AKADEMIA SZTABU GENERALNEGO
im. gen. broni K. Świerczewskiego

KATEDRA Nr 7

Egz. Nr 26

ppłk dypl. Stefan MAKOWSKI

OBLICZANIE WSKAŹNIKÓW SKUTECZNOŚCI STRZELANIA ARTYLERII PRZECIWLOTNICZEJ

(Skrypt)

Biblioteka
Nr 5/1
im. gen. broni K. Świerczewskiego

BIBLIOTEKA GŁÓWNA
Nr inw. Arch
Wojsk Zbrojnych - Akademii im. Marsz

4307

1961

AKADEMIA SZTABU GENERALNEGO
im. gen. broni K. Świerczewskiego

KATEDRA Nr 7

Egz. Nr 26

ppłk dypl. Stefan MAKOWSKI

OBLICZANIE WSKAŹNIKÓW SKUTECZNOŚCI STRZELANIA ARTYLERII PRZECIWLOTNICZEJ

(Skrypt)

4307

1961

A K A D E M I A S Z T A B U G E N E R A L N E G O

im. gen. broni K. Świerczewskiego

KATEDRA NAZIEMNYCH SRODKOW
OBRONY PRZECIWLOTNICZEJ

26

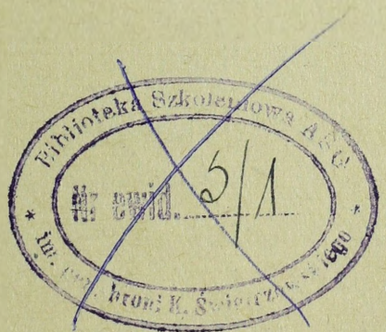
"ZATWIERDZAM"
SZEF KATEDRY

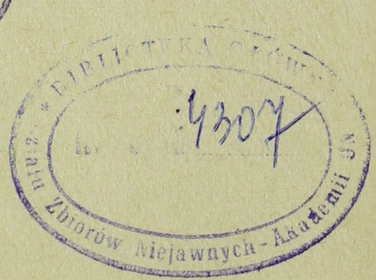
płk dypl.prof. Józef DAC

ppłk dypl. Stefan MAKOWSKI

OBLICZANIE WSKAZNIKOW SKUTECZNOSCI STRZELANIA ARTYLERII PRZECIWLOTNICZEJ

/Skrypt/





WARSZAWA-REMBERTOW STYCZEN 1961 r.

OBLICZANIE WSKAZNIKOW SKUTECZNOSCI STRZELANIA DO CELOW POWIETRZNYCH

Ogólne pojęcie o wskaźnikach skuteczności strzelania artylerii przeciwlotniczej

Przy rozstrzyganiu szeregu zagadnień praktycznych związanych ze strzelaniem, zastosowaniem bojowym artylerii przeciwlotniczej oraz technicznym doskonaleniem sprzętu wynika konieczność oceny skuteczności strzelania według kryteriów ilościowych. Skuteczności strzelania nie można oceniać na podstawie wyników pojedynczych strzelań, gdyż taki wynik ma zawsze charakter przypadkowy. Dlatego wskaźnik skuteczności strzelania należy określać na podstawie analizy rozkładu prawdopodobieństw możliwych wyników przyszłych strzelań.

Zasadniczym zadaniem artylerii przeciwlotniczej jest niszczenie celów powietrznych, które mogą być zarówno pojedyncze jak i grupowe. Przy strzelaniu do pojedynczego celu zadanie polega na zniszczeniu /rażeniu celu/. W wyniku strzelania zadanie to może być wykonane albo nie. Pod pojęciem rażenia samolotu rozumie się strącenie lub uszkodzenie samolotu, stąd wskaźnikiem skuteczności strzelania przy strzelaniu do celu pojedynczego będzie prawdopodobieństwo rażenia celu.

Jak wiadomo z teorii prawdopodobieństwa, znajomość prawdopodobieństwa pewnego zdarzenia nie umożliwia jednoznacznego ustalenia wyniku oddzielnego doświadczenia, za wyjątkiem szczególnych przypadków, gdy prawdopodobieństwo równe jest jedności lub zeru.
Przy każdej innej wartości prawdopodobieństwa zdarzenie może wystąpić przy danym doświadczeniu lub nie.

Jeżeli jednak będziemy rozpatrywali dużą ilość doświadczeń wykonywanych w jednakowych warunkach, to częstość wystąpienia zdarzenia będzie tym mniej różniła się od prawdopodobieństwa, im więcej wykona się doświadczeń.

Przy dostatecznie dużej ilości strzelań wykonanych w jednakowych warunkach, prawdopodobieństwo rażenia celu obliczone dla tych warunków będzie przejawiało się pod postacią częstości rażenia. Innymi słowy, prawdopodobieństwo rażenia celu charakteryzuje przyszłą częstość rażenia celu w dużej ilości strzelań, wykonywanych w podobnych warunkach /jednakowe warunki lotu celu, ten sam sposób strzelania i rodzaj ognia, ta sama amunicja itp/. Oczywiście im większe jest

prawdopodobieństwo rażenia celu, tym skuteczniejsze będzie strzelanie. Praktycznie przyjmuje się pewność rażenia za wystarczającą, jeśli prawdopodobieństwo rażenia celu zawiera się w granicach 0,85 - 0,95.

Przy strzelaniu do celu grupowego chodzi o zniszczenie jak największej ilości celów wchodzących w skład grupy. Straty zadane celowi grupowemu mierzy się ilością rażonych celów, która jest wielkością przypadkową. Dlatego wyczerpującą charakterystyką skuteczności strzelania do celu grupowego jest prawo rozkładu ilości rażonych celów grupy. Jednak obliczanie prawdopodobieństwa razenia różnej ilości celów w grupiejest utrudnione. Stąd, przy strzelaniu do celu grupowego, jako wskaźnik skuteczności strzelania, umożliwiający rozwiązanie szeregu zagadnień praktycznych przyjmuje się nadzieję matematyczną ilości rażonych celów.

Nadzieja matematyczna, jako wskaźnik skuteczności strzelania charakteryzuje średnią ilość rażonych celów przypadających na jedno strzelanie, przy wykonaniu dostatecznej ilości takich strzelań.

Oczywiście, im większa jest nadzieja matematyczna ilości rażonych celów, tym skuteczniejsze jest strzelanie.

Na podstawie przeprowadzonych rozważań można stwierdzić, że zasadniczymi wskaźnikami skuteczności strzelania artylerii przeciwlotniczej są:

- przy strzelaniu do celów pojedynczych - prawdopodobieństwo razenia celu;
- przy strzelaniu do celów grupowych - nadzieja matematyczna ilości rażonych celów.

Jak wspomniano uprzednio konieczność oceny skuteczności strzelania artylerii przeciwlotniczej wynika przy rozwiązywaniu szeregu zagadnień praktycznych jak np: wybór jak najbardziej celowego sposobu strzelania i metody prowadzenia ognia; porównawcza ocena sposobów przygotowania strzelania; obliczanie sił i środków artylerii przeciwlotniczej niezbędnych do wykonania określonych zadań; ustalanie wymogów taktyczno-technicznych w odniesieniu do sprzętu artylerii przeciwlotniczej itp.

Do rozwiązania tych zagadnień niewystarczająca jest ocena skuteczności strzelania tylko z punktu widzenia zado-

wanych strat i pewności strzelania. Często niezbędna jest ocena skuteczności strzelania pod względem średniego zużycia amunicji i czasu wykonania zadania. Jednak wymienione wskaźniki zależą od prawdopodobieństwa rażenia celu i od nadziei matematycznej ilości rażonych celów. W związku z tym wskaźniki te są podobne.

Prawdopodobieństwo rażenia celu i nadzieja matematyczna ilości rażonych celów - są to zasadnicze, lecz nie jedyne wskaźniki skuteczności strzelania. W odzielnych przypadkach dla porównawczej oceny, jako wskaźniki skuteczności strzelania można przyjmować prawdopodobieństwo trafienia, lub nadzieję matematyczną ilości trafień.

Jeśli na podstawie doświadczeń bojowych ustalono, że lotnictwo nieprzyjaciela zaprzestało wykonywanie zadania po poniesieniu określonych strat, to w danych warunkach jako wskaźnik skuteczności strzelania można przyjąć procentową ilość strat, które należy zadać nieprzyjacielowi.

Rozpatrzmy sposób określania wskaźników skuteczności strzelania. Załóżmy, że zamierza się wykonać strzelanie składające się z n kolejnych strzałów. Ponieważ strzelanie obarczone jest różnymi błędami układanie się pocisków /rozprysków/ będzie posiadało przypadkowy charakter.

Jeśli jako początek układu współrzędnych xz /przy strzelaniu uderzeniowym/ i xyz /przy strzelaniu rozpryskowym/ przyjmiemy punkt leżący w środku celu, to uchylenia wybuchów przy strzelaniu uderzeniowym i rozprysków przy strzelaniu rozpryskowym w wybranym układzie współrzędnych można rozpatrywać jako wektory i zupełnkowe $\bar{V}_i$ /i = 1,2 ... n/.

W ten sposób przy n strzałach otrzymamy system wektorów przypadkowych

$$\bar{V}_1, \bar{V}_2, \ldots, \bar{V}_i, \ldots, \bar{V}_n .$$

Gęstość prawdopodobieństwa tego układu oznaczamy przez

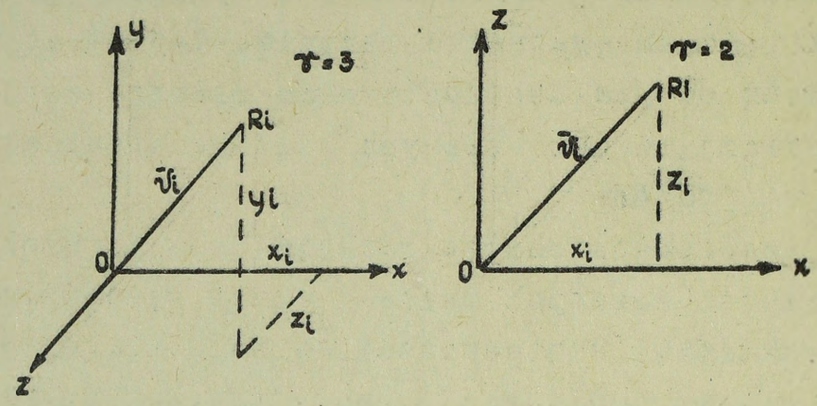
$$f(\bar{V}_1, \bar{V}_2 \ldots \bar{V}_i \ldots \bar{V}_n).$$

Przy czym przy strzelaniu uderzeniowym

$$\bar{V}_i = \bar{X}_i + \bar{Z}_i,$$

a przy strzelaniu rozpryskowym

$$\bar{V}_i = \bar{X}_i + \bar{Y}_i + \bar{Z}_i \quad /\text{rys. 1}/$$



Rys. 1 Prostokątny układ współrzędnych w przestrzeni / γ = 3/ i na płaszczyźnie / γ = 2/.

Dla każdego zbioru współrzędnych punktów rozprysków będzie istniało określone prawdopodobieństwo rażenia celu. Wielkość tego prawdopodobieństwa będzie zależna od rozmieszczenia rozprysków względem celu.

Oznaczmy warunkowe prawdopodobieństwo rażenia celu przy rozmieszczeniu rozprysków w punktach o współrzędnych $\bar{V}_1, \bar{V}_2 \ldots, \bar{V}_i \ldots, \bar{V}_n$ przez $G(\bar{V}_1, \bar{V}_2 \ldots, \bar{V}_i \ldots, \bar{V}_n)$ wówczas prawdopodobieństwo tego, że rozpryski ułożą się w podobny sposób względem celu /w punktach o współrzędnych $\bar{V}_1, \bar{V}_1, \bar{V}_2, \ldots \bar{V}_i, \ldots, \bar{V}_n$/ i cel przy tym będzie rażony, obliczymy stosując twierdzenie o iloczynie prawdopodobieństw

$$\varphi(\bar{V}_1, \bar{V}_2, \ldots, \bar{V}_i, \ldots \bar{V}_n)\, G(\bar{V}_1, \bar{V}_2, \ldots, \bar{V}_i, \ldots, \bar{V}_n) \times d\Omega_1 \ldots d\Omega_i \ldots d\Omega_n,$$

gdzie $d\Omega_i$ – elementarny obszar pojawienia się rozprysku przy i – tym strzale w okolicy końca wektora $\bar{V}_i$.

Całkowite prawdopodobieństwo rażenia celu obliczone niezależnie od położenia rozprysków względem siebie będzie równe

$$R = \int_{\Omega_1} \ldots (\gamma n) \ldots \int_{\Omega_n} \varphi(\bar{V}_1, \bar{V}_2, \ldots \bar{V}_n)\, G(\bar{V}_1, \bar{V}_2 \ldots \bar{V}_n)\, d\Omega_1 \ldots d\Omega_n \quad (1)$$

gdzie Ω_i – obszar, w granicach którego możliwe jest pojawienie się rozprysku przy i – tym strzale.

We wzorze /1/ symbolem $\int \ldots (\gamma n) \ldots \int$ oznaczono γ n – krotną całkę, przy czym dla przypadku strzelania uderzeniowego γ = 2, a dla przypadku strzelania rozpryskowego γ = 3.

Wzór /1/ jest ogólnym wzorem na prawdopodobieństwo rażenia samolotu przy n strzałach, zarówno przy strzelaniu uderzeniowym, jak i rozpryskowym, we wzorze tym funkcja $/\bar{V}_1, \bar{V}_2, \ldots, \bar{V}_i, \ldots, \bar{V}_n/$ charakteryzuje błędy strzelania, a funkcja $G/\bar{V}_1, \bar{V}_2, \ldots, \bar{V}_i, \ldots, \bar{V}_n/$ - prawo rażenia celu.
W ten sposób obliczanie prawdopodobieństwa rażenia celu za pomocą ogólnego wzoru /1/ dzieli się na dwa etapy:

- określenie funkcji $/\bar{V}_1, \bar{V}_2, \ldots, \bar{V}_i, \ldots, \bar{V}_n/$, t.j. jej charakteru i parametrów, w zależności od rodzaju sprzętu i warunków strzelania;
- określenie charakteru i parametrów prawa rażenia w zależności od charakteru celu, rodzaju pocisku i warunków strzelania.

Praktyczne sposoby obliczania prawdopodobieństwa rażenia celu i związane z tym założenia będą omówione w następnych rozdziałach osobno dla strzelania uderzeniowego i rozpryskowego.

Ogólny wzór na nadzieję matematyczną ilości rażonych celów ustalimy na podstawie następujących rozważań.

Załóżmy, że strzelanie prowadzi się do grupy składającej się z K samolotów. Prawdopodobieństwo rażenia j - tego samolotu oznaczamy przez $R_j/j = 1,2 \ldots K/$.
Przy strzelaniu do grupy, ilość rażonych samolotów S - jest wielkością przypadkową, która może przyjmować wartość od 0 do K,
$/Z = 0,1,2 \ldots K/$. Można ją przedstawić jako sumę wielkości przypadkowych t.j.

$$Z = Y_1 + Y_2 + \ldots + Y_j + \ldots + Y_K$$

Oczywiście wielkość przypadkowa Y_j może przyjmować tylko jedną z dwóch szczególnych wartości: $Y_{j,1}$ = 1/ j - ty samolot rażony/ i $Y_{j,2}$ = 0/ j - ty samolot nie rażony/.

Prawdopodobieństwo pierwszej szczególnej wartości równa się R_j, a drugiej $1-R_j$.
wówczas nadzieja matematyczna wielkości przypadkowej Y_j będzie równa

$$M Y_j = y_{j,1} \cdot R_j + y_{j,2} \cdot /1-R_j/ = 1 \cdot R_j + 0 \cdot /1-R_j/ = R_j$$

Nadzieję matematyczną ilości rażonych samolotów przy strzelaniu do grupy składającej się z k samolotów obliczymy stosując twierdzenie o sumie nadziei matematycznych

$$A = M[Z] = \sum_{j=1}^{K} M[Y_j] = \sum_{j=1}^{K} R_j \qquad /2/$$

Z tego wynika, że liczbowa wartość nadziei matematycznej ilości rażonych samolotów rowna jest sumie prawdopodobieństw rażenia samolotów grupy.

Zatem aby obliczyć nadzieję matematyczną ilości rażonych samolotów przy strzelaniu do grupy, trzeba uprzednio posługując się wzorem /1/ obliczyc prawdopodobieństwo ra.enia każdego samolotu w grupie.

CZESC I

OBLICZANIE WSKAZNIKOW SKUTECZNOSCI STRZELANIA UDERZENIOWEGO DO CELOW POWIETRZNYCH.

Jak już wspomniano uprzednio wskaźnikiem skuteczności strzelania do pojedynczych samolotów jest prawdopodobieństwo rażenia celu.

Prawdopodobieństwo rażenia celu zależy od warunków strzelania, ogólnej liczby oddanych strzałów n, dokładności strzelania i mocy burzącej pocisku. Dla ustalonych warunków strzelania prawdopodobieństwo rażenia celu można zapisać w następującej postaci:

$$R = \int \dots 2_n \dots \int G(y_1 z_1, \dots, y_n z_n) \times \qquad /1,1/$$
$$\times \varphi(y_1 z_1, \dots, y_n z_n)\, dy_1 \dots dy_n\, dz_1 \dots dz_n,$$

gdzie: n - ilość strzałów:

$\varphi(y_1 z_1, \dots, y_n z_n)$ - gęstość prawdopodobieństwa trafienia pocisków w punkty o współrzędnych y_1, z_1, ..., Y_n Z_n;

$G\,/y_1, z_1, \dots, Y_n, Z_n/$ - prawdopodobieństwo rażenia samolotu, obliczone w założeniu, że współrzędne punktów upadków posiadają wartości y_1, z_1, ..., Y_n, Z_n/ /w płaszczyźnie prostopadłej do średniego toru względnego/.

We wzorze /1,1/ funkcja $\varphi\,/y_1, z_1, \dots, Y_n\, Z_n/$ charakteryzuje dokładność strzelania w danych ustalonych warunkach, a funkcja $G/y_1, z_1, \dots, Y_n, Z_n/$ - wrażliwość samolotu na dany typ pocisków.

Przy ustalonych warunkach strzelania warunkowe prawdopodobieństwo $G\,/y_1, z_1 \dots, Y_n, Z_n/$ jest funkcją ilości trafień pocisków w cel i współrzędnych punktów trafienia. Oczywiście będzie ono równe zeru dla tych kombinacji wartości argumentów, przy których ani jeden z pocisków nie trafia w cel. Jeśli chociażby jedna z par wartości $/y_1, z_1/, \dots, /Y_n, Z_n/$ odpowiada trafieniu pocisku w cel,

funkcja $G/y_1, z_1, \ldots, Y_n, Z_n/$ posiada tę samą lub inną wartość zawartą między 0 i 1.

Wzór /1 . 1/ na obliczenie prawdopodobieństwa rażenia samolotu nie może być stosowany jako wzór roboczy z następujących powodów:

Obliczanie 2n - krotnej całki przy dużych wartościach n jest utrudnione; nie ma praktycznych możliwości określenia wrażliwości samolotu w postaci funkcji $G/y_1, z_1, \ldots y_n, z_n/$, zależnej od wielu argumentów. Dlatego, dla uproszczenia obliczeń prawdopodobieństwa rażenia samolotu zakłada się pewne uproszczenia. Zasadnicze uproszczenie polega na tym, że zakłada się zależność warunkowego prawdopodobieństwa rażenia samolotu tylko od ilości trafień pocisków m i niezależność od prawa rozrzutu. Uproszczenie to jest szczególnie uzasadnione w przypadku gdy wymiary celu są nieduże w porównaniu z rozrzutem pocisków w płaszczyźnie prostopadłej do średniego względnego toru, w wyniku czego można założyć równomierny i niezależny rozkład współrzędnych punktów upadków pocisków na powierzchni celu. Przyjęcie tego uproszczenia umożliwia zapisanie ogólnego wzoru na prawdopodobieństwo rażenia samolotu w następującej postaci:

$$R = \sum_{m=1}^{n} P_m G(m), \qquad /1 . 2/$$

gdzie Pm - prawdopodobieństwo trafienia w samolot m pocisków przy strzałach;

G/m/ - warunkowe prawdopodobieństwo rażenia samolotu przy m trafieniach.

Przy założonym uproszczeniu obliczanie prawdopodobieństwa rażenia samolotu dzieli się na dwa niezależne zadania: obliczanie prawdopodobieństwa trafienia założonej ilości pocisków w celu i obliczanie warunkowego prawdopodobieństwa rażenia celu przy zamierzonej ilości trafień.

Prawdopodobieństwo zamierzonej ilości trafień pocisków w samolot Pm określają warunki strzelania, błędy strzelania, geometryczne wymiary celu w płaszczyźnie prostopadłej do średniego względnego toru i ogólna ilość

oddanych strzałów n.

Warunkowe prawdopodobieństwo rażenia celu G/m/ zależy głównie od mocy pocisku, warunków spotkania się pocisku z celem i właściwości konstrukcyjnych celu /wytrzymałość samolotu/.

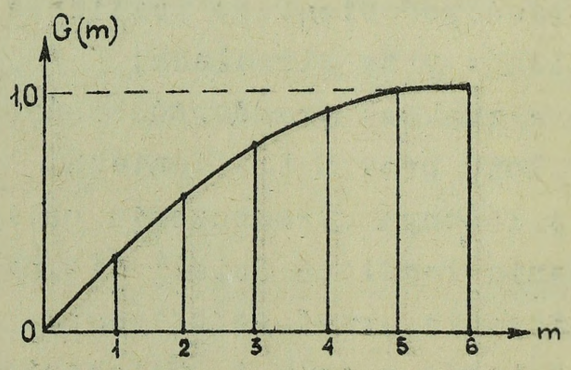
§ 1. Prawo rażenia samolotu przy strzelaniu artylerii przeciwlotniczej pociskami o działaniu uderzeniowym

Funkcję G/m/ nazywa się warunkowym prawem rażenia samolotu, lub po prostu prawem rażenia samolotu. Z tego wynika, że prawem rażenia samolotu przy strzelaniu uderzeniowym nazywa się zależność prawdopodobieństwa rażenia samolotu od ilości pocisków, które w niego trafiły przy określonych, ustalonych warunkach strzelania.

Prawo rażenia samolotu G/m/ jest zasadniczą charakterystyką skuteczności działania danego pocisku na cel przy ustalonych warunkach strzelania, do których głównie zalicza się kierunek strzelania i prędkość spotkania się pocisku z celem.

Na podstawie definicji prawa rażenia samolotu można ustalić następujące właściwości tego prawa:

1. Prawo rażenia samolotu jest nie malejącą funkcją ilości trafień m, tj. ze wzrostem ilości trafień m prawdopodobieństwo rażenia G/m/ rośnie lub pozostaje wielkością stałą /rys. 1 . 1/.



Rys. 1.1 Właściwości prawa rażenia.

2. Przy m = 0 G/0/ = 0 i przy $m \to \infty$ $\lim_{m \to \infty} G/m/ = 1$, ponieważ przy dużej ilości trafień prawdopodobieństwo rażenia celu będzie bardzo zbliżone do jedności.

Średnia niezbędna ilość trafień

Podstawową charakterystyką prawa rażenia samolotu G/m/ jest ω - średnia ilość pocisków niezbędnych do rażenia celu. Ponieważ cel może być różny przy różnej ilości trafień, to ilość trafień powodujących rażenie celu jest wielkością przypadkową.

Dlatego wielkość ω można określić stosując ogólne zasady określania nadziei matematycznej konkretnej wilkości przypadkowej, tj.

$$\omega = \sum_{m=1}^{n} m D_m, \qquad /1.3/$$

gdzie m - możliwe wartości wielkości przypadkowej ilości trafnych pocisków /m = 1, ..., n/;

$D_m = G/m/ - G/m-1/$ - prawdopodobieństwo rażenia samolotu właśnie przy m - tym trafieniu.

Jeśli rozwinąć wymienioną sumę, zastępując prawdopodobieństwo rażenia celu G/m/ prawdopodobieństwem nie rażenia celu $\bar{G}/m/ = 1 - G-m/$, to ostatecznie otrzymamy, że

$$\omega = \sum_{m=0}^{n} [1 - G(m)] \qquad /1.4/$$

górny przedział sumy "n ∞" ma tylko sens symboliczny, ponieważ praktycznie ograniczony jest tą wartością m, przy której wiłość G-m/ można przyjąć równą jedności. Średnia niezbędna ilość trafień ω jest dogodną charakterystyką prawa rażenia celu, a z kolei i skuteczności działania pocisku, ponieważ poglądowo przedstawia jaka jest wrażliwość celu na pociski danego typu.

Akumulacja uszkodzeń ——— Wykładnicze prawo rażenia.

Pod pojęciem "akumulacja uszkodzeń" rozumie się zjawisko polegające na tym, że samolot może być rażony w wyniku jednoczesnego działania dwóch lub więcej trafnych pocisków, z których ani jeden wzięty oddzielnie nie może razić celu. Odwrotnie, przy braku akumulacji cel może być rażony w wyniku jednego udanego trafienia. Przy braku akumulacji uszkodzeń samolot można przedstawić

jako składający się z dwóch wydatnie różniących się pod względem wrażliwości części; pierwsza część bardzo wrażliwa i trafienie w nią chociażby jednym pociskiem powoduje niechybne rażenie samolotu; druga praktycznie niewrażliwa i trafienie w nią nawet szeregu pocisków nie powoduje rażenia samolotu.

Oczywiście, że w danym przypadku $G/m/$ należy obliczać według zasad określenia prawdopodobieństwa chociażby jednego trafienia w pierwszą wrażliwą część przy m trafieniach w samolot.

Przy przyjętym uprzednio założeniu odnośnie jednakowo prawdopodobnego i niezależnego rozkładu pocisków na rzucie celu w płaszczyźnie prostopadłej do średniego względnego toru, prawdopodobieństwo trafienia pocisku w pierwszą /wrażliwą/ część pod warunkiem, że pocisk trafił w samolot, będzie równe względnej powierzchni tej części, t.j.

$$p = \frac{S_1}{S} \qquad /1.5/$$

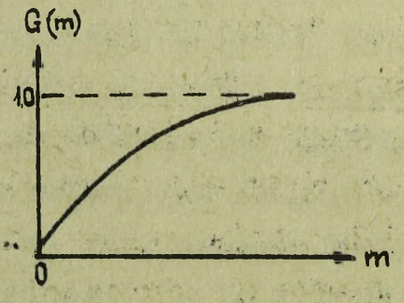
gdzie S_1 - powierzchnia rzutu wrażliwej części na płaszczyznę, prostopadłą do średniego względnego toru;

S - powierzchnia rzutu całego samolotu na tę samą płaszczyznę.

Wówczas warunkowe prawdopodobieństwo rażenia samolotu, równe prawdopodobieństwu chociażby jednego trafienia we wrażliwą część samolotu można obliczyć ze wzoru

$$G/m/ = 1 - /1 - p/^m \qquad /1.6/$$

Prawo rażenia samolotu typu /1.6/ nazywa się wykładniczym prawem rażenia, ponieważ $G/m/$ jest funkcją wykładniczą m /rys. 1.2/.



Rys. 1.2 Wykładnicze prawo rażenia samolotu przy strzelaniu uderzeniowym.

Jeśli oznaczymy $q = 1 - p$, to

$$G/m/ = 1 - q^m,$$

a średnia niezbędna ilość trafień dla wykładniczego prawa rażenia

$$\omega = \sum_{m=0}^{\infty} [1 - G(m)] = \sum_{m=0}^{\infty} q^m = \frac{1}{1-q} = \frac{1}{p}. \qquad /1.7/$$

Wykładnicze prawo rażenia samolotu można wyrazić za pomocą średniej, niezbędnej ilości trafień ω w następujący sposób:

$$G/m/ = 1 - /1 - \frac{1}{\omega}/^m \qquad /1.8/$$

Wzór /1.8/ potwierdza wysuniętą uprzednio tezę, że przy wykładniczym prawie rażenia, ω jednocześnie charakteryzuje prawo rażenia samolotu. Ta właściwość wykładniczego prawa rażenia upraszcza obliczanie prawdopodobieństwa rażenia samolotu.

W ogólnym przypadku akumulacji uszkodzeń, gdy prawo rażenia różni się od wykładniczego, wielkość ω nie jest wyczerpującą charakterystyką prawa rażenia i do obliczenia prawdopodobieństwa rażenia samolotu trzeba znać prawo rażenia $G/m/$.

W praktyce zawsze występuje akumulacja uszkodzeń, ponieważ realne samoloty posiadają nie tylko wymienione uprzednio elementy, lecz również takie elementy, których trafienie chociaż powoduje rażenie celu, to jednak wymaga więcej niż jednego trafienia.

Oprócz tego cel może posiadać również takie elementy, które trafione oddzielnie nie powodują rażenia samolotu, natomiast trafienie zespołu elementów powoduje pewne rażenie celu. Dlatego realne prawa rażenia z reguły nie mają charakteru wykładniczego.

Jeśli akumulacja uszkodzeń w ogólnym bilansie rażenia celu odgrywa małą rolę, to prawo rażenia będzie zbliżone do wykładniczego i w celu uproszczenia obliczeń można stosować wzór /1.8/.

Metoda obliczania prawa rażenia .

Obecnie prawa rażenia samolotów określa się sposobem eksperymentalno-obliczeniowym. Istota tego sposobu jest następująca:

Samolot, dla którego określa się prawo rażenia, umownie dzieli się na szereg części - działów według zasady:

1/ Każda część winna spełniać w składzie samolotu określoną funkcję /na przykład: silnik, zbiorniki z paliwem, kabina pilota, stery itd/;

2/ Wrażliwość każdej części powinna być w przybliżeniu jednorodna, tj. żywotność całego samolotu nie powinna w sposób istotny zależeć od tego w jaki punkt danej części trafił pocisk;

3/ Części dobiera się w ten sposób, że uszkodzenie jednej lub kombinacji części powoduje zniszczenie całego samolotu.

Wykonując strzelanie pojedynczymi strzałami do różnych części określa się dla każdej części, ilość trafień K_1 /i - numer części/, po których dana część ulega zniszczeniu. Przy tym zakłada się, że przy dowolnej liczbie trafień mniejszej od K_i dana część nie może być zniszczona.

Jeśli samolot składa się z takich części, które rażone oddzielnie nie powodują rażenia całego samolotu, ustala się tak zwaną rażącą kombinację części.

Na podstawie wyników strzelań dla każdej części ustala się ilość trafień pocisków danego kalibru, niezbędną do zniszczenia części.

