AKADEMIA SZTABU GENERALNEGO
im. Generała Broni Karola Świerczewskiego

KATEDRA CYBERNETYKI

ppłk dypl. mgr Tadeusz CZARNOCKI

ELEMENTY PROGRAMOWANIA LINIOWEGO
(Skrypt)

WARSZAWA KWIECIEŃ 1972

AKADEMIA SZTABU GENERALNEGO
im. Generała Broni Karola Świerczewskiego

KATEDRA CYBERNETYKI

ppłk dypl. mgr Tadeusz CZARNOCKI

ELEMENTY PROGRAMOWANIA LINIOWEGO

(Skrypt)

WARSZAWA KWIECIEŃ 1972

AKADEMIA SZTABU GENERALNEGO
im. gen. broni K. Świerczewskiego

KATEDRA CYBERNETYKI

Ppłk dypl. mgr Tadeusz CZARNOCKI

ELEMENTY PROGRAMOWANIA LINIOWEGO

/skrypt/

WARSZAWA Kwiecień 1972 r.

SPIS TREŚCI Str.

R o z d z i a ł 1

WYBRANE POJĘCIA Z GEOMETRII n-WYMIAROWEJ PRZESTRZENI

W niniejszym rozdziale zostaną sformułowane wybrane pojęcia z geometrii analitycznej w przestrzeni n-wymiarowej , w których wystąpią dwie i więcej zmiennych. Pojęcia, o których będzie tu mowa są naturalnymi uogólnieniami pojęć geometrii na płaszczyźnie i w przestrzeni.

1.1. Hiperpłaszczyzny w przestrzeni n-wymiarowej

Z geometrii analitycznej wiadomo, że równania liniowe postaci

$$a_1x_1+a_2x_2 = a \quad \text{i} \quad b_1x_1+b_2x_2 + b_3x_3 = b$$

opisują prostą i płaszczyznę odpowiednio na płaszczyźnie i w przestrzeni /w przestrzeni 2 i 3-wymiarowej/.

OKREŚLENIE 1. Zbiór punktów w przestrzeni n-wymiarowej , współrzędne których spełniają równanie liniowe

$$a_1x_1 +a_2x_2 +\ldots+a_nx_n = a_o \qquad /1/$$

gdzie a_i /i = 1,2,...,n/, a_o są liczbami rzeczywistymi /współczynnikami/, nazywamy hiperpłaszczyzną w przestrzeni n-wymiarowej.

UWAGA 1. Nie wszystkie współczynniki a_i w /1/ jednocześnie znikają /nie są równe zeru/. W przypadku ich jednoczesnego znikania byłaby tożsamość $o=a_o$, która zaprzeczałaby istnieniu współrzędnych x_i punktów w przestrzeni. Jeżeli $a_o=0$,to hiperpłaszczyzna /1/ przechodzi przez początek układu współrzędnych - punkt O, bowiem współrzędne 0,0,...,0 spełniają /1/. Weźmy układ dwóch hiperpłaszczyzn

$$\left.\begin{array}{l} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n} = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n} = b_2 \end{array}\right\} \qquad /2/$$

Zbiór punktów należących jednocześnie do obu hiperpłaszczyzn układu /2/ będziemy nazywali przecięciem tych hiperpłaszczyzn /przez analogię do przecięcia się dwóch prostych lub płasz - czyzn/. Innymi słowy, przecięcie hiperpłaszczyzn jest miejscem geometrycznym wszystkich takich punktów, których współrzędne spełniają jednocześnie oba równania układu /2/, tj. są rozwiązaniami tego układu równań.

Analogicznie, rozwiązaniem układu m równań liniowych z n niewiadomymi

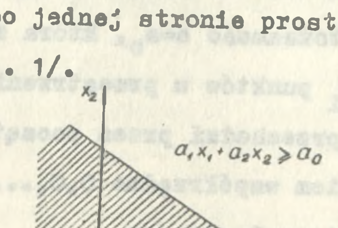
$$\left.\begin{array}{l} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \ldots + a_{mn}x_n = b_m \end{array}\right\} \qquad /3/$$

będziemy nazywali przecięciem m hiperpłaszczyzn w przestrzeni n-wymiarowej.

1.2. Nierówności w przestrzeni n-wymiarowej

Z kolei zinterpretujemy geometrycznie nierówności liniowe w przestrzeni n-wymiarowej.

Wiadomo, że nierówność postaci $a_1x_1 + a_2x_2 \leqslant a_o$ opisuje pół - płaszczyznę, leżącą po jednej stronie prostej o równaniu $a_1x_1 + a_2x_2 = a_o$ /rys. 1/.



Rys. 1.

Podobnie nierówność postaci $b_1x_1 + b_2x_2 + b_3x_3 \leqslant b_o$ opisuje półprzestrzeń położoną po jednej stronie płaszczyzny o równaniu $b_1x_1 + b_2x_2 + b_3x_3 = b_o$ w przestrzeni 3-wymiarowej.

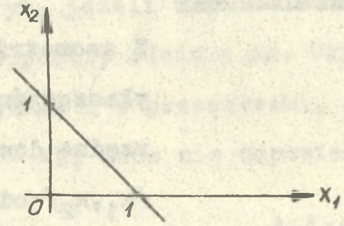
Niech dana będzie nierówność liniowa postaci

$$a_1x_1 + a_2x_2 + \ldots + a_nx_n \leqslant a_o \qquad /4/$$

OKREŚLENIE 2. Zbiór punktów w przestrzeni n-wymiarowej, współrzędne $x_1x_2,\ldots,x_n$ których spełniają nierówność /4/ nazywany obszarem rozwiązań tej nierówności. Udowadnia się twierdzenie, że obszarem rozwiązań nierówności liniowej jest półprzestrzeń ograniczona hiperpłaszczyzną

$$a_1x_1 + a_2x_2 + \ldots + a_nx_n = a_o$$

W charakterze przykładu wyznaczymy w przestrzeni 2-wymiarowej /płaszczyźnie/ obszar rozwiązań dla nierówności $x_1 + x_2 \leqslant 1$.



Rys. 2

Zastępując nierówność równością otrzymamy równanie prostej $x_1+x_2 = 1$ /rys. 2/. Prosta ta dzieli płaszczyznę na dwie półpłaszczyzny. Ta z nich, która zawiera początek układu współrzędnych jest obszarem rozwiązań danej nierówności. Rolę hiperpłaszczyzny, w tym przypadku, spełnia równanie prostej $x_1+x_2=1$. Zauważmy jeszcze, że druga półpłaszczyzna jest obszarem rozwiązań nierówności $x_1+x_2 \geqslant 1$.

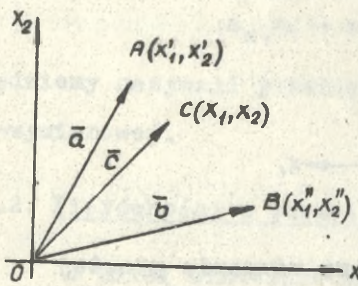
Przejdziemy teraz od jednej nierówności liniowej do układu nierówności

$$\left.\begin{array}{l} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n \leq b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n \leq b_2 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \ldots + a_{mn}x_n \leq b_m \end{array}\right\} \quad /5/$$

Obszarem rozwiązań układu nierówności /5/ będziemy nazywali zbiór punktów w przestrzeni n-wymiarowej, współrzędne których spełniają każdą z nierówności układu. I tu podobnie jak dla nierówności /4/ udowadnia się twierdzenie, że obszarem rozwiązań układu nierówności jest przecięcie /przekrój/ odpowiedniej liczby półprzestrzeni.

UWAGA 2. Jeżeli układ nierówności /5/ jest sprzeczny, to oczywiście przecięcie /przekrój/ odpowiednich półprzestrzeni nie zawiera żadnego punktu w przestrzeni n-wymiarowej.

1.3. Odcinek i zbiory wypukłe



Rys. 3

Z geometrii analitycznej na płaszczyźnie wiadomo, że współrzędne dowolnego punktu C $/x_1,x_2/$ odcinka AB /rys.3/ mogą być określone przez współrzędne początku A $/x_1',x_2'/$ i końca B $/x_1'',x_2''/$ odcinka z zależności

$$\left.\begin{array}{l} x_1 = tx_1' + /1-t/x_1'' \\ x_2 = tx_2' + /1-t/x_2'' \end{array}\right\} \text{ lub } \bar{c} = t\bar{a} + /1-t/\ \bar{b} \quad /6/$$

gdzie $0 \leq t \leq 1$, a $\bar{c} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}$, $\bar{a} = \begin{bmatrix} x_1' \\ x_2' \end{bmatrix}$, $\bar{b} = \begin{bmatrix} x_1'' \\ x_2'' \end{bmatrix}$ są wektorami.

Każdej wartości parametru t z przedziału /0,1/ odpowiada dokładnie jeden punkt odcinka AB, np. dla $t = 1/2$, $x_1 = \left(x_1'+x_1''\right)/2$, $x_2 = \left(x_2'+x_2''\right)/2$ są współrzędnymi środka odcinka

AB. Odwrotnie, każdemu punktowi C odcinka AB odpowiada jedna wartość parametru t. Często równanie /6/ nazywa się równaniem parametrycznym odcinka. Wektory $\bar{a},\bar{b},\bar{c}$ o trzech składowych określają z /6/ odcinek w przestrzeni 3-wymiarowej. Uogólniając na wektory o n składowych mamy

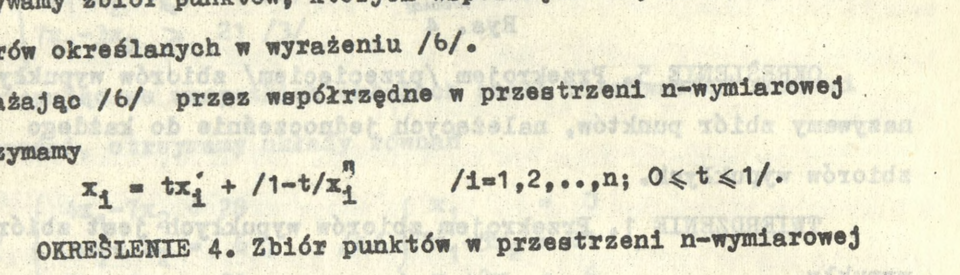
OKREŚLENIE 3. Odcinkiem w przestrzeni n-wymiarowej, łączącym końce wektorów $\bar{a} = [x_1', x_2', \ldots, x_n']$ i $\bar{b} = [x_1'', x_2'', \ldots, x_n'']$, nazywamy zbiór punktów, których współrzędne są składowymi wektorów określanych w wyrażeniu /6/.

Wyrażając /6/ przez współrzędne w przestrzeni n-wymiarowej otrzymamy

$$x_i = tx_i' + /1-t/x_i'' \qquad /i=1,2,\ldots,n;\ 0 \leqslant t \leqslant 1/.$$

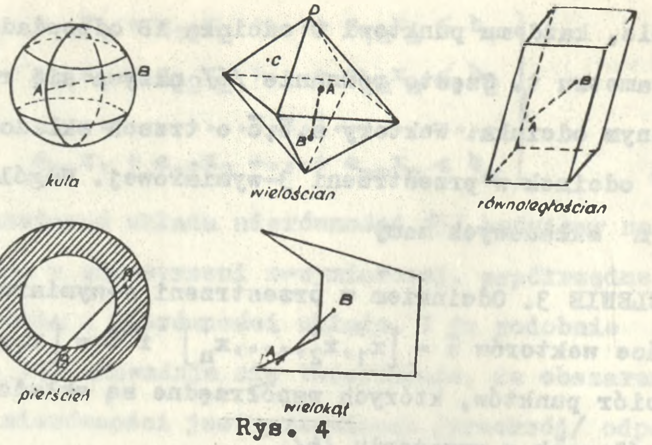
OKREŚLENIE 4. Zbiór punktów w przestrzeni n-wymiarowej nazywamy zbiorem wypukłym, jeżeli wraz z dwoma jego punktami A i B zawiera wszystkie punkty odcinka AB. Określeniu temu odpowiadają na płaszczyźnie i w przestrzeni, np. figury i bryły pokazane na rys. 4a - 4b, lecz nie odpowiadają zbiory z rys. 4c.

a/



b/

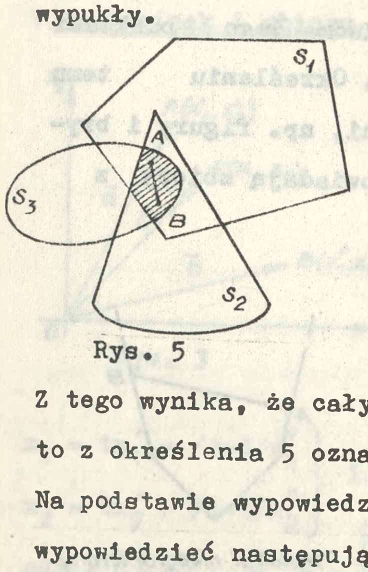
c/



Rys. 4

OKREŚLENIE 5. Przekrojem /przecięciem/ zbiorów wypukłych nazywamy zbiór punktów, należących jednocześnie do każdego ze zbiorów wypukłych.

TWIERDZENIE 1. Przekrojem zbiorów wypukłych jest zbiór wypukły.



Rys. 5

Część zakreskowana na rys. 5 jest zbiorem wspólnym - przekrojem zbiorów S_1, S_2 i S_3.

Dla dowodu twierdzenia obierzmy dowolne dwa punkty A i B, należące do przekroju, tzn. do każdego ze zbiorów wypukłych S_1, S_2, S_3 /rys. 5/.

Z tego wynika, że cały odcinek AB zawarty jest w przekroju, a to z określenia 5 oznacza, że przekrój jest zbiorem wypukłym. Na podstawie wypowiedzianego dotychczas twierdzenia możemy wypowiedzieć następujący

WNIOSEK 1. Obszarem rozwiązań zgodnego układu nierówności liniowych jest zbiór wypukły ograniczony hiperpłaszczyznami o równaniach, otrzymanych z nierówności przez zastąpienie znaku nierówności znakiem równości.

