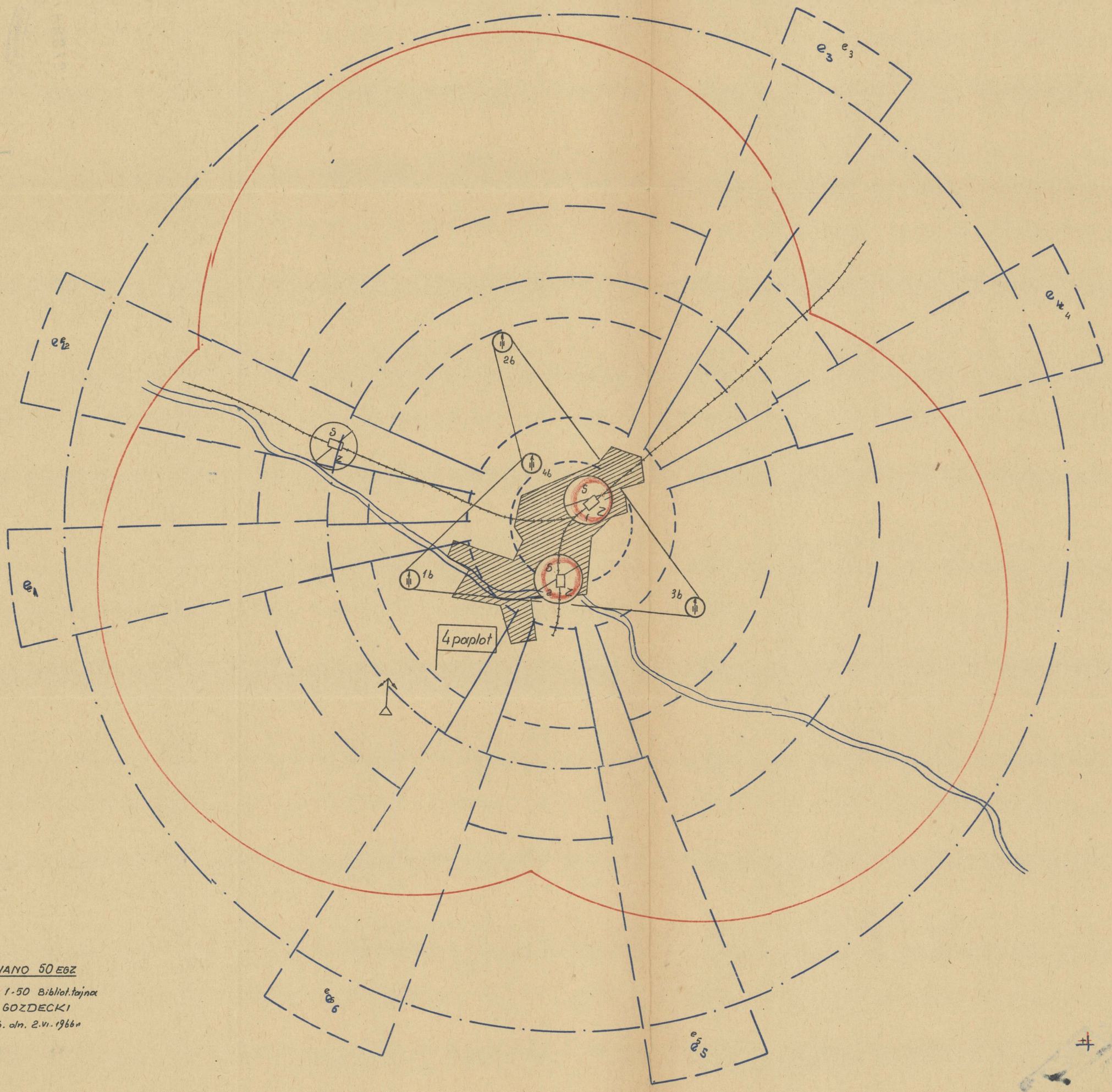
OPTYMALNY WARIANT UGRUPOWANIA 4 paplot

Tajne

Egz. Nr. ....

Nr Ks 01465/ww.