W samolocie mogą być:

- części, które ulegają zniszczeniu przy każdym trafieniu /tak zwane "części jednego trafienia/;
- części, które przy praktycznie możliwej ilości trafień nie ulegają rażeniu /tak zwane "części nieograniczonej ilości trafień";
- części o pośredniej wrażliwości, dla których $K_i \geq 2$ /nazywane częściami dwóch, trzech itd trafień/.

Przy obliczaniu prawa rażenia samolotu G/m/ oprócz wartości K_i trzeba znać warunkowe prawdopodobieństwo trafienia pocisków w różne części, obliczane przy założeniu pewnego trafienia pocisku w samolot, te prawdopodobieństwa będziemy oznaczali przez p_i. W wyniku uprzedniego założenia odnośnie równomiernego i niezależnego rozkładu współrzędnych punktów trafienia pocisków na rzucie celu w płaszczyźnie, prostopadłej do średniego, względnego toru, warunkowe prawdopodobieństwa p_i będą równe względnym powierzchniom części tj.

$$P_i = \frac{S_i}{S} \qquad /1.9/$$

gdzie S_i - powierzchnia rzutu i - tej części;

S - powierzchnia rzutu całego samolotu.

Rzuty celu i jego części otrzymuje się fotografując z różnych kierunków modele ostrzeliwanego samolotu z zaznaczonymi granicami części.

Powierzchnie S_i i S określa się w wyniku rzutowania odpowiednich części fotografii. Następnie, znając ilość trafień K_i dla wszystkich części i umowne prawdopodobieństwo trafienia w te części P_i, oblicza się prawo rażenia samolotu G/m/. Przy obliczeniach wykorzystuje się podstawowe twierdzenie z teorii prawdopodobieństwa.

Oczywiście, że przy jednym trafieniu w samolot /m = 1/ prawdopodobieństwo rażenia samolotu będzie równe sumie warunkowych prawdopodobieństw trafienia w części, które trafione jednym pociskiem powodują rażenie całego samolotu.

Jeśli w samolot trafiły dwa pociski /m = 2/, to samolot będzie rażony nie tylko w przypadku trafienia w wymienione wyżej części, ale i przy trafieniu dwóch pocisków w część, do rażenia której, a co za tym idzie i całego samolotu potrzeba dwóch trafień, lub przy rozkładzie tych pocisków na dwóch częściach tworzących rażącą kombinację. Suma prawdopodobieństw tych zdarzeń, wyrażona przez warunkowe prawdopodobieństwo trafienia w części P_i, będzie równa warunkowemu prawdopodobieństwu rażenia samolotu G/2/.

Stąd dowolna rzędna prawa rażenia samolotu G/m/ będzie równa sumie warunkowych prawdopodobieństw sprzyjających rażeniu kombinacji trafień w części /uważając trafienie w jedną część za szczególny przypadek kombinacji/, przy m pewnych trafień w cel.

Przy dużej ilości części i dla dużych wartości m warunkowe prawdopodobieństwo rażenia samolotu G/m/ dogodniej jest obliczać za pomocą prawdopodobieństwa nie rażenia $\bar{G}/m/$.

t.j.

$$G/m/ = 1 - \bar{G}/m/ \qquad /1.10/$$

warunkowe prawdopodobieństwo nie rażenia samolotu $\bar{G}/m/$ jest równe sumie warunkowych prawdopodobieństw nierażących kombinacji.

Przy obliczaniu prawdopodobieństw nierażących kombinacji można wykorzystać rozkład:

$$/P_1 + P_2 + \ldots + P_i \ldots P_t/^m = \left(\sum_{i=1}^{t} p_i\right)^m =$$

$$= \sum C_m p_1^{m_1} p_2^{m_2} \ldots p_i^{m_i} \ldots p_t^{m_t} \quad 1\,(11)$$

$$/m_1 + m_2 + \ldots + m_t = m/$$

$$m_i = 1,2, \ldots\ldots, m/$$

gdzie: $C_m = \frac{m!}{m_1!m_2!\ldots m_i!\ldots m_t!} = \frac{m!}{\prod_{i=1}^{t} m_i!}$;

t - ilość części, na które podzielono samolot;

$m_1, m_2, \ldots, m_i, \ldots, m_t$ - ilość pocisków, które trafiły w pierwszą, drugą itd część.

przy czym $\sum_{i=1}^{t} m_i = m$

Przy praktycznych obliczeniach trzeba za pomocą wzoru /1.11/ obliczać tylko te człony, które określają prawdopodobieństwo nierażących kombinacji. Takimi członami będą te, które spełniają warunek, że każde z prawdopodobieństw P_i posiada wykładnik potęgowy mniejszy od wskaźnika, oznaczającego ilość trafień wystarczających do rażenia części. Podamy kilka gotowych wzorów roboczych na obliczenie G/m/.

1. Samolot podzielono na trzy części:
   - część wymagająca jednego trafienia /K=1/, warunkowe prawdopodobieństwo trafienia w tę część jest równe P_1;
   - Część wymagająca dwóch trafień /K=2/, warunkowe prawdopodobieństwo trafienia w tę część jest równe P_2;
   - część praktycznie niewrażliwą /K = ∞/, warunkowe prawdopodobieństwo trafienia w tę część jest równe P_∞.

Suma warunkowych prawdopodobieństw $p_1 + p_2 + p_\infty = 1$

Uszkodzenie pierwszej lub drugiej części powoduje rażenie całego samolotu.

Wówczas:

$$G/m/ = 1 - p_\infty^{m-1}/p_\infty + mp_2/ \qquad /1.12/$$

2. Samolot podzielono na cztery części, dla których niezbędne ilości trafień są odpowiednio równe: K = 1, K = 2, K = 3 i K = ∞, a warunkowe prawdopodobieństwo tra-

fienia w części - p_1, p_2, p_3 i p_∞ .
Uszkodzenie dowolnej z pierwszych trzech części powoduje rażenie całego samolotu
wówczas:

$$G/m/ = 1 - \left[p_\infty^m + m p_\infty^{m-1} p_3 + m p_\infty^{m-1} p_2 + \frac{m/m-1/}{2} p_\infty^{m-2} p_3^2 + \right.$$
$$\left. + m/m-1/ p_\infty^{m-2} p_3 p_2 + \frac{m!}{2/m-3/!} p_\infty^{m-3} p_3^2 p_2 \right] \qquad /1.13/$$

Na podstawie obliczonych wartości G/m/ za pomocą wzoru/1.4/ oblicza się średnią niezbędną ilość trafień ω . W tabeli /1/ podano średnie wartości ω , dla niektórych typów samolotów.

Tabela 1

Typ samolotu	Srednia wartość ω dla pocisku	
	37 - mm	57 - mm
B - 26	3,0	1,06
B - 36	3,7	2,2
B- 47	6,6	3,4
"CANBERRA"	3,4	1,9
F- 84	1,05	1,0
F - 86	1,06	1,0

Otrzymane wartości ω podstawia się do wzoru na wykładnicze prawo rażenia /1.8/ i sprawdza w jakim stopniu wykładnicze prawo rażenia różni się od prawa rażenia, obliczanego na podstawie danych doświadczalnych .
W tabeli /2/ podano przykład zmiany doświadczalnego prawa rażenia samolotu B-26 G/m/ na wykładnicze prawo rażenia $G^*/m/$ dla 57 - mm pocisków przy ω = 1,06.

Tabela 2

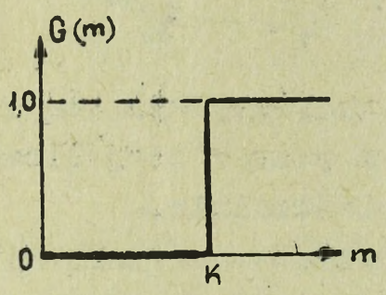
m.	G/m/	$G^*/m/ = 1-/1-\frac{1}{1,06}/^m$	$\Delta G^*/m/ - G/m/$
1.	0,9401	0,9418	0,0017
2.	0,9982	0,9966	0,0016
3.	0,9999	0,9998	0,0001
4.	1,000	1,000	0,0000

Oczywiście w danym przypadku rzeczywiste prawo rażenia bez poważniejszego błędu można zastąpić prawem wykładni-

czym przy ω = 1,06.

Należy zauważyć, że przy dużej ilości części i przy dużej rozpiętości zmiany m obliczanie prawa rażenia G/m/ przez bezpośredni dobór prawdopodobieństw sprzyjających rażeniu różnych kombinacji rozkładu ilości trafień i następne dodawanie ich jest bardzo trudne i pracochłonne, wymaga wiele czasu.

Pomimo tego, że omówiona metoda jest wystarczająco uzasadniona teoretycznie i daje wyniki możliwe do przyjęcia w praktyce, to jednak posiada pewne braki.



Rys. 1.3 Stopniowe prawo rażenia.

Przy wyprowadzaniu wyżej podanych wzorów zakładano, że jeśli w daną część trafi określona ilość k pocisków danego kalibru, to ulegnie on uszkodzeniu.

Do momentu uzyskania K trafień prawdopodobieństwo rażenia części jest równe zeru, natomiast przy K i większej ilości trafień prawdopodobieństwo rażenia części jest równe jedności, t.j. prawo rażenia części posiada charakter stopniowy /rys. 1.3/.

Siłą rzeczy taka postać prawa rażenia jest słuszna dla części, które pewnie razi jedno trafienie pocisku danego kalibru.

Dla części pośrednich / $K \geqslant 2$/ przyjęcie takiego założenia powoduje określone nieścisłości, ponieważ nie uwzględnianie akumulacji uszkodzeń przy trafieniu pocisków w różne części powoduje zaniżenie warunkowego prawdopodobieństwa rażenia samolotu przy $m \geqslant 2$, szczególnie w tych przypadkach, gdy części, na które podzielono samolot zawierają chociaż nieduże pod względem powierzchni, jednak bardzo wrażliwe elementy, które trafione powodują rażenie całego

samolotu. Nawet i w tym przypadku, gdy części pośrednie nie zawierają bardzo wrażliwych elementów nie można uważać, że część będzie rażona przy K trafieniach, niezależnie od współrzędnych punktów trafienia. Aby wyeliminować ten brak Instytut Naukowo Badawczy OPL w ZSRR opracował metodę przybliżonego uwzględniania akumulacji uszkodzeń. Istota tej metody jest następująca:

Załóżmy, że samolot składa się z t części.

Oznaczmy warunkowe prawdopodobieństwo rażenia i - tej części przy jednym, dwóch itd. pewnych trafieniach w część przez

$$q_i^{I}, q_i^{II}, \ldots, q_i^{(m)},$$

Prawdopodobieństwa te przyjmuje się równe częstościom rażenia i - tej części przy różnej liczbie trafień w część, co określa się doświadczalnie.

Warunkowe prawdopodobieństwa trafienia pocisku w części, przy pewnym trafieniu w samolot oznaczymy P_1, P_2, ..., P_i, ..., P_t. Załóżmy, że w samolot trafiło m pocisków, z czego pewną część m_1, w drugą - m_2 itd.

Za tym: $\sum_{i=1}^{t} m_i = m$

Przy założeniu równomiernego i niezależnego rozkładu punktów trafienia pocisków na powierzchni rzutu celu w płaszczyźnie, prostopadłej do średniego względnego toru, prawdopodobieństwo wspomnianego wyżej rozkładu pocisków będzie równe.

$$C_m p_1^{m_1} p_2^{m_2} \ldots p_i^{m_i} \ldots p_t^{m_t}$$

Prawdopodobieństwo nie rażenia samolotu pod warunkiem, że rażenie dowolnej z t części pociąga za sobą rażenie samolotu będzie równe.

$$C_m p_1^{m_1} \left[1 - q_1^{(m_1)}\right] p_2^{m_2} \left[1 - q_2^{(m_2)}\right] \ldots p_t^{m_t} \left[1 - q_t^{(m_t)}\right].$$

Prawdopodobieństwo nie rażenia samolotu, niezależnie od rozkładu trafnych m pocisków na częściach obliczymy za pomocą wzoru na prawdopodobieństwo całkowite

$$\sum C_m p_1^{m_1}\left[1-q^{(m_1)}\right] p_2^{m_2}\left[1-q_2^{(m_2)}\right]\ldots p_t^{m_t}\left[1-q_t^{(m_t)}\right],$$

$$/m_1 + m_2 + \ldots + m_t = m/$$

$$m_1 = 1,2 \ldots m/$$

a warunkowe prawdopodobieństwo rażenia samolotu przy m trafieniach

$$G/m/ = 1 - \sum C_m p_1^{m_1}\left[1-q_1^{(m_1)}\right] \times$$

$$/m_1 + m_2 + \ldots m_t = m/$$

$$m_1 = 1,2 \ldots m/$$

$$\times p_2^{m_2}\left[1-q_2^{(m_2)}\right]\ldots p_t^{m_t}\left[1-q_t^{(m_t)}\right]. \qquad /1.14/$$

Przyjmując różne wartości m, otrzymamy konkretne wzory na obliczenie G/m/. Przy m = 1

$$G(1) = 1-\sum_{i=1}^{t} p_i\left(1-q_i^{(1)}\right) = 1-\sum_{i=1}^{t} p_i\, q_i^{(1)},$$

Przy m = 2

$$G(2) = 1-\left[\sum_{i=1}^{t} p_i^2\left(1-q_i^{(II)}\right) + 2\sum_{i\neq j=1} p_i p_j\left(1-q_i^{(I)}\right)\left(1-q_j^{(I)}\right)\right],$$

Przy m = 3

$$G(3) = 1-\left[\sum_{i=1}^{t} p_i^3\left(1-q_i^{(III)}\right) + 3\sum_{i\neq j=1} p_i^2 p_j\left(1-q_i^{(III)}\right)\left(1-q_j^{(I)}\right) + \right.$$

$$\left. + 6\sum_{i\neq j\neq k=1} p_i p_j p_k\left(1-q_i^{(I)}\right)\left(1-q_j^{(I)}\right)\left(1-q_k^{(I)}\right)\right]$$

itd.

Nadzieję matematyczną ilości trafień, niezbędnych do rażenia samolotu, oblicza się ze wzoru

$$\omega = \sum_{m=0}^{m=\infty}\ \sum_{\substack{(m_1+m_2+\ldots+m_t=m)\\ m_i=1,2,\ldots,m}} C_m \prod_{i=1}^{t} p_i^{m_i}\left[1-q_i^{(m_i)}\right]. \qquad (1.15)$$

Dla uproszczenia obliczeń istnieje metoda, zgodnie z którą dla każdej części niepewnie rażonej przy jednym trafieniu, przyjmuje się dwa krańcowe założenia:

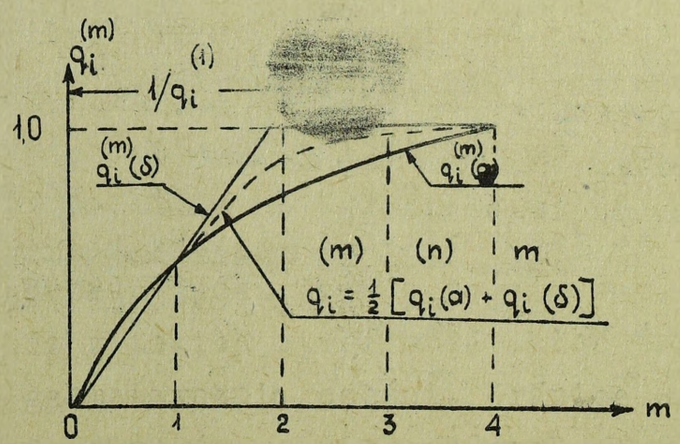
a/ Wszystkie kolejne rzędne prawa rażenia i - tej części przyjmuje się równe odpowiednim rzędnym wykładniczego prawa rażenia. Wykres sporządza się dla jednego punktu - końca rzędnej prawa rażenia części, przy $m_i = 1$, tj. dla i - tej części niepewnie rażonej przy jednym trafieniu przyjmuje się prawo wykładnicze o postaci

$$q_{i\,(a)}^{(m)} = 1 - (1 - q_i^{(I)})^m .$$

b/ Wszystkie kolejne nieznane rzędne na odcinku $1 < m \leqslant \frac{1}{q_i^{(I)}}$ prawo rażenia i - tej części niepewnie rażonej przy jednym trafieniu, są równe rzędnym liniowego prawa wyznaczonego przez znaną rzędną i równe jedności przy $m > \frac{1}{q_i^{(I)}}$

$$q_{i\,(\delta)}^{(m)} = \begin{cases} {}^m q_i^{(I)} & \text{przy } 1 < m \leqslant \frac{1}{q_i^{(I)}} \\ 1 & \text{przy } m > \frac{1}{q_i^{(I)}} \end{cases}$$

Jako odpowiednią wartość prawa rażenia i - tej części, niepewnie rażonej przy jednym trafieniu, przyjmuje się takie prawo, w którym każda szukana rzędna równa jest średniej wartości odpowiednich rzędnych, odpowiadających wspomnianym wyżej dwum krańcowym założeniom, t.j. dla i - tej części prawa rażenia będzie miało postać /rys. 1.4/.



Rys. 1.4 Uwzględnienie akumulacji uszkodzeń w częściach.

$$q_i^{(m)} = \begin{cases} \frac{1}{2}\left[m q_i^{(I)} + 1 - (1 - q_i^{(I)})^m\right] \text{ przy } 1 \leq m \leq \frac{1}{q_i^{(I)}} \\ 1 - \frac{1}{2}(1 - q_i^{(I)})^m \text{ przy } m > \frac{1}{q_i^{(I)}} \end{cases}$$

/1.16/

Na podstawie otrzymanych w ten sposób praw rażenia części $q_i^{(m)}$ /i = 1,2, ...,t/ i warunkowych prawdopodobieństw trafienia pocisku w części p_i, znanym z matematyki sposobem "kolejnych połączeń" oblicza się prawo rażenia całego samolotu.

Ponieważ jedna z granicznych rzędnych $q_{i\,(a)}^{(m)}$ dla dowolnej szukanej rzędnej prawa rażenia i - tej części $q_i^{(m)}$ stanowi rzędną prawa wykładniczego, odpowiadającego całkowitemu brakowi akumulacji uszkodzeń, a druga rzędna $q_{i\,(b)}^{(m)}$ odpowiada maksymalnie możliwej akumulacji uszkodzeń, to przyjęcie średnich wartości granicznych rzędnych jako odpowiednich wartości szukanych rzędnych jest uwzględnieniem wpływu akumulacji uszkodzeń.

Obecnie prowadzi się prace naukowo-badawcze mające na celu dalsze udoskonalenie metod określania praw rażenia samolotów przy strzelaniu uderzeniowym, ponieważ rozpatrzone wyżej metody nasuwają pewne zastrzeżenia.

Po pierwsze, metoda opiera się na założeniu, że pocisk, który trafił w daną część niszczy tylko w granicach jednej części, a trafienia w pograniczne elementy między częściami odrzuca się, jako mało prawdopodobne. Takie założenie można uważać za bardziej, lub mniej słuszne tylko w tych przypadkach, gdy określa się prawo rażenia dla pocisków o stosunkowo małych kalibrach, dla których promień działania burzącego jest stosunkowo nie-duży w porównaniu z wymiarami części.

Dla pocisków większych kalibrów takie założenie powoduje poważne nieścisłości, ponieważ faktycznie nie można zaliczyć każdego trafienia do dowolnej jednej części. Pocisk, który trafił w daną część z reguły spowoduje straty w innych częściach, przy czym straty będą w sposób istotny

zależne od położenia punktu trafienia. Aby zmniejszyć możliwe błędy przy określaniu praw rażenia, w oparciu o omówioną wyżej metodę trzeba dzieląc samolot na części, uwzględniać kaliber pocisków i na podstawie wyników strzelań udokładniać granice części.

Po drugie przy podziale samolotu na części przestrzega się dwóch zasadniczych postulatów: aby część w samolocie spełniała określoną funkcję i jednocześnie była jednorodna pod względem wrażliwości. W praktyce te dwa postulaty są w szeregu przypadków sprzeczne. Część lub agregat. spełniający w samolocie określoną funkcję z reguły nie jest jednorodny pod względem wrażliwości.

Dążnie do zachowania jednorodności części powoduje nadmierne zwiększenie ilości części, co z kolei powiększa rolę pierwszego, omówionego wyżej braku metody i w szeregu przypadków staje się praktycznie niemożliwe rozpatrywanie części jako samodzielnego elementu, spełniającego określoną funkcję w samolocie.

Po trzecie, założenie odnośnie istnienia krytycznej liczby trafień K, niekiedy może okazać się nieuzasadnione. Przede wszystkim odnosi się to do przypadków, gdy rozpatrywana część posiada chociaż nie-duży, ale bardzo wrażliwy element, który trafiony powoduje rażenie całego samolotu. Zaliczenie takiej części do liczby pośrednich O $K_1 > 1$ powoduje zaniżenie skuteczności działania pocisku na daną część i "funkcyjną" akumulację uszkodzeń.
Oprócz tego omówiona metoda nie uwzględnia możliwych przypadków odbitek pocisków.
Wymienione braki można wyeliminować stosując następującą metodę:

Zakłada się, że straty zadane samolotowi przez trafny pocisk i wpływ tych strat na żywotność całego samolotu w pełni określają współrzędne punktów trafienia.
Samolotu nie dzieli się na części według spełnianych przez nie funkcji, a na strefy różniące się stopniem wrażliwości na dany pocisk w określonych warunkach strzelania. Strefy te mogą obejmować jeden cały agregat samolotu, a inne częściowo. Każda z takich stref może składać się z kilku odosobnionych geometrycznie części. Granice stref ustala się na podstawie wyników doświadczalnych strzelań. W wyniku takich strzelań ustala się granice trzech stref: strefy bez-

warunkowego rażenia, strefy pośredniej, strefy nierażonej.

Pod pojęciem strefy bezwarunkowego rażenia rozumie się tę część rzutu samolotu na rozpatrywaną płaszczyznę, która trafiona jednym pociskiem w dowolny punkt powoduje bezwarunkowe rażenie samolotu. Przy określaniu granic tej strefy uwzględnia się promień działania burzącego pocisku.

Strefa pośrednia, lub strefa umownego rażenia, obejmuje takie części, odnośnie których można stwierdzić, że trafienie jednym pociskiem w dowolny punkt tej strefy jest niewystarczające do rażenia samolotu, jednak przy jednoczesnym trafieniu dwóch lub więcej pocisków w daną strefę samolot może być rażony w wyniku akumulacji uszkodzeń. Innymi słowy, do drugiej strefy zalicza się wszystkie części samolotu, których trafienie jednym pociskiem nie powoduje rażenia całego samolotu, natomiast kombinacja kilku trafień oddzielnie nie rażących może to spowodować.

Do strefy nierażonej zalicza się takie części samolotu, których trafienie dowolną, praktycznie możliwą ilością pocisków nie powoduje rażenia samolotu. Są to przede wszystkim wszystkie te części samolotu, których trafienie przy danym kierunku strzelania i danej prędkości spotkania się pocisku z celem powoduje odbitki pocisków.

Oprócz obszaru odbitek do strefy nierażonej zalicza się takie części samolotu, których trafienie nie powoduje rażenia samolotu.

Strefa bezwarunkowego rażenia /pierwsza/ i strefa nierażona /trzecia/, wzięte oddzielnie są jednorodne pod względem wrażliwości i wynik trafienia pocisków w te strefy nie zależy od współrzędnych punktów trafienia.

Aby określić prawo rażenia samolotu w całości, trzeba znać granice tych trzech stref na rzucie samolotu w płaszczyźnie prostopadłej do średniego względnego toru i prawo rażenia drugiej strefy, pod którym rozumie się warunkowe prawdopodobieństwo rażenia samolotu w warunkach, gdy w daną strefę trafiło akurat m pocisków.

Załóżmy, że znane są warunkowe prawdopodobieństwa trafienia w strefy /równe względnym powierzchniom stref/ p_I, p_{II}, p_{III} i prawo rażenia drugiej strefy G_{II} /m/.

Określimy warunkowe prawdopodobieństwo nie rażenia samolotu $\bar{G}$/m/ przy trafieniu m pocisków. Prawdopodobieństwo to

można obliczyć stosując wzór na prawdopodobieństwo całkowite. Ponieważ samolot może być nie rażony, tylko przy braku trafień w pierwszą strefę, to ustalimy szereg hipotez odnośnie rozkładu trafnych m pocisków w drugiej i trzeciej strefie:

- w drugą strefę nie trafił ani jeden pocisk, a w trzecią trafiły wszystkie /m pocisków/; prawdopodobieństwo tej hipotezy będzie równe p_{III}^{m} ;
- w drugą strefę trafił jeden pocisk, a pozostałe /m-1/ pociski trafiły w trzecią strefę; prawdopodobieństwo tej hipotezy będzie równe $C_m\, p_{II}\, p_{III}^{m-1}$;
- .....
- .....
- w drugą strefę trafiły wszystkie /m/ pociski, prawdopodobieństwo tej hipotezy będzie równe p_{II}^{m}.

Warunkowe prawdopodobieństwa nie rażenia celu przy tych hipotezach będą równe $1 - G_{II}/0/$, $1 - G_{II}/1/$,..., $1 - G_{II}/m/$. Zgodnie ze wzorem na prawdopodobieństwo całkowite, warunkowe prawdopodobieństwo nie rażenia samolotu będzie równe:

$$\bar{G}(m) = \sum_{k=0}^{m} C_m^k\, p_{II}^k\, p_{III}^{m-k} \left[1 - G_{II}(k)\right],$$

a warunkowe prawdopodobieństwo rażenia samolotu pod warunkiem trafienia w niego m pocisków, jako prawdopodobieństwo zdarzenia przeciwnego można obliczyć z wyrażenia:

$$G(m) = 1 - \sum_{k=0}^{m} G_m^k\, p_{II}^k\, p_{III}^{m-k} \left[1 - G_{II}(k)\right]$$

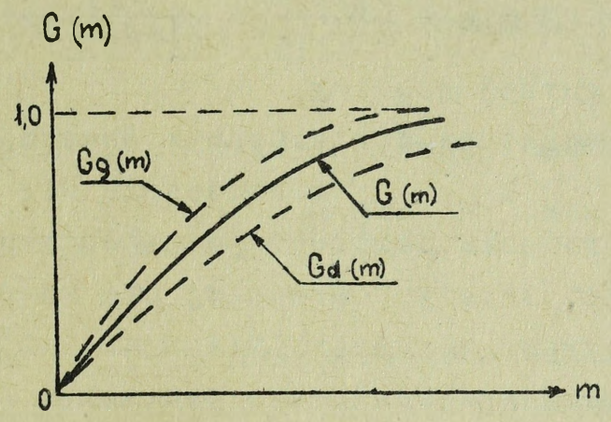
Ponieważ dla drugiej strefy $G_{II}/0/ = G_{II}/1/ = 0$, to

$$G(m) = 1 - \left\{ p_{III}^{m-1} \left(p_{III} + m p_{II}\right) + \sum_{k=2}^{m} \frac{m!}{k!(m-k)!}\, p_{II}^k\, p_{III}^{m-k} \left[1 - G_{II}(k)\right] \right\} \quad /1.17/$$

Ze wzoru /1.17/ widać, że na prawo rażenia całego samolotu G/m/ wpływa prawo rażenia drugiej strefy $G_{II}/m/$. Jeśli samolot zawiera tylko pierwszą i trzecią strefę, to nie ma akumulacji uszkodzeń i prawo rażenia samolotu może być wykładnicze. Jeśli jest druga strefa, to występuje akumulacja i prawo rażenia samolotu będzie się różniło od wykładniczego tym bardziej, im większa jest względna powierzchnia drugiej strefy.

Określimy granice prawa rażenia samolotu G/m/, górną $G_g/m/$

i dolną $G_d/m/$ w zależności od różnych przypuszczeń odnośnie prawa rażenia drugiej /pośredniej/strefy.
W tym celu wysuniemy dwa skrajne przypuszczenia odnośnie stopnia wrażliwości pośredniej strefy /rys. 1.5/.



Rys. 1.5 Wypośrodkowanie prawa rażenia samolotu przy uwzględnieniu akumulacji uszkodzeń.

1/ strefa pośrednia jest praktycznie niewrażliwa, to znaczy można ją zaliczyć do strefy nierażonej i $G_{II}/m/ = 0$ przy dowolnym m;
2/ stopień wrażliwości strefy pośredniej jest taki, że dowolne powtórne trafienie w tę strefę powoduje rażenie samolotu, t.j. $G_{II}/0/ = G_{II}/1/ = G_{II}/m/ = 1$ przy $m \geqslant 2$.

Prawo rażenia samolotu $G_d/m/$, odpowiadające pierwszemu przypuszczeniu, jest dolną granicą rzeczywistego prawa rażenia; prawo rażenia $G_g/m/$, odpowiadające drugiemu przypuszczeniu jest górną granicą.
Przy m = 1 obydwa prawa $G_d/m/$ i $G_g/m/$ pokrywają się, przy dużych wartościach m są rozbieżne.
Dalsze prawo rażenia $G_d/m/$ jest prawem wykładniczym typu

$$G_d/m/ = 1 - /1 - p_I/^m \qquad /1.18/$$

Ponieważ zgodnie z drugim przypuszczeniem przy $m \geqslant 2$ $G_{II}/m/ = 1$, to górne prawo rażenia będzie miało postać

$$G_g/m/ = 1 - p_{III}^{m-1} /p_{III} + mp_{II}/ \qquad /1.19/$$

Prawo rażenia typu /1.19/ będzie różniło się od wykładniczego tym więcej, im większa jest powierzchnia drugiej strefy P_{II}. Na rys. 1.5 przedstawiono graniczne prawa ra-

żenia samolotu. Rzeczywiście prawo rażenia G/m/ będzie zajmowało położenie pośrednie /rys. 1.5/. Średnia niezbędna ilość trafień do rażenia samolotu będzie równa:

$$\omega \max = \frac{1}{P_I},$$

co odpowiada dolnej granicy

$$\omega \min = \frac{1}{1-P_{III}} = \frac{P_{II}}{/1-P_{III}/^2},$$

co odpowiada górnej granicy.

Jeśli względna powierzchnia drugiej strefy jest nieduża, to ω_{max} i ω_{min} nieznacznie się różnią i udokładnienie prawa rażenia samolotu przez szczegółową analizę stopnia wrażliwości strefy pośredniej nie ma praktycznego znaczenia. W tym przypadku rzeczywiste prawo rażenia G/m/ można przyjąć za prawo wykładnicze o postaci

$$G/m/ = 1-/1 - \frac{1}{\omega}/^m,$$

gdzie

$$\omega = \frac{\omega_{max} + \omega_{min}}{2}$$

Jeśli względna powierzchnia drugiej strefy jest duża, to trzeba przeanalizować stopień jej wrażliwości tj. obliczyć uprzednio prawo rażenia drugiej strefy $G_{II}/m/$, a następnie za pomocą wzoru /1.17/ prawo rażenia całego samolotu.