PRZYKŁAD 1. Znaleźć obszar rozwiązań układów nierówności liniowych

$$/a/\begin{cases} 4x_1-7x_2 \geqslant -28 & /1/ \\ x_1+x_2 \geqslant 6 & /2/ \\ 7x_1-3x_2 \leqslant 21 & /3/ \end{cases} \qquad /b/\begin{cases} x_1 \geqslant 0 & /1/ \\ 7x_1+3x_2 \geqslant 21 & /2/ \\ x_1+2x_2 \geqslant 6 & /3/ \\ x_1-x_2 \leqslant 3 & /4/ \end{cases}$$

$$/c/\begin{cases} 4x_1-7x_2 \leqslant -28 & /1/ \\ x_1+x_2 \leqslant 6 & /2/ \\ 7x_1-3x_2 \geqslant 21 & /3/ \end{cases}$$

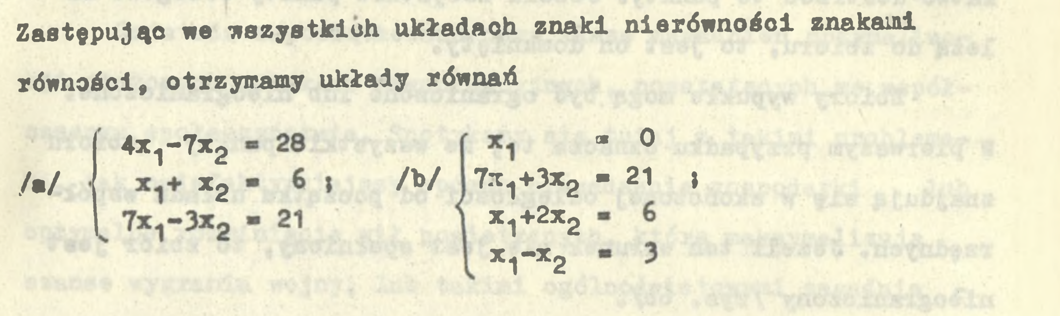
Zastępując we wszystkich układach znaki nierówności znakami równości, otrzymamy układy równań

$$/a/\begin{cases} 4x_1-7x_2 = 28 \\ x_1+x_2 = 6 \\ 7x_1-3x_2 = 21 \end{cases} ; \qquad /b/\begin{cases} x_1 = 0 \\ 7x_1+3x_2 = 21 \\ x_1+2x_2 = 6 \\ x_1-x_2 = 3 \end{cases} ;$$

$$/c/\begin{cases} 4x_1-7x_2 = -28 \\ x_1+x_2 = 6 \\ 7x_1-3x_2 = 21, \end{cases}$$

w których każde równanie jest równaniem prostej.

Proste te pokazane są na rys. 6a - 6c.



Rys. 6

Strzałki na rys.6 wskazują te pó płaszczyzny, które są zbiorami rozwiązań poszczególnych nierówności.

Z analizy rysunków 7a-7c wynika, że zbiorami rozwiązań układów nierówności /a/, /b/ i /c/ są odpowiednio: trójkąt ABC, wielokąt nieograniczony /otwarty/ i zbiór pusty /układ nierówności sprzeczny/.

W każdym zbiorze można wyróżnić trzy rodzaje punktów: wewnętrzne, brzegowe i wierzchołkowe /wierzchołki/. Na rys. 4 łatwo dostrzec te punkty. Jeżeli wszystkie punkty brzegowe należą do zbioru, to jest on domknięty.

Zbiory wypukłe mogą być ograniczone lub nieograniczone. W pierwszym przypadku oznacza to, że wszystkie punkty zbioru znajdują się w skończonej odległości od początku układu współrzędnych. Jeżeli ten warunek nie jest spełniony, to zbiór jest nieograniczony /rys. 6b/.

OKREŚLENIE 6. Zbiór wypukły domknięty w przestrzeni n-wymiarowej o skończonej liczbie wierzchołków nazywamy wielościanem wypukłym n-wymiarowym, jeżeli jest ograniczony lub wypukłym obszarem n-wymiarowym, jeżeli jest on nieograniczony /rys.4a - 4b/. Nie da się przedstawić graficznie wielościanów wypukłych gdy $n > 3$.

R o z d z i a ł 2

OGÓLNE ZAGADNIENIE PROGRAMOWANIA LINIOWEGO

2.1. Wiadomości wstępne

Poszukiwanie najlepszych, maksymalnych, minimalnych lub ogólnie optymalnych rozwiązań różnorodnych zadań zajmowało i intrygowało człowieka od wieków. Skupiał on główną uwagę nad znajdowaniem metod optymalizacji dotyczących rozwiązań zagadnień o charakterze geometrycznym, zagadnień dynamiki i fizyki.

Ostatnio zapoczątkowano nową klasę zagadnień optymalizacji złożonych struktur organizacyjnych, powstających we współczesnym społeczeństwie. Spotykamy się tutaj z takimi problemami, jak najefektywniejszy sposób prowadzenia gospodarki lub optymalne rozwinięcie sił powietrznych, które maksymalizują szanse wygrania wojny, lub takimi ogólnoświatowymi zagadnieniami, jak mieszanie składników nawozów dla zaspokojenia wymagań agrotechnicznych przy poniesieniu najmniejszych kosztów. Badania, w jaki sposób sformułować i rozwiązać takie zagadnienia, doprowadziły do rozwinięcia nowych i ważnych metod optymalizacji. Wśród nich tkwi przedmiot niniejszego skryptu - programowanie liniowe.

Historycznie, ogólne zadanie programowania liniowego zostało po raz pierwszy rozwinięte i zastosowane w 1947 r. przez uczonych amerykańskich G.B. Dantziga, M. Wooda i ich grupę do zbadania możliwości zastosowania metod matematycznych do programowania wojskowego i zagadnień planowania. Te wczesne zastosowania metod programowania liniowego dzielą się na trzy główne grupy: zastosowanie wojskowe, ekonomika wymiany między działami przemysłu oraz zagadnienia dotyczące stosunku zamkniętych gier dwuosobowych i programowania liniowego.

W czasie ubiegłych dwóch dziesiątek lat dziedziny te zostały rozszerzone i rozwinięte, a główny ciężar zastosowań programowania liniowego przesunął się w dziedzinę ogólnych zastosowań w przemyśle.

Programowanie liniowe stało się ważnym narzędziem współczesnej matematyki teoretycznej i stosowanej. Ten istotny wzrost znaczenia jest wyznaczony pionierskim wysiłkiem wielu uczonych i organizacji naukowych.

2.2. Zadania prowadzące do zagadnień programowania liniowego

Zagadnienia programowania wiążą się z efektywnym wykorzystaniem albo rozmieszczeniem ograniczonych środków tak, aby spełnić określone wymagania. Problemy te charakteryzują się dużą ilością rozwiązań spełniających warunki zagadnienia. Wybór określonego rozwiązania jako najlepszego rozwiązania zagadnienia zależy od celu i wymagań, które określają zagadnienie. Rozwiązanie, które spełnia warunki zagadnienia i dane wymagania, nazywamy r o z w i ą z a n i e m o p t y m a l n y m .

Poniższe zadania prowadzą do zagadnień programowania liniowego.

ZADANIE 1. /Zadanie o wykorzystaniu środków produkcji/

Załóżmy, że do wyprodukowania dwóch typów wyrobów W_1 i W_2 potrzebne są trzy rodzaje surowca: S_1, S_2, S_3 /środki produkcji/, których zasoby dane są w ilościach s_1, s_2, s_3 /w określonych jednostkach/. W celu ilustracji rozważań w tablicy 1 po -

dane są konkretne wartości zasobów, ilości potrzebnego surowca do wyprodukowania odpowiedniego typu wyrobu oraz osiągalny zysk.

Tablica 1

Rodzaj surowca	Zasoby surowca	Typy produkcji /wyrobu/	
		W_1	W_2
S_1	$s_1=19$	$a_{11}=2$	$a_{12}=3$
S_2	$s_2=13$	$a_{21}=2$	$a_{22}=1$
S_3	$s_3=15$	$a_{31}=0$	$a_{32}=3$
Zysk		$c_1=7$	$c_2=5$

a_{ij} /$i=1,2,3$; $j=1,2$/ - oznacza ilość /w określonych jednostkach/ surowca rodzaju S_i niezbędnego do produkcji wyrobu typu W_j.

$c_j\ (j = 1,2)$ - zysk osiągany z produkcji każdej jednostki wyrobu. Zadanie polega na zaplanowaniu takiej ilości produkcji poszczególnych wyrobów, aby ogólny zysk był największy /maksymalny/. Oznaczmy przez x_1 i x_2 liczbę wyrobów typu W_1 i W_2. Matematycznie nasze zadanie zapiszemy następująco

$$\left.\begin{aligned} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 &\leq s_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 &\leq s_2 \\ a_{31}x_1 + a_{32}x_2 &\leq s_3 \end{aligned}\right| \quad \text{lub} \quad \left.\begin{aligned} 2x_1 + 3x_2 &\leq 19 \\ 2x_1 + x_2 &\leq 13 \\ 3x_2 &\leq 15 \end{aligned}\right|$$

Dla tych warunków ma być osiągnięte $F_{max} = c_1x_1 = c_2x_2$ lub $max = 7x_1 + 5x_2 = F_{max}$ x/

ZADANIE 2. /Zadanie o diecie/

Dla zachowania zdrowia i sił do pracy każdy człowiek powinien zasilić swój organizm w ciągu doby w pewne ilości składników odżywczych, np. białko, tłuszcze, węglowodany, woda i witaminy. Ilości wymienionych składników odżywczych w różnych produktach spożywczych są różne. Upraszczając zagadnienie ogra-

x/ Z sensu zadania wynika, że wielkości x_1 i x_2 powinny spełniać warunki $x_1 \geq 0$ i $x_2 \geq 0$.

niczymy się do rozpatrzenia dwóch produktów P_1 i P_2, a dane zapiszemy w tablicy 2.

Tablica 2

Składniki odżywcze	Norma /minimum/	Rodzaje produktów	
		P_1	P_2
B_1 - tłuszcze	$b_1 = 10$	$a_{11} = 1$	$a_{12} = 5$
B_2 - białko	$b_2 = 12$	$a_{21} = 3$	$a_{22} = 2$
B_3 - węglowodany	$b_3 = 16$	$a_{31} = 2$	$a_{32} = 4$
B_4 - woda	$b_4 = 10$	$a_{41} = 2$	$a_{42} = 2$
B_5 - witaminy	$b_5 = 1$	$a_{51} = 1$	$a_{52} = 0$
Wartość		$c_1 = 2$	$c_2 = 3$

W tabl. 2 wartości a_{ij} /$i = 1,2,3,4,5$; $j = 1,2$/ oznaczają liczbę składników B_i w produktach P_j, np. a_{32} oznacza liczbę węglowodanów w produkcie P_2, zaś wielkość c_j /$j = 1,2$/ oznaczają wartość jednostkową produktu P_j. Podane tam wartości liczbowe noszą tylko charakter ilustracyjny. Zadanie polega więc na takim zaplanowaniu /zorganizowaniu/ żywienia, aby jego koszt był najniższy przy zachowaniu niezbędnych wartości odżywczych.

Matematycznie zadanie możemy sformułować następująco: Spośród wszystkich nieujemnych rozwiązań układu nierówności /ograniczeń/

$$\left.\begin{array}{l} a_{11}x_1+a_{12}x_2 \geqslant b_1 \\ a_{21}x_1+a_{22}x_2 \geqslant b_2 \\ a_{31}x_1+a_{32}x_2 \geqslant b_3 \\ a_{41}x_1+a_{42}x_2 \geqslant b_4 \\ a_{51}x_1+a_{52}x_2 \geqslant b_5 \end{array}\right\} \text{ lub } \left.\begin{array}{rl} x_1+5x_2 & \geqslant 10 \\ 3x_1+2x_2 & \geqslant 12 \\ 2x_1+4x_2 & \geqslant 16 \\ 2x_1+2x_2 & \geqslant 10 \\ x_1 & \geqslant 1 \end{array}\right\}$$

znaleźć takie, dla którego funkcja $F = c_1x_1 + c_2x_2$ przyjmuje najmniejszą wartość lub $F_{min} = 2x_1 + 3x_2$, gdzie x_1 i x_2 ilość produktów rodzaju P_1 i P_2.

ZADANIE 3. /Zadanie transportowe/

Z dwóch punktów wysyłki A_1, A_2 o zasobach a_1, a_2 jednostek jednorodnego towaru należy zaopatrzyć trzy punkty odbioru D_1, D_2, D_3 każdy o zapotrzebowaniu d_1, d_2, d_3 jednostek składowanego towaru. Przy czym znany jest jednostkowy koszt c_{ij} transportu towaru z punktu wysyłki A_i /i=1,2/ do punktu odbioru B_j /j=1,2,3/. W tabl. 3 podane jest zestawienie tego zagadnienia

Tablica 3

	D_1	D_2	D_3	Zasoby
A_1	c_{11}	c_{12}	c_{13}	a_1
A_2	c_{21}	c_{22}	c_{23}	a_2
Zapotrzebowanie	d_1	d_2	d_3	$\sum a_i = \sum d_j$

Zadanie polega na takim zaplanowaniu transportu, którego koszt ogólny byłby najniższy /minimalny/, tzn. funkcja liniowa $F = c_{11}x_{11} + c_{12}x_{12} + c_{13}x_{13} + c_{21}x_{21} + c_{22}x_{22} + c_{23}x_{23}$ powinna osiągnąć wartość najmniejszą dla warunków ograniczających

$$\left.\begin{aligned} x_{11}+x_{21} &= d_1 \\ x_{12}+x_{22} &= d_2 \\ x_{13}+x_{23} &= d_3 \end{aligned}\right\} \quad \text{i} \quad \left.\begin{aligned} x_{11}+x_{12}+x_{13} &= a_1 \\ x_{21}+x_{22}+x_{23} &= a_2 \end{aligned}\right\}$$

gdzie x_{ij} /i=1,2; j = 1,2,3/ liczba jednostek towaru przesyłanego z A_i do D_j.

Z tabl. 3 wynika, że został tu rozpatrzony przypadek szczególny, gdy zasoby punktów wysyłki są równe potrzebom punktów od - bioru /ostatni wiersz w prawej rubryce/.

2.3. Ogólne sformułowanie zadania programowania liniowego

Rozpatrzone w uproszczonej postaci zadania programowania liniowego choć różnią się pod względem treści, to nie trudno zauważyć u nich cechy wspólnej - w każdym przypadku szukaliśmy najlepszego wariantu. Z matematycznego punktu widzenia, w każdym zadaniu szukaliśmy wartości pewnej liczby zmiennych, które

- nie mogą być ujemne;
- powinny spełniać pewien układ równań lub nierówności;
- funkcja liniowa powinna przyjmować, przy tych wartościach zmiennych, minimum lub maksimum.

Ogólnie, zadanie programowania liniowego sformułujemy następująco. Dany jest układ m równań liniowych

$$\left.\begin{array}{l} a_{11}x_1+a_{12}x_2+\ldots+a_{1n}x_n=b_1 \\ a_{21}x_1+a_{22}x_2+\ldots+a_{2n}x_n=b_2 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{m1}x_1+a_{m2}x_2+\ldots+a_{mn}x_n=b_m \end{array}\right\} \qquad /7/$$

lub układ m nierówności liniowych

$$\left.\begin{array}{l} a_{11}x_1+a_{12}x_2+\ldots+a_{1n}x_n\leqslant b_1 \\ a_{21}x_1+a_{22}x_2+\ldots+a_{2n}x_n\leqslant b_2 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{m1}x_1+a_{m2}x_2+\ldots+a_{mn}x_n\leqslant b_m \end{array}\right\} \qquad /8/$$

z n zmiennymi[x/] i funkcja liniowa

$$F=c_1x_1+c_2x_2+\ldots+c_nx_n \qquad /9/$$

Zadanie polega na tym, aby spośród wszystkich nieujemnych wartości zmiennych $x_i \geqslant 0$ /i=1,2,..,n/ układu /7/ lub /8/ wybrać

x/ W zadaniach programowania liniowego zręczniej jest wielkości x_i nazywać zmiennymi zamiast niewiadomymi jak w algebrze liniowej.

te, dla których funkcja /9/ osiąga wartość najmniejszą /największą/.

