

USTALENIE OPTYMALNYCH
DRÓG PRZEWÓZU ŚRODKÓW
SPOŻYWCZYCH

Opracował:

Zbigniew Różycki

ARCHIWUM
BIBLIOTEKI SZKOLENIOWEJ
AKADEMII SZKÓŁ GOSPODARSTWA
IM. GOS. PRAC. W ŚW. ZŁOTYCH

29776

Warszawa 1967 r.

USTALENIE OPTYMALNYCH
DRÓG PRZEWÓZU ŚRODKÓW
SPOŻYWCZYCH

Opracował:

Zbigniew Różycki

ARCHIWUM
BIBLIOTEKI SZKOLENIOWEJ
AKADEMII SZKOLENIA
IM. GEN. BUDZIŃSKIEGO

129776

Warszawa 1967 r.

Print. prot. 12357. //

U S T A L E N I E
=====

OPTYMALNYCH DRÓG PRZEWOSU
ŚRODKÓW SPOŻYWCZYCH

Opracował

Zbigniew Różycki

W a r s z a w a

1967 r.

ARCHIWUM
BIBLIOTEKI SZKOLENIOWEJ
AKADEMII SZTANU OGÓLNEGO
Im. gen. broni K. Świerczewskiego
Nr. 129776

234

W s t ę p

W praktyce często spotykamy się z koniecznością dostarczenia z zakładów produkcyjnych /w zadaniu oznaczone są literą A/ do magazynów /oznaczone 1, 2, 3, 4, 5/ odpowiednich asortymentów i ilości środków spożywczych. Odległości między magazynami, a zakładami produkcyjnymi są różne. Magazyny /w zadaniu są to miejsca przeznaczenia/ mogą przyjmować określoną, w odpowiednich asortymentach, ilość towarów. Jest to podyktowane posiadaną przez nich powierzchnią magazynową, możliwością konsumpcyjną ich odbiorców, ustaloną rotacją produktów itp.

Zdolności produkcyjne zakładów są takie, że zawsze zabezpieczają potrzeby magazynów. Z uwagi na to, że poszczególne zakłady produkcyjne muszą dostarczyć do odpowiednich magazynów z góry określone, stałe ilości środków spożywczych, nie można ustalić w tym wypadku optymalnego transportu z ładunkiem - minimalizacja odległości przebytych z ładunkiem jest wykluczona. Będziemy więc rozstrzygać problem jak skierować po najkrótszej drodze wozy bez ładunku z magazynów do zakładów produkcyjnych, aby można było w następnym cyklu przewieźć znowu odpowiednią ilość materiałów.

Dla jasności rozwiązywanego problemu podaję, że:

1. Zakład A_1 produkuje wyroby piekarnicze,
Zakład A_2 produkuje wyroby mięsne,
Zakład A_3 produkuje wyroby spożywcze inne,
Zakład A_4 produkuje mąkę, kasze.
2. Odległości pomiędzy zakładami /źródłami/, a magazynami /miejscami przeznaczenia/ podane są w kilometrach.
3. Zdolności produkcyjne zakładów i potrzeby magazynów ustalone są odpowiednimi ilościami samochodów ciężarowych.

Zadanie to będę rozwiązywał jako zagadnienie liniowe, chociaż droga dojścia do wyniku jest dłuższa w porównaniu np. z rozwiązaniem transportowym. Chodzi tu o przyswojenie metody simpleksów.

Z a d a n i e

Posiadamy ustalone źródła i miejsca przeznaczenia masy towarowej. Ustalona jest również ilość i asortyment dostarczonego towaru. Wykluczone jest stosowanie zastępstwa towarów. Należy rozstrzygnąć problem jak skierować po najkrótszej drodze samochody bez ładunku z miejsca przeznaczenia do źródeł ażeby można było przewieźć masę towarową w

ilości zgodnej z założeniami podanymi niżej.

Ilości przewożonego towaru odpowiadają pojemności samochodów. Do rozpatrywanego zagadnienia przyjęliśmy samochody ciężarowe jednego typu. W wypadku tym warunek podzielności jest spełniony.

W swoim rozwiązaniu postępuję:

1. Zestawiam macierz odległości,
2. Zestawiam macierz dróg transportowych samochodów z ładunkiem,
3. Z macierzy tej wyprowadzam dane o potrzebie przejazdu samochodów bez ładunku do źródeł, a korzystając z macierzy odległości zestawiam swoje zadanie.
4. Ponieważ z założeń wynika, że miejsca przeznaczenia staną się źródłami a źródła miejscami przeznaczenia to należy określić optymalne uporządkowanie dla tego układu.
5. Mając wyniki rozwiązania określe, z których miejsc pierwotnego przeznaczenia będą kierować samochody do pierwotnych źródeł i w jakich ilościach.
6. Za najkorzystniejsze rozwiązanie przyjmę uporządkowanie, przy którym suma odległości pokonanych przez wszystkie samochody jest najmniejsza.