§ 2. Prawdopodobieństwo rażenia samolotu przy jednym strzale.

Przeważnie prawdopodobieństwo rażenia samolotu przy jednym strzale służy jako wielkość początkowa przy obliczaniu wskaźników skuteczności strzelania, składającego się z n /gdzie $n > 1$/ strzałów, zarówno przy strzelaniu do pojedynczych jak i grupowych celów powietrznych. Przy tym oblicza się je jako warunkowe prawdopodobieństwo rażenia, t.j. p ustalonych wartościach błędów drugiej grupy.
Jeśli jednak do oceny skuteczności strzelania wystarczająca jest znajomość wskaźników przy jednym strzale, to prawdopodobieństwo rażenia samolotu oblicza się jako całkowite prawdopodobieństwo rażenia, t.j. z uwzględnieniem sumarycznego prawa błędów. Rozpatrzymy najpierw tem prosty przypadek. Zgodnie z ogólnym wzorem na prawdopodobieństwo rażenia samolotu w przypadku jednego strzału /m = 1/.

$$R_1 = P_1 \, G/1/, \qquad /2.1/$$

gdzie: P_1 – prawdopodobieństwo trafienia w cel przy jednym strzale;

$G/1/$ – prawdopodobieństwo rażenia samolotu przy jednym trafieniu;

Jeśli rozpatrywać cele, dla których prawo rażenia ma charakter wykładniczy, to o ile $G/1/ = \frac{1}{\omega}$,

$$R_1 = \frac{P_1}{\omega}, \qquad /2.2/$$

lub przy istnieniu systematycznego błędu

$$\bar{R}_1 (r_y, r_z) = \frac{p(r_y, r_z)}{\omega}, \qquad /2.3/.$$

gdzie $p(r_y, r_z)$ – prawdopodobieństwo trafienia przy jednym strzale z uwzględnieniem istnienia systematycznego błędu w położeniu środka rozkładu sumarycznych błędów względem celu;

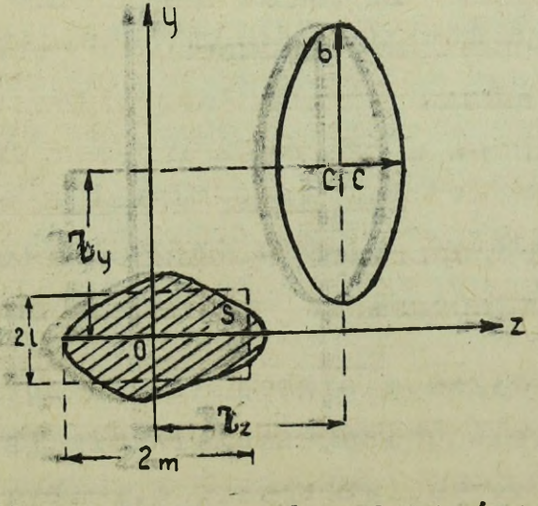
ω – średnia niezbędna ilość trafień.

Ze wzoru /2.3/ wynika, że przy określonej wartości ω, obliczanie prawdopodobieństwa rażenia samolotu sprowadza się w istocie do obliczania prawdopodobieństwa trafienia $p(r_y, r_z)$.

Ogólna postać wzoru na prawdopodobieństwo trafienia w samolot przy jednymstrzale przedstawia się następująco:

$$p(r_y, r_z) = \iint_{(S)} \varphi(y - r_y, z - r_z) \, dy \, dz, \qquad /2.4/$$

gdzie $\varphi(y - r_y, z - r_z)$ – gęstość rozkładu prawdopodobieństw punktów trafienia pocisków /prawo błędów strzelania/.



Rys. 2.1 Obliczanie prawdopodobieństwa trafienia w cel przy jednym strzale.

r_y, r_z - współrzędne środka zgrupowania punktów trafienia pocisków /rys. 2.1/;

S - powierzchnia rzutu samolotu na płaszczyznę, prostopadłą do wektora względnej prędkości.

Przy dowolnej konfiguracji celu obliczanie całki we wzorze /2.4/ jest bardzo skomplikowane i dlatego przy obliczaniu $p/r_y, r_z$ / wykorzystuje się jeden z przybliżonych sposobów. Jeśli jednostkowa elipsa prawa błędów strzelania w pełni pokrywa powierzchnię celu S, to stosuje się sposób porównania powierzchni, przy którym

$$p/r_y, r_z \; / = 0{,}203 \frac{S}{\pi bc}, \qquad /2.5/$$

gdzie b i c - główne środkowe uchylenia prawa błędów strzelania;

0,203 - prawdopodobieństwo trafienia w elipsę jednostkową.

Przy istnieniu systematycznych błędów i przy wymianach celu wychodzących poza granice elipsy jednostkowej można stosować sposób polegający na zastąpieniu celu o konkretnej konfiguracji przez prostokąt o bokach równoległych do głównych osi rozrzutu i wykorzystaniu tabel funkcji $\Phi(\beta)$. Przy tym sposobie

$$p(r_y, r_z) = \frac{1}{4}\left[\Phi\left(\frac{r_y + l}{b}\right) - \Phi\left(\frac{r_y - l}{b}\right)\right]\left[\Phi\left(\frac{r_z + m}{c}\right) - \Phi\left(\frac{r_z - m}{c}\right)\right] \qquad /2.6/$$

gdzie ł - połowa boku prostokąta, prostopadłego do osi z;

m - połowa boku prostokąta prostopadłego do osi y;

2 l x 2 m = S - wrażliwa powierzchnia celu.

Przy obliczaniu całkowitego prawdopodobieństwa trafienia przy jednym strzale $p/r_y, r_z$ / można stosować również inne przybliżone sposoby, na przykład sposób polegający na wykorzystaniu kołowej siatki rozrzutu. Wszystkie te sposoby są stosunkowo proste i zapewniają dokładność wystarczającą dla celów praktycznych. Jednak otrzymywane przy tych sposobach wyrażenia dla funkcji $p/r_y, r_z$ / utrudniają zastosowanie ich do obliczania praw-

dopodobieństwa rażenia samolotu kilkoma strzałami. Dlatego stosuje się je tylko w tych przypadkach, gdy interesuje nas całkowite prawdopodobieństwo rażenia samolotu przy jednym strzale, t.j. gdy dla celów praktycznych wystarczająca jest znajomość wartości wskaźników skuteczności strzelania przy jednym strzale.

Aby wyprowadzić wzór na warunkowe prawdopodobieństwo **rażenia samolotu przy jednym strzale, przydatny do obliczenia** prawdopodobieństwa rażenia samolotu przy n strzałach rozpatrzymy przybliżony sposób, który będziemy nazywali sposobem obliczenia warunkowego prawdopodobieństwa rażenia samolotu przy jednym **strzale z uwzględnieniem rozrzutu, poprawionego o wymiary celu.**

Załóżmy, że ogólną korelacją zależności błędów, obarczających strzelanie uderzeniowe zastąpiono układem dwóch grup błędów: pierwsza grupa - niepowtarzające się błędy, druga grupa - powtarzające się błędy.
Początkowo, dla uproszczenia załóżmy, że błędów systematycznych brak.
Oznaczymy:

$\varphi_1(y - y_{II},\ z - z_{II})$ - gęstość rozkładu prawdopodobieństw błędów pierwszej grupy z środkiem rozrzutu w punkcie o współrzędnych Y_{II}, Z_{II} /t.j. powtarzający się błąd przyjął określoną wartość/;

$R_1\ /Y_{II},\ Z_{II}/$ - prawdopodobieństwo rażenia samolotu jednym strzałem, pod warunkiem , że błąd drugiej grupy przyjął określoną wartość.

Po uwzględnieniu tych oznaczeń warunkowe prawdopodobieństwo trafienia w cel można wyrazić za pomocą wzoru:

$$P(Y_{II}, Z_{II}) = \iint_{(S)} \varphi_1(y - y_{II},\ z - z_{II})\, dy\, dz \qquad /2.7/$$

Jeśli rozpatrzeć funkcję

$$f(y,z) = \frac{1}{S} \qquad /2.8/$$

przedstawiającą gęstość równomiernego rozkładu przypadkowego punktu w granicach rzutu celu S , a następnie wyrażenie /2.7/ przepisać w postaci

$$P/Y_{II},\ z_{II}/ = \iint\limits_{(S)} \varphi 1(y-y_{II},\ z-z)\ f\ (y,z)\ dydz \qquad /2.9/$$

której słuszność jest oczywista, to całkę w wyrażeniu /2.9/ można rozpatrywać jako kompozycję normalnego rozkładu φ_1 z równomiernym f .

Oznaczmy tę kompozycję przez $\Phi\ /Y_{II},\ Z_{II}/$, tj.

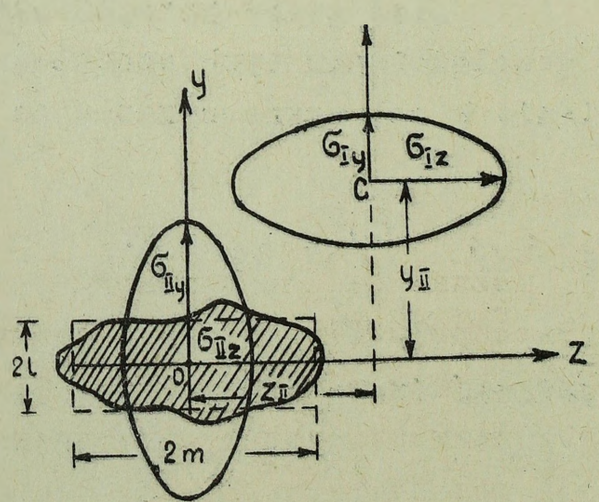
$$\iint\limits_{(S)} \varphi 1(y-y_{II},\ z-z_{II})\ f\ (y,z)\ dydz = \Phi\ (Y_{II},\ Z_{II}) \qquad /2.10/$$

wówczas:

$$P\ /Y_{II},\ Z_{II}/ = S\ \Phi\ /Y_{II},\ Z_{II}/ \qquad /2.11/$$

Z teorii prawdopodobieństwa wiadomo, że kompozycja normalnego i równomiernego rozkładu będzie tym bardziej zbliżona do rozkładu normalnego im większe będą charakterystyki rozrzutu rozkładu normalnego od charakterystyk rozkładu równomiernego i odwrotnie. Dlatego w określonych warunkach $\Phi\ /Y_{II},\ Z_{II}/$ można zastąpić gęstością normalnego rozkładu $\varphi^*/Y_{II},\ Z_{II}/$, dla którego charakterystyki rozrzutu, po zastąpieniu realnej konfiguracji celu prostokątem 2 l x 2 m /rys. 2.2/ oblicza się następująco:

$$\left.\begin{aligned} \sigma^*_{I,y} &= \sqrt{\sigma^2_{I,y} + \left(\frac{l}{\sqrt{3}}\right)^2} \\ \sigma^*_{I,z} &= \sqrt{\sigma^2_{I,z} + \left(\frac{m}{\sqrt{3}}\right)^2} \end{aligned}\right\} \qquad /2.12/$$



Rys. 2.2. Obliczanie prawdopodobieństwa rażenia samolotu w układzie dwóch grup błędów.

Za tym wyrażenie dla warunkowego prawdopodobieństwa trafienia przy jednym strzale dla przypadku, gdy

$$\Phi\left(y_{\text{II}}, z_{\text{II}}\right) \approx \varphi^{*}_{\text{I}}\left(y_{\text{II}}, z_{\text{II}}\right), \qquad /2.13/$$

Można napisać w postaci:

$$p\left(y_{\text{II}}, z_{\text{II}}\right) \approx S\,\varphi^{*}_{\text{I}}\left(y_{\text{II}}, z_{\text{II}}\right), \qquad /2.14/$$

gdzie: $\varphi^{*}_{1}/Y_{\text{II}}, Z_{\text{II}}/$ - gęstość rozkładu prawdopodobieństw błędów pierwszej grupy, poprawiona o wymiary celu /stąd nazwa sposobu/.

Oczywiście warunkowe prawdopodobieństwo rażenia samolotu przy jednym strzale.

$$R_1/Y_{\text{II}}, Z_{\text{II}}/ \approx \frac{S}{\omega}\,\varphi^{*}_{1}\,/Y_{\text{II}}, Z_{\text{II}}/ \qquad /2.15/.$$

lub w postaci rozwiniętej

$$R_1\,/Y_{\text{II}}, Z_{\text{II}}/ \approx \frac{S}{2\pi\omega\sqrt{\sigma^{2}_{\text{I}},y+\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right)^{2}}\sqrt{\sigma^{2}_{\text{I}},z+\left(\frac{m}{\sqrt{3}}\right)^{2}}} \times$$

$$\times e^{-\frac{1}{2}\left[\frac{y_{\text{II}}^{2}}{\sigma^{2}_{\text{I}},y+\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right)^{2}}+\frac{z^{2}_{\text{II}}}{\sigma^{2}_{\text{I}},z+\left(\frac{m}{\sqrt{3}}\right)^{2}}\right]} \qquad /2.16/$$

Przy istnieniu systematycznego błędu $\bar{r}=\bar{r}_y+\bar{r}_z$ wzór /2.16/ przyjmie następującą postać:

$$R_1\,/Y_{\text{II}}-r_y, z_{\text{II}}-r_z)=\frac{S}{2\pi\omega\sqrt{\sigma^{2}_{\text{I}},y+\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right)^{2}}\sqrt{\sigma^{2}_{\text{I}},z+\left(\frac{m}{\sqrt{3}}\right)^{2}}} \times$$

$$\times e^{-\frac{1}{2}\left[\frac{(y_{\text{II}}-r_y)^{2}}{\sigma^{2}_{\text{I}},y+\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right)^{2}}+\frac{(z_{\text{II}}-r_z)^{2}}{\sigma^{2}_{\text{I}},z+\left(\frac{m}{\sqrt{3}}\right)^{2}}\right]} \qquad /2.17/$$

Wzór /2.17/ można również wykorzy[illegible] do obliczania całkowitego prawdopodobieństwa rażenia samolotu przy jednym strzale, przy tym zamiast $\sigma_{\text{I},y}$ i $\sigma_{1,z}$ trzeba brać charakterystyki rozrzutu sumarycznego prawa błędów $\sigma_{c,y}$ i $\sigma_{c,z}$ i wówczas

$$R_1(r_y, r_z) = \frac{S}{2\pi\omega\sqrt{\sigma_{c,y}^2 + \left(\frac{l}{\sqrt{3}}\right)^2}\sqrt{\sigma_{c,z}^2 + \left(\frac{m}{\sqrt{3}}\right)^2}} \times$$

$$\times e^{-\frac{1}{2}\left[\frac{r_y^2}{\sigma_{c,y}^2 + \left(\frac{l}{\sqrt{3}}\right)^2} + \frac{r_z^2}{\sigma_{c,z}^2 + \left(\frac{m}{\sqrt{3}}\right)^2}\right]} \qquad /2.18/$$

W danym przypadku założenie /2.13/ jest bardziej uzasadnione, ponieważ dla większości przypadków strzelania artylerii przeciwlotniczej małego kalibru $\sigma_{c,y} \gg \frac{l}{\sqrt{3}}$ i $\sigma_{c,z} \gg \frac{m}{\sqrt{3}}$ jeśli nie ma systematycznego błędu, tj. środek rozrzutu błędów strzelania pokrywa się z geometrycznym środkiem celu /rys. 2.2/, to prawdopodobieństwo rażenia samolotu będzie największe /przy wszystkich powstałych jednakowych warunkach/ i równe

$$R_0 = \frac{S}{2\pi\omega\sqrt{\sigma_{c,y}^2 + \left(\frac{l}{\sqrt{3}}\right)^2}\sqrt{\sigma_{c,z}^2 + \left(\frac{m}{\sqrt{3}}\right)^2}} \qquad /2.19/$$

Uwzględniając /2.19/ wzór na warunkowe prawdopodobieństwo rażenia samolotu /2.16/ można przepisać w postaci

$$R_1(Y_{II}, Z_{II}) = R_0 e^{-\frac{1}{2}\left[\frac{}{\sigma_{I,y}^2 + \left(\frac{l}{\sqrt{3}}\right)^2} + \frac{}{\sigma_{I,z}^2 + \left(\frac{m}{\sqrt{3}}\right)^2}\right]} \qquad /2.20/$$

Przy obliczaniu warunkowego prawdopodobieństwa rażenia samolotu, obliczając R_0 trzeba zamiast $\sigma_{c,y}$ i $\sigma_{c,z}$ brać $\sigma_{I,y}$ i $\sigma_{I,z}$.

Obecnie przedstawimy praktyczne wykorzystanie wzoru /2.18/ do obliczania prawdopodobieństwa rażenia samolotu przy jednym strzale.

Przykład:

Załóżmy, że zamierza się oddać strzał z 57 mm armaty przeciwlotniczej S-60 z celownikiem do samolotu B-57, dla którego ω = 1,8 trafienia i S = 78 m^2 /2 l = 6 m i 2 m 13 m/. Charakterystyki prawa błędów obarczających strzelanie z celownikiem r_z = - 15,9 m, r_y = 8,2 m, $\sigma_{c,y}$ = 9082 m^2 i $\sigma_{c,z}$ = 14928 m^2. Obliczyć całkowite prawdopodobieństwo rażenia samolotu przy jednym strzale.

Rozwiązanie:

1. Znajdujemy dyspersje sumarycznego prawa błędów, poprawione o wymiary celu

$$\sigma^2_{c,y} + \left(\frac{l}{\sqrt{3}}\right)^2 = 9082 + \left(\frac{3}{\sqrt{3}}\right)^2 = 9085 \text{ m}^2 ;$$

$$\sigma^2_{c,z} + \left(\frac{m}{\sqrt{3}}\right)^2 = 14928 + \left(\frac{6,5}{\sqrt{3}}\right)^2 = 14942 \text{ m}^2.$$

Odpowiadające im średnie kwadratowe błędy

$$\sqrt{\sigma^2_{c,y} + \left(\frac{l}{\sqrt{3}}\right)^2} = \sqrt{9085} = 95,32 \text{ m},$$

$$\sqrt{\sigma^2_{c,z} + \left(\frac{m}{\sqrt{3}}\right)^2} = \sqrt{14942} = 122,2 \text{ m}$$

W danym przypadku "poprawka" jest bardzo mała i można jej nie uwzględniać.

2. Zapisujemy wzór /2.18/ w postaci dogodniejszej do obliczeń, w tym celu wykorzystujemy tabelę funkcji Φ /Z/ = $= \frac{2}{\sqrt{\pi}} e^{-z^2}$

$$R_1(r_y, r_z) = \frac{S}{8\omega\sqrt{\sigma^2_{c,y} + \left(\frac{l}{\sqrt{3}}\right)^2}\sqrt{\sigma^2_{c,z} + \left(\frac{m}{\sqrt{3}}\right)^2}} \Phi(z_1)\Phi(z_2),$$

gdzie $z_1 = \frac{r_y}{\sqrt{2}\sqrt{\sigma^2_{c,y} + \left(\frac{l}{\sqrt{3}}\right)^2}} = \frac{8,2}{\sqrt{2}\sqrt{0,085}} = 0,061$

$$z_2 = \frac{r_z}{\sqrt{2}\sqrt{\sigma^2_{c,z} + \left(\frac{m}{\sqrt{3}}\right)^2}} = \frac{15,9}{\sqrt{2}\sqrt{14942}} = 0,092$$

3. Znajdujemy wartość funkcji $\Phi(z_1)$ i $\Phi(z_2)$

$$\Phi(z_1) = 1,124 ; \quad \Phi(z_2) = 1,119$$

4. Obliczamy całkowite prawdopodobieństwo rażenia celu

$$R_1/r_y, r_z / = \frac{78}{8 \cdot 1,8\sqrt{9085}\sqrt{14942}} \cdot 1,124 \cdot 1,119 = 0,0006 \%$$

§ 3. Prawdopodobieństwo rażenia samolotu serią automatycznego ognia

Ogólne wyrażenie dla prawdopodobieństwa rażenia samolotu serią w układzie dwóch grup błędów.

Załóżmy, że do samolotu zamierza się oddać serię składającą się z n strzałów. W układzie dwóch grup błędów serię można przyjąć za salwę, posiadającą środek ugrupowania. Położenie tego środka ugrupowania względem celu określa błąd drugiej grupy /błąd powtarzający się przy każdym strzale/.

Załóżmy, że prawdopodobieństwo rażenia samolotu i - tym strzałem serii /i = 1,2, ..., n/ przy danym położeniu środka ugrupowania, tj. w warunkach, gdy błąd drugiej grupy przyjął określoną wartość Y_{II}, Z_{II}, jest znane i równe

$$R_i\,/Y_{II},\ Z_{II}/$$

Wówczas warunkowe prawdopodobieństwo nie rażenia samolotu tym samym strzałem serii będzie równe

$$1 - R_i\,/Y_{II},\ Z_{II}/,$$

a warunkowe prawdopodobieństwo nie rażenia samolotu wszystkimi strzałami serii można przedstawić jako

$$\prod_{i=1}^{n}\left[1-R_i\left(y_{II}, z_{II}\right)\right].$$

Zatem warunkowe prawdopodobieństwo rażenia samolotu serią można wyrazić wzorem

$$R\left(y_{II}, z_{II}\right) = 1-\prod_{i=1}^{n}\left[1-R_i\left(y_{II}, z_{II}\right)\right]. \qquad /3.1/$$

Jeśli warunkowe prawdopodobieństwo rażenia samolotu od strzału do strzału nie zmienia się lub zmienia się nieznacznie, to wzór /3.1/ można przedstawić w postaci:

$$R\left(y_{II}, z_{II}\right) = 1-\left[1-R_1\left(y_{II}, z_{II}\right)\right]^n \qquad /3.2/$$

Całkowite prawdopodobieństwo rażenia samolotu serią obliczymy stosując twierdzenie o prawdopodobieństwie całkowitym

$$R\left(r_y, r_z\right) = \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} \varphi_{II}\left(y_{II}-r_y, z_{II}-r_z\right)\left\{1-\left[1-R_1\left(y_{II}, z_{II}\right)\right]^n\right\} dy_{II}\, dz_{II} \qquad (3.3)$$

lub krócej

$$R(r_y, r_z) = \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} \varphi_{II}(y_{II} - r_y, z_{II} - r_z)\, R(y_{II}, z_{II})\, dy_{II}\, dz_{II} \qquad /3.4/$$

gdzie:

$$R(y_{II}, z_{II}) = 1 - \left[1 - R_1(y_{II}, z_{II})\right]^n = 1 - \left[1 - R_0 e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{y_{II}^2}{\sigma_{I,y}^{*2}} + \frac{z_{II}^2}{\sigma_{I,z}^{*2}}\right)}\right]^n \qquad /3.5/$$

Całki we wzorze /3.4/ nie można sprowadzić do znanych funkcji. Obecnie opracowano szereg sposobów przybliżonego obliczenia tej całki. Omówimy tylko te sposoby, które stosuje się w praktycznych badaniach skuteczności strzelania artylerii przeciwlotniczej małego kalibru.

Sposób Aleksiejewa

Zapiszmy ogólne wyrażenie dla prawdopodobieństwa rażenia samolotu serią /3.3/ w postaci rozwiniętej

$$R(r_y, r_z) = 1 - \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{2\pi\, \sigma_{II,y}\, \sigma_{II,z}}\, e^{-\frac{1}{2}\left[\frac{(y_{II} - r_y)^2}{\sigma_{II,y}^2} + \frac{(z_{II} - r_z)^2}{\sigma_{II,z}^2}\right]} \times$$

$$\times \left\{1 - R_0 e^{-\frac{1}{2}\left[\frac{y_{II}^2}{\sigma_{I,y}^{*2}} + \frac{z_{II}^2}{\sigma_{I,z}^{*2}}\right]}\right\}^n dy_{II}\, dz_{II} \qquad /3.6/$$

Aleksiejew zaproponował, aby dwumian n - tego stopnia we wzorze /3.6/ przedstawić w postaci sumy członów szeregu rozłożenia dwumianu Newtona, tj.

$$\left\{1 - R_0 e^{-\frac{1}{2}\left[\frac{y_{II}^2}{\sigma_{I,y}^{*2}} + \frac{z_{II}^2}{\sigma_{I,z}^{*2}}\right]}\right\}^n =$$

$$= \sum_{i=0}^{n} (-1)^i \frac{n!}{i!(n-i)!} R_0^i e^{-\frac{1}{2} i \left[\frac{y_{II}^2}{\sigma_{I,y}^{*2}} + \frac{z_{II}^2}{\sigma_{I,z}^{*2}}\right]} \qquad /3.7/$$

Wówczas wzór /3.6/ przyjmie postać

$$R(r_y, r_z) = 1 - \sum_{i=0}^{n} (-1)^i \frac{n!}{i!(n-i)!} R_0^i \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{2\pi \sigma_{\text{II},y}\, \sigma_{\text{II}\,z}} \times$$

$$\times e^{-\frac{1}{2}\left[\frac{(y_{\text{II}} - r_y)}{\sigma^2_{\text{II},y}} + \frac{(z_{\text{II}} - r_z)^2}{\sigma^2_{\text{II},z}}\right]} e^{-\frac{1}{2} i \left[\frac{y^2_{\text{II}}}{\sigma^{*2}_{\text{I},y}} + \frac{z^2_{\text{II}}}{\sigma^{*2}_{\text{I},z}}\right]} dy_{\text{II}}\, dz_{\text{II}}$$

/3.8/

Mnożąc i dzieląc całkę we wzorze /3.8/ przez

$$2\pi \frac{\sigma^*_{\text{I},y}}{\sqrt{i}} \cdot \frac{\sigma^*_{\text{I},z}}{\sqrt{i}},$$

/3.9/

otrzymamy

$$R(r_y, r_z) = 1 - \sum_{i=0}^{n} (-1)^i \frac{n!}{i!(n-i)!} R_0^i\, 2\pi \frac{\sigma^*_{\text{I},y}}{\sqrt{i}} \frac{\sigma^*_{\text{I},z}}{\sqrt{i}} \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{2\pi \sigma_{\text{II},y}\, \sigma_{\text{II},z}} \times$$

$$\times e^{-\frac{1}{2}\left[\frac{(y_{\text{II}} - r_y)^2}{\sigma^2_{\text{II},y}} + \frac{(z_{\text{II}} - r_z)^2}{\sigma^2_{\text{II},z}}\right]} \cdot \frac{1}{2\pi \frac{\sigma^*_{\text{I},y}}{\sqrt{i}} \frac{\sigma^*_{\text{I},z}}{\sqrt{i}}} \times$$

$$\times e^{-\frac{1}{2}\left[\frac{y^2_{\text{II}}}{\left(\frac{\sigma^*_{\text{I},y}}{\sqrt{i}}\right)^2} + \frac{z^2_{\text{II}}}{\left(\frac{\sigma^*_{\text{I},z}}{\sqrt{i}}\right)^2}\right]} dy_{\text{II}}\, dz_{\text{II}}$$

Całka tego wyrażenia stanowi kompozycję dwóch normalnych rozkładów, dlatego

$$R(r_y, r_z) = 1 - \sum_{i=0}^{n} (-1)^i \frac{n!}{i!(n-1)!} R_0^i\, 2\pi \frac{\sigma^*_{\text{I},y}}{\sqrt{i}} \frac{\sigma^*_{\text{I},z}}{\sqrt{i}} \times$$

$$\times \frac{}{2\pi \sqrt{\sigma^2_{\text{II},y} + \left(\frac{\sigma^*_{\text{I},y}}{\sqrt{i}}\right)^2} \sqrt{\sigma^2_{\text{II},z} + \left(\frac{\sigma^*_{\text{I},z}}{\sqrt{i}}\right)^2}} \times$$

$$- \frac{1}{2} \left[\frac{r_y^2}{\sigma^2_{\text{II},y} + \left(\frac{\sigma^*_{\text{I},y}}{\sqrt{i}}\right)^2} + \frac{}{\sigma^2_{\text{II},y} + \left(\frac{\sigma^*_{\text{I},z}}{\sqrt{i}}\right)^2} \right]$$

$$\times e \qquad /3.10/$$

Jeśli oznaczymy

$$\frac{\sigma_{\text{II},y}}{\sigma^*_{\text{I},y}} = \lambda_y, \text{ a } \frac{\sigma_{\text{II},z}}{\sigma^*_{\text{I},z}} = \lambda_z, \qquad /3.11/$$

to po pewnych przekształceniach

$$\left.\begin{aligned} &\sqrt{\sigma^2_{\text{II},y} + \left(\frac{\sigma^*_{\text{I},y}}{\sqrt{i}}\right)^2} = \frac{\sigma^*_{\text{I},y}}{\sqrt{i}} \sqrt{1 + i\lambda_y^2} \\ \text{i} \\ &\sqrt{\sigma^2_{\text{II},z} + \left(\frac{\sigma^*_{\text{I},z}}{\sqrt{i}}\right)^2} = \frac{\sigma^*_{\text{I},z}}{\sqrt{i}} \sqrt{1 + i\lambda_z^2} \end{aligned}\right\} \qquad /3.12/$$

Uwzględniając to i redukując podobne człony otrzymamy wzór Alekiejewa na prawdopodobieństwo rażenia samolotu serią automatycznego ognia

$$R(r_y, r_z) = 1 - \sum_{i=0}^{n} (-1)^i \frac{n!}{i!(n-i)!} \qquad \frac{R_0^i}{\sqrt{(1+i\lambda_y^2)(1+i\lambda_z^2)}} \times$$

$$-\frac{1}{2}\left[\frac{r_y^2}{\sigma^*_{I,y}\left(1+i\lambda^2_y\right)}+\frac{r_z^2}{\sigma^*_{I,z}\left(1+i\lambda^2_z\right)}\right]$$

x e

/3.13/

Jeśli systematycznego błędu nie ma, tj. środek rozrzutu powtarzających się błędów pokrywa się z geometrycznym środkiem celu, to wzór Aleksiejewa z uwzględnieniem tego, że pierwszy człon sumy, odpowiadający i = 0, jest równy jedności, przyjmie postać

$$R(0,0)=\sum_{i=1}^{n}(-1)^{i-1}\frac{n!}{i!(n-i)!}\frac{R_o^i}{\sqrt{\left(1+i\lambda^2_y\right)\left(1+i\lambda^2_z\right.}}$$

/3.14/

Wzór Aleksiejewa stanowi skończony szereg o przemiennym znaku, składającym się z n członów. W praktyce nie trzeba obliczać wszystkich członów szeregu, ponieważ przy wzroście i człony szeregu szybko maleją i odrzucanie ostatnich członów nie powoduje większych nieścisłości. Szybkość zmniejszania się członów sumy zależy głównie od wartości R_o, a także od wielkości n, λ_y i λ_z

Wyprowadzenie wzoru /3.13/ zawierało tylko jedno uproszczenie /3.14/, które w warunkach strzelania artylerii przeciwlotniczej nie powoduje dużych błędów. Dlatego sposób Aleksiejewa jest dotychczas najdokładniejszy. Istotny brak tego sposobu polega na tym, że jest on bardzo pracochłonny.