OKREŚLENIE 7.

a/ Układy /7/ i /8/ nazywamy układami ograniczeń danego zadania;

b/ Każdy zbiór nieujemnych wartości $x_i \geqslant 0$ /i=1,2,...,n/, spełniający układ ograniczeń nazywamy rozwiązaniem dopuszczalnym;

c/ Funkcję liniową /9/ nazywamy funkcją celu lub formą liniową;

d/ Każde rozwiązanie dopuszczalne dające maksimum /minimum/ funkcji celu /9/ nazywamy optymalnym.

UWAGA 3. W zasadzie rozwiązanie optymalne jest tylko jedno, ale niekiedy zdarza się, że rozwiązań optymalnych jest nieskończenie wiele.

Zadanie programowania liniowego ma sens tylko wtedy, gdy układ ograniczeń jest zgodny /niesprzeczny/, tzn. kiedy rzędy macierzy podstawowej i rozszerzonej układu ograniczeń są równe. Z algebry liniowej wynika, że rząd taki nie może być większy od liczby n zmiennych. Oznaczając przez r rząd macierzy rozpatrzymy przypadki gdy:

1/ r=n, rozwiązanie $x_1', x_2', \ldots, x_n'$ układu /7/ jest jedyne, a jeżeli $x_i \geqslant 0$ dla i=1,2,...,n, to jest ono dopuszczalne i zarazem optymalne, jeżeli zaś chociaż jedna z wartości x_i' jest ujemna - zadanie nie ma rozwiązania.

2/ r < n, układ /7/ ma nieskończenie wiele rozwiązań; te z nich dla których $x_i \geqslant 0$ /i=1,2,..n/ są rozwiązaniami dopuszczalnymi, a pośród nich jest co najmniej jedno optymalne.

Tylko ten drugi przypadek jest najbardziej interesujący i takimi przypadkami głównie zajmiemy się w niniejszym skrypcie.

Jeżeli wśród ograniczeń zadania występują nierówności, to każdą z nich można zawsze zapisać w postaci

$$\alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2 + \ldots + \alpha_n x_n \leq \beta \qquad (*)$$

Wprowadźmy do (*) tzw. dopełniającą zmienną $x_{n+1} \geq 0$, otrzymamy

$$\alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2 + \ldots + \alpha_n x_n + x_{n+1} = \beta \qquad (**)$$

Oczywiste jest, że wyrażenia (*) i (**) są równoważne. Innymi słowy, jeżeli układ $x_1', x_2', \ldots, x_n', x_{n+1}'$ nieujemnych wartości zmiennych $x_1, x_2, \ldots, x_n, x_{n+1}$ spełnia (**), to układ $x_1' x_2', \ldots, x_n'$ spełnia nierówność (*). I na odwrót, jeżeli wartości $x_i' \geq 0$ $/i=1,2,\ldots,n/$ i spełniają nierówność (*), to wartość $x_{n+1}' = \beta - /\alpha_1 x_1' + \alpha_2 x_2' + \ldots + \alpha_n x_n'/$ jest nieujemna.

Można więc układ ograniczeń, w postaci nierówności /8/, wprowadzając zmienne dopełniające x_{n+k} /k=1,2,..,m/, przedstawić jako układ równań

$$\left.\begin{array}{llll} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n & + x_{n+1} & & = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n & & + x_{n+2} & = b_2 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots & & \ldots\ldots & \ldots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \ldots + a_{mn}x_n & & + x_{n+m} & = b_m \end{array}\right\} \quad /8'/$$

Nie trudno zauważyć, że liczba wprowadzanych zmiennych dopełniających jest równa liczbie ograniczeń w postaci nierówności. Przy formułowaniu zadania programowania liniowego możemy żądać minimalizacji lub maksimalizacji funkcji celu F. W większości, metody rozwiązywania programów liniowych opracowane są na minimum funkcji celu. Pokażemy, że można minimalizować funkcję sformułowaną na maksimum.

Oczywiste jest, że funkcja F osiąga wartość największą dla tych samych wartości zmiennych x_i /i=1,2,..n/, dla których funkcja $F_1=-F$ osiąga wartość najmniejszą. Zatem zadanie maksimalizacji funkcji F jest równoważne minimalizacji funkcji $F_1=-F$.

PRZYKŁAD 2. Ograniczenia zadania 1 podane w postaci nierówności przedstawimy w postaci równości, mamy

$$\left.\begin{aligned} 2x_1 + 3x_2 + x_3 \qquad\qquad &= 19 \\ 2x_1 + x_2 \qquad + x_4 \qquad &= 13 \\ 3x_2 \qquad\qquad + x_5 &= 15 \end{aligned}\right\}$$

oraz zadanie maksimalizacji funkcji $F = 7x_1 + 5x_2$ zastąpimy żądaniem minimalizacji funkcji $F_1=-F=-7x_1 - 5x_2$

Zajmiemy się jeszcze przedstawieniem układu ograniczeń podanych w postaci równości do ograniczeń występujących w postaci nierówności.

Rozpatrując układ ograniczeń /7/ wspomnieliśmy, że interesował nas będzie przypadek gdy $r<n$ /r-rząd układu, n-liczba zmiennych/. Z algebry liniowej wiadomo, że w takim przypadku r zmiennych można wyrazić liniowo przez pozostałe $n-r=k$ zmiennych, zwanych zmiennymi niezależnymi. Możemy zawsze tak uporządkować zmienne, aby zmienne zależne $x_{k+1},\ldots,x_n$ dały się wyrazić przez początkowe $x_1x_2,\ldots,x_k$ zmienne niezależne. Oczywiście zmiennych zależnych jest r /n=k+r/. Układ /7/ jest równoważny układowi

$$\left.\begin{aligned} x_{k+1} &= a'_{11}x_1+a'_{12}x_2 +\ldots+ a'_{1k}x_k+b'_1 \\ x_{k+2} &= a'_{21}x_1+a'_{22}x_2 +\ldots+ a'_{2k}x_k+b'_2 \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ x_n &= a'_{r1}x_1+a'_{r2}x_2 +\ldots+ a'_{rk}x_k+b'_r \end{aligned}\right\} \quad /7'/$$

a funkcje celu /9/, po wyrażeniu jej przez zmienne niezależne przyjmie postać

$$F = c_1'x_1 + c_2'x_2 + \ldots + c_k'x_k + c_o' \qquad /9'/$$

Ponieważ mogą być brane pod uwagę tylko nieujemne /dopuszczalne/ rozwiązania układu /7/ lub /7'/, tzn. musi zachodzić warunek $x_i \geqslant 0$ /i=1,2,..,n/ to dla i=k+1, k+2,...,n otrzymujemy układ nierówności

$$\left.\begin{array}{l} a_{11}'x_1+a_{12}'x_2 + \ldots + a_{1k}'x_k+b_1' \geqslant 0 \\ a_{21}'x_1+a_{22}'x_2 + \ldots + a_{2k}'x_k+b_2' \geqslant 0 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{r1}'x_1+a_{r2}'x_2 + \ldots + a_{rk}'x_k+b_r' \geqslant 0 \end{array}\right\} \qquad /7''/$$

który wraz z $x_i \geqslant 0$ /i=1,2,..,k/ jest równoważny układowi /7'/. Tak więc, każde dopuszczalne /nieujemne/ rozwiązanie układu /7'/ jest rozwiązaniem układu /7"/. Na odwrót, dla każdego rozwiązania $x_1',\ldots,x_k'$ układu /7"/, obliczając z /7'/ wartości $x_{k+i}'=a_{i1}'x_1' + \ldots + a_{ik}'x_k'+b_i$ /i=1,2,..,n/, otrzymamy nieujemne /dopuszczalne/ rozwiązanie układu /7'/, a więc i układu /7/. Ostatecznie dochodzimy do wniosku, że zamiast szukać rozwiązań dopuszczalnych układu /7/ można je znajdować rozwiązując układ /7"/.

PRZYKŁAD 3. Dany jest układ ograniczeń zadania programowania liniowego

$$\left.\begin{array}{l} x_1 \qquad\qquad +x_4 + 2x_6 = 5 \\ -x_1+x_2-2x_3 \qquad + x_6 = 2 \\ x_1 \quad +2x_3 \; +x_5 \; -2x_6 = 6 \end{array}\right\}$$

oraz funkcja celu $F = x_1+x_2+x_3+x_4+x_5-x_6$

Eliminując w danym układzie z drugiego i trzeciego równania x_6, otrzymujemy równoważny mu układ ograniczeń

$$1+x_1-2x_2-4x_3 \geq 0$$
$$10-3x_1+2x_2+2x_3 \geq 0$$
$$2-x_1-x_2+2x_3 \geq 0$$

oraz funkcję celu $F = 9-2x_1+2x_2+x_3$ wyrażoną przez zmienne niezależne x_1, x_2 i x_3.

2.4. Interpretacja geometryczna zadania programowania liniowego

Zastanówmy się teraz nad sensem geometrycznym zadania programowania liniowego i pewnymi wnioskami stąd wynikającymi. Pozwoli nam to łatwiej zrozumieć istotę metod analitycznych rozwiązania zadania programowania, o których powiemy w następnym rozdziale.

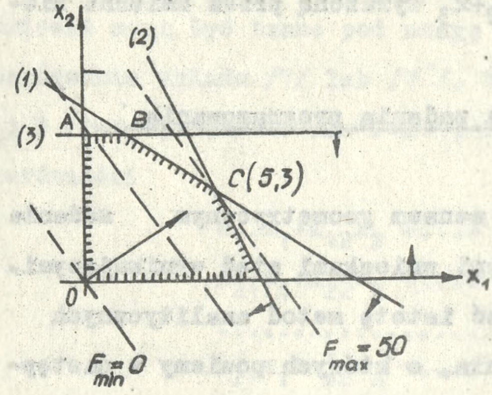
Metoda graficzna /bo o niej tu mowa/ rozwiązania programu liniowego staje się bardzo przejrzystą, jeżeli warunki ograniczające przedstawione są w postaci /7"/. Dla lepszego skupienia uwagi będziemy bazować na przykładach z zadania pierwszego i drugiego.

PRZYKŁAD 4. Przedstawmy warunki ograniczające i funkcje celu z zad. 1 w postaci /7"/ otrzymamy

$$\left.\begin{aligned} 19-2x_1-3x_2 &\geq 0 \\ 13-2x_1-x_2 &\geq 0 \\ 15-3x_2 &\geq 0 \\ x_1 \geq 0, x_2 &\geq 0 \end{aligned}\right\}$$

$$F = 7x_1+5x_2$$

Wiadomo jest z rozdz. 1 /wniosek 1/, że zbiór punktów na płaszczyźnie x_1Ox_2, współrzędne których spełniają układ nierówności liniowych, jest wielokątem wypukłym. Wielokąt taki będziemy nazywać wielokątem lub obszarem możliwych /dopuszczalnych/ rozwiązań układu ograniczeń zadania programowania liniowego.



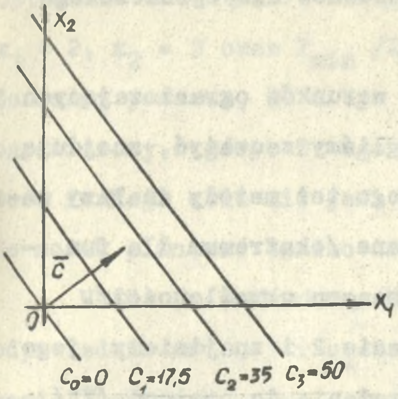
Rys. 7

W rozpatrywanym przykładzie wielokąt rozwiązań jest ograniczony prostymi, które otrzymuje się z nierówności, zastępując je równościami, mianowicie:

$$\left.\begin{array}{l} 19-2x_1-3x_2=0 \ (1) \\ 13-2x_1-x_2=0 \ (2) \\ 15-3x_2 \quad =0 \ (3) \\ x_1=0, \ x_2=0 \end{array}\right\}$$

Sam zaś wielokąt dopuszczalnych rozwiązań jest przecięciem /przekrojem/ półpłaszczyzn ograniczonych tymi prostymi /wielokąt ABCDO na rys. 7/.

Funkcja celu $F = 7x_1+5x_2$ jest funkcją liniową na płaszczyźnie x_1Ox_2. Rozpatrzmy jak układają się punkty na płaszczyźnie, dla których funkcja F przyjmuje tę samą określoną stałą wartość C? To znaczy mamy znaleźć miejsce geometryczne punktów równania $7x_1+5x_2=C$. Jest to równie całej rodziny prostych równoległych. Zatem miejscem geometrycznym szukanych punktów są proste o wyrazie wolnych zależnym od wartości C. /Niekiedy proste te będziemy nazywali liniami poziomu funkcji celu F/. /rys. 8/.



Rys. 8

Oczywiste jest, że przez każdy punkt płaszczyzny przechodzi dokładnie jedna prosta rodziny prostych $7x_1+5x_2=C$, a wartość funkcji F zmienia się przy przejściu od prostej do prostej. Kierunek wektora $\bar{c}=[7,5]$ /składowe wektora są współczynnikami przy zmiennych x_1,x_2/, który jest prostopadły do rodziny prostych, wskazuje na wzrost wartości funkcji celu.

Wśród rodziny równoległych znajdują się takie dwie proste, do których należą tylko pewne punkty wierzchołkowe wielokąta rozwiązań układu ograniczeń. Dla prostej przechodzącej przez wierzchołek wielokąta położonego najbliżej początku układu współrzędnych wartość funkcji celu jest minimalna, zaś dla prostej przechodzącej przez wierzchołek najdalej położony od początku układu wartość funkcji celu, jest maksymalna /rys. 7/.

Powracając do rozpatrywanego przykładu wnioskujemy z przeprowadzonej analizy, że wartość optymalną /maksimum/ funkcja celu osiąga w punkcie C /rys. 7/, współrzędne /5,3/, którego znajdujemy rozwiązując wspólnie układ

$$\left.\begin{aligned} 2x_1+3x_2 &= 19 \\ 2x_1+x_2 &= 13 \end{aligned}\right\}$$

F_{max} /5,3/ = 7.5 + 5.3 = 50. Nawiązując do warunków zad. 1 wnioskujemy, że największy zysk będzie osiągany w danych warunkach, gdy na 5 wyrobów typu W_1 będą produkowane 3 wyroby typu W_2. Przy tym środki produkcji S_1 i S_2 zostaną wykorzystane w całości, zaś produkt S_3 nie całkowicie /można się o tym przekonać, podliczając rozchód środków dla wyznaczonego planu produkcji: $x_1 = 5$, $x_2 = 3$/.