I. Odległości.

	Miejsca przeznaczenia				
	1	2	3	4	5
Towar ze źródła A ₁	100	700	600	500	200
Towar ze źródła A ₂	500	800	700	700	500
Towar ze źródła A ₃	300	200	200	300	600
Towar ze źródła A ₄	200	100	300	400	400

II. Samochody z ładunkiem.

Ź R Ó D Ł A	Miejsca przeznaczenia					Łącznie samochodów
	1	2	3	4	5	
A ₁	3	2	1	4	2	12
A ₂	4	3	2	1	5	15
A ₃	1	2	4	1	3	11
A ₄	10	10	5	10	20	55
Łącznie samochodów	18	17	12	16	30	93

III. Ponieważ odległości źródeł od miejsc przeznaczenia są znane, a jednocześnie są one bardzo łatwo porównywalne do stawek, dlatego ażeby nie komplikować rozwiązania układam tablicę uwzględniającą odległości i samochody bez towaru.

Przeznaczenie Źródło	A ₁	A ₂	A ₃	A ₄	Samochody
1	100	500	300	200	18
2	700	800	200	100	17
3	600	700	200	300	12
4	500	700	300	400	16
5	200	500	600	400	30
Samochody	12	15	11	55	93

Całkowitą ilość przejazdów samochodów z pierwszego źródła spełnia równanie liniowe:

$$X_{11} + X_{12} + X_{13} + X_{14} = 18.$$

Analogicznie wyprowadzam dla pozostałych źródeł:

$$X_{21} + X_{22} + X_{23} + X_{24} = 17.$$

$$X_{31} + X_{32} + X_{33} + X_{34} = 12.$$

$$X_{41} + X_{42} + X_{43} + X_{44} = 16.$$

$$X_{51} + X_{52} + X_{53} + X_{54} = 30.$$

Przy przejazdach samochodów kierowanych do każdego z czterech punktów przeznaczenia muszą zachodzić warunki:

$$X_{11} + X_{21} + X_{31} + X_{41} + X_{51} = 12.$$

$$X_{12} + X_{22} + X_{32} + X_{42} + X_{52} = 15.$$

$$X_{13} + X_{23} + X_{33} + X_{43} + X_{53} = 11.$$

$$X_{14} + X_{24} + X_{34} + X_{44} + X_{54} = 55.$$

W myśl warunków zadanie winno być spełnione:

$$X_{11} \geq 0; X_{12} \geq 0; X_{13} \geq 0; X_{14} \geq 0 \dots X_{44} \geq 0;$$

$$X_{54} \geq 0.$$

X_{ij} - liczba jednostek ładunku.

Należy określić ile samochodów winno przejechać z poszczególnych źródeł do miejsc przeznaczenia ażeby ogólny koszt przejazdów był minimalny.

Trzeba znaleźć:

$$Z_{\min} = \sum_{i=1}^5 \sum_{j=1}^4 \lambda_{ij} x_{ij}$$

gdzie λ - koszt przejazdu

Rozwiązanie tego zagadnienia sposobem normalnego postępowania simpleksowego tzn. przez wprowadzenie zmiennych pomocniczych /sztucznych/ byłoby bardzo złożone rachunkowo.

Wobec powyższego stosuję uproszczony sposób postępowania. Polega on na tym, że do obliczeń prowadzonych zwykłym postępowaniem simpleksowym nie będziemy wprowadzać w kroku wyjściowym, ani w dalszych krokach zmiennych pomocniczych /sztucznych/.

Wektora żądań nie wyraża się w pierwszym kroku za pomocą wektorów jednostkowych odpowiadającym sztucznym zmiennym, lecz przyjmuje się za podstawę dowolne dopuszczalne rozwiązanie zadania. Rozwiązanie to służy wyłącznie do wyrażania wektora żądań w pierwszym kroku tablicy simpleksów. Nie można w żadnym wypadku wyrażać nim pozostałych wektorów. Potrzebne wielkości dla poszczególnych wektorów w pierwszym kroku otrzymamy opracowując kolejno rozwiązanie początkowe. Dokonujemy tego poprzez zastępowanie po kolei w tablicy strukturalnej, zawsze w początkowym rozwiązaniu, jedno z zer jedynką i zostawiając pozostałe zera. Zmiana ta wyrówna się w wyniku opracowania wierszowego i kolumnowego. Otrzymane tak nowe rozwiązania służą do wyrażenia wektora żądań w dalszych wariantach. Równania te odejmuje się po kolei od pierwotnego równania żądań, uzyskując wyrażenie wektorów, potrzebne do uzupełnienia tablicy simpleksowej w pierwszym kroku. Po dopełnieniu tablicy dalsze postępowania nie różnią się od normalnego sposobu rozwiązań simpleksowych.

	A_1	A_2	A_3	A_4	
1	x_1 12	x_2 6	x_3 0	x_4 0	18
2	x_5 0	x_6 9	x_7 8	x_8 0	17
3	x_9 0	x_{10} 0	x_{11} 3	x_{12} 9	12
4	x_{13} 0	x_{14} 0	x_{15} 0	x_{16} 16	16
5	x_{17} 0	x_{18} 0	x_{19} 0	x_{20} 30	30
	12	15	11	55	93

Początkowe rozwiązanie dopuszczalne /określane za pomocą kąta północno-zachodniego/ przyjmujemy za podstawę tablicy simpleksowej. W tablicy będzie wyrażone następująco:

$$B = 12x_1 + 6x_2 + 0x_3 + 0x_4 + 0x_5 + 9x_6 + 8x_7 + 0x_8 + 0x_9 + 0x_{10} + 3x_{11} + 9x_{12} + 0x_{13} + 0x_{14} + 0x_{15} + 16x_{16} + 0x_{17} + 0x_{18} + 0x_{19} + 30x_{20}.$$

Ażeby zbudować tablicę simpleksową musimy wyrazić jeszcze wszystkie współczynniki, które w podanym wyżej równaniu są zerowe - $x_3, x_4, x_5, x_8, x_9, x_{10}, x_{13}, x_{14}, x_{15}, x_{17}, x_{18}, x_{19}$, za pomocą współczynników niezerowych, które tworzą bazę - $x_1, x_2, x_6, x_7, x_{11}, x_{12}, x_{16}, x_{20}$.