Przykład: Do samolotu B-57 zamierza się oddać serię działową składającą się z 8 strzałów.

Obliczyć prawdopodobieństwo rażenia samolotu przy strzelaniu z celownikiem, jeśli warunki strzelania są następujące: powierzchnia celu $S = 78\ m^2$ /2 l = 6 m i 2 m = 13 m/, błędu systematycznego nie ma, $\sigma_{I,y} = 31{,}7$ m, $\sigma_{I,z} = 40{,}4$ m i $\lambda_y = \lambda_z = 2$

Rozwiązanie:

1. Wzór /3.14/ przedstawiony w postaci rozwiniętej:

$$R(0,0)=\frac{nR_0}{\sqrt{(1+\lambda_y^2)(1+\lambda_z^2)}}-\frac{n(n-1)R_0^2}{2!\sqrt{(1+2\lambda_y^2)(1+2\lambda_z^2)}}+$$

$$+\frac{n(n-1)(n-2)R_0^3}{3!\sqrt{(1+3\lambda_y^2)(1+3\lambda_z^2)}}-\ldots$$

2. Poprawiamy charakterystyki rozrzutu błędów pierwszej grupy o wymiary celu:

$$\sqrt{\sigma_{I,y}^2+\left(\frac{l}{\sqrt{3}}\right)^2}=\sqrt{31{,}7^2+\left(\frac{3}{\sqrt{3}}\right)^2}=31{,}74\ \text{m};$$

$$\sqrt{\sigma_{I,y}^2+\left(\frac{m}{\sqrt{3}}\right)^2}=\sqrt{40{,}4^2+\left(\frac{6{,}5}{\sqrt{3}}\right)^2}=40{,}57\ \text{m}.$$

3. Obliczamy prawdopodobieństwo rażenia celu jednym strzałem bez uwzględnienia błędów drugiej grupy:

$$R_0=\frac{}{2\pi\omega\sqrt{\sigma_{I,y}^2+\left(\frac{l}{\sqrt{3}}\right)^2}\sqrt{\left(\sigma_{I,z}^2+\left(\frac{m}{\sqrt{3}}\right)^2\right.}}=$$

$$=\frac{78}{2\cdot 3{,}14\cdot 1{,}8\cdot 31{,}74\cdot 40{,}57}=0{,}00536$$

4. Obliczamy prawdopodobieństwo rażenia samolotu serią składającą się z 8 strzałów:

$$R/0,0/=\frac{8\cdot 0{,}00536}{\sqrt{5.5}}-\frac{8\cdot 7\cdot 0{,}00536^2}{1.2\ \sqrt{9.9}}+\frac{8.7.6.0{,}00536^3}{1.2.3\sqrt{13.13}}-$$

$$=0{,}008576-0{,}00009022+0{,}65.10^{-6}-\ldots\approx 0{,}0085$$

Sposób członka Akademii Nauk ZSRR Kołmogorowa

Ogólny wzór na całkowite prawdopodobieństwo rażenia samolotu serią /3.4/ bardzo przypomina kompozycję dwóch rozkładów. Niestety, jedna z podcałkowych funkcji, a mianowicie $R/Y_{II}, Z_{II}/$ nie posiada nawet formalnie jednej z podstawowych właściwości gęstości rozkładu prawdopodobieństwa

$$\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} R\left(y_{II}, z_{II}\right) dy_{II}\, dz_{II} \neq 1$$

/3.15/

Kołmogorow zaproponował, aby zamiast $R/Y_{II}, Z_{II}/$ wprowadzić w wyrażenie podcałkowe /3.14/ pewną funkcję $G/Y_{II}, Z_{II}/$ związaną z $R/Y_{II}, Z_{II}/$ równaniem

$$g\left(y_{II}, z_{II}\right) = \frac{R\left(y_{II}, z_{II}\right)}{C}$$

/3.16/

w którym współczynnik c dobrano w ten sposób, że funkcja $g/Y_{II}, Z_{II}/$ posiada właściwości gęstości prawdopodobieństwa. Jeśli współczynnik c określić, wychodząc z wyrażenia

$$C = \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} R\left(y_{II}, z_{II}\right) dy_{II}\, dz_{II}$$

/3.17/

to nie trudno spostrzec, że funkcja $g/Y_{II}, Z_{II}/$ będzie posiadała zasadnicze właściwości gęstości rozkładu prawdopodobieństwa. Istotnie

a/ $$\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} g\left(y_{II}, z_{II}\right) dy_{II}\, dz_{II} = \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} \frac{R\left(y_{II}, z_{II}\right)}{C} dy_{II}\, dz_{II} = \frac{C}{C} = 1;$$

b/ $g/Y_{II}, Z_{II}/ \geqslant 0$, ponieważ zarówno licznik, jak i mianownik wyrażenia /3.16/ nie mogą być mniejsze od zera.

Podstawimy do ogólnego wzoru na prawdopodobieństwo rażenia samolotu serią /3.1/ zamiast funkcji $R/Y_{II}, Z_{II}/$ równą jej $c\,g/Y_{II}, Z_{II}/$ i wówczas otrzymamy

$$R\left(r_y, r_z\right) = c \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} \varphi_{II}\left(y_{II} - r_y, z_{II} - r_z\right) g\left(y_{II}, z_{II}\right) dy_{II}\, dz_{II}$$

/3.18/

Całka wyrażenia /3.18/ stanowi kompozycję dwóch rozkładów normalnego $\varphi_{II}(y_{II} - r_y, z_{II} - r_z)$ i różnego od normalnego $g(Y_{II}, Z_{II})$. Oznaczmy tę koncepcję przez $\Psi(r_y, r_z)$ tj.

$$\Psi(r_y, r_z) = \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} \varphi_{II}(y_{II} - r_y, z_{II} - r_z)\, g(y_{II}, z_{II})\, dy_{II}\, dz_{II}, \qquad /3.19/$$

wówczas prawdopodobieństwo rażenia samolotu celią będzie równe

$$R(r_y, r_z) = c\,\Psi(r_y, r_z). \qquad /3.20/$$

Postać funckji $\Psi(r_y, r_z)$ zależy od stosunku charakterystyk rozrzutu rozkładów φ_{II} i g. Oczywiście im większe będą charakterystyki normalnego rozkładu φ_{II} od odpowiednich charakterystyk rozkładu g, tym bardziej kompozycja tych rozkładów będzie zbliżona do rozkładu normalnego. Przeważnie charakterystyki rozrzutu błędów drugiej grupy /rozkładu φ_{II}/ są większe od charakterystyk rozkładu g, ponieważ te ostatnie zależą głównie od rozrzutu błędów pierwszej grupy, który jak poprzednio wspomniano jest mały. Dlatego jest możliwe przyjęcie funkcji $\Psi(r_y, r_z)$ jako rozkładu normalnego, tj. przyjęcie

$$\Psi(r_y, r_z) \approx \frac{1}{\sigma_y\, \sigma_z\, 2\pi}\, e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{r_y^2}{\sigma_y^2} + \frac{r_z^2}{\sigma_z^2}\right)} \qquad /3.21/$$

Z tego wynika, że sposób Kołmogorowa będzie dawał tym mniejszy błąd, im większe będą charakterystyki rozrzutu drugiej grupy, tj. im większe będą powtarzające się błędy.
Wzór Kołmogorowa z uwzględnieniem /3.21/ przyjmie postać:

$$R(r_y, r_z) = c\,\frac{1}{2\pi\,\sigma_y\,\sigma_z}\, e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{r_y^2}{\sigma_y^2} + \frac{r_z^2}{\sigma_z^2}\right)} \qquad /3.22/$$

Ze wzoru /3.22/ wynika, że do określenia wielkości $R(r_y, r_z)$ trzeba obliczyć współczynnik c i parametry rozkładu (r_y, r_z) - dyspersje σ_y^2 i σ_z^2

Współczynnik c, nazywany niekiedy czynnikiem normalizującym znajdziemy rozwiązując wyrażenie /3.17/.

$$c = \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} R(y_{\text{II}}, z_{\text{II}})\, dy_{\text{II}}\, dz_{\text{II}} =$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} \left\{ 1 - \left[1 - R_o e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{y_{\text{II}}^2}{\sigma_{I,y}^{*2}} + \frac{z_{\text{II}}^2}{\sigma_{I,z}^{*2}} \right)} \right]^n \right\} dy_{\text{II}}\, dz_{\text{II}}$$

Aby rozwiązać tę podwójną całkę wprowadzimy następujące podstawienie

$$\frac{y_{\text{II}}}{\sigma_{I,y}^*} = f \quad i \quad \frac{z_{\text{II}}}{\sigma_{I,z}^*} = u,$$

wówczas

$$c = \sigma_{I,y}^*\, \sigma_{I,z}^* \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} \left\{ 1 - \left[1 - R_o e^{-\frac{1}{2}(f^2 + u^2)} \right]^n \right\} df\, du. \qquad (3.23)$$

Mnożąc i dzieląc ostatnie wyrażenie przez tę samą wielkość $2\pi n R_o$ otrzymamy

$$c = 2\pi n R_o\, \sigma_{I,y}^*\, \sigma_{I,z}^* \frac{1}{2\pi n R_o} \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} \left\{ 1 - \left[1 - R_o e^{-\frac{1}{2}(f^2 + u^2)} \right]^2 \right\} df\, du.$$

/3.24/

Podwójnej całki we wzorze /3.24/ nie można sprowadzić do znanych funkcji, jednak do obliczenia współczynnika c sporządzono tabele funkcji

$$E_2(R_o n) = \frac{1}{2\pi n R_o} \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} \left\{ 1 - \left[1 - R_o e^{-\frac{1}{2}(f^2 + u^2)} \right]^{2n} \right\} df\, du.$$

/3.25/

Uwzględniając, że:

$$R_o = \frac{S}{2\pi\omega\, \sigma_{I,y}^*\, \sigma_{I,z}^*},$$

Wzór na współczynnik c przyjmie postać:

$$C = \frac{n s}{\omega} E_2 (R_o, n).$$

/3.26/

Na podstawie badań przeprowadzonych w ZSRR przez Instytut Naukowo-Doświadczalny OPL można z wystarczającą dla praktyki dokładnością sporządzać tabele funkcji E_2 w zależności nie od dwóch, a tylko od jednego parametru $t = R_o n$, tj.

$$E_2 /R_o, n/ = E_2 /t/ \qquad /3.27/$$

Dyspersje rozkładu $\Psi(r_y, r_z)$ na dwóch niezależnych kierunkach będą równe

$$\left.\begin{aligned} \sigma_y^2 &= \sigma_{II,y}^2 + \sigma_{pr,y}^2 \\ \sigma_z^2 &= \sigma_{II,z}^2 + \sigma_{pr,z}^2 \end{aligned}\right\}, \qquad /3.28/$$

gdzie: $\sigma_{pr,y}^2$ $\sigma_{pr,z}^2$ - charakterystyki rozrzutu /dyspersje/ rozkładu g, które są nieznane. Można je określić, wychodząc z ogólnego określenia dyspersji

$$\sigma_{pr,y}^2 = \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} y_{II}^2 \, g\,(y_{II}, z_{II})\, dy_{II}\, dz_{II}$$

$$\sigma_{pr,z}^2 = \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} z_{II}^2 \, g\,(y_{II}, z_{II})\, dy_{II}\, dz_{II} \qquad /3.29/$$

Podwójne całki tych wyrażeń można sprowadzić do pewnej funkcji, dla której sporządzano tabele.
Ponieważ:

$$\sigma_{pr,y}^2 = \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} y_{II}^2 \, g\,(y_{II}, z_{II})\, dy_{II}\, dz_{II} = \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} y_{II}^2 \, \frac{R(y_{II}, z_{II})}{C}\, dy_{II}\, dz_{II} =$$

$$= \frac{\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} y_{II}^2 \left\{1-\left[1-R_0 e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{y_{II}^2}{\sigma_{I.y}^{*2}}+\frac{z_{II}^2}{\sigma_{I,z}^{*2}}\right)}\right]^n\right\} dy_{II}\, dz_{II}}{\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} \left\{1-\left[1-R_0 e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{y_{II}^2}{\sigma_{I.y}^{*2}}+\frac{z_{II}^2}{\sigma_{I,z}^{*2}}\right)}\right]^n\right\} dy_{II}\, dz_{II}}$$

to wykonując podstawienie zmiennych

$$\frac{y_{II}}{\sigma_{I,y}^*} = f \quad i \quad \frac{z_{II}}{\sigma_{I.y}^*} = u,$$

otrzymamy

$$\sigma_{pr,y}^2 = \frac{\sigma_{I.y}^{*2} \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} f^2 \left\{1-\left[1-R_0 e^{-\frac{1}{2}(f^2+u^2)}\right]^n\right\} df\, du}{\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} \left\{1-\left[1-R_0 e^{-\frac{1}{2}(f^2+u^2)}\right]^n\right\} df\, du} \qquad /3.30/$$

Oznaczmy stosunek

$$\frac{\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} f^2 \left\{1-\left[1-R_0 e^{-\frac{1}{2}(f^2+u^2)}\right]^n\right\} df\, du}{\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} \left\{1-\left[1-R_0 e^{-\frac{1}{2}(f^2+u^2)}\right]^n\right\} df\, du} = F_2(R_0 n)$$

/3.31/

Funkcję dwóch argumentów $F_2\ /R_0, n/$ można zastąpić funkcją jednego argumentu $t = R_0, n$, dla której sporządzono tabele. Za pomocą tabel funkcji $F_2\ /t/$ łatwo obliczyć dyspersje rozkładu $g/Y_{II}, Z_{II}/$

$$\sigma^2_{pr,y} = \sigma^{*2}_{I,y} F_2(t) \text{ i } \sigma^2_{pr,z} = \sigma^{*2}_{z} F_2(t).$$

/3.32/

Uwzględniając wyrażenie /3.26/ można zapisać wzór na obliczanie prawdopodobieństwa rażenia samolotu sposobem Kołmogorowa, następująco:

$$R(r_y, r_z) = \frac{ns}{2\pi\omega\sigma_y\sigma_z} E_2(t)\, e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{r_y^2}{\sigma_y^2} + \frac{r_z^2}{\sigma_z^2}\right)}$$

/3.33/

Jeśli błędu systematycznego nie ma, tj. środek rozkładu błędów drugiej grupy pokrywa się z geometrycznym środkiem celu, to wzór /3.33/ uprości się i przyjmie postać:

$$R\ /0,0/ = \frac{n \cdot s}{2\pi\omega\sigma_y\sigma_z} E_2/t/ \qquad /3.34/$$

Wreszcie, jeśli uwzględnić stosunki /3.11/ i /3.32/, to wzór na prawdopodobieństwo rażenia samolotu serią składającą się z n strzałów można sprowadzić do postaci:

$$R_n = \frac{t E_2(t)}{\sqrt{\left[\lambda_y^2 + F_2(t)\right]\left[\lambda_z^2 + F_2(t)\right]}}\, e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{r_y^2}{\sigma_y^2} + \frac{r_z^2}{\sigma_z^2}\right)}$$

/3.35/

Wzór ten jest dogodny do obliczeń. Kolejność obliczeń omówiliśmy na poprzednim przykładzie,

1. Znajdujemy argument t funkcji $E_2/t/$ i $F_2/t/$

$$t = R_0 n = 0{,}00536 \cdot 8 = 0{,}04288 \approx 0{,}043$$

Jeśli wartość R_0 jest nieznana, to najpierw się ją oblicza.

2. W tabelach odnajdujemy wartości funkcji

$$E_2/t/ = 0{,}989 \text{ i } F_2/t/ = 1{,}005$$

3. Obliczamy prawdopodobieństwo rażenia samolotu

$$R_n = \frac{0{,}043 \cdot 0{,}989}{\sqrt{[2^2 + 1{,}005]^2}} = \frac{0{,}043 \cdot 0{,}989}{5{,}005} =$$

$$= 0{,}008497 \text{ , lub } 0{,}85\ \%$$

Sposób "sumarycznego prawa"

Wiadomo, że jeśli błędy, obarczające każdy z n strzałów są niezależne /nie ma powtarzającego się błędu/, to prawdopodobieństwo chociażby jednego trafienia oblicza się ze wzoru

$$R_{I\,n} = 1 - \prod_{i=1}^{n} (1 - p_i) \qquad /3.36/$$

gdzie p_i - prawdopodobieństwo trafienia przy i - tym strzale. Jeśli nie ma akumulacji uszkodzeń, to prawdopodobieństwo rażenia celu w tych samych warunkach równe jest prawdopodobieństwu chociażby jednego trafienia w tak zwany cel porównawczy tj.

$$R_n = 1 - \prod_{i=1}^{n} \left(1 - \frac{p_i}{\omega}\right), \qquad /3.37/$$

lub w przypadku, gdy prawdopodobieństwo trafienia w cel od strzału do strzału nie zmienia się.

$$R_n = 1 - \left(1 - \frac{p_i}{\omega}\right)^n, \qquad /3.38/$$

gdzie p_i - prawdopodobieństwo trafienia przy jednym strzale;

ω - średnia niezbędna ilość trafień.

Oczywiście, że przy nieznacznej zależności błędów strzałów prawdopodobieństwo rażenia samolotu serią można obliczać za pomocą wzorów /3.37/, /3.38/, wykorzystując sumaryczne prawo błędów do obliczenia prawdopodobieństwa

trafienia przy jednym strzale.

Mając na uwadze oznaczenia

$$\lambda_y = \frac{\sigma_{II.y}}{\sigma_{I.y}} \text{ i } \lambda_z \frac{\sigma_{II.z}}{\sigma_{I.z}},$$

/3.39/

wzór /3.38/ można sprowadzić do postaci:

$$R_n = 1 - \left[1 - \frac{R_1'}{\sqrt{(1+\lambda_y^2)(1+\lambda_y^2)}}\right]^n$$

gdzie R_1 - prawdopodobieństwo rażenia samolotu przy jednym strzale, obliczone z uwzględnieniem tylko błędów pierwszej grupy /niepowtarzających się błędów/.

Porównawcza ocena przybliżonych sposobów

Na podstawie analizy omówionych wyżej sposobów obliczanie prawdopodobieństwa rażenia samolotu serią można stwierdzić, że:

1. Najdokładniejszym, ale i najbardziej pracochłonnym sposobem obliczania R_n jest sposób generała Aleksiejewa.
2. Przy λ_y i $\lambda_z < 0{,}8$ sposób "sumarycznego prawa" jest dokładniejszy od sposobu Kołmogorowa.
3. Przy λ_y i $\lambda_z \geqslant 0{,}8$ R_n należy obliczać sposobem Kołmogorowa.

§ 4. Prawdopodobieństwo rażenia samolotu i nadzieja matematyczna ilości rażonych samolotów przy strzelaniu jednej i kilku baterii

Strzelanie grupy kilku baterii składa się z bateryjnych strzelań, wykonywanych do jednego celu. Ponieważ każda bateria strzela samodzielnie, a błędy przygotowania meteorologicznego są nie duże, to błędy strzelania różnych baterii są praktycznie niezależne. Błędy strzałów serii bateryjnej cechuje duża zależność korelacyjna.

Istnieje zależność między błędami strzałów sąsiednich serii, która jest tym większa, im mniejszy jest odstęp między seriami. Praktycznie serie są niezależne, jeśli odstęp czasu między nimi wynosi: 3 - 4 sek., przy strzelaniu z PUAZO według danych RSA, 5 - 6 sek., przy strzelaniu

z PUAZO według danych dalmierza, 15 sek., przy strzelaniu z celownikiem.

Różnice odstępów uzasadnione są ogólnym schematem błędów, obarczającym strzelanie. Im większy jest ciężar gatunkowy błędów drugiej grupy /powtarzających się błędów/, tym odstępy są większe.

Rozpatrzymy metodę obliczania wskaźników skuteczności strzelania z PUAZO. Dlatego sposobu strzelanie można przyjąć, że błędy strzałów sąsiednich serii są niezależne, ponieważ odstęp między sąsiednimi seriami przeważnie jest nie mniejszy jak 3 - 4 sek. Jako wskaźnik skuteczności strzelania do celu grupowego przyjmuje się nadzieję matematyczną ilości strąconych samolotów, której obliczenie nie nastręcza trudności przy znanych prawdopodobieństwach rażenia każdego samolotu wchodzącego w skład grupy. Dlatego rozpatrzymy najpierw zagadnienie prawdopodobieństwa rażenia oddzielnego samolotu wchodzącego w skład grupy samolotów przy strzelaniu baterii.

Załóżmy, że strzelanie baterii składa się z niezależnych serii. Oznaczmy przez R_{jk} prawdopodobieństwo rażenia j - tego samolotu grupy k - tą serią, wówczas prawdopodobieństwo nie rażenia tego samolotu przy strzelaniu jednej baterii będzie równe

$$\prod_{k=1}^{\nu} (1 - R_{jk})$$

Zatem prawdopodobieństwo rażenia j - tego samolotu grupy przy strzelaniu l - tej baterii

$$R_{jl} = 1 - \prod_{k=1}^{\nu} (1 - R_{jk}). \qquad /4.1/$$

Jeśli jednak dany cel może ostrzeliwać kilka baterii, to zakładając niezależność strzelań oddzielnych baterii, otrzymamy wzór na obliczenie prawdopodobieństwa rażenia j - tego samolotu grupy przy strzelaniu kilku baterii

$$R_{jgr} = 1 - \prod_{l=1}^{B} (1 - R_{jl}) \qquad /4.2/$$

gdzie: B - ilość baterii ostrzeliwującej dany cel.
W wypadku, gdy cel grupowy składa się z M samolotów /j = 1,2 ... ,M/, nadzieję matematyczną ilości strąconych samolotów przy znanych R_{jgr} można obliczyć bardzo prosto za pomocą wzoru

$$A_{gr} = \sum_{j=1}^{M} R_{jgr} \qquad /4.3/$$

Wyżej podano metodę obliczania prawdopodobieństwa rażenia samolotu przy strzelaniu baterii dla przypadku, gdy błędy strzałów sąsiednich serii są niezależne.
Dla serii zależnych, tj. przy dowolnej zależności korelacyjnej strzałów obliczenia komplikują się.
Obecnie istnieje szereg przybliżonych sposobów obliczania prawdopodobieństwa rażenia samolotu przy strzelaniu, składającym się z zależnych serii, jednak najczęściej stosuje się sposób kolejnych przyrostów.

§ 5. Nadzieja matematyczna zużycia amunicji niezbędnej do rażenia celu

Nadzieja matematyczna zużycia amunicji niezbędnej do wykonania zadania ogniowego nie jest samodzielną charakterystyką skuteczności strzelania a tylko pochodną charakterystyką wskaźników skuteczności strzelania. Stosuje się ją szeroko jako ekonomiczną charakterystykę strzelania. Zużycie amunicji na wykonanie zadania ogniowego, w każdym oddzielnie rozpatrywanym strzelaniu jest wielkością przypadkową. Nadzieja matematyczna zużycia amunicji jako wielkości przypadkowej typu konkretnego będzie równa.

$$M(N) = \sum_{n=1}^{\infty} n R_n, \qquad /5.1/$$

gdzie n /1,2,. . ., ∞ / - możliwe zużycie amunicji;

R_n - prawdopodobieństwo odpowiadające temu możliwemu zużyciu amunicji.

Znajomość wielkości R_n umożliwiałaby proste i dokładne rozwiązanie zadania. Jednak określenie prawdopodobieństw zużycia tej lub innej ilości amunicji potrzebnej do wykonania zadania ogniowego jest bardzo skomplikowane i dlatego przy obliczaniu M/N/ stosuje się przybliżony sposób.
Przy najprostszym sposobie zakłada się, że dane ugrupowanie artylerii przeciwlotniczej ostrzeliwując konkretny cel nieprzerywa ognia tak długo, aż cel nie wyjdzie ze strefy ognia tj. nie przewiduje się wykonania zadania ogniowego przed wyjściem celu ze strefy ognia.
Słuszność tego założenia dla przypadku strzelania do pojedynczego celu jest bardzo problematyczną, ponieważ pojedynczy samolot może być strącony pierwszymi seriami i strzelanie w rzeczywistości przerywa się. Jeśli oznaczyć zużycie amunicji wystrzelonej przez ugrupowanie artylerii przeciwlotniczej w czasie przebywania celu w strefie ognia przez N, a nadzieję matematyczną ilości samolotów [illegible]onych tą ilością amunicji przez A_{gr}, to na jeden rażony samolot będzie przypadało średnio

$$N_{śr} = \frac{N}{A_{gr}} \text{ pocisków} \qquad /5.2/$$

Wzór ten można stosować tylko przy niskiej skuteczności strzelania, tj. gdy przypadki strącenia samolotu pierwszymi seriami są bardzo rzadkie.
Przy ostrzeliwaniu celów grupowych wypadki przerwania strzelania przed wyjściem celu ze strefy ognia będą rzadkie i dlatego wzór /5.2/ będzie aktualny.

Przy obliczaniu średniego przewidywanego zużycia amunicji, niezbędnej do rażenia pojedynczego celu, w warunkach wysokiej skuteczności strzelania baterii lub grupy baterii należy stosować drugi sposób. Jest on właściwy zarówno dla małego jak i średniego kalibru.

Załóżmy, że w czasie przebywania celu w strefie ognia bateria może oddać ν salw /serii/. Oznaczmy prawdopodobieństwo rażenia samolotu po γ salwach /seriach/

/ $\gamma = 1,2, \ldots, \nu$ / przez R_1. Ustalamy, że prowadzi się ciągłą obserwację wyników strzelania i po rażeniu samolotu strzelanie odrazu przerywa się.

Znajdziemy najpierw nadzieję matematyczną ilości salw /serii/ w czasie strzelania. Oczywiście

$$M(N) = 1(R_1 - R_0) + 2(R_2 - R_1) + \ldots + \gamma(R_\gamma - R_{\gamma-1}) + \ldots + \nu(1 - R_{\gamma-1}) = \sum_{\gamma=0}^{\nu}(1 - R_\gamma) \qquad /5.3/$$

gdzie $/R_\gamma - R_{\gamma-1}/$ - prawdopodobieństwo przerwania strzelania po γ salwach /seriach/, tj. prawdopodobieństwo strącenia samolotu γ - tą salwą /serią/;

$/1 - R_{\gamma-1}/$ - prawdopodobieństwo oddania następnej salwy /serii/;

$1,2,\ldots,\gamma,\ldots,\nu$ - możliwe ilości salw.

Nadzieja matematyczna ilości pocisków oddanych w czasie strzelania będzie równa

$$M(N)n = n\sum_{\gamma=0}^{\nu}(1 - R_\gamma), \qquad /5.4/$$

gdzie: n - ilość dział w baterii /lub dla małego kalibru - długość serii/.

Ponieważ po ν seriach strzelanie przerywa się niezależnie od tego czy strącono samolot, to wykonane strzelanie może być zarówno pomyślne, jak i niepomyślne. Prawdopodobieństwo, że dane strzelanie będzie pomyślne jest równe prawdopodobieństwu rażenia samolotu ν salwami /seriami/. Zatem przy obliczaniu średniego przewidywanego zużycia amunicji trzeba posługiwać się wzorem

$$N_{śr} = \frac{n\sum_{\gamma=0}^{\nu}(1 - R_\gamma)}{R_\nu} \qquad /5.5/$$

C Z E S C II

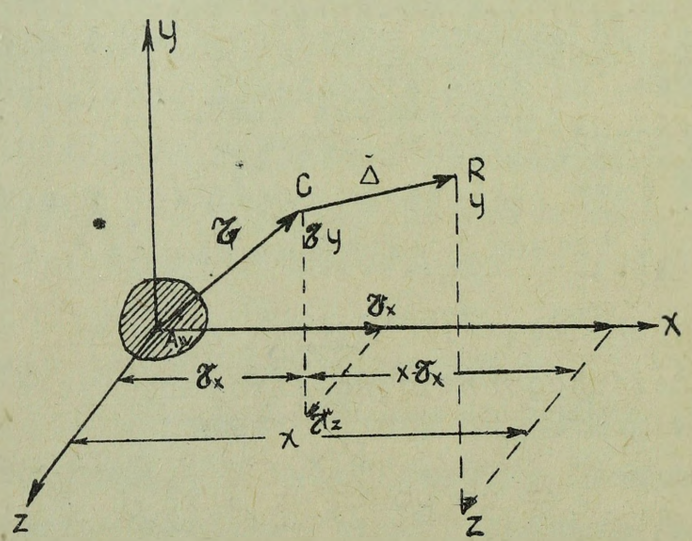
OBLICZANIE WSKAZNIKOW SKUTECZNOSCI STRZELANIA ROZPRYSKOWEGO DO SAMOLOTOW

1. Prawdopodobieństwo rażenia samolotu przy jednym strzale

Podstawowym wskaźnikiem skuteczności strzelania do pojedynczego celu jest prawdopodobieństwo rażenia przy strzelaniu jednej lub kilku baterii. Wielkością wyjściową do obliczania prawdopodobieństwa rażenia samolotu przy strzelaniu, składającym się z kilku strzałów, jest prawdopodobieństwo rażenia samolotu przy jednym strzale. W tym przypadku prawdopodobieństwo rażenia samolotu przy jednym strzale oblicza się jako warunkowe prawdopodobieństwo rażenia, tj. przy ustalonych wartościach błędów, powtarzających się w salwie /błędy drugiej grupy/ i powtarzających się od salwy do salwy lub w przeciągu całego strzelania /błędy trzeciej grupy/. Jeżeli jednak do oceny skuteczności strzelania wystarczająca jest znajomość wartości wskaźników przy jednym strzale, to prawdopodobieństwo rażenia samolotu jednym strzałem oblicza się jako całkowite prawdopodobieństwo rażenia, tj. z uwzględnieniem sumarycznego prawa rozkładu błędów, obarczających strzelanie.

Aby określić prawdopodobieństwo rażenia samolotu trzeba znać prawo rozkładu błędów strzelania i prawo rażenia samolotu.