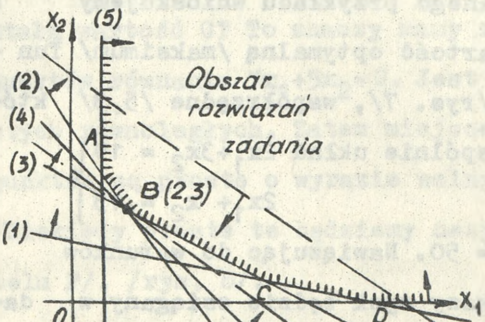
UWAGA 4. Punkty ekstremalne dla warunków ograniczających /układu funkcji liniowych/, jak to mogliśmy zauważyć, znajdują się na brzegu obszaru rozwiązań. Dlatego też metody analizy matematycznej nie mogą być tu wykorzystane /ekstremum dla funkcji nieliniowej występuje wewnątrz obszaru określoności/.

PRZYKŁAD 5. Zinterpretujemy zadanie 2 i znajdziemy jego rozwiązanie. Po sprowadzeniu warunków zadania do postaci /7"/ otrzymamy

$$\left.\begin{array}{r} x_1+5x_2-10 \geqslant 0 \\ 3x_1+2x_2-12 \geqslant 0 \\ 2x_1+4x_2-16 \geqslant 0 \\ 2x_1+2x_2-10 \geqslant 0 \\ x_1-1 \geqslant 0 \\ x_2 \geqslant 0 \end{array}\right\}$$

oraz funkcję celu $F = 2x_1 + 3x_2$, którą mamy zminimalizować. Obszar /wielokąt/ rozwiązań zadania pokazany jest na rys. 9 /wielokąt otwarty ABCD/.

$$\left.\begin{array}{r} x_1+5x_2-10=0 \ (1) \\ 3x_1+2x_2-12=0 \ (2) \\ 2x_1+4x_2-16=0 \ (3) \\ 2x_1+2x_2-10=0 \ (4) \\ x_1-1=0 \ (5) \end{array}\right\}$$



Rys. 9

Optymalne rozwiązanie osiągane jest w punkcie B /2,3/, tzn. $x_1 = 2$, $x_2 = 3$ oraz F_{min} /2,3/ = 2.2 + 3.3 = 13.

Zauważmy jeszcze, że w tym zadaniu obszar rozwiązań jest nieograniczony z góry. Z tego względu największa /maksymalna/wartość funkcji celu nie jest osiągalna. Praktycznie oznacza to, że można planować bardzo drogie odżywianie.

UWAGA 5. Zmieniamy koszt jednostkowy produktów P_1 i P_2 odpowiednio na $c_1=3$ i $c_2=2$. W tym wypadku mamy do zminimalizowania funkcję $F' = 3x_1 + 2x_2$. Linia poziomu dla tej funkcji pokrywa się z prostą /2/, a wartość optymalna zagadnienia osiągalna jest w każdym punkcie odcinka AB i wynosi $F' = 2.3+3.2=12$.

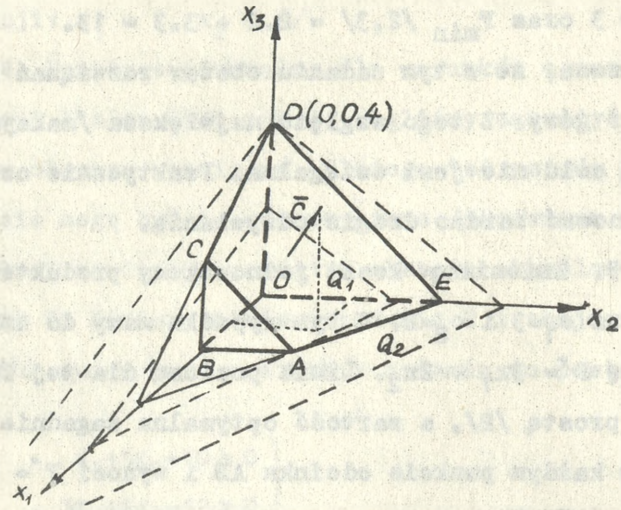
PRZYKŁAD 6. Rozpatrzymy prosty przypadek zadania programowania w przestrzeni 3-wymiarowej

Dla danych warunków ograniczających

$$\left.\begin{array}{r} 0 \leq x_1 \leq 2 \\ x_1+x_2+x_3 \leq 4 \\ x_2 \geq 0, x_3 \geq 0 \end{array}\right\} \text{ lub } \left.\begin{array}{r} x_1 \geq 0 \\ x_2 \geq 0 \\ x_3 \geq 0 \\ x_4 \geq 2 \\ x_1+x_2+x_3 \leq 4 \end{array}\right\}$$

znaleźć minimalną wartość funkcji $F=-x_1-2x_2 - 3x_3$.

Z wniosku 1 wiemy, że zbiorem punktów, współrzędne których spełniają układ nierówności jest wielościan wypukły, zwany wielościanem rozwiązań układu ograniczeń. Ściany tego wielościanu leżą na płaszczyznach, których równania otrzymujemy z nierówności jak w poprzednich przykładach. Sam wielościan jest przekrojem półprzestrzeni, ograniczonych wyżej wspomnianymi płaszczyznami.



Rys. 10

Na rys. 10 pokazany jest wielościan rozwiązań rozpatry - wanego przykładu /pięciościan ABCDEO/.

Współrzędne punktów, dla których funkcja celu w bieżącym przykładzie osiąga tę samą określoną wartość C, spełniają równanie $F=-x_1-2x_2-3x_3 = C$, opisujące rodzinę płaszczyzn równoległych przestrzeni 3-wymiarowej. Dwie z nich pokazane są na rys. 10. /płaszczyzny Q_1 i Q_2 zaznaczone cieńszą linią przerywaną/, odpowiadające wartościom funkcji celu $F_1=-6$ i $F_2=-12$, mianowicie

$$-x_1-2x_2-3x_3 = -6$$

$$-x_1-2x_2-3x_3 = -12$$

Wektor $\bar{c}$ na rys. 10 wskazuje na kierunek przesuwania płasz - czyzn Q_1 i Q_2, tj. na kierunek zmiany wartości funkcji F. Najmniejszą wartość funkcja $F=-x_1-2x_2-3x_3$ osiąga w wierzchołku D /0,0,4/ wielościanu rozwiązań, tzn. rozwiązanie optymalne jest następujące: $x_1=0$, $x_2=0$, $x_3=4$, a F_{min} /0,0,4/ = - 12.

/Żadnego sensu fizycznego warunkom tego przykładu nie przypisuje się/.

Na podstawie rozpatrzonych przykładów od 4 do 6 możemy sformułować następujący

WNIOSEK 2. Rozwiązanie optymalne, tak na płaszczyźnie, jak i w przestrzeni, jeśli istnieje i jest jedno, to osiągalne jest w pewnym wierzchołku wielokąta lub wielościanu rozwiązań. Jeśli rozwiązań optymalnych jest więcej niż jedno, to jest ich nieskończenie wiele i osiągane są w każdym punkcie pewnego odcinka /boku wielokąta/ wraz z jego końcami lub osiągalne jest w każdym punkcie pewnej ściany /ściany wielościanu/ wraz z jej obwodem.

Przez analogię z przypadkiem na płaszczyźnie i w przestrzeni 3-wymiarowej można sobie wyobrazić, że wartość optymalna funkcji celu /jeśli ona istnieje/ osiągana jest w pewnym wierzchołku wielościanu w przestrzeni n-wymiarowej. Pokazanie wielościanu rozwiązań dla $n > 3$ jest niemożliwe. Sformułujemy bez dowodu drugie twierdzenie.

TWIERDZENIE 2. Jeżeli rozwiązanie optymalne zagadnienia programowania liniowego, o warunkach ograniczających postaci /7"/ istnieje, to jest osiągane w pewnym wierzchołku wielościanu rozwiązań dopuszczalnych w przestrzeni n-wymiarowej.

UWAGA 6. Jeżeli w układzie ograniczeń typu /7"/ liczba zmiennych niezależnych k wynosi dwa, to obszarem rozwiązań jest wielokąt, a zadanie daje się łatwo rozwiązać metodą graficzną /przykłady 4 i 5/.

R o z d z i a ł 3

METODY PROGRAMOWANIA LINIOWEGO

3.1. O metodach programowania liniowego

Ogólnie rozwiązanie zagadnienia programowania liniowego sprowadza się do zbadania punktów wierzchołkowych /ekstremalnych/ zbioru wypukłego, czyli rozwiązania dopuszczalne. Nawet w stosunkowo łatwych zadaniach doliczenie współrzędnych wierzchołków wielościanu warunków i porównanie wartości funkcji celu w nich, wymaga ogromnej liczby operacji. O trudnościach rachunkowych przy rozwiązywaniu zagadnień programowania liniowego niech świadczy przykład.

Aby dokonać optymalnego rozdziału pięciu prac między ośmiu pracowników o różnym stopniu przygotowania należy rozwiązać około miliarda algebraicznych równań liniowych z dwunastoma zmiennymi, co nawet przy użyciu nowoczesnej techniki obliczeniowej jest nierealne.

Specjalne metody pozwalają do minimum zmniejszyć liczbę przeglądanych wierzchołków, aby ustalić, w którym z nich osiągane jest ekstremum funkcji celu. Metody te dają schemat obliczeniowy, pozwalający na uporządkowane przejście od jednego do drugiego lepszego rozwiązania.

Z metod najbardziej rozpowszechnionych jest metoda simpleks /lub metoda stopniowego ulepszania planu/. Przypadkiem szczególnym metody simpleks jest metoda rozdziału, najszęściej stosowana przy rozwiązywaniu pewnej klasy zagadnień, zwanych transportowymi. Najprostsze i najbardziej poglądowe jest graficzne rozwiązywanie programów liniowych, zwane również metodą graficzną. Wiadomo z przykładów, że metodę graficzną można wykorzystać wtedy, gdy liczba zmiennych jest nie większa od dwóch. Już przy trzech zmiennych rozwiązanie zadania komplikuje się.

Metoda rozdziału stanowi najprostszą z ściśle matematycznych metod programowania liniowego. Warunkiem koniecznym do zastosowania tej metody jest, aby jednostki miary dla wszystkich danych wyjściowych, jak również i wyników programowania były jednakowe. Metoda rozdziału nadaje się najbardziej do rozwiązywania zagadnień najlepszej organizacji przewozów.

Metoda simpleks jest najbardziej uniwersalną metodą, stosowaną przy rozwiązywaniu dowolnych zadań programowania liniowego. Metoda ta jest trudna i pracochłonna, co zmniejsza jej zakres zastosowań dla celów praktycznych. Zaletą zaś jej jest, że zapewnia wysoką dokładność wyników.

3.2. Metoda simpleks

Niech dane będą warunki ograniczające zagadnienia w postaci układu /7/. Wiemy już z poprzednich rozważań, że układ /7/ jest równoważny warunkom ograniczającym w postaci /7'/.

OKREŚLENIE 8. Zmienne zależne $x_{k+1}, x_{k+2}, \ldots, x_n$ układu /7'/ będziemy nazywali zmiennymi bazowymi, a dopuszczalne rozwiązanie układu /7/, dla zmiennych niezależnych równych zeru, rozwiązaniem bazowym.

3.2.1. Istota metody simpleks

Istotę metody simpleks wykażemy w oparciu o warunki ograniczające zadania 1, żądając teraz minimalizacji funkcji celu $F_1=-F=-7x_1-5x_2$, a same warunki zapiszemy w postaci

$$\left.\begin{aligned} x_3 &= 19-2x_1-3x_2 \\ x_4 &= 13-2x_1-x_2 \\ x_5 &= 15-3x_2 \end{aligned}\right\}$$

Mamy tu, przyjmując zmienne x_1 i x_2 jako niezależne, zarówno funkcję celu F_1, jak i zmienne bazowe x_3, x_4 i x_5 wyrażone przez te zmienne niezależne.

Ponieważ wszystkie zmienne x_i powinny być nieujemne, to najmniejsze wartości jakie mogą przyjąć zmienne niezależne są równe zeru: $x_1=0$, $x_2=0$. Dla tych wartości zmiennych niezależnych zmienne bazowe przyjmą wartości: $x_3=19$, $x_4=12$, $x_5 = 15$. Pierwszym więc rozwiązaniem bazowym jest ciąg

$$x_1=0,\ x_2=0,\ x_3=19,\ x_4=13,\ x_5=15.$$

Dla tego rozwiązania wartość funkcji celu $F_1 = 0$.
W funkcji celu $F_1=-7x_1-5x_2$ przy obu zmiennych niezależnych są współczynniki ujemne. Dlatego też zwiększając dowolną z nich spowodujemy zmniejszenie wartości funkcji F_1. Rozpoczniemy od x_2 /nadal $x_1=0$/, dążąc do maksymalnego jej zwiększenia. Jednakże, nie chcąc aby x_5 było ujemne, możemy x_2 zwiększać do wartości $x_2=5$ i wówczas $x_5=0$, zaś pozostałe zmienne bazowe pozostaną dodatnimi. Wybierzemy teraz nową parę zmiennych niezależnych x_1 i x_5. Wyrazimy nowe zmienne bazowe x_2, x_3, x_4 oraz funkcję F_1 przez x_1 i x_5

$$\left.\begin{aligned} x_2 &= 5-\tfrac{1}{3}x_5 \\ x_3 &= 4-2x_1+x_5 \\ x_4 &= 8-2x_1+\tfrac{1}{3}x_5 \end{aligned}\right|$$

$$F_1 = -25 - 7x_1 + \tfrac{5}{3}x_5$$

Drugim rozwiązaniem bazowym /zmienne niezależne $x_1=0$, $x_5=0$/ jest ciąg: $x_1=0$, $x_2=5$, $x_3=4$, $x_4 = 8$ oraz $F_1 = -25$.

Możemy jeszcze zmniejszyć wartość funkcji $F_1 = -25-7x_1+\frac{5}{3}x_5$, zwiększając wartość zmiennej x_1 /współczynnik przy tej zmiennej jest ujemny; zwiększając też wartość zmiennej x_5 zwiększylibyśmy wartość funkcji celu/ pamiętając przy tym, że zmienne nie mogą być ujemne, a funkcja celu ma osiągnąć najmniejszą wartość. Zmienną x_1 zwiększamy tylko do wartości $x_1=2$ /ze względu na x_3 w ostatnim układzie/. Teraz $x_3=0$, a pozostałe zmienne bazowe x_2 i x_4 pozostają dodatnie. Zmienne x_3 i x_5 przyjmiemy za zmienne niezależne, wyrażając przez nie zmienne bazowe x_1, x_2 i x_4 oraz funkcję F_1

$$\left.\begin{aligned} x_1 &= 2 - \tfrac{1}{2}x_3 + \tfrac{1}{2}x_5 \\ x_2 &= 5 - \tfrac{1}{3}x_5 \\ x_4 &= 4 + x_3 - \tfrac{2}{3}x_5 \end{aligned}\right\}$$

$$F_1 = -39 + \tfrac{7}{2}x_3 - \tfrac{11}{6}x_5$$

Trzecim równaniem bazowym jest teraz

$$x_1 = 2,\ x_2 = 5,\ x_3 = 0,\ x_4 = 4,\ x_5 = 0 \text{ oraz } F_1 = -39.$$

Funkcję F_1 możemy jeszcze poprawić, zwiększając x_5 do wartości $x_5 = 6$ /ze względu na trzecie równanie ostatniego układu/. Zmiennymi niezależnymi są teraz x_3 i x_4, a zmiennymi bazowymi x_1, x_2 i x_5. Mamy więc

$$\left.\begin{aligned} x_1 &= 5 + \tfrac{1}{4}x_3 - \tfrac{3}{4}x_4 \\ x_2 &= 3 - \tfrac{1}{2}x_3 + \tfrac{1}{2}x_4 \\ x_5 &= 6 + \tfrac{3}{2}x_3 - \tfrac{3}{2}x_4 \end{aligned}\right\}$$

$$F_1 = -50 + \tfrac{3}{4}x_3 + \tfrac{11}{4}x_4$$

Czwartym rozwiązaniem bazowym jest ciąg wartości zmiennych:
$x_1 = 5$, $x_2 = 3$, $x_3 = 0$, $x_4 = 0$, $x_5 = 6$ oraz $F_1 = -50$.