Przeprowadzamy to metodą opisaną na stronie⁵
W wyniku tego otrzymany:

	A_1	A_2	A_3	A_4	
1	2	3	4	5	6
1	12	-1 6	+1 0	0	18
2	0	+1 9	-1 8	0	17
3	0	0	3	9	12
4	0	0	0	16	16
	0	0	0	30	
	12	15	11	55	93

1	2	3	4	5	6
5	0	0	0	30	30
	12	15	11	55	93
	A ₁	A ₂	A ₃	A ₄	
1	12	5	1	0	18
2	0	10	7	0	17
3	0	0	3	9	12
4	0	0	0	16	16
5	0	0	0	30	30
	12	15	11	55	93

Rozwiązanie to wyrażam:

$$B = 12x_1 + 5x_2 + x_3 + 0x_4 + 0x_5 + 10x_6 + 7x_7 + 0x_8 + 0x_9 + \\ + 0x_{10} + 3x_{11} + 9x_{12} + 0x_{13} + 0x_{14} + 0x_{15} + 16x_{16} + 0x_{17} + \\ + 0x_{18} + 0x_{19} + 30x_{20}.$$

	A ₁	A ₂	A ₃	A ₄			
1	12	1	6	0 + 1	0	18	
2	0	1	9	1 - 1	8	0	17
3	0	0	1	3	1	9	12
4	0	0	0	0	16	16	
5	0	0	0	0	30	30	
	12	15	11	55	93		

	A ₁	A ₂	A ₃	A ₄	
1	12	5	0	1	18
2	0	10	7	0	17
3	0	0	4	8	12
4	0	0	0	16	16
5	0	0	0	30	30
	12	15	11	55	93

Rozwiązanie to wyrażam:

$$B = 12x_1 + 5x_2 + 0x_3 + x_4 + 0x_5 + 10x_6 + 7x_7 + 0x_8 + 0x_9 + \\ + 0x_{10} + 4x_{11} + 8x_{12} + 0x_{13} + 0x_{14} + 0x_{15} + 0x_{16} + 0x_{17} + \\ + 0x_{18} + 0x_{19} + 30x_{20}$$

	A_1	A_2	A_3	A_4			
1	-1	12	+1	6	0	0	18
2	+1	0	-1	9	8	0	17
3		0		0	3	9	12
4		0		0	0	16	16
5		0		0	0	30	30
		12		15	11	55	93

	A_1	A_2	A_3	A_4	
1	11	7	0	0	18
2	1	8	8	0	17
3	0	0	3	9	12
4	0	0	0	16	16
5	0	0	0	30	30
	12	15	11	55	93

Rozwiązanie to wyrażam:

$$B = 11x_1 + 7x_2 + 0x_3 + 0x_4 + x_5 + 8x_6 + 8x_7 + 0x_8 + 0x_9 + \\ + 0x_{10} + 3x_{11} + 9x_{12} + 0x_{13} + 0x_{14} + 0x_{15} + 16x_{16} + 0x_{17} + \\ + 0x_{18} + 0x_{19} + 30x_{20}$$

	A_1		A_2		A_3		A_4		
1		12		6		0		0	18
2		0		9	-1	8	+1	0	17
3		0		0	+1	3	-1	9	12
4		0		0		0		16	16
5		0		0		0		30	30
		12		15		11		55	93

	A_1	A_2	A_3	A_4	
1	12	6	0	0	18
2	0	9	7	1	17
3	0	0	4	8	12
4	0	0	0	16	16
5	0	0	0	30	30
	12	15	11	55	93

Rozwiązanie to wyrażam:

$$B = 12x_1 + 6x_2 + 0x_3 + 0x_4 + 0x_5 + 9x_6 + 7x_7 + x_8 + 0x_9 + 0x_{10} + 4x_{11} + 8x_{12} + 0x_{13} + 0x_{14} + 0x_{15} + 16x_{16} + 0x_{17} + 0x_{18} + 0x_{19} + 30x_{20}$$

	A_1	A_2	A_3	A_4				
1	-1	12	+1	6	0	0	18	
2		0	-1	9	+1	8	0	17
3	+1	0	0	-1	3	9	12	
4		0	0	0	0	16	16	
5		0	0	0	0	30	30	
		12	15	11	55	93		

	A_1	A_2	A_3	A_4	
1	11	7	0	0	18
2	0	8	9	0	17
3	1	0	2	9	12
4	0	0	0	16	16
5	0	0	0	30	30
	12	15	11	55	93

Rozwiązanie to wyrażam:

$$B = 11x_1 + 7x_2 + 0x_3 + 0x_4 + 0x_5 + 8x_6 + 9x_7 + 0x_8 + x_9 + 0x_{10} + 2x_{11} + 9x_{12} + 0x_{13} + 0x_{14} + 0x_{15} + 16x_{16} + 0x_{17} + 0x_{18} + 0x_{19} + 30x_{20}$$