Jeśli dobrać prostokątny układ współrzędnych /rys. 1.1/



Rys. 1.1. Rzuty systematycznego i sumarycznego przypadkowego błędu strzelania na osie prostokątnego układu współrzędnych.

tak, aby początek układu pokrywał się z punktem wyprzedzonym, a kierunki osi - z kierunkami głównych osi rozrzutu, to prawo rozkładu błędów strzelania można wyrazić w postaci

$$\varphi(x-r_x,\ y-r_y,\ z-r_z) = \frac{1}{(2\pi)^{\frac{3}{2}}\sigma_x\sigma_y\sigma_z}\, e^{-\frac{1}{2}\left[\frac{(x-r_x)^2}{\sigma_x^2}+\frac{(y-r_y)^2}{\sigma_y^2}+\frac{(z-r_z)^2}{\sigma_z^2}\right]} \qquad /1./$$

gdzie: x,y,z - współrzędne punktu rozprysku R;

$\sigma_x,\ \sigma_y,\ \sigma_z$ - główne średnie kwadratowe uchylenia prawa rozkładu błędów strzelania;

$r_x,\ r_y,\ r_z$ - rzuty systematycznego błędu $\bar{r}$ na osie współrzędnych

Jeśli znane jest prawo rozkładu błędów strzelania $\varphi(x-x',\ y-y',\ z-z')$ i prawo rażenia samolotu przy jednym strzale G/x,y,z/, można na podstawie twierdzenia o prawdopodobieństwie całkowitym napisać ogólny wzór na obliczenie prawdopodobieństwa rażenia samolotu przy jednym strzale w postaci

$$R_1(\bar{r}) = \iiint_{\Omega} \varphi(x-r_x,\ y-r_y,\ z-r_z)\, G(x,y,z)\, dx\, dy\, dz \qquad /1.2/$$

Za pomocą wzoru /1.2/ można obliczyć zarówno całkowite jak i warunkowe prawdopodobieństwo rażenia samolotu przy jednym strzale. Oczywiście, w pierwszym przypadku funkcja $\varphi(x-r_x, y-r_y, z-r_z)$ powinna przedstawiać sumaryczne prawo rozkładu błędów strzelania, a w drugim przypadku - prawo rozkładu niepowtarzających się błędów strzelania $\varphi_1(x-r_x,\ y-r_y,\ z-r_z)$ W ostatnim wyrażeniu r_x r_y i r_z są rzutami sumarycznego błędu, składającego się z błędu systematycznego oraz błędów II i III grupy, które przyjęły określoną, ustaloną wartość przy jednym strzale. Wyrażenie /1.2/ trzeba całkować w granicach nieskończoności, ponieważ zmienne są współrzędne punktu rozprysku jednak te granice można zredukować do tego obszaru Ω, gdzie funkcje podcałkowe są różne od zera. Wychodząc z właściwości

funkcji podcałkowych, za najmniejszy obszar, w którym wystarczy całkować wyrażenie /1.2/ uważa się obszar, gdzie $G(x,y,z) > 0$. W dalszym ciągu rozpatrzymy obliczanie warunkowego prawdopodobieństwa rażenia samolotu jednym strzałem. W tym celu wyrażenie /1.2/ przedstawimy w następującej postaci:

$$R_I(r) = \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} \varphi_I(x-r_x, y-r_y, z-r_z)\,G(x,y,z)\,dx\,dy\,dz \qquad /1.3/$$

W wyrażeniu /1.3/ granice całkowania rozciągnięto na cały obszar zmiany współrzędnych punktu rozprysku x,y,z; z tego powodu oczywiście wielkość $R_1(\bar{r})$ nie zmieni się, ponieważ funkcja $G(x,y,z)$ poza granicami przestrzeni niebezpiecznych rozpryskow jest równa zeru.

Całek /1.2/ lub /1.3/ nie można wyrazić za pomocą znanych funkcji, można je obliczyć tylko metodami całkowania liczbowego z dowolnym stopniem dokładności, szczególnie przy wykorzystaniu maszyn liczących. Jednak nie zawsze można wykorzystać te maszyny do obliczenia wskaźników skuteczności strzelania, a zwykle metody całkowania liczbowego są bardzo pracochłonne. W związku z tym stosuje się różne uproszczone sposoby obliczania warunkowego prawdopodobieństwa rażenia samolotu przy jednym strzale, których wyniki są wystarczające dla celów praktycznych. Obecnie spośród znanych uproszczonych sposobów obliczania $R_1(\bar{r})$ szeroko rozpowszechniony jest sposób Kołmogorowa. Istota tego sposobu sprowadza się do przedstawienia całki /1.3/ w postaci kompozycji dwóch rozkładów i do aproksymacji otrzymanego sumarycznego prawa przez normalny rozkład, którego parametry można określić.

Rozpatrzymy szczegółowo ten sposób:

W ogólnym szorze /1.3/ jedna z podcałkowych funkcji, a mianowicie funkcja $G(x,y,z)$ nie posiada podstawowej właściwości gęstości rozkładu prawdopodobieństw, tj.

$$\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} G(x,y,z)\,dx\,dy\,dz \neq 1$$

Dlatego wyrażenie /1.3/ nie jest kompozycją dwóch rozkładów.

Kołmogorow zaproponował, aby zamiast funkcji G/x,y,z/ wprowadzić w wyrażenie podcałkowe /1.3/ pewną funkcję g_1 /x,y,z/, związaną z G/x,y,z/ równaniem

$$g_1/x,y,z/ = \frac{G/x,y,z/}{W} , \qquad /1.4/$$

w którym czynnik normalizacyjny W dobrano tak, aby funkcja g'/x,y,z/ posiadała właściwości gęstości rozkładu prawdopodobieństwa.

Jeśli określić czynnik normalizacyjny W, wychodząc z wyrażenia

$$W = \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} G(x,y,z)\,dx\,dy\,dz, \qquad /1.5/$$

to łatwo spostrzec, że funkcja $g_1/x,y,z/$ będzie posiadała właściwości gęstości rozkładu prawdopodobieństwa.

W rzeczywistości:

1/ $$\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} g_1(x,y,z)\,dx\,dy\,dz =$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} \frac{G(x,y,z)}{W}\,dx\,dy\,dz\,\frac{W}{W} = 1$$

2/ $g_1/x,y,z/ \geqslant 0$, tj. funkcja $g_1/x,y,z/$ nie może być ujemną, ponieważ licznik i mianownik wyrażenia /1.4/ nie mogą być mniejsze od zera.

Jako parametry charakteryzujące rozkład $g_1/x,y,z/$, przyjmuje się nadzieję matematyczną $\bar{r}_{g1}$ i dyspresję σ^2_{g1}, które przyjęto nazywać parametrami prawa rażenia, w związku z tym, że postać funkcji $g_1/x,y,z/$, jak wynika z wyrażenia /1.4/ jest taka sama jak i prawa rażenia samolotu G /x,y,z/.

Wielkość nadziei matematycznych $\bar{r}_{g1}$ i dyspresji σ^2_{g1} rozkładu $g_1/x,y,z/$ oblicza się za pomocą ogólnych wzorów na nadzieję matermatyczną i dyspresję dowolnego rozkładu.

Rzuty nadziei matematycznej $\bar{r}_{g1}$ na osie układu współrzędnych $r_{g1,x}$, $r_{g1,y}$, $r_{g1,z}$ można obliczyć ze wzorów:

$$\left.\begin{aligned} r_{g1,x} &= \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} x\, g_1(x,y,z)\, dx\, dy\, dz \\ r_{g1,y} &= \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} y\, g_1(x,y,z)\, dx\, dy\, dz \\ r_{g1,z} &= \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} z\, g_1(x,y,z)\, dx\, dy\, dz \end{aligned}\right\} \quad /1.6/$$

a główne despresje:

$$\left.\begin{aligned} \sigma^2_{g1,x} &= \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} (x - r_{g1,x})^2\, g_1(x,y,z)\, dx\, dy\, dz \\ \sigma^2_{g1,y} &= \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} (y - r_{g1,y})^2\, g_1(x,y,z)\, dx\, dy\, dz \\ \sigma^2_{g1,z} &= \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} (z - r_{g1,z})^2\, g_1(x,y,z)\, dx\, dy\, dz \end{aligned}\right\} \quad /1.7$$

Całki w wyrażeniach /1.6 i /1.7/ oblicza się metodą całkowania liczbowego.

Zakres obliczeń przy określaniu parametrów prawa rażenia $\bar{r}_{g1}$ i σ^2_{g1} jest znacznie mniejszy od zakresu prac pruy całkowaniu liczbowym wyrażeń /1.2/ lub /1.3/ dla obliczania R_1 / $\bar{r}$ /.

Jeśli do ogólnego wzoru na warunkowe prawdopodobieństwo rażenia samolotu przy jednym strzale /1.3/, zamiast funkcji G/x,y,z/ podstawimy równą jej funkcję $W_{g_1}/x,y,z/$, to otrzymamy:

$$R_1(\bar{r}) = W \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} \varphi_1(x-r_x, y-r_y, z-r_z)\, g(x,y,z)\, dx\, dy\, dz \qquad /1.8/$$

Pod całką znajduje się gęstość prawdopodobieństwa rozkładu błędów pierwszej grupy $\varphi_1/x-r_x, y-r_y, z-r_z/$ i gęstość prawdopodobieństwa rozkładu $g_1/x,y,z/$, związanego z prawem rażenia, Całkę w wyrażeniu /1.8/ można rozpatrywać jako kompozycję dwóch rozkładów w przestrzeni: normalnego $\varphi_1/x-r_x, y-r_y, z-r_z/$ i rozkładu $g_1/x,y,z/$, różnego od normalnego.
W wyniku kompozycji dwóch rozkładów otrzymamy nowy rozkład, gdzie błąd systematyczny $\bar{r}$ odgrywa rolę zmiennej wielkości. Oznaczmy ten sumaryczny rozkład przez $\Psi_1(\bar{r})$ tj.

$$\Psi_1(\bar{r}) = \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} \varphi_1(x-r_x, y-r_y, z-r_z)\, g_1(x,y,z)\, dx\, dy\, dz \qquad /1.9/$$

Wówczas warunkowe prawdopodobieństwo rażenia samolotu przy jednym strzale będzie równe

$$R_1/\bar{r}/ = W\Psi_1(\bar{r}) \qquad /1.10/$$

Postać funkcji $\Psi_1(\bar{r})$ zależy od stosunku charakterystyk rozrzutu rozkładów φ_1 i g_1. Oczywiście, im większe będą charakterystyki rozrzutu normalnego rozkładu φ_1 od odpowiednich charakterystyk rozrzutu rozkładu g_1, tym bardziej kompozycja tych rozkładów będzie zbliżona do rozkładu normalnego.
Przeważnie charakterystyki rozrzutu normalnego rozkładu φ_1 wzdłuż dowolnego kierunku są większe od odpowiednich charakterystyk rozrzutu rozkładu g_1, dlatego sumaryczne prawo rozkładu można przyjąć za normalne /elipsoidalne/.
Na tej podstawie można założyć, że funkcja $\Psi_1(\bar{r})$ jest normalnym rozkładem $\varphi_1^*(\bar{r})$ tj.

$$\Psi_1(\bar{r}) \approx \varphi_1^*(\bar{r}) = \frac{1}{2\pi^{\frac{3}{2}}\,\sigma^*_{I,x}\,\sigma^*_{I,y}\,\sigma^*_{I,z}}\, e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{r_x^2}{\sigma^{*2}_{I,x}}+\frac{r_y^2}{\sigma^{*2}_{I,y}}+\frac{r_z^2}{\sigma^{*2}_{I,z}}\right)}$$

/1.11/

gdzie $\sigma^*_{I,x}\ \sigma^*_{I,y}\ \sigma^*_{I,z}$ - główne średnie kwadratowe uchylenie sumarycznego prawa rozkładu, równoległe do osi współrzędnych x, y, z;

r_x, r_y, r_z, - rzuty systematycznego błędu $\bar{r}$, na osie układu współrzędnych, którego początek pokrywa się ze środkiem rozkładu g_1, związanego z prawem rażenia.

Za tym sposób Kołmogorowa będzie tym dokładniejszy, im większe będą charakterystyki rozrzutu rozkładu φ_1 od odpowiednich charakterystyk rozrzutu rozkładu g_1.
Wzór na obliczenie prawdopodobieństwa rażenia samolotu przy jednym atrmie sposobem Kołmogorowa z uwzględnieniem /1.11/ przyjmie postać:

$$R_1(\bar{r}) \approx \frac{W}{(2\pi)^{\frac{3}{2}}\,\sigma^*_{I,x}\,\sigma^*_{I,y}\,\sigma^*_{I,z}}\, e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{r_x^2}{\sigma^{*2}_{I,x}}+\frac{r_y^2}{\sigma^{*2}_{I,y}}+\frac{r_z^2}{\sigma^{*2}_{I,z}}\right)}$$

/1.12/

Przy wyprowadzaniu wzoru /1.12/ założyliśmy, że punkt wyprzedzony pokrywa się ze środkiem rozkładu g_1, związanego z prawem rażenia, tj. gdy $\bar{r}_{g1} = 0$.
W ogólnym przypadku punkt wyprzedzony nie pokrywa się ze środkiem rozkładu g_1.

Jeśli zastosujemy układ współrzędnych, którego początek pokrywa się z punktem wyprzedzonym /rys. 1.1/ i oznaczymy współrzędne środka rozkładu g_1 przez $r_{g1,x}, r_{g1,y}, r_{g1,z}$ to wzór /1.12/ przyjmie postać:

$$- \frac{1}{2}\left[\frac{(r_x - r_{g1,x})^2}{G^{*2}_{I,x}} + \frac{(r_y - r_{g1,y})^2}{G^{*2}_{I,y}} + \frac{(r_z - r_{g1,z})^2}{G^{*2}_{I,z}}\right]$$

$$R_1(\bar{r}) \approx \frac{}{(2\pi)^{\frac{3}{2}} G^*_{I,x} G^*_{I,y} G^*_{I,z}} e \qquad /1.13/$$

Łatwo spostrzec, że aproksymacja ogólnego wyrażenia /1.3/ przez funkcję /1.13/ jest jednoznaczna z zastąpieniem współrzędnościowego prawa rażenia G/x,y,z/ przez funkcję G^*/x,y,z/ o postaci:

$$G^*(x,y,z) = \frac{W}{(2\pi)^{\frac{3}{2}} G_{g1,x} G_{g1,y} G_{g1,z}} \times$$

$$\times e^{-\frac{1}{2}\left[\frac{(x-r_{g1,x})^2}{G^2_{g1,x}} + \frac{(y-r_{g1,y})^2}{G^2_{g1,y}} + \frac{(z-r_{g1,z})^2}{G^2_{g1,z}}\right]}$$

W rzeczywistości:

$$R_1(\bar{r}) = \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} \varphi_1(x-r_x, y-r_y, z-r_z)\, G^*(x,y,z)\, dx\, dy\, dz =$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{(2\pi)^{\frac{3}{2}} G_{I,x} G_{I,y} G_{I,z}} e^{-\frac{1}{2}\left[\frac{(x-r_x)^2}{G^2_{I,x}} + \frac{(y-r_y)^2}{G^2_{I,y}} + \frac{(z-r_z)^2}{G^2_{I,z}}\right]} \times$$

$$\times \frac{W}{(2\pi)^{\frac{3}{2}} G_{g1,x} G_{g1,y} G_{g1,z}} e^{-\frac{1}{2}\left[\frac{(x-r_{g1,x})^2}{G^2_{g1,x}} + \frac{(y-r_{g1,y})^2}{G^2_{g1,y}} + \frac{(z-r_{g1,z})^2}{G^2_{g1,z}}\right]} \times$$

$$\times dx\, dy\, dz = \frac{W}{(2\pi)^{\frac{3}{2}} G^*_{I,x} G^*_{I,y} G^*_{I,z}} \times e^{-\frac{1}{2}\left[\frac{(r_x - r_{g1,x})^2}{G^{*2}_{I,x}} + \frac{(r_y - r_{g1,y})^2}{G^{*2}_{I,y}} + \frac{(r_z - r_{g1,z})^2}{G^{*2}_{I,z}}\right]}$$

tj. otrzymamy wzór /1.13/.

Ze wzorów /1.12/ i /1.13/ wynika, że przy określaniu wielkości R_1 / $\tilde{r}$ / trzeba obliczyć czynnik normalizacyjny W i główne dyspersje $\sigma^{*2}_{1.x}, \sigma^{*2}_{1.y}, \sigma^{*2}_{1.z}$ rozkładu $\varphi_1^*(\tilde{r})$ Wielkość W oblicza się całkowaniem liczbowym. Główne dyspersje rozkładu $\varphi_1^*(\tilde{r})$ na trzech niezależnych kierunkach będą równe:

$$\left.\begin{aligned} \sigma^{*2}_{\bar{I}.x} &= \sigma^2_{\bar{I}.x} + \sigma^2_{g_1.x} \\ \sigma^{*2}_{\bar{I}.y} &= \sigma^2_{\bar{I}.y} + \sigma^2_{g_1.y} \\ \sigma^{*2}_{\bar{I}.z} &= \sigma^2_{\bar{I}.z} + \sigma^2_{g_1.z} \end{aligned}\right\} . \qquad /1.14/$$

Jednak w ogólnym przypadku elipsoidy praw rozkładu różnych grup błędów, sumarycznych błędów strzelania i rozkładu g_1 nie są podobne i nie są podobnie rozmieszczone, tj. występuje związek charakterystyk rozrzutu. W rym przypadku główne dyspersje rozkładu $\varphi_1^*(\tilde{r})$ najprościej oblicza się wówczas, gdy elipsoidalne prawo rozkładu błędów pierwszej grupy φ_1 można przyjąć za prawo kuliste. Przy tym założeniu.

$$\left.\begin{aligned} \sigma^{*2}_{\bar{I}.x} &= a^2 + \sigma^2_{g_1.x} \\ \sigma^{*2}_{\bar{I}.y} &= a^2 + \sigma^2_{g_1.y} \\ \sigma^{*2}_{\bar{I}.z} &= a^2 + \sigma^2_{g_1.z} \end{aligned}\right\} , \qquad /1.15/$$

gdzie a - promień kuli średnich kwadratowych uchyleń, której objętość równa jest objętości elipsoidy średnich kwadratowych uchyleń prawa rozkładu błędów pierwszej grupy.

W wyniku zastąpienia elipsoidalnego prawa rozkładu błędów strzelania prawem kulistym, gdy promień kuli jest liniową funkcją czasu lotu pocisku, błędy w obliczaniu prawdopodobieństwa rażenia celu nie przekraczają 5 - 6 % w porównaniu z wartościami prawdopodobieństwa rażenia celu, obliczonymi z uwzględnieniem elipsoidalnego prawa rozkładu błędów strzelania.

Kolejność obliczeń prawdopodobieństwa rażenia samolotu jednym strzałem sposobem Kołmogorowa omówimy na przykładzie:

Przykład:

Obliczyć prawdopodobieństwo rażenia samolotu jednym strzałem, oddanym ze 100 mm armaty przeciwlotniczej KS-19, jeśli:

1/ elipsoidy średnich kwadratowych uchyleń, charakteryzujące prawa rozkładu błędów pierwszej grupy φ_1 i rozkładu g_1 związanego z prawem rażenia są podobne i podobnie rozmieszczone;

2/ rzuty systematycznego błędu na osie układu współrzędnych, którego początek pokrywa się ze środkiem rozkładu g_1, są odpowiednio równe: $r_x = 50$ m, $r_y = 40$ m, $r_z = 20$ m;

3/ główne dyspersje prawa rozkładu błędów pierwszej grupy są równe: $\sigma^2_{1,x} = 5000$ m^2, $\sigma^2_{1,y} = 2500$ m^2, $\sigma^2_{1,z} = 1000$ m^2;

4/ czynnik normalizacyjny $W = 70.000$ m^3;

5/ główne dyspersje rozkładu g_1 są równe: $\sigma^2_{g_1,x} = 500$ m^2, $\sigma^2_{g_1,y} = 250$ m^2, $\sigma^2_{g_1,z} = 100$ m^2.

Rozwiązanie:

1. Obliczamy główne dyspersje rozkładu $\varphi_1^*(\bar{r})$, którym zastępuje się sumaryczne prawo, otrzymane w wyniku kompozycji dwóch rozkładów: rozkładu błędów pierwszej grupy φ_1 i rozkładu g_1, wziązanego z prawem rażenia samolotu.

$$\sigma^{*2}_{I,x} = \sigma^2_{1,x} + \sigma^2_{g_1,x} = 5000 + 500 = 5500 \text{ m}^2;$$

$$\sigma^{*2}_{I,y} = \sigma^2_{I,y} + \sigma^2_{g_1,y} = 2500 + 250 = 2750 \text{ m}^2;$$

$$\sigma^{*2}_{I,z} = \sigma^2_{I,z} + \sigma^2_{g_1,z} = 1000 + 100 = 1100 \text{ m}^2.$$

2. Obliczamy prawdopodobieństwo rażenia samolotu jednym strzałem za pomocą wzoru /1.12/

$$R_1(\bar{\tau}) = \frac{W}{(2\pi)^{\frac{3}{2}} \sigma^*_{I,x}\, \sigma^*_{I,y}\, \sigma^*_{I,z}}\, e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{\tau_x^2}{\sigma^{*2}_{I,x}} + \frac{\tau_y^2}{\sigma^{*2}_{I,x}} + \frac{\tau_z^2}{\sigma^{*2}_{I,z}}\right)} =$$

$$= \frac{70.000}{15,7 \cdot 74,2 \cdot 52,4 \cdot 33,2}\, e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{2500}{5500} + \frac{1600}{2700} + \frac{400}{1100}\right)} =$$

$$= 0,0345 \qquad e^{-0,672} = 0,0176$$

Na podstawie analizy wzoru /1.13/ można ustalić zasadnicze czynniki, od których zależy wielkość $R_1 / \bar{\tau} /$.

1. Prawdopodobieństwo rażenia samolotu przy jednym strzale zwiększa się ze wzrostem czynnika normalizacyjnego W. Czynnik normalizacyjny W oblicza się z wyrażenia /1.5/, z którego wynika, że wartość W w pełni określa prawo rażenia samolotu przyjednym strzale G/x,y,z/.
   W związku z tym czynnik normalizacyjny W zalicza się do parametrów prawa rażenia samolotu.

Z obliczeń wynika, że przy strzelaniu rozpryskowym czynnik normalizacyjny W jest większy od objętości zajmowanej przez samolot, jednak mniejszy od objętości przestrzeni niebezpiecznych rozprysków.

Tak samo jak i prawo rażenia samolotu jednym strzałem przy strzelaniu rozpryskowym, normujący mnożnik W zależy od mocy pocisku, wytrzymałość celu i warunków strzelania, tj. od warunków spotkania się odłamków z celem.

W miarę zbliżania się celu do parametru kursu wartość W wzrasta głównie na skutek zwiększenia się względnej prędkości odłamków. Gdy cel się oddala, wartość W wydatnie się zmniejsza.

2. Prawdopodobieństwo rażenia samolotu przy jednym strzale także zmienia się przy zmianie systematycznego błędu $\bar{\tau}$. Tą wartość $\bar{\tau}$ przy której prawdopodobieństwo rażenia

samolotu będzie największa, nazywa się najdogodniejszym odstępem rozprysku.

Prawdopodobieństwo rażenia samolotu przy jednym strzale osiąga maksymalną wartość, gdy środek rozrzutu błędów strzelania pokrywa się ze środkiem rozkładu g_1, związanego z prawem rażenia, tj. gdy $\bar{r}$ będzie równe $\bar{r}_{g_1}$.

W tym przypadku:

$$R_0 \frac{W}{(2\pi)^{\frac{3}{2}} \sigma^*_{I,x} \sigma^*_{I,y} \sigma^*_{I,z}} \qquad /1.16/$$

Zatem aby uzyskać maksymalne prawdopodobieństwo rażenia samolotu, zadanie spotkania przy strzelaniu powinno być rozwiązywane w ten sposób, aby punkt wyprzedzony, wypracowany przez przelicznik, pokrywał się ze środkiem rozkładu g_1, związanego z prawem rażenia samolotu.

Po uwzględnieniu wyrażenia /1.16/ wzór /1.12/ na obliczenie warunkowego prawdopodobieństwa rażenia samolotu przy jednym strzale przyjmie postać:

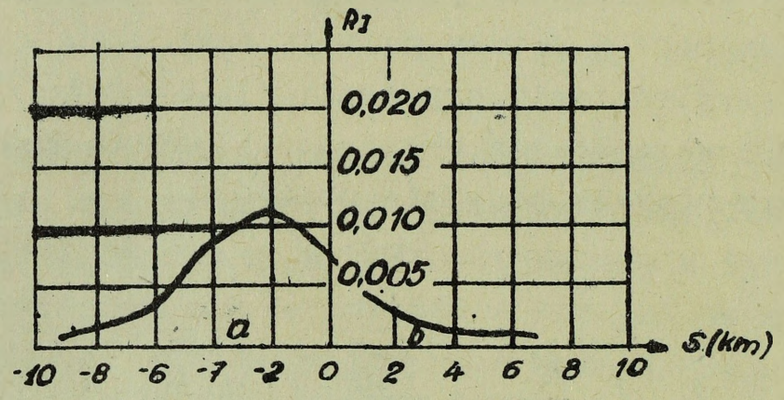
$$R_1(\bar{r}) = R_0 e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{r_x^2}{\sigma^{*2}_{I,x}} + \frac{r_y^2}{\sigma^{*2}_{I,y}} + \frac{r_z^2}{\sigma^{*2}_{I,z}}\right)} \qquad /1.17/$$

3. Jeśli nie ma systematycznych błędów, to błędy przypadkowe obniżają prawdopodobieństwo rażenia samolotu, przy tym ze wzrostem błędów przypadkowych prawdopodobieństwo rażenia samolotu zmniejsza się. Gdy są błędy systematyczne istnieją pewne optymalne stosunki między błędami przypadkowymi i systematycznymi, przy których prawdopodobieństwo rażenia samolotu będzie największe.
4. Przy strzelaniu do celów grupowych, składających się na przykład z M samolotów, na prawdopodobieństwo rażenia j - tego samolotu /j = 1,2,3 ...M/ wpływa dodatkowy błąd - przesunięcie punktu celowania - ponieważ celuje się w jeden z samolotów grupy.

Jeśli oznaczymy współrzędne j = tego samolotu względem punktu celowania przez x_j, y_j i z_j, to warunkowe prawdopodobieństwo rażenia przy jednym strzale można obliczyć ze wzoru.

$$R_{j,I}(r) = \frac{W}{(2\pi)^{\frac{3}{2}} G^*_{I,x} \times G^*_{I,y} G^*_{I,z}} e^{-\frac{1}{2}\left[\frac{(r_x - x_j)^2}{G^{*2}_{I,x}} + \frac{(r_y - x_y)^2}{G^{*2}_{I,y}} + \frac{(r_z - z_j)^2}{G^{*2}_{I,z}}\right]} \qquad /1.18/$$

Jeśli uwzględnimy charakter zmiany czynnika normalizującego W i charakterystyk rozrzutu błędów przypadkowych $G^*_{Ix}, G^*_{I,y}, G^*_{I,z}$ w zależności od położenia celu na kursie, to dojdziemy do wniosku, że prawdopodobieństwo rażenia samolotu jednym strzałem zwiększa się w miarę zbliżania celu do parametru kursu a następnie maleje.



Rys. 1.2 Zmiana prawdopodobieństwa rażenia samolotu jednym strzałem R_1 w zależności od położenia celu na kursie S.

Na rys. 1.2 przedstawiono przykładowy charakter zmiany prawdopodobieństwa rażenia samolotu jednym strzałem ze 100 mm armaty przeciwlotniczej w zależności od oddalenia celu od parametru kursu przy strzelaniu do samolotu typu "CANBERRA" na wysokości 8000 m i przy parametrze kursu 3000 m.

Z rysunku wynika, że jeśli rozpatrzymy dwa punkty a i b jednakowo oddalone od parametru, to prawdopodobieństwo rażenia samolotu w punkcie a leżącym przed parametrem będzie znacznie większe niż w punkcie b, leżącym za parametrem.

§ Prawdopodobieństwo rażenia samolotu salwą z dział

Ogólny wzór na prawdopodobieństwo rażenia samolotu salwą n dział w układzie dwóch grup błędów.

Załóżmy, że do pojedynczego samolotu zamierza się oddać salwę z n dział. Strzelanie obarczone jest błędem systematycznym $\bar{r}$, a wszystkie przypadkowe błędy strzelania można przedstawić w postaci dwóch wzajemnie niezależnych grup błędów: pierwsza grupa - niepowtarzające się błędy o prawie rozkładu $f_I(x_1 - x_{II},\ y_1 - y_{II},\ z_1 - z_{II})$; druga grupa - powtarzające się błędy w salwie o prawie rozkładu $f_{II}(x_{II} - r_x,\ y_{II} - r_y,\ z_{II} - r_z)$.

Załóżmy, że prawdopodobieństwo rażenia samolotu i - tym strzałem salwy /i = 1,2,3,...,n/ pod warunkiem, że błąd drugiej grupy przyjął określoną wartość x_{II}, y_{II}, z_{II} znane i równe:

$$R_i(x_{II}, y_{II}, z_{II}) = R_0\, e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{x_{II}^2}{\sigma_{I,x}^{*2}} + \frac{y_{II}^2}{\sigma_{I,y}^{*2}} + \frac{z_{II}^2}{\sigma_{I,z}^{*2}}\right)}$$

Przyjęcie hipotezy odnośnie wielkości błędu drugiej grupy oznacza, że określamy warunkowe prawdopodobieństwo rażenia samolotu tylko z wuzględnieniem prawa rozkładu błędów pierwszej grupy, a błąd drugiej grupy w danym przypadku odgrywa rolę błędu systematycznego. Warunkowe prawdopodobieństwo nie rażenia celu tym samym strzałem będzie równe

$$1 - R_i(x_{II}, y_{II}, z_{II}),$$

a warunkowe prawdopodobieństwo nierażenia samolotu wszystkimi strzałami salwy

$$\prod_{i=1}^{n} \left[1 - R_i(x_{II}, y_{II}, z_{II})\right].$$

Jeśli samolot jest celem nie wymagającym akumulacji uszkodzeń, to warunkowe prawdopodobieństwo rażenia samolotu można określić jako prawdopodobieństwo rażenia samolotu chociażby jednym strzałem salwy tj.

$$R_{1,n}(x_{II}, y_{II}, z_{II}) = 1 - \prod_{i=1}^{n} \left[1 - R_i(x_{II}, y_{II}, z_{II})\right] \quad /2.1/$$

Jeśli warunkowe prawdopodobieństwo rażenia samolotu od strzału do strzału nie zmienia się lub zmienia nieznacznie, to wyrażenie /2.1/ można przedstawić w postaci:

$$R_1, n /x_{II}, y_{II}, z_{II}/ = 1 - \left[1 - R_1 /x_{II}, y_{II}, z_{II}/\right]^n \qquad /2.2/$$

Całkowite prawdopodobieństwo rażenia samolotu salwą n dzie znajdziemy w oparciu o twierdzenie o prawdopodobieństwie całkowitym i w ogólnej postaci będzie ono równe:

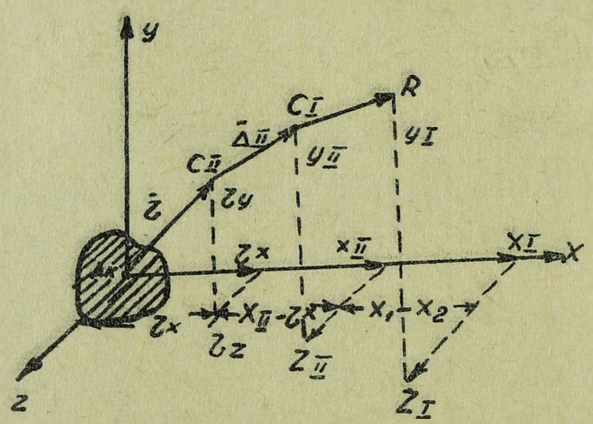
$$R_{II}/\bar{r}/ = \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} \varphi_{II}/X_{II} - r_x, y_{II} - r_y, z_{II} - r_z/ X$$

$$X\left\{1 - \left[1 - R_1(x_{II}, y_{II}, z_{II})\right]^n\right\} dx_{II}\, dy_{II}\, dz_{II}, \qquad /2.3/$$

lub krócej:

$$R_{II}/\bar{r}/ = \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} \varphi_{II}/X_{II} - r_x, y_{II} - r_y, z_{II} - r_z/ X$$

$$X\, R_1, n /x_{II}, y_{II}, z_{II},/ dx_{II}, dy_{II}, dz_{II} \qquad /2.4/$$



Rys. 2.1. Rzuty błędu systematycznego i przypadkowych błędów strzelania na osie prostokątnego układu współrzędnych.

