AKADEMIA SZTABU GENERALNEGO
im. gen. broni Karola Świerczewskiego

Egz. Nr 39

INFORMATOR
LOTNICZO-TECHNICZNY
cz. II

REMBERTÓW 1965

Druk. ASG–O-XV–2942

AKADEMIA SZTABU GENERALNEGO
im. gen. broni Karola Świerczewskiego

Egz. Nr 39

INFORMATOR
LOTNICZO-TECHNICZNY
cz. II

REMBERTÓW 1965

Druk. ASG-O-XV-2942

A K A D E M I A   S Z T A B U   G E N E R A L N E G O
im.gen.broni K. Świerczewskiego

Egz.nr... 39

I N F O R M A T O R
LOTNICZO-TECHNICZNY
Cz. II.

REMBERTÓW 1965 r.

S P I S T R E Ś C I

Matematyka

Przyjęte oznaczenia z matematyki

$=$ - równa się

$\neq$ - nie równa się

$\approx$ - równa się w przybliżeniu

$<$ - mniejsze

$>$ - większe

$\leqslant$ - mniejsze lub równe

$\geqslant$ - większe lub równe

$\sqrt{\ }$ - pierwiastek 2-go stopnia

$\sqrt[n]{\ }$ - pierwiastek n-tego stopnia

lg - logarytm dziesiętny /podstawą logarytmu jest 10/

ln - logarytm naturalny /podstawą logarytmu jest liczba e = 2,718.../

sin - sinus

cos - cosinus

tg - tangens

ctg - kotangens

const - wartość stała

π - stosunek obwodu koła do jego średnicy = 3,14159 ....

e - podstawa logarytmu naturalnego = 2,718 ....

lim - granica

$\rightarrow$ - zdąża do ....

∞ - nieskończoność

Σ - suma

$f(), \varphi()$ - oznaczenie funkcji np. y = f/x/, u = φ/x,y,z/

Δ - przyrost

d - różniczka

$'$, $''$ - oznaczenie pochodnej, kolejno: pierwsza pochodna, druga pochodna

$\int$ - całka nieokreślona

$\int_a^b$ - całka określona /dolna granica a, górna granica b/

$\iint$ - całka podwójna

! - silnia /np. 5! = 1, 2 . 3 . 4 . 5 = 120/

$\bar{x}$ - średnia arytmetyczna

G - średnia geometryczna

σ - odchylenie średnie

P/A/ - prawdopodobieństwo zajścia zdarzenia A

P/ /X,Y/CD/ - prawdopodobieństwo trafienia punktu o współrzędnych /X,Y/ w obszar D

Alfabet grecki

Αα - alfa
Ββ - beta
Γγ - gamma
Δδ - delta
Εε - epsilon
Ζζ - dzeta
Ηη - eta
Qϑ - teta
Iι - jota
Kϰ - kappa
Λλ - lambda
Mμ - mi

Nν - ni
Ξξ - ksi
Oo - omikron
Ππ - pi
Pρ - ro
Σσ - sigma
Tτ - tau
Φφ - fi
Xχ - hi
Υυ - ipsilon
Ψψ - psi
Ωω - omega

Potęgi, pierwiastki, odwrotności, logarytmy

n	n^2	n^3	$\sqrt{n}$	$\sqrt[3]{n}$	$\frac{1}{n}$	lg n
0,01	0,0001	0,000 001	0.1000	0.2154	100 00000	$\bar{2}$.00000
0,02	0,0004	0,000 008	0,1414	0.2714	50,00000	$\bar{2}$,30103
0,04	0.0016	0.000 064	0.2000	0.3420	25,00000	$\bar{2}$.60206
0,05	0,0025	0,000 125	0.2236	0,3684	20,00000	$\bar{2}$.69897
0,08	0,0064	0,000 512	0,2828	0.4309	12,50000	$\bar{2}$.90309
0,1	0,0100	0,001 000	0.3162	0.4642	10,00000	$\bar{1}$.00000
0,2	0,0400	0,008 000	0.4472	0,5848	5.00000	$\bar{1}$,30103
0,25	0,0625	0,015 625	0,5000	0.6300	4.00000	$\bar{1}$.39794
0,3	0,0900	0,027 000	0,5477	0.6694	3.33333	$\bar{1}$,47712
0.4	0,1600	0,064 000	0,6325	0.7368	2.50000	$\bar{1}$.60206
0.5	0.2500	0,125 000	0,7071	0.7937	2,00000	$\bar{1}$,69897
0.6	0,3600	0 216 000	0,7746	0,8434	1,66667	$\bar{1}$,77815
0,7	0,4900	0,343 000	0,8367	0,8879	1,42857	$\bar{1}$,84510
0,8	0,6400	0,512 000	0,8944	0,9283	1,25000	$\bar{1}$,90309
0.9	0.8100	0,729 000	0,9487	0,9655	1,11111	$\bar{1}$,95424
1,0	1.00	1.000	1,0000	1,0000	1,00000	0,00000
1,1	1,21	1,331	1,0488	1,0323	0,90909	0,04139
1,2	1,44	1,728	1,0954	1,0627	0,83333	0,07918
1,3	1,69	2,197	1,1402	1,0914	0.76923	0.11394
1,4	1,96	2,744	1,1832	1,1187	0.71429	0.14613
1,5	2,25	3,375	1,2247	1,1447	0.66667	0.17609
1,6	2,56	4,096	1,2649	1,1696	0 62500	0.20412
1,7	2,89	4,913	1,3038	1,1935	0,58823	0.23045
1,8	3,24	5,832	1,3416	1,2164	0,55556	0.25527
1,9	3.61	6,859	1,3784	1,2386	0.52632	0.27875
2,0	4 00	8,000	1,4142	1,2599	0.50000	0,30103
2,1	4 41	9,261	1,4491	1,2806	0,47619	0,32222
2,2	4.84	10,648	1,4832	1,3006	0.45455	0,34242
2,3	5,29	12,167	1,5166	1,3200	0.43478	0,36173
2.4	5.76	13,824	1.5492	1,3389	0.41667	0.38021
2,5	6.25	15,625	1.5811	1,3572	0,40000	0.39794
2.6	6,76	17,576	1,6125	1,3751	0.38462	0,41497
2,7	7.29	19.683	1.6432	1,3925	0.37037	0.43136
2,8	7,84	21,952	1,6733	1,4095	0,35714	0,44716
2,9	8.41	24,389	1.7029	1,4260	0,34483	0,46240
3,0	9.00	27,000	1.7321	1.4422	0,33333	0.47712
3.1	9.61	29,791	1.7607	1.4581	0,32258	0.49136
3,2	10.24	32,768	1.7889	1.4736	0.31250	0,50515
3,3	10.89	35.937	1.8166	1.4888	0.30303	0.51851
3.4	11.56	39.304	1,8439	1,5037	0.29412	0.53148
3,5	12 25	42,875	1,8708	1,5183	0,28571	0.54407
3,6	12.96	46,656	1.8974	1,5326	0,27778	0.55630
3,7	13.69	50,653	1,9235	1,5467	0,27027	0,56820
3,8	14.44	54,872	1,9494	1,5605	0,26316	0.57978
3,9	15,21	59,319	1,9748	1,5741	0,25641	0.59106
4,0	16,00	64,000	2,0000	1,5874	0,25000	0,60206
4,1	16,81	68,921	2,0248	1,6005	0,24390	0,61278
4,2	17,64	74,088	2,0494	1,6134	0,23810	0,62325
4,3	18,49	79,507	2,0736	1,6261	0,23256	0,63347
4,4	19,36	85,184	2,0976	1,6386	0,22727	0,64345