	A_1	A_2	A_3	A_4	
1	12	6	0	0	18
2	0	-1	9	0	17
3	0	+1	0	9	12
4	0	0	0	16	16
5	0	0	0	30	30
	12	15	11	55	93

	A_1	A_2	A_3	A_4	
1	12	6	0	0	18
2	0	8	9	0	17
3	0	1	2	9	12
4	0	0	0	16	16
5	0	0	0	30	30
	12	15	11	55	93

Rozwiązanie to wyrażam:

$$B = 12x_1 + 6x_2 + 0x_3 + 0x_4 + 0x_5 + 8x_6 + 9x_7 + 0x_8 + 0x_9 + \\ + x_{10} + 2x_{11} + 9x_{12} + 0x_{13} + 0x_{14} + 0x_{15} + 16x_{16} + 0x_{17} + \\ + 0x_{18} + 0x_{19} + 30x_{20}$$

	A_1	A_2	A_3	A_4					
1	-1	12	+1	6	8	0	18		
2		0	-1	9	+1	3	0	17	
3		0		0	-1	0	+1	9	12
4	+1	0		0		0	-1	16	16
5		0		0		0		30	30
		12		15		11		55	93

	A_1	A_2	A_3	A_4	
1	11	7	0	0	18
2	0	8	9	0	17
3	0	0	2	10	12
4	1	0	0	15	16
5	0	0	0	30	30
	12	15	11	55	93

Rozwiązanie to wyrażam:

$$B = 11x_1 + 7x_2 + 0x_3 + 0x_4 + 0x_5 + 0x_6 + 9x_7 + 0x_8 + 0x_9 + \\ + 0x_{10} + 2x_{11} + 10x_{12} + x_{13} + 0x_{14} + 0x_{15} + 15x_{16} + 0x_{17} + \\ + 0x_{18} + 0x_{19} + 30x_{20}.$$

	A ₁	A ₂	A ₃	A ₄	
1	12	6	0	0	18
2	0	-1 9	+1 8	0	17
3	0	0	-1 3	+1 9	12
4	0	+1 0	0	-1 16	16
5	0	0	0	30	30
	12	15	11	55	93

	A ₁	A ₂	A ₃	A ₄	
1	12	6	0	0	18
2	0	8	9	0	17
3	0	0	2	10	12
4	0	1	0	15	16
5	0	0	0	30	30
	12	15	11	55	93

Rozwiązanie to wyrażam:

$$B = 12x_1 + 6x_2 + 0x_3 + 0x_4 + 0x_5 + 0x_6 + 9x_7 + 0x_8 + 0x_9 + \\ + 0x_{10} + 2x_{11} + 10x_{12} + 0x_{13} + x_{14} + 0x_{15} + 15x_{16} + 0x_{17} + \\ + 0x_{18} + 0x_{19} + 30x_{20}.$$

	A ₁	A ₂	A ₃	A ₄	
1	12	6	0	0	18
2	0	9	8	0	17
3	0	0	-1 3	+1 9	12
4	0	0	+1 0	-1 16	16
5	0	0	0	30	30
	12	15	11	55	93

	A_1	A_2	A_3	A_4	
1	12	6	0	0	18
2	0	9	8	0	17
3	0	0	2	10	12
4	0	0	1	15	16
5	0	0	0	30	30
	12	15	11	55	93

Rozwiązanie to wyrażam:

$$B = 12x_1 + 6x_2 + 0x_3 + 0x_4 + 0x_5 + 9x_6 + 8x_7 + 0x_8 + 0x_9 + \\ + 0x_{10} + 2x_{11} + 10x_{12} + 0x_{13} + 0x_{14} + x_{15} + 15x_{16} + 0x_{17} + \\ + 0x_{18} + 0x_{19} + 30x_{20}.$$

	A_1	A_2	A_3	A_4					
1	1	12	1	6	0	0	18		
2		0	1	9	1	8	0	17	
3		0		0	1	3	1	9	12
4		0		0		0		16	16
5		0		0		0	-1	30	30
		12		15		11		55	93

	A_1	A_2	A_3	A_4	
1	11	7	0	0	18
2	0	8	9	0	17
3	0	0	2	10	12
4	0	0	0	16	16
5	1	0	0	29	30
	12	15	11	55	93

Rozwiązanie to wyrażam:

$$B = 11x_1 + 7x_2 + 0x_3 + 0x_4 + 0x_5 + 8x_6 + 9x_7 + 0x_8 + 0x_9 + 0x_{10} + \\ + 2x_{11} + 10x_{12} + 0x_{13} + 0x_{14} + 0x_{15} + 16x_{16} + 1x_{17} + 0x_{18} + \\ + 0x_{19} + 29x_{20}.$$

	A_1	A_2	A_3	A_4	
1	12	6	0	0	18
2	0	-1	9	0	17
3	0	0	-1	3	12
4	0	0	0	16	16
5	0	+1	0	-1	30
	12	15	11	55	93

	A_1	A_2	A_3	A_4	
1	12	6	0	0	18
2	0	8	9	0	17
3	0	0	2	10	12
4	0	0	0	16	16
5	0	1	0	29	30
	12	15	11	55	93

Rozwiązanie to wyrażam:

$$B = 12x_1 + 6x_2 + 0x_3 + 0x_4 + 0x_5 + 8x_6 + 9x_7 + 0x_8 + 0x_9 + 0x_{10} + 2x_{11} + 10x_{12} + 0x_{13} + 0x_{14} + 0x_{15} + 16x_{16} + 0x_{17} + x_{18} + 0x_{19} + 29x_{20}$$