Zwiększanie którejkolwiek ze zmiennych x_3 lub x_4 w ostatnim wyrażeniu funkcji celu spowoduje tylko wzrost jej wartości /współczynniki przy x_3 i x_4 są dodatnie/. Stąd wnioskujemy, że ostatnie rozwiązanie bazowe jest rozwiązaniem optymalnym, dla którego $F_{1min} = -50$.

Rozpatrzony przykład potwierdza poczynione spostrzeżenie, że tok postępowania w nim prowadzi od jednego rozwiązania bazowego do drugiego, lecz nie dowolnie, a systematycznie powodując zmianę wartości funkcji celu w kierunku jej wartości optymalnej. W tym to właśnie zawarta jest istota metody simpleks.

Zakończymy powyższe rozumowania sformułowaniem twierdzenia.

TWIERDZENIE 3. Jeżeli zadanie programowania liniowego z warunkami ograniczającymi postaci /7/ lub /7'/ ma rozwiązanie optymalne, to istnieje co najmniej jedno optymalne rozwiązanie bazowe, które może być otrzymane metodą simpleks, wychodząc z dowolnego rozwiązania bazowego.

Dowód twierdzenia pomijamy, ograniczając się jedynie do stwierdzenia, że jak już wspominaliśmy, w zasadzie rozwiązanie optymalne jest tylko jedno; nie wyklucza to jednak przypadku istnienia większej ilości rozwiązań optymalnych. Powyższe twierdzenie upewnia w tym, że we wszystkich przypadkach spośród rozwiązań optymalnych istnieje co najmniej jedno rozwiązanie bazowe. Jeżeli zaś zadanie ma tylko jedno rozwiązanie optymalne, to jest ono rozwiązaniem bazowym.

3.2.2. Algebra metody simpleks

Przy rozwiązywaniu żadań metodą simpleks nie jest konieczne wypisywanie tak szczegółowych obliczeń, które wykonaliśmy w przytoczonym wyżej przykładzie. Cały proces rozwiązywania można zapisać w postaci szeregu jednotypowo wypełnianych tablic, przy czym każdemu krokowi odpowiadać będzie przejście do następnej tablicy. Aby sposób wypełniania tablic był bardziej zrozumiały rozpatrzymy metodę simpleks w postaci ogólnej.

Układ ograniczeń /7/ oraz funkcję celu /9'/, a tym samym układ wyjściowy /7/ oraz funkcję celu /9/ przedstawimy w postaci

$$\left.\begin{array}{l} x_{k+1} = \beta_1 - /a_{11}x_1 + \ldots + a_{1k}x_k/ \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ x_{k+l} = \beta_l - /a_{l1}x_1 + \ldots + a_{lk}x_k/ \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ x_{k+i} = \beta_i - /a_{i1}x_1 + \ldots + a_{ik}x_k/ \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ x_n = \beta_r - /a_{r1}x_1 + \ldots + a_{rk}x_k/ \end{array}\right\} \qquad /10/$$

$$F = \gamma_o - (\gamma_1 x_1 + \ldots + \gamma_k x_k) \qquad /11/$$

gdzie $\beta_i = b_i'$ są wszystkie nieujemne /i=1,2,..,r/; $a_{ij} = -a_{ij}'$; $\gamma_o = c_o'$; $\gamma_j = -c_j'$ /j=1,2,..,k/

UWAGA 7. Zawsze przy rozwiązywaniu zadań metodą simpleks powinno się przedstawiać układ ograniczeń i funkcję celu w postaci /10/ i /11/. Oznacza to, że stawiane jest żądanie, aby wszystkie wyrazy wolne w /10/ i /11/ były nieujemne.

Pierwszym rozwiązaniem bazowym jest tu ciąg

$x_j = 0$ /j=1,2,..,k/; $x_{k+i} = \beta_i$ /i=1,2,..,r/, dla którego funkcja celu $F' = \gamma_o$.

Możliwe są dwa przypadki.

A. Wszystkie liczby $\gamma_1, \ldots, \gamma_k$ nie są dodatnie. Wtedy funkcja F osiąga wartość minimalną przy $x_j = 0$ $/j=1,2,\ldots,k/$, tj. rozwiązanie bazowe jest optymalne.

B. Wśród liczb γ_j $/j=1,2,\ldots,k/$ są dodatnie. Niech $\gamma_j > 0$, gdzie j jedna z liczb od 1 do k. Przez zwiększenie x_j /przy pozostałych $x_j = 0$/ możemy próbować zmniejszyć wartość F. Przy tym nie zapominamy, że zmiana wartości x_j nie może doprowadzić do ujemnej wartości żadnej ze zmiennych zależnych x_{k+i}. Zakładając, że w /10/ i /11/ wszystkie zmienne niezależne oprócz x_j są równe zeru otrzymamy

$$\left.\begin{array}{l} x_{k+1} = \beta_1 - a_{1j}x_j \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ x_{k+l} = \beta_l - a_{lj}x_j \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ x_n = \beta_r - a_{rj}x_j \end{array}\right\}$$

$$F = \gamma_0 - \gamma_j \; x_j$$

Możliwe są tu też dwa przypadki.

C. Wszystkie liczby $a_{1j}, \ldots, a_{rj}$ nie są dodatnie. Wtedy dla dowolnej $x_j > 0$ mamy: $x_{k+1} \geq \beta_1, \ldots, x_n \geq \beta_r$, a więc x_{k+i} nie są ujemne. Przy tym dla dostatecznie dużych wartości x_j funkcja F /ze względu na $\gamma_j > 0$/ przyjmuje wartości ujemne dowolnie duże, tzn. w tym przypadku $F_{min} = -\infty$, więc nie istnieje rozwiązanie.

D. Wśród liczb $a_j, \ldots, a_{rj}$ są dodatnie. Niech $a_{lj} > 0$, gdzie l jest jedną z liczb $1,2,\ldots,r$. Wtedy x_j można zwiększyć tylko do β_l / a_{lj} /w przeciwnym wypadku x_{k+l} byłoby ujemne/, tj. $x_j = \beta_l / a_{lj}$. Spośród ułamków β_l / a_{lj} dla $a_{lj} > 0$ wybierzmy najmniejszy. Niech nim będzie

$$\frac{\beta_i}{a_{ij}} = \min \frac{\beta_l}{a_{lj}}, \text{ dla } a_{lj} > 0 \qquad /12/$$

Oczywiste jest, że przy zwiększaniu x_j pierwszą wartość zerową przyjmie zmienna bazowa x_{k+i}, pozostałe zmienne bazowe pozostaną dodatnie. Element /liczba/ a_{ij} spełnia ważną rolę w dalszych przekształceniach i często nosi nazwę elementu rozwiązującego.

Zmienną x_j wyłączamy ze zbioru zmiennych niezależnych, a włączamy do bazy zamiast zmiennej bazowej x_{k+i}. Wszystkie zaś nowe zmienne bazowe wyrażamy przez nowe zmienne niezależne. W tym celu z i-go równania układu /10/ wyznaczamy zmienną bazową

$$x_j = \frac{\beta_i}{a_{ij}} - \left(\frac{a_{i1}}{a_{ij}} x_1 + \ldots + \frac{a_{ij-1}}{a_{ij}} x_{j-1} + \frac{1}{a_{ij}} x_{k+i} + \frac{a_{ij+1}}{a_{ij}} x_{j+1} + \ldots + \frac{a_{ik}}{a_{ij}} x_k \right)$$

i podstawimy do wyrażeń dla pozostałych zmiennych bazowych. Zmienna bazowa, np. x_{k+l}, pomijając pośrednie przekształcenia, wyrazi się wzorem

$$x_{k+l} = \beta_l - \frac{a_{lj}\beta_i}{a_{ij}} - \left[\left(a_{l1} - \frac{a_{lj} a_{i1}}{a_{ij}} \right) x_1 + \ldots + \left(a_{lj-1} - \frac{a_{lj} a_{ij-1}}{a_{ij}} \right) x_{j-1} - \frac{a_{lj}}{a_{ij}} x_{k+i} + \left(a_{lj+1} - \frac{a_{lj} a_{ij+1}}{a_{ij}} \right) x_{j+1} + \ldots + \left(a_{lk} - \frac{a_{lj} a_{ik}}{a_{ij}} \right) x_k \right],$$

gdzie $= 1,2,\ldots,i-1, i+1,\ldots,r$

Podobnie wyrazimy funkcję celu przez nowe zmienne niezależne

$$F = \gamma_0 - \frac{\gamma_j \beta_i}{a_{ij}} - \left[\left(\gamma_1 - \frac{\gamma_j a_{i1}}{a_{ij}} \right) x_1 + \left(\gamma_{j-1} - \frac{\gamma_j a_{ij-1}}{a_{ij}} \right) x_{j-1} - \frac{\gamma_j}{a_{ij}} x_{k+i} + \right.$$

$$+\left(\gamma_{j+1} - \frac{\gamma_j\, a_{ij+1}}{a_{ij}}\right) x_{j+1} + \ldots + \left(\gamma_k - \frac{\gamma_j\, a_{ik}}{a_{ij}}\right) x_k\Bigg]$$

Przyjmując nowe zmienne niezależne równe zeru, znajdujemy nowe rozwiązanie bazowe oraz funkcję celu

$$x_{k+l} = \beta_l - \frac{a_{lj}\,\beta_i}{a_{ij}}\ ;\ F'' = \gamma_o - \frac{\gamma_j \beta_i}{a_{ij}} \qquad /13/$$

Na tym kończymy tok naszego rozumowania algebraicznego w przypadku osiągnięcia rozwiązania optymalnego lub stwierdzenia, że jest ono nieosiągalne. W przypadku gdy rozwiązanie optymalne nie jest jeszcze osiągnięte powtarzamy proces od początku.

UWAGA 8. Ten fakt, że nowe rozwiązanie bazowe jest rozwiązaniem dopuszczalnym oraz, że $F'' \leq F'$, zawarty jest wprawdzie w powyższych rozważaniach. Analizując wzory /13/ wykażemy to bezpośrednio.

Z założenia, wszystkie $\beta_i \geq 0$. Element rozwiązujący $a_{ij} > 0$ /według wyboru/ tzn, że też $\beta_i/a_{ij} \geq 0$. Następnie, jeżeli

1/ $a_{lj} \leq 0$, to ze wzoru pierwszego /13/ $x_{k+l} \geq 0$;

2/ $a_{lj} > 0$, to ze wzoru /12/

$$x_{k+l} = a_{lj}\left(\frac{\beta_l}{a_{lj}} - \frac{\beta_i}{a_{ij}}\right) \geq 0;$$

3/ dla elementu rozwiązującego a_{ij} współczynnik $\gamma_j > 0$, to z /13/

$$F'' = \gamma_o - \frac{\gamma_j\, \beta_i}{a_{ij}} \leq \gamma_o = F'$$

3.2.3. Tablica metody simpleks

Układ ograniczeń /10/ wygodnie jest zapisać w postaci

$$\left.\begin{aligned} &a_{11}x_1 + \dots + a_{1j}x_j + \dots + a_{1k}x_k + x_{k+1} = \beta_1 \\ &\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ &a_{i1}x_1 + \dots + a_{ij}x_j + \dots + a_{ik}x_k + x_{k+i} = \beta_i \\ &\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ &a_{r1}x_1 + \dots + a_{rj}x_j + \dots + a_{rk}x_k + x_{k+r} = \beta_r \end{aligned}\right\} \quad /14/$$

lub w postaci wektorowej

$$\bar{a}_1x_1 + \dots + \bar{a}_jx_j + \dots + \bar{a}_kx_k + \dots + \bar{a}_{k+i}x_{k+i} + \dots + \bar{a}_{k+r}x_{k+r} = \bar{b},$$

gdzie

$$\bar{a}_j = \begin{bmatrix} a_{1j} \\ \vdots \\ a_{ij} \\ \vdots \\ a_{rj} \end{bmatrix} \quad (j=1,2,k); \quad \bar{a}_{k+i} = \begin{bmatrix} \vdots \\ j \\ \vdots \end{bmatrix} \quad \text{wektory bazowe /jednostkowe/ z 1 na i-tym miejscu}$$

$$\bar{b} = \begin{bmatrix} \beta_1 \\ \vdots \\ \beta_i \\ \vdots \\ \beta_r \end{bmatrix} \quad \text{wektor wyrazów wolnych /rozwiązanie bazowe/}$$

Tablica 4

Wektory bazowe	$\bar{c}$	γ_j $\bar{b}$	γ_1 $\bar{a}_1$	...	γ_j $\bar{a}_j$	...	γ_k $\bar{a}_k$	γ_{k+1} $\bar{a}_{k+1}$	...	γ_{k+i} $\bar{a}_{k+i}$	...	γ_{k+r} $\bar{a}_{k+r}$
$\bar{a}_{k+1}$	γ_{k+1}	1	a_{11}	...	a_{1j}	...	a_{1k}	1	...	0	...	0
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	...	$\vdots$	...	$\vdots$	$\vdots$	...	$\vdots$	...	$\vdots$
$\bar{a}_{k+i}$	γ_{k+i}	i	a_{i1}	...	a_{ij}	...	a_{ik}	0	...	1	...	0
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	...	$\vdots$	...	$\vdots$	$\vdots$	...	$\vdots$	...	$\vdots$
$\bar{a}_{k+r}$	γ_{k+r}	r	a_{r1}	...	a_{rj}	...	a_{rk}	0	...	0	...	1
$F_j - \gamma_j$		γ_0	$-\gamma_1$	...	$-\gamma_j$	...	$-\gamma_k$	0	...	0	...	0

Zasady wypełniania tablic simpleks /pierwszej i następnych/ oraz rozwiązywania przy ich pomocy zagadnienia programowania liniowego pokażemy na następujących przykładach.