Jeśli dobierzemy prostokątny układ współrzędnych x,y,z /rys. 2,1/ tak aby początek układu pokrywał się z punktem wyprzedzonym, a kierunki osi pokrywały się z kierun kami odpowiednich głównych średnich kwadratowych uchyleń rumarycznego prawa rozkładu , to po uwzględnieniu /1.10/ i /1.16/ wartość warunkowego prawdopodobieństwa rażenia

samolotu chociażby jednym strzałem salwy można przedstawić w postaci:

$$R_1,n\,/x_{II},y_{II},z_{II}/ = 1 - \left[1-R_1\,/x_{II},y_{II},z_{II}/\right]^n =$$

$$= 1-\left[1-R_o\,e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{x_{II}^2}{\sigma_{I,x}^{*2}}+\frac{y_{II}^2}{\sigma_{I,y}^{*2}}+\frac{z_{II}^2}{\sigma_{I,z}^{*2}}\right)}\right]^n \qquad /2.5/$$

W ten sposób w wyniku przyjętego przez nas założenia o możliwości sprowadzenia realnego układu błędów strzelania do układu dwóch grup błędów i o braku akumulacji uszkodzeń otrzymaliśmy przybliżony wzór /2.4/ na obliczenie prawdopodobieństwa rażenia samolotu salwą n dział; przy tym określenie R_{II} / / wymaga obliczenia potrójnej całki.
Całki /2.4/ nie można sprowadzić do znanych funkcji, można ją obliczyć tylko metodą całkowania liczbowego. Obecnie opracowano szereg sposobów rozwiązań przybliżonych. Niżej będą omówione tylko te sposoby, które stosuje się w praktycznych badaniach skuteczności strzelania rozpryskowego.

Sposób Aleksiejewa

Sposób ten opiera się na przedstawieniu funkcji

$$R_1,n\,/x_{II},y_{II},z_{II}/ = 1 - \left[1 - R_1/x_{II},y_{II},z_{II}/\right]^n$$

w wyrażeniu /2.4/ w postaci skończonego szeregu o zmiennym znaku

$$R_1,n/x_{II},y_{II},z_{II}/ = \sum_{i=1}^{n} /-1/^{i-1}\,\frac{n!}{i!/n-i/!}\,R_1^i\,/x_{II},y_{II},z_{II}/, \qquad /2.6/$$

przy tym funkcję $R_1\,/x_{II},y_{II},z_{II}/$ aproksymuje się przez taką funkcję, która umożliwia zcałkowanie wyrażenia /2.4/ w postaci skończonej, tj funkcję

$$R_1\,/x_{II},\,y_{II},\,z_{II}/ = R_o\,e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{x_{II}^2}{\sigma_{I,x}^{*2}}+\frac{y_{II}^2}{\sigma_{I,y}^{*2}}+\frac{z_{II}^2}{\sigma_{I,z}^{*2}}\right)} \qquad /2.7/$$

Sposób ten omówiono szczegółowo dla przypadku strzelania uderzeniowego. Łatwo spostrzec, że dla przypadku

strzelania rozpryskowego trzeba uwzględnić jeszcze trzeci kierunek.

Oznaczmy:

$$\frac{\sigma_{\underline{II},x}}{\sigma^*_{I,x}} = \lambda_x, \quad \frac{\sigma_{\underline{II},y}}{\sigma^*_{Iy}} = \lambda_y, \quad \frac{\sigma_{\underline{II},z}}{\sigma^*_{I,z}} = \lambda_z.$$

/2.8/

gdzie: $\sigma_{\underline{II},x}, \sigma_{\underline{II},y}, \sigma_{\underline{II},z}$ - główne średnie kwadratowe uchylenia prawa rozkładu błędów drugiej grupy

$$\varphi_{\underline{II}} = /X_{\underline{II}} - r_x, y_{\underline{II}} - r_y, z_{\underline{II}} - r_z/.$$

Wówczas w przyjętym oznaczeniu dla strzelania rozpryskowego wzór Aleksiejewa przyjmie postać:

$$R_{\underline{II}}(r) = \sum_{i=1}^{n} (-1)^{i-1} \frac{n!}{i!(n-i)!} \frac{R_0^i}{\sqrt{(1+i\lambda_x^2)(1+i\lambda_y^2)(1+i\lambda_z^2)}} \cdot \chi$$

$$\chi e^{-\frac{1}{2}\left[\frac{r_x^2}{\sigma^{*2}_{I,x}(1+i\lambda_x^2)} + \frac{r_y^2}{\sigma^{*2}_{Iy}(1+i\lambda_y^2)} + \frac{r_z^2}{\sigma^{*2}_{I,z}(1+i\lambda_z^2)}\right]}$$

/2.9/

Jeśli nie ma systematycznych błędów, tj. gdy środek rozrzutu powtarzających się błędów pokrywa się ze środkiem rozkładu g_1 związanego z prawem rażenia samolotu, wówczas Aleksiejewa przyjmie postać:

$$R_{\underline{II}}(0) = \sum_{i=1}^{n} (-1)^{i-1} \frac{n!}{i!(n-i)!} \cdot \frac{R_0^i}{\sqrt{(1+i\lambda_x^2)(1+i\lambda_y^2)(1+i\lambda_z^2)}}$$

/2.10/

Kolejność obliczeń omówimy na przykładzie:

Przykład:

Bateria 100 mm armat KS-19 /8 dział/ ma strzelać do samolotu. Obliczyć prawdopodobieństwo rażenia samolotu salwą, wykorzystując układ dwóch grup, jeśli:

1/ elipsoidy średnich kwadratowych uchyleń, charakteryzujące prawo rozkładu poszczególnych grup, sumarycznych błędów i rozkładu g_1, związanego z prawem rażenia są podobne i podobnie rozłożone;

2/ rzuty błędu systematycznego na osie prostokątnego układu współrzędnych, którego początek pokrywa się ze środkiem rozkładu g_1, są odpowiednio równe:

$r_x = 50$ m, $r_y = 40$ m, $r_z = 20$ m;

3/ główne dyspersje prawa rozkładu błędów pierwszej grupy są równe:

$$\sigma^2_{1,x} = 5000 \text{ m}^2, \quad \sigma_{1,y} = 2500 \text{ m}^2, \quad \sigma_{1.z} = 1000 \text{ m}^2;$$

4/ główne dyspersje prawa rozkładu błędów drugiej grupy

$\sigma^2_{II,x} = 6000 \text{ m}^2$, $\sigma^2_{II,y} = 3000 \text{ m}^2$, $\sigma^2_{II,z} = 1200 \text{ m}^2$;

5/ czynnik normalizacyjny $W = 70.000 \text{ m}^3$;

6/ główne dyspersje rozkładu g_1:

$$\sigma^2_{g1,x} = 500 \text{ m}^2, \quad \sigma^2_{g1,y} = 250 \text{ m}^2, \quad \sigma^2_{g1,z} = 100 \text{m}^2$$

Rozwiązanie:

1. Obliczamy główne średnie kwadratowe odchylenia rozkładu $\rho^*_1(\bar{r})$

$$\sigma^*_{I,x} = \sqrt{\sigma^2_{I.x} + \sigma^2_{g1,x}} = \sqrt{5000 + 500} = 74,2 \text{ m};$$

$$\sigma^*_{I.y} = \sqrt{\sigma^2_{I.y} + \sigma^2_{g1.y}} = \sqrt{2500 + 250} = 52,4 \text{ m};$$

$$\sigma^*_{I,z} = \sqrt{\sigma^2_{I.z} + \sigma_{g1,z}} = \sqrt{1000 + 100} = 33,2 \text{ m}.$$

2. Obliczamy maksymalne prawdopodobieństwo rażenia samolotu jednym strzałem bez uwzględnienia błędów drugiej grupy

$$R_0 \frac{W}{(2\pi)^{\frac{3}{2}} \sigma^*_{I.x} \sigma^*_{I.y} \sigma^*_{I.z}} = \frac{70.000}{15,7 \cdot 74,2 \cdot 52,4 \cdot 33,2} = 0,0345$$

3. Obliczamy względne charakterystyki rozrzutu

$$\lambda^2_x = \frac{\sigma^2_{i,x}}{\sigma^{*2}_{I,x}} = \frac{6000}{5500} = 1,091;$$

$$\lambda_y^2 = \frac{G_{I.y}^2}{G_{I.y}^{*2}} = \frac{3000}{2750} = 1{,}091;$$

$$\lambda_z^2 = \frac{G_{I.z}^2}{G_{I.z}^{*2}} = \frac{1200}{1100} = 1{,}091.$$

4. Wzór /2.9/ przedstawimy w postaci rozwiniętej i określimy prawdopodobieństwo rażenia samolotu, poprzestając na pierwszych trzech członach, ponieważ wartości kolejnych członów są bardzo małe.

$$R_{II}(\bar{r}) = \frac{n R_0}{\sqrt{(1+\lambda_x^2)(1+\lambda_y^2)(1+\lambda_z^2)}} \times$$

$$\times e^{-\frac{1}{2}\left[\frac{r_x^2}{G_{I.x}^{*2}(1+\lambda_x^2)} + \frac{r_y^2}{G_{I.y}^{*2}(1+\lambda_y^2)} + \frac{r_z^2}{G_{I.z}^{*2}(1+\lambda_z^2)}\right]} -$$

$$- \frac{n(n-1)R_0^2}{2!\sqrt{(1+2\lambda_x^2)(1+2\lambda_y^2)(1+2\lambda_z^2)}} \times$$

$$\times e^{-\frac{2}{2}\left[\frac{r_x^2}{G_{I.x}^{*2}(1+2\lambda_x^2)} + \frac{r_y^2}{G_{I.y}^{*2}(1+2\lambda_y^2)} + \frac{r_z^2}{G_{I.z}^{*2}(1+2\lambda_z^2)}\right]} +$$

$$+ \frac{n(n-1)(n-2)R_0^3}{3!\sqrt{(1+3\lambda_x^2)(1+3\lambda_y^2)(1+3\lambda_z^2)}} \times$$

$$\times e^{-\frac{3}{2}\left[\frac{r_x^2}{G_{I.x}^{*2}(1+3\lambda_x^2)} + \frac{r_y^2}{G_{I.y}^{*2}(1+3\lambda_y^2)} + \frac{r_z^2}{G_{I.z}^{*2}(1+3\lambda_z^2)}\right]} =$$

$$= 0{,}0650 - 0{,}00376 + 0{,}000143 - 0{,}0613.$$

Sposób Kołmogorowa

Sposób ten opiera się na przedstawieniu całki /2.4/ w postaci kompozycji dwóch rozkładów i aproksymacji otrzymanego sumarycznego prawa przez rozkład normalny, którego parametry można określić.

Ze struktury wzoru na obliczenie prawdopodobieństwa rażenia samolotu salwą n dział /2.4/ wynika, że wzór ten różni się od wzorów na obliczenie prawdopodobieństwa

rażenia samolotu jednym strzałem /1.2/, /1.3/ tylko tym, że zamiast funkcji $G/x,y,z/$ - prawa rażenia samolotu - mamy funkcję $R_{1,n}/x_{II},y_{II},z_{II}/$ i zamiast gęstości rozkładu prawdopodobieństwa sumarycznych błędów strzelania $\varphi/x-r_x,\ y-r_y,\ z-r_z/$ lub błędów pierwszej grupy $\varphi_I/x-r_x,\ y-r_y,\ z-r_z/$ mamy gęstość rozkładu prawdopodobieństw błędów drugiej grupy $\varphi_{II}/x_{II}-r_x,\ y_{II}-r_y,\ z_{II}-r_z/$

Rozważając analogicznie, jak przy wyprowadzeniu wzoru /1.10/, na obliczenie prawdopodobieństwa rażenia samolotu nie posiadającego akumulacji strat, salwą n dział wükładzie dwóch grup błędów, otrzymamy wzór:

$$R_{II}/\bar{r}/ = C\Psi_{II}(\bar{r}), \qquad /2.11/$$

gdzie:

$$\Psi_{II}(\bar{r}) = \int\int\int \varphi_{II}(x_{II}-r_x,\ y_{II}-r_y,\ z_{II}-r_z) \times$$

$$\times g_{II}/x_{II},y_{II},z_{II}/\,dx_{II}\,dy_{II}\,dz_{II}$$

tj. $\Psi_{II}/\bar{r}/$ stanowi sumaryczny rozkład, otrzymany w wyniku kompozycji dwóch rozkładów φ_{II} i g_{II}.

Przy tym gęstość rozkładu prawdopodobieństw

$$g_{II}/x_{II},y_{II},z_{II}/ = \frac{R_{1,n}/x_{II},\ y_{II},\ z_{II}/}{C} \qquad /2.12/$$

gdzie: C - normujący mnożnik określany z wyrażenia:

$$C = \int\int\int R_{1,n}/x_{II},\ y_{II},\ z_{II}/\,dx_{II}\,dy_{II}\,dz_{II} \qquad /2.13/$$

Po przekształceniach analogicznych, jak dla przypadku strzelania uderzeniowego, otrzymamy następujące wyrażenie dla C:

$$C = nWE_3/t/ \qquad /2.14/$$

gdzie $E_3/t/$ - funkcja, dla której sporządzono tabele z jedną wielkością wyjściową $t = n.R_0$;

R_0 - maksymalne prawdopodobieństwo rażenia samolotu przy jednym strzale, obliczone z uwzględnieniem tylko błędów pierwszej grupy;

n - ilość strzałów.

Postać funkcji / / zależy od stosunku charakterystyk rozrzutu rozkładów φ_{II} i g_{II}. W wielu przypadkach strzelania rozpryskowego artylerii przeciwlotniczej charakterystyki rozrzutu normalnego prawa rozkładu błędów drugiej grupy φ_{II} są większe od odpowiednich charakterystyk rozrzutu rozkładu g_{II}. W związku z tym Kołmogorow zaproponował, aby funkcję $\Psi_{II}(\bar{r})$ zastąpić funkcją normalnego rozkładu, tj.

$$\Psi_{II}(\bar{r}) \approx \varphi_{II}^{*}(\bar{r}). \qquad /2.15/$$

Na tym polega drugie założenie sposobu Kołmogorowa.

Jeśli osie układu współrzędnych dobrać tak, aby początek układu pokrywał się ze środkiem rozkładu związanego z prawem rażenia, a kierunki osi - z kierunkami głównych średnich kwadratowych uchyleń rozkładu $\varphi_{II}^{*}(\bar{r})$, to wyrażenie dla normalnej gęstości prawdopodobieństwa rozkładu $\varphi_{II}^{*}(\bar{r})$ przyjmie postać:

$$\varphi_{II}^{*}(\bar{r}) = \frac{1}{(2\pi)^{\frac{3}{2}} G_{II.x}^{*} G_{II.y}^{*} G_{II.z}^{*}} e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{r_x^2}{G_{II.x}^{*2}} + \frac{r_y^2}{G_{II.y}^{*2}} + \frac{r_z^2}{G_{II.z}^{*2}}\right)} \qquad /2.16/$$

Główne dyspersje rozkładu $\varphi_{II}(\bar{r})$ na trzech niezależnych kierunkach będą równe

$$\left.\begin{aligned} G_{II\,x}^{*2} &= G_{II.x}^{2} + G_{gII.x}^{2} \\ G_{II\,y}^{*2} &= G_{II.y}^{2} + G_{gII.y}^{2} \\ G_{II\,z}^{*2} &= G_{II.z}^{2} + G_{gII.z}^{2} \end{aligned}\right\}, \qquad /2.17/$$

gdzie $G^2_{\underline{I}.x}$, $G^2_{\underline{II}y}$, $G^2_{\underline{II}.z}$ – główne dyspersje normalnego rozkładu błędów drugiej grupy;

$G^2_{g\underline{II}.x}$, $G^2_{g\underline{I}.y}$, $G^2_{g\underline{II}.z}$ – główne dyspersje rozkładu g_{II}, które po przekształceniach, analogicznych do przekształceń dla przypadku strzelania uderzeniowego, można obliczyć ze wzorów

$$\left.\begin{aligned} G^2_{g\underline{I}.x} &= G^{*2}_{\underline{I}.x} F_3(t) \\ G^2_{g\underline{II}.y} &= G^{*2}_{\underline{I}.y} F_3(t) \\ G^2_{g\underline{I}z} &= G^{*2}_{\underline{I}.z} F_3(t) \end{aligned}\right\},$$

/2.18/

w których F_3 /t/ – tabelarne funkcje jednego argumentu

$t = n \cdot R_o$, gdzie $R_o = \dfrac{W}{(2\pi)^{\frac{3}{2}} G^*_{\underline{I}.x} G^*_{\underline{I}.y} G^*_{\underline{I}.z}}$

Uwzględniając wykonane przekształcenia, ptrzymamy wzór roboczy na obliczenie prawdopodobieństwa rażenia samolotu salwą n dział w układzie dwóch grup błędów sposobem Kołmogorowa

$$R_{\underline{I}}(\bar{r}) = \frac{nWE_3(t)}{(2\pi)^{\frac{3}{2}} G^*_{\underline{II}.x} G_{\underline{II}.y} G_{\underline{II}z}} e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{\tilde{r}_x^2}{G^{*2}_{\underline{II}.x}} + \frac{r_y^2}{G^{*2}_{\underline{II}y}} + \frac{r_z^2}{G^{*2}_{\underline{II}.z}}\right)},$$

/2.19/

gdzie r_x, r_y, r_z – rzuty systematycznego błędu na osię układu, równoległe do głównych dyspersji rozkładu $\varphi^*_{\underline{II}}(\bar{r})$, którego początek pokrywa się ze środkiem rozkładu, związanego z prawem rażenia.

Jeśli środek rozkładu błędów drugiej grupy pokrywa się ze środkiem rozkładu, związanego z prawem rażenia, to wzór /2.19/ przyjmie postać:

$$R_{\bar{II}}(0) = \frac{n\,WE_3(t)}{(2\bar{\imath})^{\frac{3}{2}} G^{*}_{\bar{II},x} G^{*}_{\bar{II},y} G^{*}_{\bar{II},z}} \qquad /2.20/$$

Jeśli oznaczymy stosunek głównych średnich kwadratowych uchyleń prawa rozkładu błędów drugiej grupy do głównych średnich kwadratowych uchyleń rozkładu $\rho^{*}_{\bar{I}}$ / $\bar{r}$ / przez $\lambda_x, \lambda_y, \lambda_z$, tj.

$$\lambda_x = \frac{G_{\bar{II},x}}{G^{*}_{\bar{II},x}}, \quad \lambda_y = \frac{G_{\bar{II},y}}{G^{*}_{\bar{II},y}} \quad i \quad \lambda_z = \frac{G_{\bar{II},z}}{G^{*}_{\bar{II},z}},$$

to po pewnych przekształceniach, wzory robocze /2.19/ i/2.20/ na obliczenie prawdopodobieństwa rażenia samolotu salwą n dział będą posiadały następującą postać:

$$R_{\bar{II}}(\bar{r}) = \frac{t\,E_3(t)}{\sqrt{[\lambda_x^2 + F_3(t)][\lambda_y^2 + F_3(t)][\lambda_z^2 + F_3(t)]}} \times$$

$$\times e^{-\frac{1}{2}\left\{\frac{r_x^2}{G^{*2}_{\bar{II}x}[\lambda_x^2 + F_3(t)]} + \frac{r_y^2}{G^{*2}_{\bar{II}.y}[\lambda_y^2 + F_3(t)]} + \frac{r_z^2}{G^{*2}_{\bar{II}z}[\lambda_z^2 + F_3(t)]}\right\}} \qquad /2.21/$$

i

$$R_{\bar{I}}(0) = \frac{t\,E_3(t)}{\sqrt{[\lambda_x^2 + F_3(t)][\lambda_y^2 + F_3(t)][\lambda_z^2 + F_3(t)]}} \qquad /2.22/$$

Kolejność obliczeń prawdopodobieństwa rażenia samolotu salwą sposobem Kołmogorowa dla przypadku strzelania rozpryskowego omówimy na przykładzie.

Przykład: Bateria 100 mm armat przeciwlotniczych KS-19 /8 dział/ ma strzelać do samolotu. Obliczyć prawdopodonieństwo rażenia samolotu salwą w układzie dwóch grup błędów dla warunków przykładu rozpatrzonego przy sposobie Aleksiejewa.

Rozwiązanie:

1. Obliczamy główne dyspersje rozkładu $\varphi_I^*(\bar{r})$, którym zastąpiono sumaryczny rozkład $\Psi_I(\bar{r})$, otrzymany w wyniku kompozycji dwóch rozkładów: rozkładu błędów pierwszej grupy φ_1 i rozkładu g_1, związanego z prawem rażenia samolotu.

$$\sigma_{I.x}^{*2} = \sigma_{I.x}^2 + \sigma_{g_{I,x}}^2 = 5000 + 500 = 5500 \text{ m}^2, \qquad \sigma_{I.x}^* = 74,2 \text{ m};$$

$$\sigma_{I.y}^{*2} = \sigma_{I.y}^2 + \sigma_{g_{I,y}}^2 = 2500 + 250 = 2750 \text{ m}^2, \qquad \sigma_{I.y}^* = 52,4 \text{ m}$$

$$\sigma_{I.z}^{*2} = \sigma_{I.z}^2 + \sigma_{g_{I.z}}^2 = 1000 + 100 = 1100 \text{ m}^2, \qquad \sigma_{I.z}^* = 33,2 \text{ m}.$$

2. Obliczamy maksymalne prawdopodobieństwo rażenia samolotu jednym strzałem bez uwzględnienia błędów drugiej grupy

$$R_0 = \frac{W}{(2\bar{\imath})^{\frac{1}{2}} \sigma_{I.x}^* \sigma_{I.y}^* \sigma_{I.z}^*} = \frac{70.000}{15,7.74,2.52,4.33,2} =$$

$$= 0,0345$$

3. Obliczamy parametr $t = n \cdot R_0 = 8 \cdot 0,0345 = 0,276$.
4. W tabelach odnajdujemy $E_3/t/ = E_3/0,276/ = 0,954$; $F_3/t/ = F_3/0,276/ = 1,025$.
5. Obliczamy główne dyspersje rozkładu g_{II}

$$\sigma_{g_{II.x}}^2 = \sigma_{I.x}^{*2} \; F_3/t/ = 5500 \cdot 1,025 = 5637,5 \text{ m}^2;$$

$$\sigma_{g_{II.y}}^2 = \sigma_{I.y}^{*2} \; F_3/t/ = 2750 \cdot 1,025 = 2818,75 \text{ m}^2;$$

$$\sigma_{g_{II.z}}^2 = \sigma_{I.z}^{*2} \; F_3/t/ = 1100 \cdot 1,025 = 1127,5 \text{ m}^2.$$

6. Obliczamy główne dyspersje rozkładu $\varphi_{II}^*(\bar{r})$, którym zastąpiono sumaryczny rozkład $\Psi_{II}(\bar{r})$, otrzymany w wyniku

kompozycji dwóch rozkładów: rozkładu błędów drugiej grupy i rozkładu g_{II}.

$$G^{*2}_{\bar{I}.x} = G^2_{\bar{II}.x} + G^2_{g\bar{I}.x} = 6000+5637,5=11637,5 \text{ m}^2,$$

$$G^*_{\bar{I}.x} = 107,9 \text{ m};$$

$$G^{*2}_{\bar{II}.y} = G^2_{\bar{II}.y} + G^2_{g\bar{II}.y} = 3000+2818,75=5818,75 \text{ m}^2;$$

$$G^*_{\bar{II}.y} = 76,2 \text{ m};$$

$$G^{*2}_{\bar{I}.z} = G^2_{\bar{I}z} + G^2_{g\bar{I}z} = 1200+1127,5=2327,5 \text{ m}^2;$$

$$G^*_{\bar{II}.z} = 48,3 \text{ m}$$

7. Obliczamy prawdopodobieństwo rażenia samolotu salwą

$$R_{\bar{I}}(r) = \frac{nWE_1(t)}{(2\pi)^{\frac{3}{2}} G^*_{\bar{I}.x} G^*_{\bar{II}y} G^*_{\bar{I}z}} e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{r_x^2}{G^{*2}_{\bar{II}.x}} + \frac{r_y^2}{G^{*2}_{\bar{II}.y}} + \frac{r_z^2}{G^{*2}_{\bar{I}.z}}\right)}$$

$$= \frac{8 \cdot 70.000 \cdot 0,954}{15,7 \cdot 107,9 \cdot 76,2 \cdot 48,3} e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{2500}{11637,5} + \frac{1600}{5818,75} + \frac{400}{2327,5}\right)} =$$

$$= 0,0857\, e^{-0,33085} = 0,0617$$

SPOSOB INSTYTUTU NAUKOWO-BADAWCZEGO WOJSK OPL

Sposób Kołmogorowa daje dostateczn i dokładną wartość prawdopodobieństwa rażenia samolotu w tym przypadku, gdy charakterystyki rozrzutu powtarzających się błędów /druga grupa/ są większe od odpowiednich charakterystyk rozrzutu rozkładu g_{II} i rozkładu g_1, związanego z prawem rażenia. Jednak przy strzelaniu rozpryskowym artylerii przeciwlotniczej średniego kalibru do celów powietrznych często ten warunek nie jest zachowany. W tym przypadku sposób Kołmogorową daje duże błędy w ocenie prawdopodobieństwa rażenia samolotu . W związku z tym Instytut Naukowo-Badawczy, wykorzystując pomysł Kołmogorowa opracował sposób przybliżonej oceny prawdopodobieństwa rażenia samolotu, aktualny dla tych warunków.
W tych przypadkach, gdy charakterystyki rozrzutu powtarzających się błędów są znacznie mniejsze od odpowiednich charakterystyk rozrzutu rozkładu g_{II}, rozkład $\Psi_{\bar{I}}(\bar{r})$ we wzorze /2.11/, otrzymany w wyniku kompozycji dwóch rozkładów $\varphi_{\bar{II}}$ i g_{II}, będzie bardziej zbliżony do rozkładu g_{II}, niż do rozkładu normalnego φ . Zatem w takich przypadkach celowe jest aproksymowanie rozkładu $\Psi_{\bar{II}}(\bar{r})$ nie przez normalny rozkład $f^*_{\bar{II}}(r)$, a przez rozkład $g^*_{\bar{II}}(r)$, który byłby zbliżony do rozkładu g_{II}, tj. aproksymowanie rozkładu $\Psi_{\bar{II}}(\bar{r})$ przez funkcję o postaci /2.5/.

$$g^*_{\bar{II}}(\bar{r}) = \frac{1}{C^*}\left\{1-\left[1-R^*_0 e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{r_x^2}{\sigma^{*2}_{g,x}}+\frac{r_y^2}{\sigma^{*2}_{g,y}}+\frac{r_z^2}{\sigma^{*2}_{g,z}}\right)}\right]^n\right\}, \qquad /2.23/$$

której struktura jest analogiczna do funckji

$$g_{II}(x_{II}, y_{II}, z_{II}) = \frac{R_{1,n}(x_{II}, y_{II}, z_{II})}{C} =$$

$$= \frac{1}{C}\left\{1-\left[1-R_0 e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{x_{\bar{I}}^2}{\sigma^{*2}_{\bar{I},x}}+\frac{y_{\bar{I}}^2}{\sigma^{*2}_{\bar{I},y}}+\frac{z_{\bar{I}}^2}{\sigma^{*2}_{\bar{I},z}}\right)}\right]^n\right\}$$

we wzorze /2.23/, czynnik normalizacyjny C^*, tak samo jak przy sposobie Kołmogorowa oblicza się z wyrażenia .

$$C^* = \int\int\int \left\{1-\left[1-R_0^* e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{r_x^2}{G_{g,x}^{*2}} + \frac{r_y^2}{G_{g,y}^{*2}} + \frac{r_z^2}{G_{g,z}^{*2}}\right)}\right]^n\right\} \times$$

$$\times dr_x\, dr_y\, dr_z \qquad /2.24/$$

Jeśli zastąpić rozkład $\Psi_{\underline{I}}(\bar{r})$, otrzymamy w wyniku kompozycji rozkładów $\varphi_{\underline{I}}$ i g_{II}, funkcję o postaci $g_{\underline{II}}^*(\bar{r})$, tj. jeśli przyjąć, że

$$\Psi_{\underline{I}}(\bar{r}) \approx g_{\underline{II}}^*(\bar{r}), \qquad /2.25/$$

to wzór na samo obliczenie prawdopodobieństwa rażenia samolotu salwą n dział przyjmie postać

$$R_{\underline{II}}(\bar{r}) \approx C g_{\underline{II}}^*(\bar{r}) = \frac{C}{C^*}\left\{1-\left[1-R_0^* e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{r_x^2}{G_{g,x}^{*2}} + \frac{r_y^2}{G_{g,x}^{*2}} + \frac{r_z^2}{G_{g,2}^{*2}}\right)}\right]^n\right\}, \qquad /2.26/$$

gdzie jak uprzednio

$$C = nW E_3/t/$$

Uwzględniając, że $t = n \cdot R_0$ i $R_0 = \dfrac{W}{(2\pi)^{\frac{1}{2}} G_{\underline{I},x}^* G_{\underline{I},y}^* G_{\underline{I},z}^*}$

wyrażeniu dla C można nadać postać

$$C = (2\pi)^{\frac{1}{2}} t E_3(t) G_{\underline{I},x}^* G_{\underline{I},y}^* G_{\underline{I},z}^* \qquad /2.27/$$

Przy określaniu R_{II} / $\bar{r}$ / za pomocą wzoru /2.26/ trzeba parametr C przyjąć równy C. W tym przypadku

$$R_{\bar{I}}(\bar{r}) = 1-\left[1-R_0^* e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{r_x^2}{G_{g,x}^{*2}}+\frac{r_y^2}{G_{g,y}^{*2}}+\frac{r_z^2}{G_{g,z}^{*2}}\right)}\right]^n \qquad /2.28/$$

Przy małych wartościach R_0 wyrażeniu /2.28/ można nadać postać:

$$R_{\bar{I}}(\bar{r}) = 1-e^{-R_0^* n e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{r_x^2}{G_{g,x}^{*2}}+\frac{r_y^2}{G_{g,y}^{*2}}+\frac{r_z^2}{G_{g,z}^{*2}}\right)}}$$

Oznaczając $R_0^* n = t^*$, otrzymamy ostateczny wzór na obliczenie R_{II} / $\bar{r}$ /

$$R_{\bar{I}}(\bar{r}) = 1-e^{-t^* e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{r_x^2}{G_{g,x}^{*2}}+\frac{r_y^2}{G_{g,y}^{*2}}+\frac{r_z^2}{G_{g,z}^{*2}}\right)}} \qquad /2.29/$$

Ze wzoru /2.29/ wynika, że do obliczenia prawdopodobieństwa rażenia samolotu trzeba znać główne dyspersje $G_{g.x}^{*2}, G_{g.y}^{*2}, G_{g.z}^{*2}$ i parametr t^*.