	A_1	A_2	A_3	A_4	
1	12	6	0	0	18
2	0	9	8	0	17
3	0	0	-1	3	12
4	0	0	0	16	16
5	0	0	1	0	30
	12	15	11	55	93

	A_1	A_2	A_3	A_4	
1	12	6	0	0	18
2	0	9	8	0	17
3	0	0	2	10	12
4	0	0	0	16	16
5	0	0	1	29	30
	12	15	11	55	93

Rozwiązanie to wyrażam:

$$B = 12x_1 + 6x_2 + 0x_3 + 0x_4 + 0x_5 + 9x_6 + 8x_7 + 0x_8 + 0x_9 + \\ + 0x_{10} + 2x_{11} + 10x_{12} + 0x_{13} + 0x_{14} + 0x_{15} + 16x_{16} + 0x_{17} + \\ + 0x_{18} + x_{19} + 29x_{20}.$$

W ten sposób zamieniliśmy ostatnie zero w rozwiązaniu początkowym.

Następnie kolejno odejmujemy otrzymane wyrażenie B od wyrażenia B znalezionego w początkowym rozwiązaniu dopuszczalnym:

./.

$$B = 12x_1 + 6x_2 + 6x_3 + 6x_4 + 6x_5 + 9x_6 + 8x_7 + 6x_8 + 6x_9 + 6x_{10} + 3x_{11} + 9x_{12} + 6x_{13} + 6x_{14} + 6x_{15} + 16x_{16} + 6x_{17} + 6x_{18} + 6x_{19} + 30x_{20}$$

$$- B = -12x_1 - 6x_2 - 6x_3 - 6x_4 - 6x_5 - 10x_6 - 7x_7 - 6x_8 - 6x_9 - 6x_{10} - 3x_{11} - 9x_{12} - 6x_{13} - 6x_{14} - 6x_{15} - 16x_{16} - 6x_{17} - 6x_{18} - 6x_{19} - 30x_{20}$$

$$x_3 = +x_2 - x_6 + x_7$$

$$B = 12x_1 + 6x_2 + 6x_3 + 6x_4 + 6x_5 + 9x_6 + 8x_7 + 6x_8 + 6x_9 + 6x_{10} + 3x_{11} + 9x_{12} + 6x_{13} + 6x_{14} + 6x_{15} + 16x_{16} + 6x_{17} + 6x_{18} + 6x_{19} + 30x_{20}$$

$$- B = -12x_1 - 6x_2 - 6x_3 - 6x_4 - 6x_5 - 10x_6 - 7x_7 - 6x_8 - 6x_9 - 6x_{10} - 3x_{11} - 9x_{12} - 6x_{13} - 6x_{14} - 6x_{15} - 16x_{16} - 6x_{17} - 6x_{18} - 6x_{19} - 30x_{20}$$

$$x_{17} = +x_2 - x_6 + x_7 + x_{11} + x_{12}$$

$$B = 12x_1 + 6x_2 + 6x_3 + 6x_4 + 6x_5 + 9x_6 + 8x_7 + 6x_8 + 6x_9 + 6x_{10} + 3x_{11} + 9x_{12} + 6x_{13} + 6x_{14} + 6x_{15} + 16x_{16} + 6x_{17} + 6x_{18} + 6x_{19} + 30x_{20}$$

$$- B = -12x_1 - 6x_2 - 6x_3 - 6x_4 - 6x_5 - 10x_6 - 7x_7 - 6x_8 - 6x_9 - 6x_{10} - 3x_{11} - 9x_{12} - 6x_{13} - 6x_{14} - 6x_{15} - 16x_{16} - 6x_{17} - 6x_{18} - 6x_{19} - 30x_{20}$$

$$x_5 = +x_1 - x_2 + x_6$$

$$B = 12x_1 + 6x_2 + 6x_3 + 6x_4 + 6x_5 + 9x_6 + 8x_7 + 6x_8 + 6x_9 + 6x_{10} + 3x_{11} + 9x_{12} + 6x_{13} + 6x_{14} + 6x_{15} + 16x_{16} + 6x_{17} + 6x_{18} + 6x_{19} + 30x_{20}$$

$$- B = -12x_1 - 6x_2 - 6x_3 - 6x_4 - 6x_5 - 10x_6 - 7x_7 - 6x_8 - 6x_9 - 6x_{10} - 3x_{11} - 9x_{12} - 6x_{13} - 6x_{14} - 6x_{15} - 16x_{16} - 6x_{17} - 6x_{18} - 6x_{19} - 30x_{20}$$

$$x_8 = +x_7 - x_{11} + x_{12}$$

$$B = 12x_1 + 6x_2 + 6x_3 + 6x_4 + 6x_5 + 9x_6 + 8x_7 + 6x_8 + 6x_9 + 6x_{10} + 3x_{11} + 9x_{12} + 6x_{13} + 6x_{14} + 6x_{15} + 16x_{16} + 6x_{17} + 6x_{18} + 6x_{19} + 30x_{20}$$