PRZYKŁAD 7. Zminimalizować funkcję celu

$$F = x_2 - 3x_3 + 2x_5$$

dla warunków ograniczających

$$\left.\begin{aligned} x_1+3x_2-x_3+2x_5 &= 7 \\ -2x_2+4x_3+x_4 &= 12 \\ -4x_2+3x_3+8x_5+x_6 &= 10 \end{aligned}\right\}$$

Danym przykładu odpowiada tablica 5a

Tablica 5a

Wekt. baz.	$\bar{c}$	γ_j	0	1	-3	0	2	0
		$\bar{b}$	$\bar{a}_1$	$\bar{a}_2$	$\bar{a}_3$	$\bar{a}_4$	$\bar{a}_5$	$\bar{a}_6$
$\bar{a}_1$	0	7	1	3	-1	0	2	0
$\bar{a}_4$	0	12	0	-2	4	1	0	0
$\bar{a}_6$	0	10	0	-4	3	0	8	1
		0	0	-1	3	0	-2	0

Do tablic simpleks został jeszcze wprowadzony wektor $\bar{c}$, którego elementami są współczynniki γ_j odpowiadające wektorom bazowym. Ostatni wiersz w tablicach simpleks, zwany wskaźnikowym, wypełnia się w ten sposób, że każdy jego element jest współczynnikiem funkcji celu postaci /11/ (w naszym przypadku $F = 0 - \left(-x_2+3x_3-2x_5\right)$) i tylko w pierwszej tablicy.

Przy przejściu do kolejnych tablic simpleks będziemy kierować się następującymi wskazówkami:

1/ Jeżeli wszystkie elementy wiersza wskaźnikowego są niedodatnie, przy poszukiwaniu minimum /nieujemne przy poszu -

kiwaniu maksimum/ funkcji celu, to otrzymane zostało rozwiązanie optymalne.

2/ Jeżeli w wierszu wskaźnikowym występuje w pewnej kolumnie element dodatni /ujemny przy poszukiwaniu maksimum/, to mogą zajść dwa przypadki:

- wszystkie elementy a_{ij} w tej kolumnie są niedodatnie $/a_{ij} \leqslant 0/$ - rozwiązania brak;
- pewien element a_{ij} tej kolumny jest dodatni $/a_{ij} > 0/$ - należy kontynuować obliczenia.

Przystąpimy do utworzenia drugiej tablicy simpleks rozpoczętego przykładu. Znajdujemy w tym celu w wierszu wskaźnikowym największy element dodatni /największy element ujemny przy poszukiwaniu maksimum/. W kolumnie dla tego elementu znajdujemy element rozwiązujący, spełniający warunek /12/, tj. $\min.\left\{\frac{10}{3}, \frac{12}{4}\right\} = \frac{12}{4} = 3$ i oznaczamy kółkiem. Wierszem /kolumną/ rozwiązującą nazwiemy wiersz /kolumnę/ z elementem rozwiązującym. Z wiersza rozwiązującego usuwamy wektor $\bar{a}_4$ /z bazy/, a na jego miejsce wprowadzamy wektor $\bar{a}_3$ z kolumny rozwiązującej /tabl. 5b/.

Tablica 5b

Wekt. baz.	$\bar{c}$	γ_1	0	1	-3	0	2	0
		$\bar{b}$	$\bar{a}_1$	$\bar{a}_2$	$\bar{a}_3$	$\bar{a}_4$	$\bar{a}_5$	$\bar{a}_6$
$\bar{a}_1$	0	10	1	5/2	0	1/4	2	0
$\bar{a}_3$	-3	3	0	-1/2	1	1/4	0	0
$\bar{a}_6$	0	1	0	-5/2	0	-3/4	8	1
$c_j - \gamma_j$		-9	0	1/2	0	-3/4	-2	0

Tablica 5c

Wekt. baz.	$\bar{c}$	γ_j	0	1	-3	0	2	0
		$\bar{b}$	$\bar{a}_1$	$\bar{a}_2$	$\bar{a}_3$	$\bar{a}_4$	$\bar{a}_5$	$\bar{a}_6$
$\bar{a}_2$	1	4	2/5	1	0	1/10	4/5	0
$\bar{a}_3$	-3	5	1/5	0	1	3/10	2/5	0
$\bar{a}_6$	0	11	1	0	0	-1/2	10	1
$c_j - \gamma_j$		-11	-1/5	0	0	-4/5	-2/5	0

Wektory, które nie wchodzą do bazy wyrazimy przez wektory nowej bazy. W tym celu każdy element wiersza rozwiązującego dzielimy przez element rozwiązujący i zapisujemy w odpowiednim wierszu tablicy 5b /wiersz z wektorem $\bar{a}_3$/. Pozostałe elementy kolejnych tablic simpleks wypełniamy, rozumując następująco: Weźmy prostokąt, w wierzchołkach którego na jednej przekątnej jest element rozwiązujący a_{ij} i element a_{rk}, na miejsce którego chcemy znaleźć element w następnej tablicy; zaś na drugiej przekątnej elementy a_{ik} i a_{rj}. Iloczyn tych ostatnich dzielimy przez element rozwiązujący i odejmujemy od a_{rk} /patrz prostokąt tabl. 4/, tj.

$$a'_{rk} = a_{rk} - \frac{a_{ik} \cdot a_{rj}}{a_{ij}} \qquad /15/$$

np. liczb; /-5/2/ w tabl. 5b na miejscu liczby /-4/ z tabl. 5a obliczyliśmy z zależności $a_{62} = -4 - \frac{/-2/.3}{4} = -5/2$ /patrz prostokąt w tabl. 5a/.

W tabl. 5b w wierszu wskaźnikowym znajduje się element dodatni / 1/2 /. Rozwiązanie optymalne nie zostało jeszcze osiągnięte. Przechodzimy do tabl. 5c, którą wypełniamy wg zasad podanych wyżej. Rozwiązaniem optymalnym jest ciąg liczb: 0,4,5,0,0,11 oraz wartość funkcji celu $F_{min} = 1.4-3.5+2.0 = -11$.

PRZYKŁAD 8. Dla danych warunków ograniczających

$$\left.\begin{array}{l} x_1 \leqslant 4 \\ \quad x_2 \leqslant 6 \\ x_1 - x_2 \leqslant 8 \end{array}\right\}$$

znaleźć wartość maksymalną funkcji celu $F = 2x_1 + 5x_2$.

Przede wszystkim dane ograniczenia przedstawimy w postaci układu równań, wyznaczając w ten sposób pierwszą bazę.

$$\left.\begin{array}{l} x_1 + x_3 = 4 \\ x_2 + x_4 = 6 \\ x_1 + x_2 + x_5 = 8 \end{array}\right\}$$

oraz $F = 0 - /-2x_1 - 5x_2/$

Tablice 6a-6c ilustrują etapy rozwiązania tego przykładu.

Tabela 6a

Wekt. baz.	$\bar{c}$	δ_j	2	5	0	0	0
		$\bar{b}$	$\bar{a}_1$	$\bar{a}_2$	$\bar{a}_3$	$\bar{a}_4$	$\bar{a}_5$
$\bar{a}_3$	0	4	1	0	1	0	0
$\bar{a}_4$	0	6	0	1	0	1	0
$\bar{a}_5$	0	8	1	1	0	0	1
$c_1 - \delta_1$		0	-2	-5	0	0	0

Tabela 6b

Wekt. baz.	$\bar{c}$	δ_1	2	5	0	0	0
		$\bar{b}$	$\bar{a}_1$	$\bar{a}_2$	$\bar{a}_3$	$\bar{a}_4$	$\bar{a}_5$
$\bar{a}_3$	0	4	1	0	1	0	0
$\bar{a}_2$	5	6	0	1	0	1	0
$\bar{a}_5$	0	2	1	0	0	-1	1
$c_1 - \delta_1$		30	-2	0	0	5	0

Tablica 7a

Wekt. baz.	$\bar{c}$	γ_j	1	2	3	-1	W	W
		$\bar{b}$	$\bar{a}_1$	$\bar{a}_2$	$\bar{a}_3$	$\bar{a}_4$	$\bar{a}_5$	$\bar{a}_6$
$\bar{a}_6$	W	15	1	2	3	0	0	1
$\bar{a}_5$	W	20	2	1	5	0	1	0
$\bar{a}_4$	-1	10	1	2	1	1	0	0
F		-10	-2	-4	-4	0	0	0
Y		35	3	3	8	0	0	0

Tablica 7b

Wekt. baz.	$\bar{c}$	γ_j	1	2	3	-1	W
		$\bar{b}$	$\bar{a}_1$	$\bar{a}_2$	$\bar{a}_3$	$\bar{a}_4$	$\bar{a}_6$
$\bar{a}_6$	W	3	-1/5	7/5	0	0	1
$\bar{a}_3$	3	4	2/5	1/5	1	0	0
$\bar{a}_4$	-1	6	3/5	9/5	0	1	0
F		6	-2/5	-16/5	0	0	0
Y		3	-1/5	7/5	0	0	0

Tablica 7c

Wekt. baz.	$\bar{c}$	γ_j	1	2	3	-1
		$\bar{b}$	$\bar{a}_1$	$\bar{a}_2$	$\bar{a}_3$	$\bar{a}_4$
$\bar{a}_2$	2	15/7	-1/7	1	0	0
a_3	3	25/7	3/7	0	1	0
$\bar{a}_4$	-1	15/7	6/7	0	0	1
$c_j - \gamma_j$		90/7	-6/7	0	0	0
Y		0	0	0	0	0

Tablica 7d

Wekt. baz.	$\bar{c}$	δ_j	1	2	3	-1
		$\bar{b}$	$\bar{a}_1$	$\bar{a}_2$	$\bar{a}_3$	$\bar{a}_4$
$\bar{a}_2$	2	5/2	0	1	0	1/6
$\bar{a}_3$	3	5/2	0	0	1	-1/2
$\bar{a}_1$	1	5/2	1	0	0	7/6
$c_j - \delta_j$		15	0	0	0	1

Tablice 7a-7d ilustrują tok postępowania, najpierw przy znajdowaniu pierwszej bazy /tabl. 7a-7b/, a następnie przy znajdowaniu rozwiązania optymalnego.

W tablicy 7a wprowadziliśmy dodatkowo dwie kolumny /$\bar{a}_5$ i $\bar{a}_6$/ oraz wiersz dla pomocniczej funkcji y.

Funkcję pomocniczą Y minimalizujemy metodą simpleks w znany sposób, usuwając kolejno z bazy wektory "sztuczne" najpierw $\bar{a}_5$, a następnie $\bar{a}_6$ i zastępując je odpowiednio wektorami $\bar{a}_3$ i $\bar{a}_2$. Funkcja celu F przy tych przekształceniach odgrywała rolę pasywną. Wektory dodatkowe w miarę usuwania ich z bazy są określane. W ten sposób w tablicy 7c uzyskaliśmy wektory bazowe z układu wyjściowego i tablicę tę /bez ostatniego wiersza/ możemy uważać za pierwszą tablicę simpleks zadania wyjściowego. Tablica 7d daje już rozwiązanie optymalne.

Na zakończenie zauważmy, że ponieważ może być $Y \geqslant 0$, to i też min $Y \geqslant 0$. Dlatego możliwe są dwa przypadki:

1/ min $Y > 0$; wtedy układ wyjściowy ograniczeń nie ma rozwiązań nieujemnych, a więc w naszym rozumieniu nie ma ich wcale ;
2/ min $Y = 0$ /tabl. 7c/, wtedy układ wyjściowy ograniczeń ma co najmniej jedno nieujemne rozwiązanie /tabl. 7d/.

3.3. Metoda transportowa

Jednym z wcześniejszych i ekonomicznie najkorzystniej - szych zastosowań metod programowania liniowego było sformuło - wanie i rozwiązanie zagadnienia transportowego. Podamy tu ogólne założenia tego zagadnienia oraz niektóre algorytmy rozwią - zania zagadnienia transportowego.

3.3.1. Sformułowanie zagadnienia transportowego

Przypomnimy sformułowanie zagadnienia transportowego. Mamy m punktów wysyłki towarów /dostawców/ $A_1, A_2, \ldots, A_m$ i n punktów przeznaczenia /użytkowników/ $B_1, B_2, \ldots, B_n$. Niech a_i oznacza ilość towaru /w określonych jednostkach/, jaka znajduje się w punkcie A_i /i=1,2,..,m/, a b_j - ilość towaru w tych samych jednostkach, jaka może być przyjęta w punkcie B_j /j=1,2,n/ Przy tym zakłada się, że zachodzi warunek

$$a_1+a_2+\ldots+a_i+\ldots+a_m = \sum_{i=1}^{m} a_i = \sum_{j=1}^{n} b_j = b_1+b_2+\ldots+b_j+\ldots+b_n \qquad /16/$$

oznaczający, że ogólna ilość towaru znajdująca się w punktach A_i /i=1,2,.,m/ równa się ogólnemu zapotrzebowaniu na te towary w punktach B_j /j=1,2,..,n/. Dany jest również koszt przewozu jednej jednostki towaru z punktu A_i do punktu B_j, który ozna - czamy przez c_{ij}. Niech x_{ij} oznacza ilość towaru przeznaczonego do transportu z A_i do B_j.

Zadanie polega na takim zaplanowaniu przewozu, tj. wy - znaczeniu ilości towaru, którą należy dostarczyć z każdego punktu wysyłki A_i do każdego punktu przeznaczenia B_j, aby ogólny koszt transportu był najmniejszy.

W charakterze zmiennych w zadaniu transportowym występuje m.n nieujemnych wartości zmiennej x_{ij}. Ponieważ ogólna ilość towaru dostarczana z poszczególnych punktów A_i do wszystkich punktów odbioru wynosi a_i, więc otrzymujemy równanie

$$x_{i1}+x_{i2}+\ldots+x_{in}=a_i \qquad /i=1,2,\ldots,m/$$

lub w postaci rozwiniętej układ

$$\left.\begin{aligned} x_{11}+x_{12}+\ldots+x_{1n}&=a_1\\ x_{21}+x_{22}+\ldots+x_{2n}&=a_2\\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots&\\ x_{m1}+x_{m2}+\ldots+x_{mn}&=a_m \end{aligned}\right\} \qquad /17/$$

Również ogólna ilość towarów dostarczanych z wszystkich A_i do poszczególnych punktów odbioru wynosi b_j, więc też otrzymujemy równanie

$$x_{1j}+x_{2j}+\ldots+x_{mj}=b_j \quad /j=1,2,\ldots,n/$$

lub w postaci rozwiniętej układ

$$\left.\begin{aligned} x_{11}+x_{21}+\ldots+x_{m1}&=b_1\\ x_{12}+x_{22}+\ldots+x_{m2}&=b_2\\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots&\\ x_{1n}+x_{2n}+\ldots+x_{mn}&=b_n \end{aligned}\right\} \qquad /18/$$

Ogólnie warunki zagadnienia transportowego zestawimy w tabl.8.