Określamy te wielkości:

Przy obliczaniu dyspersji rozkładu g_{II} sposobem Kołmogorowa wykorzystuje się wzory /2.18/. Ponieważ struktura rozkładu g_{II}^* jest analogiczna z rozkładem g_{II}, to dyspersje rozkładu g_{II}^* także oblicza się z wyrażeń analogicznych, tj.

$$\left.\begin{aligned} \sigma^{*2}_{g.\bar{I}x} &= \sigma^{*2}_{g.\bar{I}y}\, F_3(t^*) \\ \sigma^{*2}_{g.\bar{I}y} &= \sigma^{*2}_{g.\bar{I}y}\, F_3(t^*) \\ \sigma^{*2}_{g.\bar{I}z} &= \sigma^{*2}_{g.\bar{I}z}\, F_3(t^*) \end{aligned}\right\}.$$

/2.30/

Przy sposobie Instytutu Naukowo-Badawczego OPL, tak samo jak przy sposobie Kołmogorowa, rozkład $\Psi_{\bar{I}}\ /\ \bar{r}\ /$ otrzymany w wyniku kompozycji dwóch rozkładów $\varphi_{\bar{I}}$ i g_{II}, zastępuje się rozkładem g^*_{II} typu /2.23/, przy tym rozkład g^*_{II}, powinien być taki, aby jego parametry były równe odpowiednim parametrom rozkładu $\Psi_{\bar{I}}\ /\ \bar{r}\ /$. W przeciwnym wypadku obliczenie prawdopodobieństwa rażenia samolotu będzie obarżone dużymi błędami.
Główne dyspersje rozkładu $\Psi_{\bar{I}}\ /\ \bar{r}\ /$ na trzech niezależnych kierunkach będą równe:

$$\left.\begin{aligned} \sigma^2_{\Psi_{\bar{I}}.x} &= \sigma^2_{\bar{I}.x} + \sigma^2_{g_{\bar{I}}.x} \\ \sigma^2_{\Psi_{\bar{I}}.y} &= \sigma^2_{\bar{I}.y} + \sigma^2_{g_{\bar{I}}.y} \\ \sigma_{\Psi_{\bar{I}}.z} &= \sigma^2_{\bar{I}.z} + \sigma^2_{g_{\bar{I}}.z} \end{aligned}\right\}.$$

/2.31/

Główne dyspersje rozkładu g_{II} oblicza się z wyrażenia /2.18/

Zatem w wyniku równości odpowiednich parametrów rozkładów $\Psi_I / \bar{\tau} /$ i $g^*_{II} / \bar{\tau} /$ otrzymamy

$$\left.\begin{aligned} G^{*2}_{g,x} F_3(t^*) &= G^2_{\underline{II},x} + G^{*2}_{\underline{I},x} F_3(t) \\ G^{*2}_{g,y} F_3(t^*) &= G^2_{\underline{II},y} + G^{*2}_{\underline{I},y} F_3(t) \\ G^{*2}_{g,z} F_3(t^*) &= G^2_{\underline{II},z} + G^{*2}_{\underline{I},z} F_3(t) \end{aligned}\right\}$$

/2.32/

Aby rozwiązać równania /2.32/ trzeba znać parametry t^*. Do obliczenia tego parametru można wykorzystać zależność $C = \ldots$. Uwzględniając to, a także /2.27/, układamy równanie:

$$t E_3(t) G^*_{\underline{I},x} G^*_{\underline{I},y} G^*_{\underline{I},z} = t^* E_3(t^*) G^*_{g,x} G^*_{g,y} G^*_{g,z}$$

/2.33/

Jeśli równania /2.32/ wymnożymy członami, wyciągniemy drugi pierwiastek z obu stron otrzymanych wyrażeń i podzielimy obie strony równania /2.33/ przez wynik, to otrzymamy następujące wyrażenie dla określenia parametru t :

$$\frac{t^* E_3(t^*)}{F_3^{\frac{1}{2}}(t^*)} = t F_3(t) \frac{G^*_{I,x} G^*_{I,y} G^*_{I,z}}{\sqrt{[G^2_{II,x} + G^{*2}_{I,x} F_3(t)][G^2_{II,y} + G^{*2}_{I,y} F_3(t)][G^2_{II,z} + G^{*2}_{I,z} F_3(t)]}}$$

/2.34/

Uwzględniając wyrażenia /2.17/ i /2.18/, wzór /2.34/ można przekształcić następująco:

$$\frac{t^* E_3(t^*)}{F_3^{\frac{3}{2}}(t^*)} = tE_3(t)\ \frac{G^*_{I,x}\, G^*_{I,y}\, G^*_{I,z}}{G^*_{II,x}\, G^*_{II,y}\, G^*_{II,z}}$$

/2.35/

Oznaczmy lewą stronę równania /2.35/ przez R/t*/, tj.

$$R/t^*/ = \frac{t^* E_3(t^*)}{F_3^{\frac{3}{2}}(t^*)} \qquad /2,36/$$

Wówczas na podstawie analogii z wyrażeniem/2.36/ można zapisać:

$$R/t/ = \frac{tE_3(t)}{F_3^{\frac{3}{2}}(t)} \qquad /2.37/$$

Dla funkcji R/t/ sporządza się tabelę. Posługując się tabelami można z wyrażenia /2.28/ określić parametr t* :

$$R/t\ /\ = tE_3/t/\ \frac{G^*_{I,x}\, G^*_{I,y}\, G^*_{I,z}}{G^*_{II,x}\, G^*_{II,y}\, G^*_{II,z}} \qquad /2.38/$$

Zastosowanie sposobu OPL do obliczania prawdopodobieństwa rażenia samolotu salwą w układzie dwóch grup błędów omówimy na przykładzie.

Przykład: Bateria 100 mm armat przeciwlotniczych KS-19 /8 dział/ ma strzelać do samolotu. Obliczyć prawdopodobieństwo rażenia samolotu salwą w warunkach przykładu rozpatrzonego przy omawianiu sposobu Kołmogorowa. Zgodnie z rozpatrzonym uprzednio przykładem otrzymamy:

$W = 7 \cdot 10^4\ m^3$; $t = 0,276$; $E_3/t/ = 0,945$; $F_3/t/ \doteq 1,025$;

$G^*_{1,x}\ G^*_{1,y}\ G^*_{1,z} = 129084,3\ m^3$;

$G^*_{II,x}\ G^*_{II,y}\ G^*_{II,z} = 397121,6\ m^3$.

Rozwiązanie:

1. Obliczamy parametr t*

$$R(t^*) = tE_3(t)\ \frac{G^*_{I,x} G^*_{I,y} G^*_{I,z}}{G^*_{II,x} G^*_{II,y} G^*_{II,z}} = 0{,}276 \cdot 0{,}954\ \frac{129084{,}3}{397121{,}6} = 0{,}083$$

W tabelach odnajdujemy $F_3/t^*/ = F_3/0{,}083/ = 1{,}008$.

2. Obliczamy główne dyspersje $G^{*2}_{g,x}, G^{*2}_{g,y}, G^{*2}_{g,z}$

$$G^{*2}_{g,x} = \frac{G^2_{II,x} + G^{*2}_{I,x} F_3(t)}{F_3(t^*)} = \frac{G^{*2}_{II,x}}{F_3(t^*)} = \frac{11637{,}5}{1{,}008} \approx 11534\ m^2;$$

$$G^{*2}_{g,y} = \frac{G^2_{II,y} + G^{*2}_{I,y} F_3(t)}{F_3(t^*)} = \frac{G^{*2}_{II,y}}{F_3(t^*)} = \frac{5818{,}75}{1{,}008} \approx 5767\ m^2;$$

$$G^{*2}_{g,z} = \frac{G^2_{II,z} + G^{*2}_{I,z} F_3(t)}{F_3(t^*)} = \frac{G^{*2}_{II,z}}{F_3(t^*)} = \frac{2327{,}5}{1{,}008} \approx 2307\ m^3$$

3. Obliczamy prawdopodobieństwo rażenia samolotu salwą.

$$R_{II}(\bar{r}) = 1 - e^{-t^* e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{r_x^2}{G^{*2}_{g,x}} + \frac{r_y^2}{G^{*2}_{g,y}} + \frac{r_z^2}{G^{*2}_{g,z}}\right)}} =$$

$$= 1 - e^{-0{,}084 e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{2500}{11534} + \frac{1600}{5767} + \frac{400}{2703}\right)}} = 1 - e^{-0{,}084 e^{-0{,}3338}}$$

$$\approx 0{,}0582$$

Sposób "sumarycznego prawa"

Jeśli błędy obarczające każdy z n strzałów są niezależne /nie ma powtarzającego się błędu/ oraz nie ma akumulacji uszkodzeń, to na podstawie wzoru na prawdopodopodobieństwo wystąpienia zdarzenia chociaż jeden raz przy niezależnych doświadczenia, obliczymy prawdopodobieństwo rażenia samolotu n strzałami salwy, jako prawdopodobieństwo rażenia chociażby jednym strzałem, stosując wzór:

$$R_n = 1 - \prod^n (1 - R_i) \qquad 2.39$$

/2.39/

gdzie R_i - prawdopodobieństwo rażenia samolotu i - tym strzałem.

W przypadku, gdy prawdopodobieństwo rażenia dla wszystkich strzałów jest jednakowe, wzór /2,39/ przyjmie postać

$$R_{II} = 1 - /1 - R_1/^n \qquad /2.40/$$

Oczywiście, że przy małej zależności błędów strzałów prawdopodobieństwo rażenia samolotu salwą także można obliczać za pomocą wzorów /2.39/ lub /2.40/, wykorzystując do obliczenia prawdopodobieństwo rażenia samolotu jednym strzałem "sumaryczne prawo" rozkładu błędów strzelania.

Kolejność obliczeń omówimy na przykładzie:

Przykład:

Bateria 100 mm armat przeciwlotniczych /8 dział/ ma strzelać do samolotu. Obliczyć prawdopodobieństwo rażenia samolotu salwą, jeśli:

1/ elipsoidy średnich kwadratowych uchyleń, charakteryzujące prawa rozkładu błędów strzelania i rozkładu g_1, związanego z prawem rażenia są podobne i podobnie rozmieszczone;

2/ rzuty systematycznego błędu na osie prostokątnego układu współrzędnych, którego początek pokrywa się ze środkiem rozkładu g_1, są odpowiednio równe.

$$r_x = 50 \text{ m}; \quad r_y = 40 \text{ m} \quad \text{i} \quad r_z = 20 \text{ m};$$

3/ główne dyspersje prawa rozkładu błędów pierwszej grupy są równe:

$$\sigma^2_{1,x} = 10{,}000 \text{ m}^2, \quad \sigma^2_{1,y} = 5000 \text{ m}^2, \quad \sigma^2_{1,z} = 2000 \text{ m}^2;$$

4/ główne dyspersje prawa rozkładu błędów drugiej grupy:

$$\sigma^2_{II,x} = 1000 \text{ m}^2, \quad \sigma^2_{II,y} = 500 \text{ m}^2; \quad \sigma^2_{II,z} = 200 \text{ m}^2;$$

5/ czynnik normalizacyjny $W = 70.000 \text{ m}^3$;

6. główne dyspersje rozkładu g_1 są równe:

$$\sigma^2_{g1,x} = 500\ m^2, \qquad \sigma^2_{g1,y} = 250\ m^2, \qquad \sigma^2_{g1,z} = 100\ m^2.$$

Rozwiązanie:

1. Obliczamy prawdopodobieństwo rażenia samolotu jednym strzałem ze wzoru /1.12/ uwzględniając sumaryczne prawo rozkładu błędów strzelania w związku z tym, że błędy drugiej grupy są małe w porównaniu z błędami pierwszej grupy i można nie uwzględniać zależności błędów strzałów. W tym celu kolejno obliczamy:

a/ główne dyspersje sumarycznego prawa błędów strzelania

$$\sigma^2_{c,x} = \sigma^2_{1,x} + \sigma^2_{II,x} = 10.000+1000 = 11000\ m^2;$$

$$\sigma^2_{c,y} = \sigma^2_{1,y} + \sigma^2_{II,y} = 5000+500 = 5500\ m^2;$$

$$\sigma^2_{c,z} = \sigma^2_{1,z} + \sigma^2_{II,z} = 2000+200 = 2200\ m^2.$$

b/ główne dyspersje rozkładu $\varphi^*_c / \bar{r} /$, którym można zastąpić sumaryczne prawo, otrzymane w wyniku kompozycji dwóch rozkładów sumarycznego prawa rozkładu błędów strzelania φ_c i rozkładu g_1, związanego z prawem rażenia samolotu.

$$\sigma^{*2}_{c,x} = \sigma^2_{c,z} + \sigma^2_{g1,x} = 11000+500 = 11500\ m^2,$$

$$\sigma^*_{c,x} = 107,2\ m.$$

$$\sigma^{*2}_{c,y} = \sigma^2_{c,y} + \sigma^2_{g1,y} = 5500 + 250 = 5750\ m^2,$$

$$\sigma^*_{c,y} = 75,8\ m;$$

$$\sigma^{*2}_{c,z} = \sigma^2_{c,z} + \sigma^2_{g1,z} = 2200 + 100 = 2300\ m^2,$$

$$\sigma^*_{c,z} = 47,96\ m;$$

c/ prawdopodobieństwo rażenia samolotu jednym strzałem z uwzględnieniem sumarycznego prawa rozkładu błędów strzelania

$$R_I(\bar{\tau}) = \frac{W}{\sqrt{2\pi}^3 \sigma^*_{c,x}\sigma^*_{c,y}\sigma^*_{c,z}} e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{\tau_x^2}{\sigma^{*2}_{c,x}} + \frac{\tau_y^2}{\sigma^{*2}_{c,y}} + \frac{\tau_z^2}{\sigma^{*2}_{c,z}}\right)} =$$

$$= \frac{70.000}{15,7 \cdot 107,2 \cdot 75,8 \cdot 47,90} e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{2500}{11500} + \frac{1600}{5750} + \frac{400}{2300}\right)}$$

$$= 0,0114 \cdot e^{-9345} \approx 0,008.$$

2. Obliczamy prawdopodobieństwo rażenia samolotu salwą

$$R_{II} = 1-(1 - R_1)^n = 1 - (1 - 0,008)^8 = 0,0624$$

Z analizy wzorów /2.9/, /2.19/, /2.29/ i /2.39/ wynika, że wielkość $R_{II}(\bar{\tau})$ wzrasta ze wzrostem ilości strzałów w salwie n i ze wzrostem prawdopodobieństwa rażenia samolotu każdym strzałem salwy $R_1(\bar{\tau})$.

Dążenie do zwiększenia ilości strzałów w salwie jest jedną z przyczyn zwiększenia ilości dział w baterii, a także tworzenia baterii sprzężonych. Prawdopodobieństwo rażenia samolotu każdym strzałem salwy zależy od mocy pocisku, wytrzymałości celu i warunków strzelania, tj. od warunków spotkania się odłamków z celem i błędów strzelania.

Charakter błędów strzelania zależy głównie od sposobu strzelania, sposobu określania bieżących współrzędnych celu i rodzaju pracy PUAZO, a także od położenia celu na kursie, odległości i prędkości.

Przy strzelaniu do celów grupowych, składających się na przykład z M samolotów, na prawdopodobieństwo rażenia salwą j - tego samolotu /j = 1,2,3 ..., M/ wpływa dodatkowy błąd - przesunięcie punktu celowania, - ponieważ przy strzelaniu baterii celuje się w jeden z samolotów grupy.

Jeśli oznaczymy współrzędne j - tego samolotu względem punktu celowania przez x_1 ; y_j ; x_j, to wzory /2.9/, /2.19/, i /2.29/ przyjmą postać:

$$R_{j,\underline{II}}/\bar{r}/=\sum_{i=1}^{n}|-1|^{i-1}\frac{n!}{i!/n-i/!}\frac{R_o^i}{\sqrt{/1+i\lambda_x^2//1+i\lambda_y^2/\,/1+i\lambda_z^2/}}\times$$

$$\times e^{-\frac{1}{2}\left[\frac{/r_x-x_j/^2}{G^{*2}_{\underline{I},x}/1+i\lambda_x^2/}+\frac{/r_y-y_j/^2}{G^{*2}_{\underline{I},y}/1+i\lambda_y^2/}+\frac{/r_z-z_j/^2}{G^{*2}_{\underline{I},z}/1+i\lambda_z^2/}\right]};$$

$$-\frac{1}{2}\left[\frac{/r_x-x_j/^2}{G^{*2}_{\underline{II},x}}+\frac{/r_y-y_j/^2}{G^{*2}_{\underline{II},y}}+\frac{/r_z-z_j/^2}{G^{*2}_{\underline{II},z}}\right]; \qquad /2.41/$$

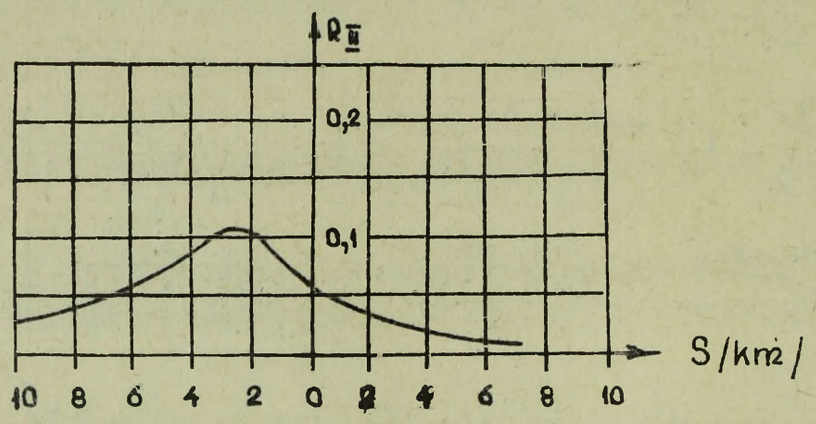
$$R_{j,\underline{II}}/\bar{r}/=\frac{n\,WE_o/t/}{/2\pi/^{\frac{3}{2}}G^{*}_{\underline{II},x}G^{*}_{\underline{II},y}G^{*}_{\underline{II},z}}e$$

$$-\frac{1}{2}\left[\frac{/r_x-x_j/^2}{G^{*2}_{g,x}}+\frac{/r_y-y_j/^2}{G^{*2}_{g,y}}+\frac{/r_z-z_j/^2}{G^{*2}_{g,z}}\right] \qquad /2.42/$$

$$R_{j,\underline{II}}/\bar{r}/=1-e^{-t*e} \qquad /2.43/$$

Na podstawie charakteru zmiany zasadniczych czynników wpływających na skuteczność każdej salwy można wyciągnąć wniosek, że w miarę zbliżania się celu do parametru, prawdopodobieństwo rażenia salwą zwiększa się, a w miarę oddalania - - maleje.

Oprócz tego, skuteczność salw przed parametrem jest znacznie większa niż za parametrem.

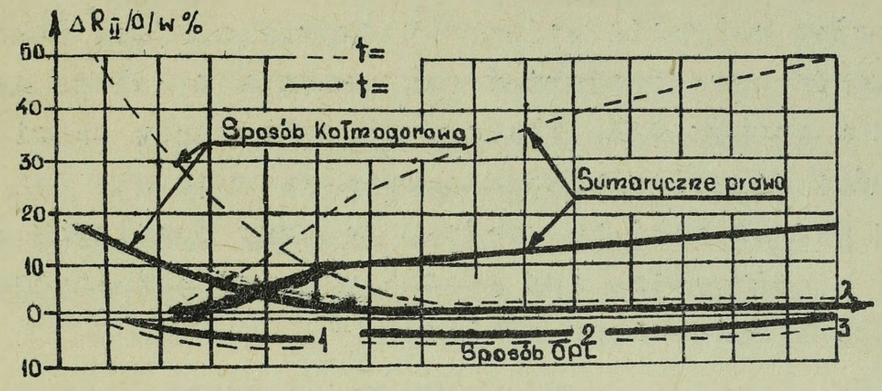


Rys. 2.2. Zmiana prawdopodobieństwa rażenia samolotu salwą R_{II} w zależności od położenia celu na kursie S.

Przykładowy charakter zmiany prawdopodobieństwa rażenia samolotu salwą w zależności od jego położenia na kursie przedstawiono na rys. 2.2, gdzie na osi odciętych odłożono oddalenie celu od parametru, a na osi rzędnych - - wartość prawdopodobieństwa rażenia celu salwą R_{II}.

Porównawcza ocena przybliżonych sposobów obliczania prawdopodobieństwa rażenia samolotu salwą

Z analizy rozpatrzonych wyżej przybliżonych sposobów obliczania prawdopodobieństwa rażenia samolotu salwą wynika, że najdokładniejszym i jednocześnie najbardziej pracochłonnym sposobem jest sposób Aleksiejewa. Dlatego obecnie sposób ten stosuje się jako wzorcowy przy porównywaniu wartości prawdopodobieństwa rażenia samolotu, obliczonych różnymi, przybliżonymi sposobami. Dokładność pozostałych przybliżonych sposobów zależy od stosunku charakterystyk rozrzutu powtarzających się i nie powtarzających się błędów.



Rys. 2.3 Zależność błędów w ocenie prawdopodobieństwa rażenia samolotu salwą ΔR_{II} sposobem Kołmogorowa, OPL i "sumarycznego prawa" od stosunku charakterystyk rozrzutu błędów strzelania λ .

Na rys. 2.3 przedstawiono wykresy błędów dla wartości parametru $t = n \cdot R_0$, równych 1 i 3, pod warunkiem, że błąd systematyczny sumaryczny $\bar{r} = 0$.

Z analizy wykresu wynikają następujące wnioski:

1. Jeżeli stosunek średnich kwadratowych uchyleń prawa rozkładu powtarzających się błędów strzelania σ_{II} do odpowiednich charakterystyk praw rozkładu niepowtarzających się błędów strzelania σ_1 jest mniejszy od 0,8, to sposób "sumarycznego prawa" jest dokładniejszy od sposobu Kołmogorowa.
2. Przy $\lambda \geqslant$ 0,8, odwrotnie, sposob Kołmogorowa jest dokładniejszy od sposobu "sumarycznego prawa".
   W tym przypadku jak wynika z obliczeń, błędy w określaniu prawdopodobieństwa rażenia samolotu salwą przy wartościach parametru $t \geqslant 3$/ tj. dla zakresu $t = n \cdot R_0$, najbardziej charakterystycznego dla strzelania artylerii przeciwlotniczej średniego kalibru nie przekraczają 12 %, a przy $t \leqslant 1$ błędy będą mniejsze od 5 %. Przy dowolnych wartościach t i λ sposób Kołmogorowa daje zawyższoną

wartość prawdopodobieństwa rażenia samolotu w porównaniu z innymi przybliżonymi sposobami.

3. Przy całym zakresie zmiany λ wystarczającą dokładność obliczenia prawdopodobieństwa rażenia samolotu salwą zapewnia sposób OPL. Dlatego obecnie, przy ocenie skuteczności strzelania, przeważnie stosuje się ten sposób. Należy jednak mieć na uwadze, że przy dowolnych wartościach t i λ , otrzymane tym sposobem prawdopodobieństwo rażenia celu będzie nieco zaniżone.

§ 3. Prawdopodobieństwo rażenia samolotu przy strzelaniu jednej i kilku baterii

Pod pojęciem strzelania baterii będziemy rozumieli tę ilość salw, które bateria może oddać do samolotu w czasie jego przebywania w strefie ognia. Obliczanie prawdopodobieństwa rażenia samolotu komplikuje fakt, że w czasie tego samego strzelania zmieniają się jego warunki /odległość strzelania, warunki prowadzenia celu itp./, w związku z tym zmieniają się charakterystyki błędów strzelania i prawa rażenia samolotu.

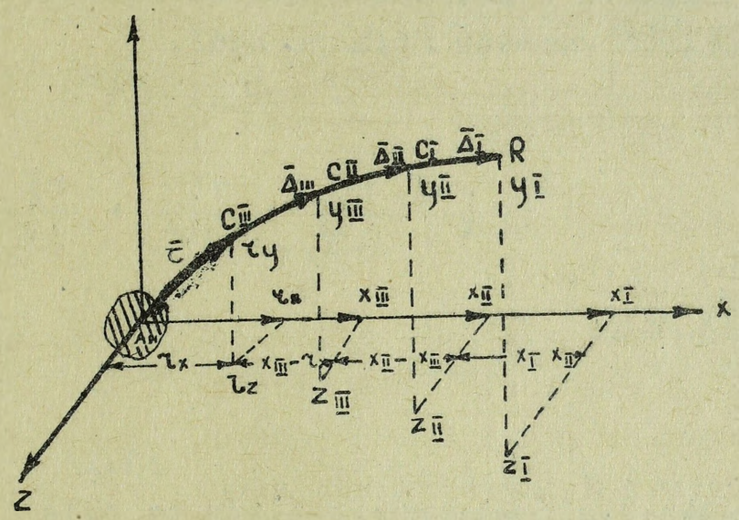
Rozpatrzymy najpierw sposób przybliżonej oceny prawdopodobieństwa rażenia samolotu przy strzelaniu kolejnymi salwami w układzie trzech grup błędów dla przypadku, gdy całe strzelanie odbywa się dokładnie w takich samych warunkach co i i - ta salwa /i = 1,2,3 ... ν , gdzie ν - ogólna ilość salw, które można oddać do celu/, tj. charakterystyki wszystkich trzech grup błędów, błąd systematyczny i parametry prawa rażenia będą takie same jak przy i - tej salwie. Załóżmy, że w wymienionych warunkach zamierza się oddać ν salw do pojedynczego samolotu.

Strzelanie obarczone jest błędem systematycznym τ , a wszystkie przypadkowe błędy strzelania można przedstawić w postaci trzech wzajemnie niezależnych grup błędów.

pierwsza grupa - niepowtarzające się błędy w salwie o prawie rozkładu $\varphi_1(x_1 - x_{II},\ y_1 - y_{II},\ z_1 - z_{II})$;

druga grupa - powtarzające się błędy w salwie o prawie rozkładu $\varphi_{II}(x_{II} - x_{III},\ y_{II} - y_{III},\ z_{II} - z_{III})$;

trzecia grupa - błędy powtarzające się od salwy do salwy o prawie rozkładu $\varphi_{\bar{III}}(x_{III} - \tau_x, y_{III} - \tau_y, z_{III} - \tau_z)$, gdzie τ_x, τ_y, τ_z - rzuty systematycznego błędu na osie prostokątnego układu współrzędnych, którego początek pokrywa się z punktem wyprzedzonym /rys. 3.1/.



Rys. 3.1 Rzuty błędów przypadkowych i błędu systematycznego na osie układu współrzędnych.

Załóżmy, że w przyjętych warunkach strzelania błąd trzeciej grupy $/x_{III}, y_{III}, z_{III}/$ nie zmienia się w czasie całego strzelania.

Prawdopodobieństwo rażenia samolotu przy strzelaniu składającym się z ν salw zgodnie z twierdzeniem o prawdopodobieństwie całkowitym można przedstawić w postaci

$$R_{\bar{III}}^{(\nu)}/\bar{\tau}/ = \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} \varphi_{\bar{III}}\left/ x_{\bar{III}} - \tau_x, y_{\bar{III}} - \tau_y, z_{\bar{III}} - \tau_z \right/ \times$$

$$\times \left\{1 - \left[1 - R_{\bar{II}}\left/ x_{\bar{III}}, y_{\bar{III}}, z_{\bar{III}} \right/\right]^{\nu}\right\} dx_{\bar{III}}\, dy_{\bar{III}}\, dz_{\bar{III}}\,, \qquad /3.1/$$

gdzie $R_{II}/x_{III}, y_{III}, z_{III}/$ - prawdopodobieństwo rażenia samolotu salwą, obliczone pod warunkiem, że błąd trzeciej grupy posiada określoną wartość $x_{III}, y_{III}, z_{III}$.

Struktura ogólnego wzoru /3.1/ na obliczenie prawdopodobieństwa rażenia samolotu jest analogiczna jak wzoru /2.4/ na obliczenie prawdopodobieństwa rażenia samolotu salwą w układzie dwóch grupy błędów strzelania. Dlatego postępując analogicznie, jak przy wyprowadzeniu wzoru /2.19/, otrzymamy przybliżony wzór na obliczenie prawdopodobieństwa rażenia samolotu przy strzelaniu baterii /sposób Kołmogorowa/.

$$R^{(1)}_{\text{III}}/\bar{r}/ \approx \frac{\nu n E_3/t/\, F_3/t_1/}{/2\pi/^{\frac{3}{2}}\, G^{*}_{\text{III},x} G^{*}_{\text{III},y} G^{*}_{\text{III},z}}\, e^{-\frac{1}{2}\left/ \frac{r_x^2}{G^{*2}_{\text{III},x}} + \frac{r_y^2}{G^{*2}_{\text{III},y}} + \frac{r_z^2}{G^{*2}_{\text{III},z}}\right/}, \qquad /3.2/$$

gdzie r_x, r_y, r_z - rzuty systematycznego błędu na osie prostokątnego układu współrzędnych, którego początek pokrywa się ze środkiem rozkładu, związanego z prawem rażenia;

$$t_1 = \frac{\nu n E_3/t/}{/2\pi/^{\frac{3}{2}}\, G^{*}_{\text{II},x}\, G^{*}_{\text{II},y}\, G^{*}_{\text{II},z}}$$

$G^{*2}_{\text{III},x}$, $G^{*2}_{\text{III},y}$, $G^{*2}_{\text{III},z}$ - główne główne dyspersje, które określa się następująco:

$$\left.\begin{aligned} G^{*2}_{\text{III},x} &= G^{2}_{\text{III},x} + G^{*2}_{\text{II},x}\, F_3/t_1/ \\ G^{*2}_{\text{III},y} &= G^{2}_{\text{III},y} + G^{*2}_{\text{II},y}\, F_3/t_1/ \\ G^{*2}_{\text{III},z} &= G^{2}_{\text{III},z} + G^{*2}_{\text{II},z}\, F_3/t_1/ \end{aligned}\right\}$$

Specjalne funkcje $E_3/t_1/$ i $F_3/t_1/$ są te same co przy obliczeniu R_{II} w układzie dwóch grup błędów strzelania.