$$- B = -12x_1 - 6x_2 - 6x_3 - 6x_4 - 6x_5 - 10x_6 - 7x_7 - 6x_8 - 6x_9 - 6x_{10} - 3x_{11} - 9x_{12} - 6x_{13} - 6x_{14} - 6x_{15} - 16x_{16} - 6x_{17} - 6x_{18} - 6x_{19} - 30x_{20}$$

$$x_9 = +x_1 - x_2 + x_6 - x_7 + x_{11}$$

$$B = 12x_1 + 6x_2 + 6x_3 + 6x_4 + 6x_5 + 9x_6 + 8x_7 + 6x_8 + 6x_9 + 6x_{10} + 3x_{11} + 9x_{12} + 6x_{13} + 6x_{14} + 6x_{15} + 16x_{16} + 6x_{17} + 6x_{18} + 6x_{19} + 30x_{20}$$

$$- B = -12x_1 - 6x_2 - 6x_3 - 6x_4 - 6x_5 - 10x_6 - 7x_7 - 6x_8 - 6x_9 - 6x_{10} - 3x_{11} - 9x_{12} - 6x_{13} - 6x_{14} - 6x_{15} - 16x_{16} - 6x_{17} - 6x_{18} - 6x_{19} - 30x_{20}$$

$$x_{10} = +x_6 - x_7 + x_1$$

$$B = 12X_1 + 6X_2 + 6X_3 + 6X_4 + 6X_5 + 9X_6 + 8X_7 + 6X_8 + 6X_9 + 6X_{10} + 3X_{11} + 9X_{12} + 6X_{13} + 6X_{14} + 6X_{15} + 16X_{16} + 6X_{17} + 6X_{18} + 6X_{19} + 30X_{20}$$

$$- B = -11X_1 - 7X_2 - 6X_3 - 6X_4 - 6X_5 - 8X_6 - 9X_7 - 6X_8 - 6X_9 - 6X_{10} - 2X_{11} - 10X_{12} - X_{13} - 6X_{14} - 6X_{15} - 15X_{16} - 6X_{17} - 6X_{18} - 6X_{19} - 30X_{20}$$

$$X_{13} = X_1 - X_2 \quad +X_6 - X_7 \quad +X_{11} - X_{12} \quad +X_{16}$$

$$B = 12X_1 + 6X_2 + 6X_3 + 6X_4 + 6X_5 + 9X_6 + 8X_7 + 6X_8 + 6X_9 + 6X_{10} + 3X_{11} + 9X_{12} + 6X_{13} + 6X_{14} + 6X_{15} + 16X_{16} + 6X_{17} + 6X_{18} + 6X_{19} + 30X_{20}$$

$$- B = -12X_1 - 6X_2 - 6X_3 - 6X_4 - 6X_5 - 8X_6 - 9X_7 - 6X_8 - 6X_9 - 6X_{10} - 2X_{11} - 10X_{12} - 6X_{13} - 6X_{14} - 6X_{15} - 15X_{16} - 6X_{17} - 6X_{18} - 6X_{19} - 30X_{20}$$

$$X_{14} = X_6 - X_7 \quad +X_{11} - X_{12} \quad +X_{16}$$

$$B = 12X_1 + 6X_2 + 6X_3 + 6X_4 + 6X_5 + 9X_6 + 8X_7 + 6X_8 + 6X_9 + 6X_{10} + 3X_{11} + 9X_{12} + 6X_{13} + 6X_{14} + 6X_{15} + 16X_{16} + 6X_{17} + 6X_{18} + 6X_{19} + 30X_{20}$$

$$- B = -12X_1 - 6X_2 - 6X_3 - 6X_4 - 6X_5 - 9X_6 - 8X_7 - 6X_8 - 6X_9 - 6X_{10} - 2X_{11} - 10X_{12} - 6X_{13} - 6X_{14} - 6X_{15} - 15X_{16} - 6X_{17} - 6X_{18} - 6X_{19} - 30X_{20}$$

$$X_{15} = X_{11} - X_{12} \quad +X_{16}$$

$$B = 12X_1 + 6X_2 + 6X_3 + 6X_4 + 6X_5 + 9X_6 + 8X_7 + 6X_8 + 6X_9 + 6X_{10} + 3X_{11} + 9X_{12} + 6X_{13} + 6X_{14} + 6X_{15} + 16X_{16} + 6X_{17} + 6X_{18} + 6X_{19} + 30X_{20}$$

$$- B = -11X_1 - 7X_2 - 6X_3 - 6X_4 - 6X_5 - 8X_6 - 9X_7 - 6X_8 - 6X_9 - 6X_{10} - 2X_{11} - 10X_{12} - 6X_{13} - 6X_{14} - 6X_{15} - 16X_{16} - X_{17} - 6X_{18} - 6X_{19} - 29X_{20}$$

$$X_{17} = X_1 - X_2 \quad +X_6 - X_7 \quad +X_{11} - X_{12} \quad +X_{20}$$

$$B = 12X_1 + 6X_2 + 6X_3 + 6X_4 + 6X_5 + 9X_6 + 8X_7 + 6X_8 + 6X_9 + 6X_{10} + 3X_{11} + 9X_{12} + 6X_{13} + 6X_{14} + 6X_{15} + 16X_{16} + 6X_{17} + 6X_{18} + 6X_{19} + 30X_{20}$$