Tablica 8

Punkty odbioru / Punkty wysyłki	B_1	B_2	...	B_j	...	B_n	Zasoby
A_1	c_{11} x_{11}	c_{12} x_{12}	...	c_{1j} x_{1j}	...	c_{1n} x_{1n}	a_1
A_2	c_{21} x_{21}	c_{22} x_{22}	...	c_{2j} x_{2j}	...	c_{2n} x_{2n}	a_2
...	...	...	...	...	...	...	...
A_i	c_{i1} x_{i1}	c_{i2} x_{i2}	...	c_{ij} x_{ij}	...	c_{in} x_{in}	a_i
...	...	...	...	...	...	...	...
A_m	c_{m1} x_{m1}	c_{m2} x_{m2}	...	c_{mj} x_{mj}	...	c_{mn} x_{mn}	a_m
Zapotrzebowanie	b_1	b_2	...	b_j	...	b_n	$\sum_{j=1} b_j = \sum_{i=1} a_i$

W tabl. 8 w kratkach x_{ij} wpisany jest koszt jednostkowy transportu c_{ij}, a ogólny sumaryczny koszt transportu wyraża podwójna suma

$$S = \sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} c_{ij} x_{ij} \qquad /19/$$

Na podstawie tablicy możemy dać matematyczne sformułowanie zagadnienia transportowego. Znaleźć nieujemne wartości zmiennych x_{ij}, które minimalizują całkowity koszt /19/ przy ograniczeniach /16/ - /18/.

Dokonując odpowiednich przekształceń i analizy ograniczeń /16/ - /18/ zagadnienia transportowego udowadnia się

TWIERDZENIE 4. Zagadnienie transportowe posiada rozwiązanie bazowe i stanowią je co najwyżej m+n-1 elementów x_{ij} tablicy. W przypadku równej m+n-1 ich ilości rozwiązanie jest optymalne.

3.3.2. Algorytmy rozwiązania zadania transportowego

Algorytmy, z którymi zapoznamy się w niniejszym ustępie będą rozpatrzone na konkretnych przykładach:

PRZYKŁAD 10. Zaplanować przewóz towarów z trzech punktów wysyłki A_1, A_2 i A_3 o zasobach odpowiednio $a_1=70, a_2=60$ i $a_3=50$ ton towaru do pięciu punktów odbioru B_1, B_2, B_3, B_4 i B_5 o zapotrzebowaniu $b_1 = 30$, $b_2 = 40$, $b_3 = 30$, $b_4 = 60$ i $b_5 = 20$ ton tak, aby koszt całego transportu przy danym macierzą c koszcie jednostkowym przewozu był minimalny.

$$c = \begin{bmatrix} 6 & 4 & 5 & 5 & 2 \\ 8 & 3 & 2 & 2 & 5 \\ 5 & 5 & 6 & 1 & 4 \end{bmatrix}$$

Elementy macierzy c przedstawiają jednostkowy koszt /np. w tysiącach złotych/ przewozu jednej tony towaru z wybranego punktu wysyłki do określonego punktu odbioru, np. element c_{21} = 8 macierzy.C oznacza koszt wynoszący 8 tys. zł. za przewóz 1 tony towaru z A_2 do B_1.

Każdorazowo macierz kosztów określa się metodą analityczno-kalkulacyjną, zależnie od charakteru zadania,rodzaju kosztu /np. w samoloto-wylotach/ itp. W naszym przykładzie określając macierz kosztów zapewne wzięto pod uwagę rodzaj transportu, odległości do punktów odbioru, jakość drożni, rodzaj przewożonego towaru itp. Określenie macierzy kosztów nie wchodzi w zakres rozważanego przedmiotu.

Dane zadania z przykładu 10 pomieścimy w tablicy 9a.

Tablica 9a

A_i \ B_j	30	40	30	60	20	
70	6	4	5	5	$\underline{2}$ 20	50+
60	8	$\underline{3}$ 30	$\underline{2}$ 30	2	5	10-
50	$\underline{5}$ 0	5	6	$\underline{1}$ 50	4	40-
	1	1	3	4		

Algorytm - "Najmniejszych różnic"

1. Wybrać w każdej kolumnie /dla każdego odbiorcy/ najmniejszy jednostkowy koszt i podkreślić /gdy takich kosztów jest więcej - podkreślić wszystkie/.
2. Dokonać rozdziału zasobów /dla każdego nadawcy/ według najniższych kosztów /podziału dokonywać tak, aby kratka z najniższym kosztem wraz z przydzielonymi już kratkami znajdowała się pojedynczo w wierszu lub kolumnie/.

3. Ustalić, który z dostawców ma nadwyżki, a który niedobór . Ustalone liczby ze znakiem odpowiednio plus i minus zapisać z prawej strony tablicy /jako sprawdzian poprawnego postępowania suma tych liczb powinna być równa zeru, a w przypadku uzyskania samych zer - rozdział optymalny/.

4. Ustalić najmniejszą różnicę /w przypadku rozdziału nieoptymalnego/ dla odbiorców, którzy mają kratki zajęte przydziałem /nawet w przypadku, gdy przydział ten wynosi zero według najniższego kosztu/ jako najmniejszą z różnic kosztu wiersza dodatniego i kosztu kratki z przydziałem w wierszu ujemnym /przez wiersz dodatni lub ujemny rozumiemy wiersz odpowiednio z liczbą zaopatrzoną znakiem plus lub minus po prawej stronie tablicy.Wiersz z zerem też uważamy za dodatni/.

5. Zwiększyć jednostkowe koszty transportu we wszystkich wierszach ujemnych o ustaloną najmniejszą różnicę, tworząc nową tabelę /tablica 9b/ i proces obliczeniowy rozpocząć od początku /w przypadku nieosiągnięcia rozwiązania optymalnego/.

Tablica 9b

B_j / A_i	30	40	30	60	20	
70	6 30	4 10	5	5	2 20	10+
60	9	4 30	2 30	3	6	0
50	6 0	6	7	2 50	5	10-
				1		

Tablica 9c

A_i \ B_j	30	40	30	60	20	
70	6 30	4 20	5	5	2 20	0
60	9	4 20	3 30	3 10	6	0
50	7	7	8	3 50	6	0

Stosując algorytm skończoną ilość razy otrzymujemy rozdział optymalny /tabl. 9b-9c/. Tablica 9d jest już zestawieniem dokonanego rozdziału optymalnego /tabl. 9c/z kosztami jednostkowymi macierzy kosztów c.

Tablica 9d

A_i \ B_j	30	40	30	60	20
70	6 30	4 20	5	5	2 20
60	8	3 20	2 30	2 10	5
50	5	5	6	1 50	4

Z tablicy 9d możemy podliczyć sumaryczny /minimalny/ koszt przewozu w naszym zadaniu jako sumę iloczynów liczby jednostek przewożonego towaru z A_i do B_j /$i=1,2,3$; $j=1,2,3,4,5$/ przez ich koszt jednostkowy.

$S_{min} = 6.30+4.20+3.20+2.30+2.10+1.50+2.20 = 490$ tys. zł.

Na zakończenie omawiania algorytmu zauważmy, że zgodnie z twierdzeniem 4, elementów znaczących x_{ij} w kratkach tablicy 9d jest 7 /3+5-1/. Uzyskane rozwiązanie jest więc optymalne, PRZYKŁAD 11. Z 4 baz lotniczych B_i /i=1,2,3,4/ planuje się dokonać nalotu na 3 cele c_j /j=1,2,3/. Liczba samolotowylotów z każdej bazy - 150. Dzienne zapotrzebowanie nalotów na każdy cel wynosi 200 /liczba samolotów/. Ilość ton bomb, jaką może przewieść każdy samolot z określonej bazy do określonego celu jest dana macierzą

$$\begin{bmatrix} 8 & 6 & 5 \\ 6 & 6 & 6 \\ 10 & 8 & 4 \\ 8 & 6 & 4 \end{bmatrix}$$

Zaplanować ilość samolotowylotów z każdej bazy na cel tak, aby zmaksymalizować całkowitą ilość ton bomb zrzucanych na wszystkie 3 cele.

UWAGA 11. Aby zmaksymalizować funkcję celu w zagadnieniu transportowym należy elementy macierzy kosztów zaopatrzyć w znaki ujemne. W obliczeniach zaś rozpatrywać jako najmniejszy jednostkowy koszt, elementy największe ze znakiem minus.

Tablica 10a

	200	200	200	150+
150	-3	-6	-5	50-
150	-6	-6	$\underline{-6}$ 150	250-
150	$\underline{-10}$ 150	$\underline{-8}$ 0	-4	
150	-8	-6	-4	150+
	2	2	1	

Tablica 10b

	200	200	200	
150	-8	-6	$\underline{-5}$ 50	100+
150	-5	-5	$\underline{-5}$ 150	0
150	$\underline{-9}$ 150	$\underline{-7}$ 0	-3	250-
150	-8	-6	-4	150+
	1	1		

Tablica 10c

	200	200	200	
150	-8 100	-6	-2 50	0
150	-5	-5	-2 150	0
150	-8 100	-6 50	-2	0
150	-8	-6 150	-4	0

Tablice10a-10c ilustrują tok rozwiązania zadania w oparciu o poznany algorytm z uwzględnieniem uwagi 11. Zestawiając tablicę 10c z macierzą kosztów otrzymamy szukaną wartość funkcji celu

S_{max}=8.100+5.50+6.150+10.100+8.50+6.150 = 4250 ton

UWAGA 12. Zagadnienie transportowe daje się rozwiązać przy pomocy poznanego algorytmu również i wtedy gdy zasoby nie są równe potrzebom, mianowicie w przypadku, gdy

a/ $\sum_{i=1}^{m} a_i > \sum_{j=1}^{n} b_j$ /zasoby są większe od potrzeb/ wprowadza się dodatkowego /fikcyjnego/ odbiorcę o zapotrzebowaniu $\sum a_i - \sum b_j$ i kosztach jednostkowych równych zeru;

b/ $\sum_{i=1}^{m} a_i < \sum_{j=1}^{n} b_j$ /zasoby są mniejsze od potrzeb/ wprowadza się dodatkowego /fikcyjnego/ dostawcę o możliwościach $\sum b_j - \sum a_i$ i kosztach jednostkowych też równych zeru.

W pierwszym przypadku algorytm wskaże, u którego lub których dostawców najkorzystniej przechować nadwyżki w zasobach, a w drugim przypadku, któremu lub którym odbiorcom nie dowieźć w danych warunkach.

Algorytm przybliżeń Vogla /algorytm VAM/

Treść tego algorytmu poznamy, rozwiązując

PRZYKŁAD 12. Z trzech składów amunicji każdy o możliwościach odpowiednio 80,60 i 100 jo należy zaopatrzyć pięć dywizyjnych punktów o zapotrzebowaniu odpowiednio 20,70,30,60 i 40 jo. Zakładając, że jeden samolot przewozi jednorazowo 1 jo, zaplanować zaopatrzenie tak, aby sumaryczne zużycie paliwa było najmniejsze. Zużycie paliwa na jeden rejs /w jednostkach paliwa/ dla każdego samolotu podaje macierz

$$\begin{bmatrix} 2 & 15 & 6 & 20 & 8 \\ 8 & 10 & 3 & 18 & 1 \\ 1 & 7 & 12 & 13 & 18 \end{bmatrix}$$

Dane zadania zapisane są w tablicy 11.

Tablica 11

		0	50	0	0 30	0	
	220 / 240	~~20~~	~~70~~	~~30~~	~~60~~	~~40~~	
$\boxed{20}$ ~~50~~	~~80~~	2 x	15 x	6 30	20 30	8 x	4 4 $\underline{9}$ 5 5
0 ~~20~~	~~60~~	8 x	10 20	3 x	18 x	1 40	2 5 7 $\underline{8}$
0 ~~30~~ ~~80~~	~~100~~	1 20	7 50	12 x	13 30	18 x	6 $\underline{6}$ 5 6 6
		1 1	3 3 3 3 $\underline{8}$	3 3 3	5 5 5 5 7 $\underline{7}$	$\underline{7}$	

Treść algorytmu VAM:

1. W każdym wierszu i kolumnie wybrać najmniejszy i następny co do wielkości koszt jednostkowy /element macierzy/, odjąć

te wielkości od siebie, a różnice zapisać pod kolumnami i obok wierszy z prawej strony /wybór można rozpocząć zarówno od kolumn jak i wierszy/.

2. Z określonych w punkcie 1 różnic wybrać największą i podkreślić /w przypadku gdy jest więcej takich elementów niż jeden wybrać ten, w kolumnie lub wierszu, którego jest najmniejszy koszt jednostkowy, zaś przy równych kosztach dowolny z największych/.
3. W kolumnie lub wierszu odpowiadającym największej różnicy wybrać najmniejszy koszt jednostkowy i wprowadzić do tej kratki mniejszą z dwóch liczb "potrzeb" i "możliwości".
4. W wierszu lub kolumnie odpowiadającej najmniejszej z liczb wybranych w punkcie 3 wykreślamy pozostałe kratki nieobciążone, a różnice między "potrzebami" /"możliwościami"/, a wielkością wpisaną do kratki zapisujemy nad /obok/, skreślając poprzednie.
5. Postępowanie powtarzamy od początku tak długo, uwzględniając w każdym następnym kroku nowe "potrzeby" i "możliwości" oraz rozpatrując te kratki, które nie są zajęte lub skreślone, dopóki nie zostaną skreślone lub zajęte wszystkie kratki tablicy.

Tablica 11 wraz z rachunkami dookoła ilustruje kolejne kroki algorytmu VAM. Sumaryczny minimalny koszt również odczytujemy z tej tablicy.

$S_{min} = 6.30+20.30+10.20+1.40+1.20+7.50+13.30 = 1780$ j.pal.

UWAGA 13. Metoda przybliżeń Vogla nie zawsze optymalizuje, ale wówczas daje wynik quasi optymalny. W przypadku zaś niespełniania warunku /16/ ograniczeń zagadnienia programowania liniowego nie ma potrzeby wprowadzania fikcyjnego odbiorcy lub dostawcy.

Rozdział 4

ZADANIA I PRZYKŁADY

4.1. Zadania i przykłady metody graficznej

1. Dla potrzeb obrony plot produkuje się samoloty myśliwskie i rakiety plot. Moc produkcyjną niektórych działów zakładu przedstawia tabelka. Z danych statystycznych wynika, że na każde 1000 myśliwców przypada zniszczonych średnio 300 samolotów npla, a na 1000 rak. - 400 sam. Zaplanować tak produkcję samolotów i rakiet, aby środki te użyte w walce zniszczyły maksymalną liczbę samolotów nieprzyjaciela.

Działy zakł.	Rodzaj produkcji	
	sam.	rakiety
Obróbki mech.	20	40
Montaż siln.	32	16
Montaż sam.	20	-
Montaż rak.	-	15

Odp. F_{max} /16,8/ = 8000 środków.