Załącznik nr 16



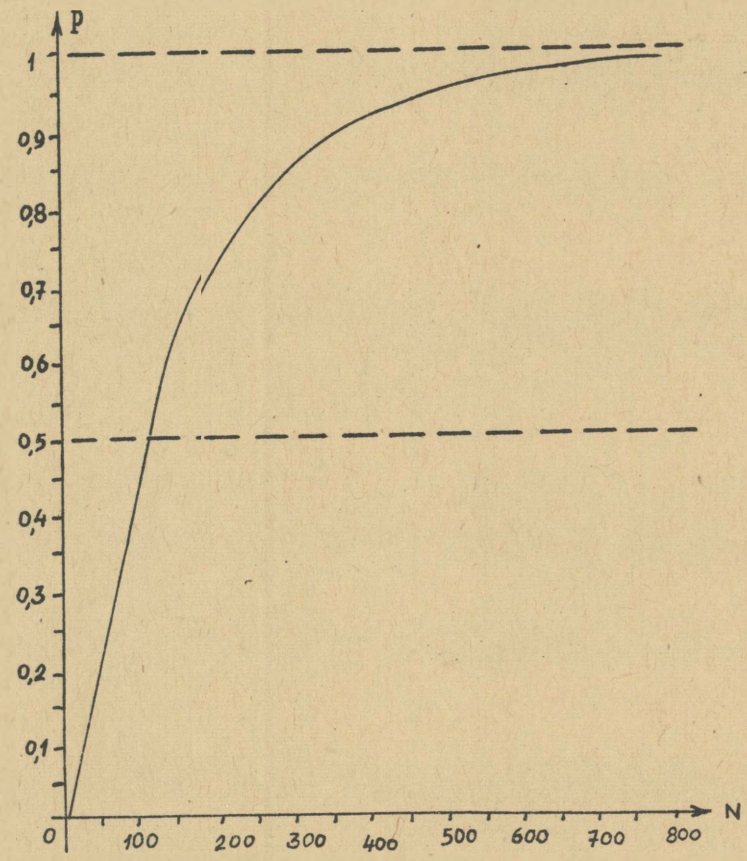
WYKONANO 50 EGZ

Egz. Nr 1-50 Bibliot. tajna
ref. mjr GOZDECKI
rys. RS. dn. 2.VI.1966 r.

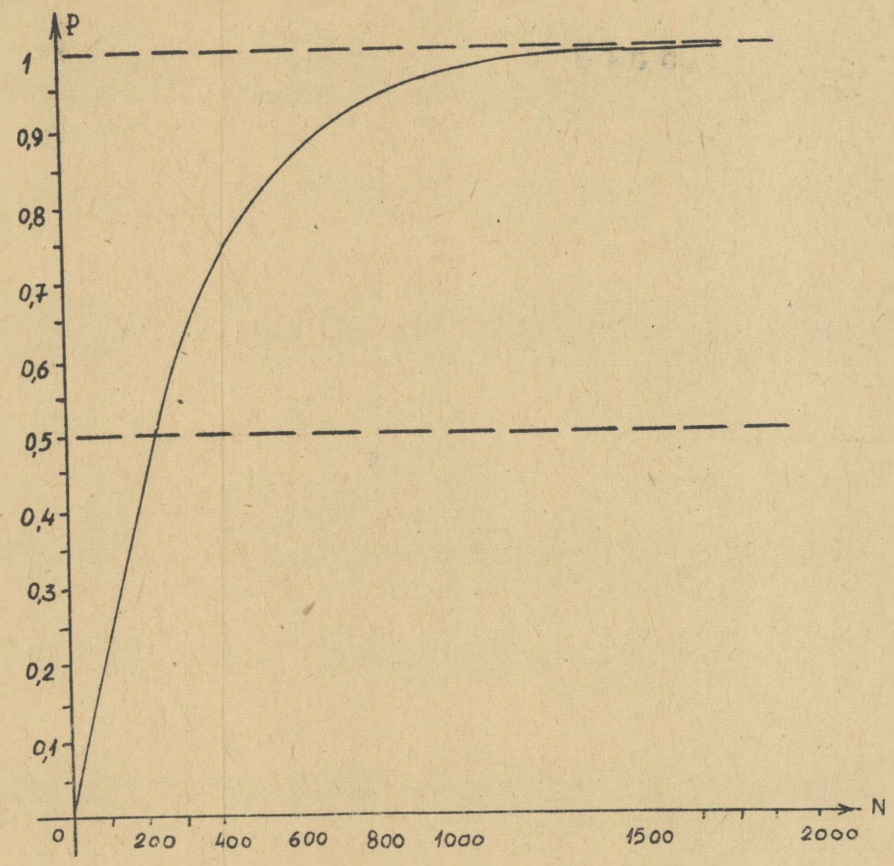
Egz. ...
Poz. Ks. 01463/MM
Załącznik Nr 18

WYKRESY DO OKREŚLANIA PRAWDOPODOBIEŃSTWA

NA PODSTAWIE ILOŚCI STRZAŁÓW



Zależność prawdopodobieństwa rażenia pojedyńczego samolotu od ilości strzałów przy strzelaniu z celownikiem.