$$- B = -12X_1 - 6X_2 - 6X_3 - 6X_4 - 6X_5 - 8X_6 - 9X_7 - 6X_8 - 6X_9 - 6X_{10} - 2X_{11} - 10X_{12} - 6X_{13} - 6X_{14} - 6X_{15} - 16X_{16} - 6X_{17} - 6X_{18} - 6X_{19} - 29X_{20}$$

$$X_{18} = X_6 - X_7 \quad +X_{11} - X_{12} \quad +X_{20}$$

$$B = 12X_1 + 6X_2 + 6X_3 + 6X_4 + 6X_5 + 9X_6 + 8X_7 + 6X_8 + 6X_9 + 6X_{10} + 3X_{11} + 9X_{12} + 6X_{13} + 6X_{14} + 6X_{15} + 16X_{16} + 6X_{17} + 6X_{18} + 6X_{19} + 30X_{20}$$

$$- B = -12X_1 - 6X_2 - 6X_3 - 6X_4 - 6X_5 - 9X_6 - 8X_7 - 6X_8 - 6X_9 - 6X_{10} - 2X_{11} - 10X_{12} - 6X_{13} - 6X_{14} - 6X_{15} - 16X_{16} - 6X_{17} - 6X_{18} - 6X_{19} - 29X_{20}$$

$$X_{19} = X_{11} - X_{12} \quad +X_{20}$$

Po wykonaniu odejmowania otrzymaliśmy dalsze potrzebne dane do tablicy simpleksów. Po zestawieniu początkowego rozwiązania dopuszczalnego i otrzymanych różnic w kolejności mamy:

$$B = 12x_1 + 6x_2 + 9x_6 + 8x_7 + 3x_{11} + 9x_{12} + 16x_{16} + 30x_{20}$$

$$x_3 = +x_2 - x_6 + x_7$$

$$x_4 = +x_2 - x_6 + x_7 - x_{11} + x_{12}$$

$$x_5 = x_1 - x_2 + x_6$$

$$x_8 = x_7 - x_{11} + x_{12}$$

$$x_9 = x_1 - x_2 + x_6 - x_7 + x_{11}$$

$$x_{10} = x_6 - x_7 + x_{11}$$

$$x_{13} = x_1 - x_2 + x_6 - x_7 + x_{11} - x_{12} + x_{16}$$

$$x_{14} = x_6 - x_7 + x_{11} - x_{12} + x_{16}$$

$$x_{15} = x_{11} - x_{12} + x_{16}$$

$$x_{17} = x_1 - x_2 + x_6 - x_7 + x_{11} - x_{12} + x_{20}$$

$$x_{18} = x_6 - x_7 + x_{11} - x_{12} + x_{20}$$

$$x_{19} = x_{11} - x_{12} + x_{20}$$

Na podstawie uzyskanych danych zestawiamy pierwszą tablicę simpleksów i prowadzimy obliczenia dążąc do minimalizacji dróg transportowych.

Tworzenie dalszych kroków w tablicy simpleksów przeprowadzam wg poniższej zasady, pamiętając że szukam minimum:

1. Wybieram największy element dodatni w wierszu wskaźnikowym pierwszej tablicy simpleksów, który wyznacza kolumnę kluczową.
2. Dzielę element kolumny wektora wyrazów wolnych przez odpowiadające im elementy dodatnie kolumny kluczowej i z otrzymanych ilorazów wybieram najmniejszy iloraz dodatni.
3. Wiersz, który zawiera najmniejszy iloraz dodatni, będzie wierszem kluczowym. Wyłączam go z bazy.
4. Na przecięciu wiersza kluczowego i kolumny kluczowej znajduję element rozwiązujący.
5. Dzielimy każdy element wiersza kluczowego przez element rozwiązujący. Ilorazy otrzymane będą odpowiednimi elementami nowego wiersza w następnej tablicy simpleksów /wiersza wprowadzanego/.

6. Pozostałe elementy obliczamy wg zasady:

nowy element otrzymujemy przez odjęcie od wybranego elementu ilorazu, który w liczniku posiada iloczyn elementu wiersza wybranego i elementu kolumny kluczowej, a w mianowniku element rozwiązujący.

Będę również korzystać z uproszczenia działań przy sporządzaniu następnych tablic, które polegają na:

- wszystkie elementy kolumny kluczowej przyjmuję za zera oprócz elementu rozwiązującego,
- każdy wiersz, w którym w kolumnie kluczowej stoi zero przypisuję bez zmiany,
- każdą kolumnę, w której w wierszu kluczowym stoi zero przepisuję bez zmiany.