2. Na osłonie obiektu stoją dwa typy rakiet A i B przeznaczone odpowiednio do niszczenia celów na małych i dużych wysokościach. Koszt jednej rakiety, prawdopodobieństwo rażenia celu oraz alternatywne możliwości lotnictwa przeciwnika wyrażone w ilości ataków na obiekt /albo 100 na małych, albo 150 na średnich albo 100 na dużych/ podane są w tabeli,

Typ rakiety	Prawdop. rażenia			Koszt rak.
	małe	średnie	duże	
A	0,75	0,5	0,25	25
B	0,25	0,5	0,75	50
Możliwości przeciwnika	100	150	100	

W zadaniu trzeba wyznaczyć optymalną liczbę rakiet obu typów, zapewniających skuteczną obronę plot obiektu przy minimum wydatków na zakup rakiet.

Odp. F_{min} /250,50/ = 8750 j.man.

3. Zakład remontowy przy wykonywaniu dwóch rodzajów napraw /średnie i główne/ wykorzystuje 4 różne urządzenia mechaniczne w ilości podanej w tabeli

Typ urządzenia mech.	Ilość urządzeń mech.		Łącznie urz. mech.
	rem. śred.	rem. gł.	
A	2	2	12
B	1	2	8
C	4	0	16
D	0	4	12

Dochód osiągany z tytułu napraw średnich wynosi 3 j.mon., z tytułu zaś napraw głównych - 2 j.mon. Zaplanować tak ilość napraw obu typów, aby łączny zysk z tego tytułu zakładu był maksymalny. Odp. F_{max} /4,2/ = 14 j.mon. zysku.

4. Określić minimum funkcji celu $F = 222 - 2x_1 - x_2$ dla układu warunków ograniczających

$$\left.\begin{array}{l} x_1+x_2 \leqslant 6 \\ x_1+4x_2 \geqslant 8 \\ x_1 \leqslant 5,\ x_2 \leqslant 4 \end{array}\right\}$$

Odp. F_{min} /5,1/ = 211.

5. Określić maksimum funkcji celu $F = 41+2x_5+15x_6$, jeżeli warunki ograniczające są następujące

$$\left.\begin{aligned} x_1 \quad - 2x_5 + 3x_6 &= 9 \\ x_2 \quad + x_5 + 2x_6 &= 13 \\ x_3 \quad + 3x_5 - x_6 &= 18 \end{aligned}\right\}$$

Odp. F_{max} /7,3/ = 100

6. Dane są warunki ograniczające zadania liniowego

$$\left.\begin{aligned} x_1 + x_2 &\leqslant 9 \\ -x_1 + x_2 &\leqslant 7 \\ x_1 - x_2 &\leqslant 3 \end{aligned}\right\}$$

Znaleźć najmniejszą wartość funkcji celu $F = 2x_1 - 2x_2$.

Odp. F_{min} /0,7/ = F_{min} /1,8/ = - 14 /na całym odcinku/

4.2. Zadania i przykłady do metody simpleks

1. Zadanie o wykorzystaniu mocy urządzeń. Załóżmy, że nakazano zakładowi zaplanować produkcję dwóch rodzajów wyrobów /W_1,W_2/ w określonej ilości i czasie. Przy czym ma to się odbyć przy pomocy dwóch maszyn typu A i B o różnej wydajności /dane zadania patrz tabela/.

Typy maszyn	Moc maszyn w jedn. czasu		Koszt jedn. produkcji		Ogółem wyrobów		Czas łączny produkcji
	W_1	W_2	W_1	W_2	W_1	W_2	
A	6	24	4	47	30	96	6
B	13	13	13	26			

Należy zestawić optymalny plan produkcji, tzn. należy określić ile czasu powinny być zajęte maszyny przy produkcji wyrobów. Przy tym koszt całej produkcji ma być najniższy, nie przekroczony nakazany czas produkcji i osiągnięta planowana produkcja poszczególnych wyrobów.

Odp. F_{min} = 211 j.czas.

2. Przy produkcji stołów i szaf używa się dwóch rodzajów drewna, którego ilość /w m^3/ potrzebna do produkcji jednego mebla podaje tabela. Tamże podany jest zysk /w zł./ osiągany za pojedynczy wyrób oraz ilość drewna jaką dysponuje warsztat /w m^3/.

Rodzaj wyrobu	Rodzaj drewna		Zysk jednost. warszt.	Zasoby drewna	
	I rodz.	II rodz.		I rodz.	II rodz.
stoły	0,15	0,2	120	60	40
szafy	0,2	0,1	150		

Określić ile trzeba wyprodukować poszczególnych mebli, aby ogólny zysk warsztatu był maksymalny.

Odp. stołów - 80, szaf - 240 i F_{max} = 45 600 zł.

3. Oddział fabryczny wytwarza 3 rodzaje wyrobów, których produkcja planowa oraz zasoby dobowe sprzętu wytwórczego /obrabiarki, maszyny/ surowe /metale/ i energia elektr. na jednostkę każdego rodzaju wyrobu podaje tabela. Zadanie polega na tym, aby określić jakiego rodzaju i w jakiej ilości należy wytwarzać wyroby, chcąc osiągnąć maksymalną wartość zysku, wykonywanych ponad plan wyrobów.

Zasoby		Zużycie jedn.zasobów		
Rodzaje	Ilość	I rodz.	II rodz.	III rodz.
Sprzęt	780	2	3	4
Surowce	850	1	4	5
En.elektr.	790	3	4	2
Produkcja dobowa		90	70	60
Koszt jednost.wyrobu		8	7	6

Odp. 22,5 jedn.wyr. I rodz. i 26 25 - III rodz., F_{max}=337,5 zł.

4. Sporządzanie optymalnej racji karmowej przy produkcji tucznika. Ustalono w tym celu, że racja karmowa każdego tucznika powinna zawierać co najmniej pewne ilości jednostek składnika odżywczego określonego rodzaju. Dane zadania podane w tabeli.

Karma		Ilość składnika odżywcz.na jedn.karmy		
Rodzaj	Koszt jedn. w zł.	skł. A	skł. B	skł. C
I	2	1	1	3
II	3	2	2	4
III	2,5	3	1,5	2
Liczba jedn.skł. w racji karmowej		6	8	12

Należy znaleźć najtańszą rację karmową, spełniającą założone warunki. Odp. Dzienna racja karmowa: 3,3 j.wag. karmy II i 0,9 j.wag. - III, w której zawiera się 6 j.skł. A, 8_j - B i skł. C o 3,1 j. ponad normę. Koszt najtańszej racji w tym wypadku wynosi ok. 12,2 zł.

5. Zmaksymalizować funkcję celu $F = 3x_1-4x_2+x_3+x_4 - 28$ dla warunków ograniczających.

$$\left.\begin{aligned} -2x_1+x_2+x_3 &= 4 \\ 3x_1-8x_2+x_4 &= 24 \end{aligned}\right\}$$

Odp. F_{max} /0,4,0,56/ = 12

6. Zmaksymalizować funkcję celu $F = 11x_1+10x_2-90$, przy danych ograniczeniach zagadnienia

$$\left.\begin{aligned} -x_1+x_2 &\leq 5 \\ 3x_1+5x_2 &\leq 60 \\ 2x_1-5x_2 &\leq 20 \end{aligned}\right\}$$

Odp. F_{max} /16, 16/5/ = 113

7. Zminimalizować funkcję celu $F = 100-6x_1-4x_2$ dla warunków ograniczających

$$\left.\begin{array}{l} 3x_1+x_2 \leqslant 18 \\ 2x_1+4x_2 \leqslant 40 \\ 3x_1+2x_2 \leqslant 24 \end{array}\right\}$$

Odp. F_{min} /4,6,0,8,0/ = 52

8. Znaleźć minimum funkcji celu $F = x_1+2x_2-x_3-6x_3+2x_5$ dla warunków ograniczających

$$\left.\begin{array}{rl} x_1-2x_2-2x_3+4x_4-3x_5 & = -2 \\ x_2+x_3+2x_4-x_5 & = 9 \\ x_3+3x_4-2x_5 & = 6 \end{array}\right\}$$

Odp. F_{min} / 0,0,5,7,10/ = - 27

9. Znaleźć minimum funkcji celu $F=-x_1-2x_2-3x_3+x_4$ dla danych następujących ograniczeń

$$\left.\begin{array}{rl} x_1+2x_2+3x_3 & = 15 \\ 2x_1+x_2+5x_3 & = 20 \\ x_1+2x_2+x_3+x_4 & = 10 \end{array}\right\}$$

Odp. F_{min} / 5/2, 35/14, 35/14, 0/ = - 15.

4.3. Zadania i przykłady do metody transportowej

1. Z czterech baz lotnictwa transportowego każda o możliwościach przewozowych: 60,90,50 i 100 ton ładunku, należy przerzucić do pięciu rejonów desantowania o zapotrzebowaniu 50,40, 60,80,70 ton każdy, znajdujących się na jednym kierunku operacyjnym, pewne ilości wojsk sprzętu bojowego i zaopatrzenia materiałowo-technicznego. Koszty jednostkowe transportu wyrażone w ilości samolotów lotnictwa myśliwskiego potrzebnej do osłony przerzutu w przeliczeniu na jedną tonę i podane są w macierzy

$$\begin{bmatrix} 2 & 8 & 4 & 7 & 11 \\ 4 & 6 & 3 & 5 & 9 \\ 3 & 2 & 4 & 3 & 5 \\ 5 & 9 & 5 & 6 & 2 \end{bmatrix}$$

Zminimalizować funkcję celu - liczbę samolotowylotów

Odp. F_{min} = 920 sam.-wylot. mac.rozdz. $\begin{bmatrix} 50 & 0 & 10 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 50 & 40 & 0 \\ 0 & 40 & 0 & 10 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 30 & 70 \end{bmatrix}$

2. Dane są rejony w pasie natarcia armii, w których potrzeba rozmieścić trzy armijne składy amunicyjne o zapasach: 100, 175 i 50 jo. Ze składów tych trzeba będzie zaopatrywać pięć dyw. punktów zaopatrzenia o zapotrzebowaniu: 120,45,70,45 i 45 jo. Zużycie paliwa w przeliczeniu na 1 jo przewożonej amunicji podaje macierz $\begin{bmatrix} 3 & 7 & 11 & 2 & 5 \\ 8 & 4 & 3 & 1 & 7 \\ 2 & 1 & 17 & 4 & 10 \end{bmatrix}$

Numerację armijnych składów oraz dywizyjnych punktów przyjąć w kolejności podanych "możliwości" i "potrzeb".

Określić optymalny plan przewozów ze względu na zużycie paliwa.

Odp. $F_{opt=min}$ = 990 j.pal., mac rodz. $\begin{bmatrix} 0 & 0 & 20 & 35 & 45 \\ 0 & 0 & 50 & 0 & 0 \\ 120 & 45 & 0 & 10 & 0 \end{bmatrix}$

3. Z trzech składów paliwa o zapasach odpowiednio 70,40, 80 ton paliwa należy zaopatrzyć w nie 3 punkty odbioru o potrzebach: 50,40,20 i 40 ton paliwa. Jednostkowy koszt transportu w setkach zł. w przeliczeniu na jedną tonę paliwa podaje macierz $\begin{bmatrix} 6 & 5 & 6 & 3 \\ 4 & 3 & 5 & 3 \\ 5 & 2 & 6 & 2 \end{bmatrix}$ Zaplanować przewóz paliwa tak, aby koszt transportu był najniższy.

Odp. F_{min} = 500 tys., mac rozdz. $\begin{bmatrix} 10 & 0 & 20 & 0 \\ 40 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 40 & 0 & 40 \end{bmatrix}$

4. Zakład produkcyjny otrzymał od 6 różnych kontrahentów zamówienie na dostawę wyrobów tego samego typu w określonym czasie /terminie/ w ilości 40,80,50,80,70 i 80 sztuk. Poszczególne sekcje zakładu /cztery sekcje/ mogą wyprodukować i dostarczyć w żądanym terminie odpowiednio 90,120,60 i 150 sztuk zgłaszanych wyrobów. Zysk jednostkowy tej transakcji w setkach złotych podaje macierz

$$\begin{bmatrix} 2 & 8 & 11 & 4 & 7 & 9 \\ 4 & 6 & 9 & 6 & 5 & 7 \\ 3 & 2 & 5 & 1 & 3 & 10 \\ 5 & 9 & 2 & 5 & 6 & 3 \end{bmatrix}$$

Zaplanować realizację transakcji tak, aby ogólny zysk zakładu był najwyższy.

Odp. F_{max} = 315000 zł., mac. rozdz.

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & 50 & 0 & 20 & 20 \\ 20 & 0 & 0 & 80 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 60 \\ 20 & 80 & 0 & 0 & 50 & 0 \end{bmatrix}$$

5. Należy dostarczyć do czterech jednostek amunicję w ilościach kolejno: 30,60,20 i 10 jo znajdującą się w czterech składach w ilości, kolejno: 40,20,30 i 30 jo. Transport zaplanować tak, aby łączna długość przejechanych kilometrów była najkrótsza. Poniższa macierz podaje odległości poszczególnych jednostek od poszczególnych składów /w km/

$$\begin{bmatrix} 2 & 5 & 9 & 5 \\ 8 & 3 & 5 & 8 \\ 7 & 3 & 1 & 4 \\ 5 & 9 & 7 & 2 \end{bmatrix}$$

Odp. Macierz rozdziału

$$\begin{bmatrix} 10 & 30 & 0 & 0 \\ 0 & 20 & 0 & 0 \\ 0 & 10 & 20 & 0 \\ 20 & 0 & 0 & 10 \end{bmatrix}$$

6. Zmaksymalizować wartość oczekiwaną ilości strąconych celów przez środki obrony powietrznej kraju. Warunki zadania - patrz tablica

Środki OPK		Grupy celów		
Rodzaje	ilość	20	10	10
Rakiety	10	0,7	0,6	0,5
Samoloty	20	0,4	0,5	0,6
Działa	30	0,01	0,03	0,02

gdzie wartości ułamkowe, wypełniające wnętrze tablicy, oznaczają prawdopodobieństwa strącenia przez dany środek OPK celu w zależności od warunków nalotu i rodzaju celu.

Odp. E = 17,3 sam,. mac. podziału $\begin{bmatrix} 10 & 0 & 0 \\ 10 & 0 & 10 \\ 0 & 10 & 0 \end{bmatrix}$.

LITERATURA

1. Saul GASS, Programowanie liniowe

2. M.J. ROMAKIN, Elementy algebry liniowej i programowania liniowego.

3. A.S. SOŁODOWNIKOW, Wstęp do algebry liniowej i programowania liniowego.

4. F.I. KARPELEWICZ, Elementy linijnoj algebry i liniejnogo programirowania.

5. I.L. KALICHMAN. Liniejnaja algebra i programirowanie.

6. M.N. WISŁAWSKI, Liniejnaja algebra i liniejnoje programirowanie.

7. U. ANUREJEW, Primienienije matematyczeskich metodow w wojennom diele.

Wykonano w 200 egz.
Egz.nr 1-200 bibl.jawna
Wyk. ppłk Czarnocki
Druk. OH, dn. 14.4.72r.

Nr ks. 342/622/WW

Druk ASG-OXV-5336 Zam.1982 z dn.15.4.72r.
druk ukończ. 25.4.72r.