Zależność prawdopodobieństwa rażenia pojedyńczgo samololu od ilości strzałów przy strzelaniu z przelicnikier

WYKONANO 50 EEgz.
Egz. Nr 1-50 Bibl.. Tajna
Ref. mjr GOZDECKI
Rys. A.J. dn. 6.06.61 r.

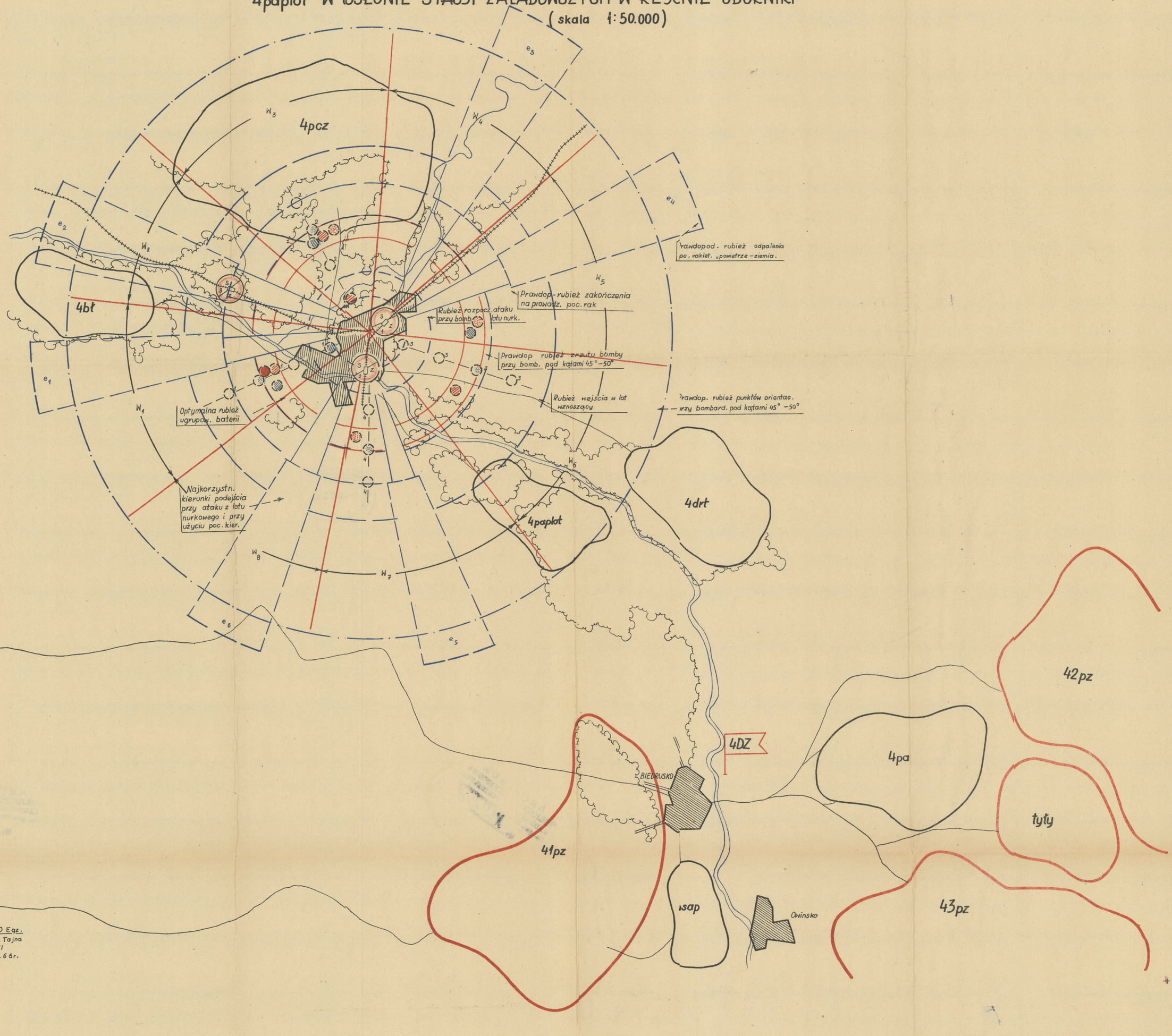
TAJNE
Egz. Nr. ....
Poz. Ks. 01466/ww

Załącznik nr 15

POŁOŻENIE ODDZIAŁÓW 4DZ I SCHEMAT WYBORU OPTYMALNEGO UGRUPOWANIA

4paplot W OSŁONIE STACJI ZAŁADOWCZYCH W REJONIE OBORNIKI

(skala 1:50.000)



WYKONANO 50 Egz.
Egz. Nr 1-50 Bibl. Tajna
Ręk. mjr GOZDECKI
Rys. A. J. dn. 6.06.66r.