Prawdopodobieństwo rażenia samolotu przy strzelaniu składającym się z ν salw w układzie trzech grup błędów można obliczyć sposobem Instytutu Naukowo-Badawczego OPL za pomocą przybliżonego wzoru

$$R_{\underline{\underline{III}}}^{(1)}(\bar{r}) \approx 1 - e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{r_x^2}{\sigma_{q,x}^{**2}} + \frac{r_y^2}{\sigma_{q,y}^{**2}} + \frac{r_z^2}{\sigma_{q,z}^{**2}}\right)}, \qquad /3.3/$$

gdzie parametr t^{**} oblicza się ze wzoru

$$R(t^{**}) = t_2 E_3(t_2) \times$$

$$\times \frac{\sigma_{q,x}^{*}\ \sigma_{q,y}^{*}\ \sigma_{q,z}^{*}}{\sqrt{\left[\sigma_{\underline{\underline{III}},x}^2 + \sigma_{q,x}^{*2} F_3(t^*)\right]\left[\sigma_{\underline{\underline{III}},y}^2 + \sigma_{q,y}^{*2} F_3(t^*)\right]\left[\sigma_{\underline{\underline{III}},z}^2 + \sigma_{q,z}^{*2} F_3(t^*)\right]}}$$

Tu $t_2 = \nu t^*$

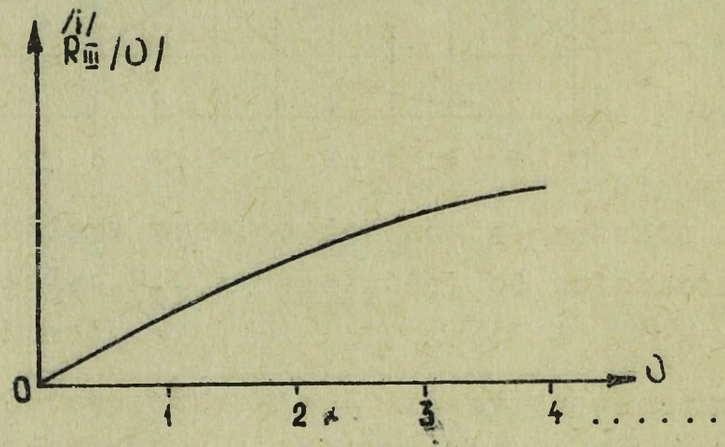
Główne dyspersje $\sigma_{q,x}^{**2}$, $\sigma_{q,y}^{**2}$, $\sigma_{q,z}^{**2}$ oblicza się ze wzorów:

$$\sigma_{q,x}^{**2} = \frac{\sigma_{\underline{\underline{III}},x}^2 + \sigma_{q,x}^{*2} F_3(t^*)}{F_3(t^{**})}$$

$$\sigma_{q,y}^{**2} = \frac{\sigma_{\underline{\underline{III}},y}^2 + \sigma_{q,y}^{*2} F_3(t^*)}{F_3(t^{**})}$$

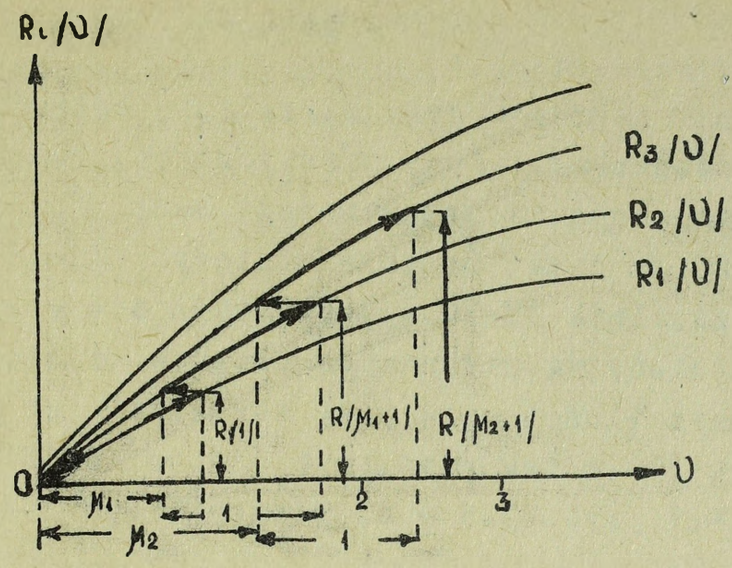
$$\sigma_{q,z}^{**2} = \frac{\sigma_{\underline{\underline{III}},z}^2 + \sigma_{q,z}^{*2} F_3(t^*)}{F_3(t^{**})} \qquad /3.5/$$

Jednak realne strzelanie baterii artylerii przeciwlotniczej średniego kalibru obarczone jest błędami, które można z wystarczającą dokładnością przedstawić w układzie trzech grup błędów strzelania, przy czym elipsoidy rozrzutu wszystkich grup błędów będą różne dla każdej salwy.



Rys. 3.2. Zmiana prawdopodobieństwa rażenia samolotu $R_{\Sigma}^{(1)}(\nu)$ w zależności od ilości salw ν.

Obecnie nie ma takiego sposobu obliczania prawdopodobieństwa rażenia samolotu przy strzelaniu baterii, któryby bezpośrednio uwzględniał zmienne warunki strzelania, jednak są sposoby pośrednie, uwzględniające zmienne warunki strzelania. Jednym z takich sposobów pośrednich jest sposób kolejnych przyrostów. Dla podanych uprzednio warunków strzelania, tj. dla przypadku, gdy dałe strzelanie odbywa się dokładnie w takich samych warunkach co 1 - ta salwa, prawdopodobieństwo rażenia samolotu $R_{\Sigma}^{(1)}(\nu)$ będzie zależne tylko od ilości salw, dlatego można sporządzić wykres zależności $R_{\Sigma}^{(1)}(\nu)$ od ilości salw /rys. 3.2/. Można obliczyć i sporządzić analogiczne wykresy również dla innych warunków strzelania. Komplet tych wykresów umożliwi określenie prawdopodobieństwa rażenia samolotu przy strzelaniu w zmiennych warunkach, tj. w warunkach, odpowiadających realnym. Przy sporządzaniu wykresu na ten sam rysunek nanosi się krzywe zależności prawdopodobieństwa rażenia samolotu od ilości salw $R_i(\nu)$ dla różnych warunków strzelania /rys. 3.3/.

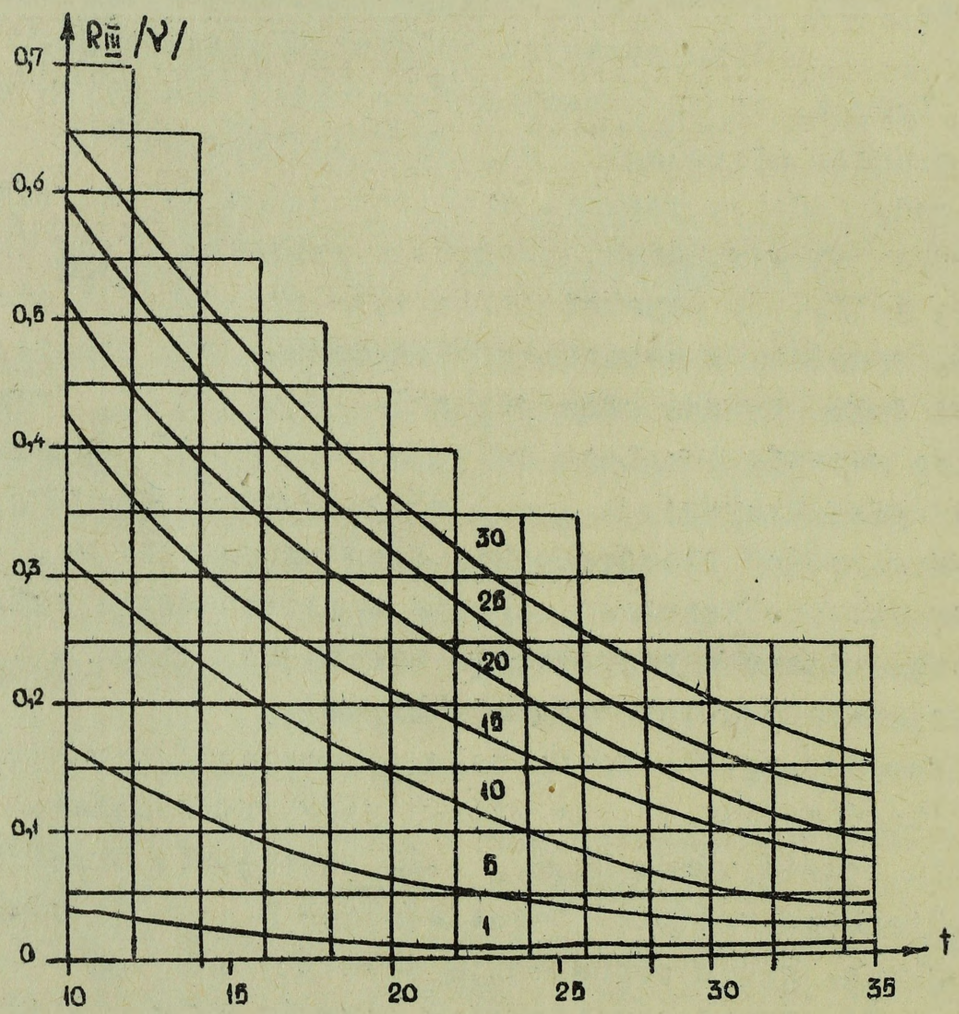


Rys. 3.3. Określanie prawdopodobieństwa rażenia samolotu sposobem kolejnych przyrostów.

Krzywa, która przechodzi najniżej odpowiada najgorszym warunkom strzelania, najwyżej najlepszym. Prawdopodobieństwo rażenia samolotu jedną salwą, oddaną w najgorszych warunkach, zgodnie z wykresem równe jest rzędnej R/1/. Aby uzyskać takie same prawdopodobieństwo rażenia samolotu w warunkach odpowiadających drugiej krzywej /od dołu/ trzeba oddać μ_1 salw /$\mu_1 > 1$/. Prawdopodobieństwo rażenia samolotu salwą w warunkach, odpowiadających drugiej krzywej, $\mu_1 + 1$ równe jest rzędnej R/μ_1+1/. W rzeczywistości prawdopodobieństwo rażenia R/$\mu_1 + 1$/ jest prawdopodobieństwem rażenia samolotu dwoma salwami: pierwszą, oddaną w najgorszych warunkach, drugą - w warunkach, odpowiadających drugiej krzywej.

Dalej znajdujemy dla następnego /trzeciego/ warunku strzelania ilość salw μ_2, przy której prawdopodobieństwo rażenia samolotu będzie równe R/$\mu_1 + 1$/, następnie określamy prawdopodobieństwo rażenia, odpowiadające $\mu_2 + 1$/ salwom, oddanym w warunkach, które odpowiadają trzeciej krzywej R/$\mu_2 + 1$/. Prawdopodobieństwo rażenia R/$\mu_2 + 1$/ jest w rzeczywistości prawdopodobieństwem rażenia samolotu trzema salwami: pierwszą - oddaną w warunkach odpowiadających pierwszej krzywej /dolna/, drugą - w warunkach, odpowiadających drugiej krzywej i trzecią - w warunkach, odpowiadających trzeciej krzywej. Kontynuując kolejne przyrosty dla wszystkich krzywych, można określić prawdopodobień-

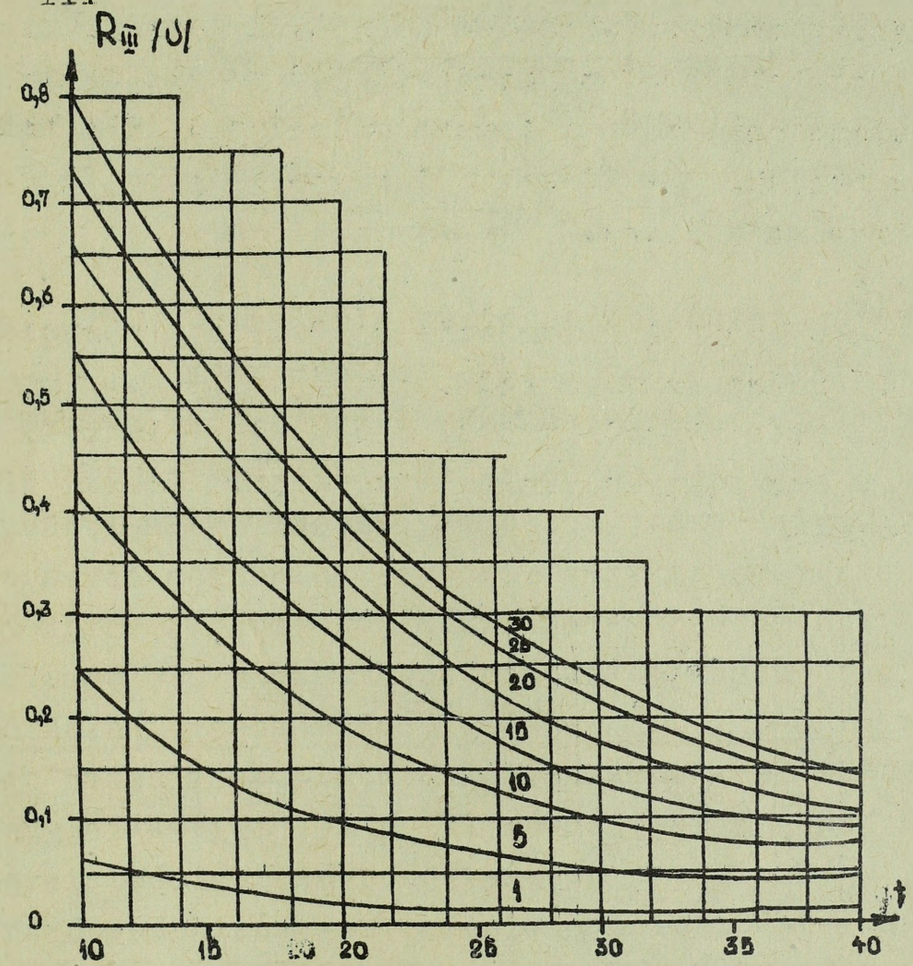
stwo rażenia samolotu przy strzelaniu baterii w realnych zmiennych warunkach. Przy praktycznych obliczeniach prawdopodobieństwa rażenia pojedynczego samolotu ośmiodziałową baterią 100 mm armat przeciwlotniczych KS-19 z PUAZO-6 i SON-9, zapalnik WM-30 wykorzystuje się wykresy zmiany prawdopodobieństwa rażenia samolotu w zależności od czasu lotu pocisku oraz ilości salw przy strzelaniu do parametru i prędkości celu 200 m/sek /rys. 3.4/ odpowiada samolotowi typu "CANBERRA-2", rys. 3.5 - samolotowi typu B-47/.



Rys. 3.4 Zależności prawdopodobieństwa rażenia samolotu typu "CANBERRA-2" od czasu lotu pocisku t oraz ilości salw V .

Wykorzystując te wykresy, można wyznaczyć krzywe prawdopodobieństwa rażenia samolotu w zależności od ilość-

ci salw R_i /ν/ dla różnych warunków strzelania, gdzie pod warunkami strzelania należy rozumieć: czas lotu pocisku i - tej salwy; na podstawie prawdopodobieństw R_i/ν/, wykorzystując sposobów kolejnych przyrostów, można określić prawdopodobieństwo rażenia samolotu przy strzelaniu bateri R_{III} /$\tilde{\nu}$/.



Rys. 3.5. Zależność prawdopodobieństwa rażenia samolotu typu B-47 R_{III} / ν / od czasu lotu pocisku t oraz ilości salw ν.

Jeśli błędy trzeciej grupy są nie-duże, tj. salwy można uważać za niezależne od siebie, to prawdopodobieństwo rażenia samolotu można obliczyć ze wzoru:

$$R_{III} = 1 - \prod_{i=1}^{\nu} /1 - R_i/, \qquad /3.6/$$

gdzie R_i - prawdopodobieństwo rażenia samolotu i - tą salwą.

Kolejność obliczania prawdopodobieństwa rażenia samolotu sposobem kolejnych przyrostów omówimy na przykładzie.

Przykład:

Do samolotu CANBERRA-2" ma strzelać ośmiodziałowa bateria 100 mm armat z PUAZO-6 i SON-9. Obliczyć prawdopodobieństwo rażenia samolotu sposobem kolejnych przyrostów, jeśli: wysokość samolotu 9000 m, prędkość 200 m/sek; bateria rozpoczyna strzelanie na granicznej odległości, dla której czas lotu pocisku t = 30 sek., i strzela tylko do parametru odstęp strzelania 5 sek.

Rozwiązanie:

1. Numerujemy warunki strzelania zgodnie z przyrostem prawdopodobieństwa rażenia celu. Rozwiązując graficznie zadanie spotkania określamy ilość salw, które bateria może oddać do parametru i czasy lotu pocisku do punktów wyprzedzonych.

Nr warunków strzel.	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14
t w sek	28,3	27,0	26,0	24,7	23,6	22,5	21,5	20,7	19,8	19,0	18,4	17,9	17,5	17,2

2. Posługując się wykresem /rys. 3.4/, określamy prawdopodobieństwo rażenia samolotu różną ilością salw (ν = 1,5 ; 10 i 14/ przy określonych, ustalonych warunkach strzelania i, tj. określamy $R_i(\nu)$.

Ilość salw (ν)	Numery warunków strzelania i								
	1	2	3	4	5	6	7	8	9
1	0,01	0,01	0,01	0,01	0,01	0,015	0,015	0,017	0,017
5	0,035	0,035	0,044	0,050	0,050	0,059	0,059	0,065	0,072
10	0,075	0,080	0,080	0,100	0,110	0,118	0,123	0,135	0,145
14	0,120	0,120	0,128	0,150	0,150	0,158	0,170	0,180	0,190

Ilość salw (ν)	Numer warunków strzelania				
	10	11	12	13	14
1	0,018	0,018	0,019	0,019	0,020
5	0,073	0,075	0,080	0,090	0,090
10	0,150	0,160	0,165	0,175	0,180
14	0,205	0,215	0,225	0,250	0,235

3. Na podstawie danych $R_1 / \nu /$ sporządzamy wykresy, podobne do wykresów przedstawionych na rys. 3.3 i sposobem kolejnych przyrostów określamy prawdopodobieństwo rażenia samolotu przy strzelaniu baterii

$$R_{III} = 0,127$$

Wielkość R_{III} wzrasta ze wzrostem ilości salw ν, które można oddać przy strzelaniu do danego celu i ze wzrostem prawdopodobieństwa rażenia samolotu każdą salwą danego strzelania R_1. Ilość salw ν, które może oddać bateria przy strzelaniu do danego celu, zależy od warunków lotu celu, tj. od jego prędkości, wysokości i parametru, a także od momentu otwarcia, przerwania oraz intensywności ognia.

Prawdopodobieństwo rażenia samolotu salwą dział danego kalibru zależy głównie od ilości strzałów w salwie, sposobu strzelania, sposobu określania bieżących współrzędnych celu i rodzaju pracy PUAZO, od odległości do celu, jego prędkości i położenia na kursie, tj. od tego, gdzie przesuwa się punkt wyprzedzony: przed parametrem lub za parametrem - ponieważ skuteczność salw przed parametrem jest większa. Jak wynika z doświadczeń i obliczeń, prawdopodobieństwo rażenia samolotu przy strzelaniu baterii do parametru stanowi 75-80 % prawdopodobieństwa rażenia samolotu przy strzelaniu baterii w całej strefie. Za tym w razie konieczności ograniczenia ognia celowe jest strzelanie tylko do parametru. Jeśli do samolotu strzela B baterii i prawdopodobieństwo rażenia przy strzelaniu 1 - tej baterii /1 = 1,2 ...,B/ jest znane i równe $R_{III\,1}$, to prawdopodobieństwo rażenia samolotu przy strzelaniu grupy baterii

$$R_g = 1 - \prod_{1=1}^{B} /1 - R_{III\,1}/ \qquad /3.7/$$

We wzorze /3.7/ zakłada się niezależność strzelań baterii, tj. uważa się, że każda bateria samodzielnie określa bieżące współrzędne celu. Przy strzelaniu z KKO-1 strzelania baterii będą od siebie zależne i nie można stosować

wzoru /3.7/.
Ze wzoru /3.7/ wynika, że prawdopodobieństwo rażenia samolotu przy strzelaniu grupy baterii powiększa się ze wzrostem ilości baterii wyznaczonych do strzelania do danego celu /B/ i ze wzrostem prawdopodobieństwa rażenia samolotu przy strzelaniu każdej baterii R_{III} t.

§ 4. Nadzieja matematyczna ilości rażonych samolotów przy strzelaniu jednej i kilku baterii

Podstawowym wskaźnikiem skuteczności strzelania artylerii przeciwlotniczej do celów grupowych jest nadzieja matematyczna ilości rażonych samolotów. Nadzieja matematyczna charakteryzuje średnią ilość samolotów, które będą rażone przy wykonaniu wielu analogicznych strzelań. Im większa będzie nadzieja matematyczna ilości rażonych samolotów, tym skuteczniejsze będzie strzelanie. Wartość liczbowa nadziei matematycznej A jest równa sumie prawdopodobieństw rażenia każdego samolotu, wchodzącego w skład celu grupowego. Dlatego, jeśli strzelanie składa się z jednego strzału, nadzieję matematyczną ilości rażonych samolotów A_I można obliczyć ze wzoru:

$$A_I = \sum_{j=1}^{M} R_{j,I}, \qquad /4.1/$$

gdzie j - numer samolotu w składzie grupowego celu;
M - ilość samolotów w grupie;
$R_{j,1}$ - prawdopodobieństwo rażenia j - tego samolotu przy jednym strzale.

Jeśli strzelanie składa się z jednej salwy, to nadzieję matematyczną, ilości samolotów rażonych przy strzelaniu A_{II} oblicza się analogicznie, tj. ze wzoru:

$$A_{II} = \sum_{j=1}^{M} R_{j,II}, \qquad /4.2/$$

gdzie $R_{j,II}$ - prawdopodobieństwo rażenia j - tego samolotu salwą.

Nadzieję matematyczną ilości rażonych samolotów przy strzelaniu jednej baterii A_b także oblicza się jako sumę prawdopodobieństw rażenia każdego samolotu grupy, tj. za pomocą wzoru:

$$A_b = \sum_{j=1}^{M} R_{j,III} \qquad /4.3/$$

Tu $R_{j,III}$ - prawdopodobieństwo rażenia j - tego samolotu przy strzelaniu baterii.

Nadzieję matematyczną ilości rażonych samolotów przy strzelaniu kilku baterii A_g można obliczyć ze wzoru:

$$A_g = \sum_{j=1}^{M} R_{j,g} \qquad /4.4/$$

gdzie $R_{j,g}$ - prawdopodobieństwo rażenia j - tego samolotu przy strzelaniu kilku baterii.

Ze wzorów na obliczenie nadziei matematycznej ilości rażonych samolotów wynika, że nadzieja matematyczna ilości rażonych samolotów wzrasta ze wzrostem ilości samolotów w grupie i ze wzrostem prawdopodobieństwa rażenia różnych samolotów grupy. Prawdopodobieństwo rażenia różnych samolotów grupy zależy głównie od położenia punktu celowania i od charakteru rozmieszczenia samolotów w przestrzeni. Im gęstszy będzie szyk samolotów, tworzących cel grupowy, tym większa będzie nadzieja matematyczna ilości rażonych samolotów. Dogodną charakterystyką skuteczności strzelania jest średnie zużycie pocisków lub nadzieja matematyczna zużycia pocisków, niezbędnych do rażenia celu, łatwo ją obliczyć, jeśli znane jest prawdopodobieństwo rażenia samolotu lub nadzieja matematyczna ilości rażonych samolotów.

Należy mieć na uwadze, że nadzieja matematyczna zużycia amunicji, niezbędnej do rażenia celu nie jest samodzielną charakterystyką skuteczności strzelania, a wielkością pochodną wskaźników skuteczności strzelania.

Ilość amunicji zużytej na wykonanie zadania ogniowego w każdym strzelaniu jest wielkością przypadkową konkretnego typu.

Wychodząc z definicji nadziei matematycznej, można określić nadzieję matematyczną zużycia amunicji, niezbędnej do rażenia celu

$$M[N] = \sum_{n=1}^{\infty} n R_n \qquad /4.5/$$

gdzie n - możliwa wartość zużycia amunicji, niezbędnej do rażenia celu;

R_n - prawdopodobieństwo zużycia tej ilości amunicji.

Ponieważ obliczanie R_n jest bardzo skomplikowane, przeto nadziei matematycznej zużycia amunicji, niezbędnej do rażenia celu nie oblicza się za pomocą wzoru /4.5/, a stosuje się różne przybliżone metody. Niektóre z tych metod omówiono w I-szej części tego skryptu.

Odbito w 30 egz.
Egz. nr 1-30 Bibl.Jawna
Wyk. Makowski ppłk
Druk. ZU
Nr ks. 786/WW
Kor. HS - JS.

Załącznik nr 1

Wartości funkcji $E_2/t/$ i $F_2/t/$

t	$E_2/t/$	$F_2/t/$	t	$E_2/t/$	$F_2/t/$
0	1,000	1,000	0,75	0,840	1,091
0,02	0,995	1,002	0,80	0,831	1,096
0,04	0,990	1,005	0,85	0,823	1,102
0,06	0,985	1,008	0,90	0,813	1,108
0,08	0,980	1,010	0,95	0,805	1,113
0,10	0,976	1,012	1,00	0,791	1,119
0,12	0,971	1,015	1,50	0,722	1,173
0,14	0,966	1,017	2,00	0,660	1,224
0,16	0,961	1,020	2,50	0,607	1,271
0,18	0,957	1,022	3,00	0,563	1,317
0,20	0,952	1,025	3,50	0,525	1,358
0,25	0,941	1,031	4,00	0,492	1,399
0,30	0,930	1,037	4,50	0,463	1,434
0,35	0,919	1,043	5,00	0,438	1,469
0,40	0,908	1,049	5,50	0,415	1,514
0,45	0,902	1,055	6.00	0,395	1,531
0,50	0,888	1,061	6,50	0,377	1,560
0,55	0,880	1,067	7,00	0,661	1,585
0,60	0,868	1,073	7,50	0,347	1,610
0,65	0,859	1,079	8,00	0,333	1,638
0,70	0,849	1,085	9.00	0,308	1,675
			10,00	0,288	1,716

Załącznik nr 2

Wartości funkcji $/E_3/t/$, $F_3/t/$ i $R/t/$

t	$E_3/t/$	$F_3/t/$	$R/t/$	$E_3/t/$	$E_3/t/$	$F_3/t/$	$R/t/$
0	1,000	1,000	0	9,00	0,415	1,470	2,096
0,02	0,996	1,002	0,0198	10	0,393	1,498	2,143
0,04	0,993	1,004	0,0395	11	0,374	1,526	2,182
0,06	0,990	1,006	0,0589	12	0,357	1,553	2,216
0,08	0,986	1,008	0,0780	13	0,342	1,579	2,244
0,10	0,982	1,010	0,0867	14	0,328	1,604	2,266
0,12	0,978	1,012	0,115	15	0,315	1,627	2,288
0,14	0,975	1,014	0,134	16	0,304	1,648	2,306
0,16	0,927	1,016	0,152	17	0,294	1,667	2,322
0,18	0,969	1,017	0,170	18	0,284	1,684	2,339
0,20	0,966	1,018	0,188	19	0,275	1,700	2,354
0,25	0,958	1,023	0,232	20	0,265	1,715	2,368
0,30	0,950	1,027	0,274	21	0,258	1,730	2,338
0,35	0,942	1,031	0,315	22	0,251	1,745	2,392
0,40	0,934	1,034	0,355	23	0,244	1,759	2,404
0,45	0,927	1,038	0,394	24	0,238	1,773	2,414
0,50	0,920	1,042	0,432	25	0,232	1,787	2,423
0,55	0,913	1,046	0,469	27	0,226	1,800	2,432
0,60	0,905	1,051	0,504	28	0,220	1,812	2,440
0,65	0,898	1,055	0,539	29	0,215	1,824	2,447
0,70	0,891	1,059	0,572	30	0,210	1,836	2,458
0,75	0,855	1,063	0,604	31	0,205	1,847	2,460
0,80	0,878	1,067	0,637	32	0,201	1,858	2,468
0,85	0,871	1,071	0,668	33	0,197	1,869	2,472
0,90	0,864	1,075	0,697	34	0,193	1,879	2,478
0,95	0,857	1,079	0,726	35	0,189	1,890	2,484
0,00	0,851	1,083	0,755	36	0,186	1,900	2,490
1,50	0,792	1,120	0,003	37	0,183	1,910	2,495
2.00	0,742	1,155	1,195	38	0,180	1,920	2.500
2,50	0,699	1,188	1,360	39	0,177	1,929	2,506
3,00	0,661	1,218	1,490	40	0,174	1,938	2,511
3,50	0,630	1,245	1,587	41	0,168	1 955	2,522
4,00	0,599	1,271	1,673	42	0,166	1,964	2,527
4,50	0,572	1,297	1,743	43	0,163	1,972	2,531
5,00	0,547	1,322	1,799	44	0,161	1,979	2,536
5,50	0,524	1,346	1,848	45	0,158	1,987	2,541
6,00	0,503	0,368	1,885	46	0,156	1,994	2,546
6,50	0,484	1,387	1,925	47	0,154	2,001	2,551
7,00	0,469	1,407	1,967	48	0,152	2,008	2,556
7,50	0,454	1,423	2,005	49	0,149	2,016	2,559
8,00	0,441	1,441	2,040	50	0,147	2,023	2,564

BIBLIOTEKA Głównego Instytutu Górnictwa Akademii Górniczo-Hutniczej w Krakowie