	1	5	3	2	7	8	2	1	6	7	2	3	5	7	3	4	2	5	6	4
Wektor bazowy	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	x_7	x_8	x_9	x_{10}	x_{11}	x_{12}	x_{13}	x_{14}	x_{15}	x_{16}	x_{17}	x_{18}	x_{19}	x_{20}
1	x_1	12	1	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-
5	x_2	6	1	1	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-
8	x_6	9	-	-	1	1	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-
2	x_7	8	1	1	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-
2	x_{11}	3	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-
3	x_{12}	9	1	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-
4	x_{16}	16	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-
4	x_{20}	30	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-
Wiersz wskaźnik. 347	0	0	-4	-2	-3	0	0	2	-2	1	0	0	0	2	0	0	3	4	-3	0
1	x_1	12	1	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-
5	x_2	6	1	1	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-
8	x_6	6	-	-	0	1	1	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-
2	x_7	11	-	-	0	0	1	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-
5	x_{18}	3	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-
3	x_{12}	12	-	-	0	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-
4	x_{16}	16	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-
4	x_{20}	27	-	-	1	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-
Wiersz wskaźnik. 335	0	0	-4	2	-3	0	0	0	6	-6	-3	-4	0	-4	-2	0	-1	0	-1	0
1	x_1	12	1	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-
5	x_2	6	1	1	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-
1	x_8	6	-	-	1	1	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-
2	x_7	11	-	-	1	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-
5	x_{18}	9	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-
3	x_{12}	12	-	-	1	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-
4	x_{16}	16	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-
4	x_{20}	21	-	-	1	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-
Wiersz wskaźnik. 299	0	0	2	2	-9	-6	0	0	0	-6	-3	2	0	-4	-2	0	-1	0	-1	0
1	x_1	12	1	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-
2	x_4	6	1	1	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-
1	x_8	6	-	-	1	1	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-
2	x_7	11	-	-	1	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-
5	x_{18}	15	-	-	0	1	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-
3	x_{12}	12	-	-	1	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-
4	x_{16}	16	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-
4	x_{20}	15	-	-	0	0	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-
Wiersz wskaźnik. 287	0	-2	0	0	-7	-6	0	0	-4	-3	2	0	-2	-2	0	1	0	-1	0	-1
1	x_1	12	1	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-
2	x_4	6	1	1	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-
1	x_8	17	-	-	1	1	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-
2	x_{11}	11	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-
5	x_{18}	15	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-
3	x_{12}	12	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-
4	x_{16}	16	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-
4	x_{20}	15	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-
Wiersz wskaźnik. 265	0	-2	-2	0	-7	-6	-2	0	-4	-3	0	0	-2	-2	0	0	1	0	-3	0
2	x_{12}	12	1	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-
2	x_4	18	1	1	0	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-
1	x_8	17	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-
2	x_{11}	11	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-
5	x_{18}	15	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-
3	x_{12}	12	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-
4	x_{16}	16	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-
4	x_{20}	15	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-
Wiersz wskaźnik. 253	-1	-2	-2	0	-8	-6	-2	0	-5	-3	0	0	-3	-2	0	0	0	-4	0	-4

Ponieważ elementy wiersza wskaźnikowego spełniają postawiony w zadaniu warunek przyjmujemy otrzymane wyniki za rozwiązanie optymalne.

Dla łatwości obliczeń elementy przyjęte z tabeli zostały podzielone przez 100 i wpisane w wierszu

Rozwiązanie naszego zagadnienia można przedstawić tabelarycznie wykorzystując tablice ze strony i wynik otrzymany w ostatnim kroku tabeli simpleksów:

	A ₁	A ₂	A ₃	A ₄	Liczba samochodów	Łącznie kilometrów
	X ₁	X ₂	X ₃	X ₄	200	
1	0	0	0	18	18	3.600
	X ₅	X ₆	X ₇	X ₈	100	
2	0	0	0	17	17	1.700
	X ₉	X ₁₀	X ₁₁	X ₁₂	200 300	
3	0	0	11	1	12	2.500
	X ₁₃	X ₁₄	X ₁₅	X ₁₆	400	
4	0	0	0	16	16	6.400
	X ₁₇	X ₁₈	X ₁₉	X ₂₀	200 500 400	
5	12	15	0	3	30	11.100
Licz. sam.	12	15	11	55	93	
Łącz. km	2400	7500	2200	13200		25.300

W związku z powyższym samochody bez ładunku zostaną skierowane z miejsc przeznaczenia /magazynów/ do źródeł w następującym porządku:

- z magazynu 1 do źródła A₄ - 18 samochodów
- z magazynu 2 do źródła A₄ - 17 samochodów
- z magazynu 3 do źródła A₃ - 11 samochodów
- z magazynu 3 do źródła A₄ - 1 samochód
- z magazynu 4 do źródła A₄ - 16 samochodów
- z magazynu 5 do źródła A₁ - 12 samochodów
- z magazynu 5 do źródła A₂ - 15 samochodów
- z magazynu 5 do źródła A₄ - 3 samochody

Dla porównania podaję w formie tabelarycznej łączną ilość km jaką muszą przejechać /wg założeń/ samochody z ładunkiem.

Porównując łączne ilości km, jakie przejadą samochody z ładunkiem i przy właściwym zorganizowaniu ich powrotu - bez ładunku, łatwo jest przekonać się o osiągniętych z tego tytułu oszczędnościach.

	M i e j s c a p r z e z n a c z e n i a					Samocho- dy	Łącznie kilometry
	1	2	3	4	5		
A_1	100 3	700 2	600 1	500 4	200 2	12	4.700
A_2	500 4	800 3	700 2	700 1	500 5	12 ¹⁵	9.000
A_3	300 1	200 2	200 4	300 1	600 3	11	3.600
A_4	200 10	100 10	300 5	400 10	400 20	55	16.500
Samocho- dy	18	17	12	16	30	93	
Łącznie km	4600	5200	4300	7000	12700		33.800

L i t e r a t u r a

1. M.J. Romakin - Elementy algebry liniowej i programowania liniowego.
2. J. Habr - Programowanie liniowe.
3. Notatki własne.

3/SL Nr 576 - dn. 10.5.67 r.