n	n^2	n^3	$\sqrt{n}$	$\sqrt[3]{n}$	$\frac{1}{n}$	$\lg n$
4.5	20.25	91,125	2,1213	1,6510	0,22222	0.65321
4.6	21.16	97.336	2.1448	1,6631	0,21739	0,66276
4.7	22.09	103.823	2.1679	1,6751	0,21277	0,67210
4,8	23,04	110.592	2,1909	1,6869	0.20833	0,68124
4,9	24,01	117,649	2,2136	1,6985	0.20408	0,69020
5,0	25.00	125.000	2.2361	1,7100	0.20000	0.69897
5,1	26,01	132,651	2,2583	1,7213	0,19608	0,70757
5,2	27,04	140,608	2,2804	1,7325	0.19231	0,71600
5,3	28,09	148,877	2.3022	1,7435	0,18868	0,72428
5,4	29,16	157,464	2,3238	1,7544	0,18519	0,73239
5,5	30.25	166,375	2,3452	1.7652	0.18182	0,74036
5,6	31,36	175,616	2,3664	1,7758	0,17857	0,74819
5.7	32.49	185,193	2.3875	1,7863	0.17544	0,75587
5,8	33,64	195,112	2,4083	1,7967	0,17241	0.76343
5,9	34,81	205,379	2,4290	1,8070	0,16949	0,77085
6,0	36.00	216,000	2,4495	1,8171	0,16667	0.77815
6.1	37,21	226,981	2,4698	1,8272	0.16393	0,78533
6,2	38,44	238,328	2,4900	1.8371	0,16129	0.79239
6,3	39.69	250.047	2,5100	1,8469	0.15873	0,79934
6,4	40,96	262,144	2,5298	1,8566	0,15625	0,80618
6,5	42,25	274,625	2,5495	1,8663	0,15385	0,81291
6,6	43,56	287,496	2,5690	1.8758	0,15152	0,81954
6,7	44,89	300,763	2,5884	1,8852	0,14925	0,82607
6,8	46,24	314,432	2,6077	1,8945	0,14706	0,83251
6,9	47,61	328,509	2,6268	1,9038	0,14493	0,83885
7,0	49,00	343.000	2,6458	1,9129	0,14286	0,84510
7,1	50,41	357,911	2,6646	1,9220	0,14085	0,85126
7,2	51,84	373,248	2,6833	1,9310	0,13889	0,85733
7,3	53,29	389,017	2,7019	1,9399	0,13699	0,86332
7,4	54,76	405,224	2,7203	1,9487	0,13514	0,86923
7,5	56,25	421,875	2,7386	1,9574	0,13333	0,87506
7,6	57,76	438,976	2,7568	1,9661	0,13158	0,88081
7,7	59,29	456,533	2,7749	1,9747	0,12987	0,88649
7,8	60,84	474,552	2,7928	1,9832	0,12821	0,89209
7,9	62,41	493,039	2,8107	1,9916	0,12658	0,89763
8,0	64,00	512,000	2,8284	2,0000	0,12500	0,90309
8,1	65,61	531,441	2,8461	2,0083	0,12346	0,90849
8,2	67,24	551,368	2,8636	2,0165	0,12195	0,91381
8,3	68,89	571,787	2,8810	2,0247	0,12048	0,91908
8,4	70,56	592,704	2,8983	2,0328	0,11905	0,92428
8,5	72,25	614,125	2,9155	2,0408	0,11765	0,92942
8,6	73,96	636,056	2,9326	2,0488	0,11628	0,93450
8,7	75,69	658,503	2,9496	2,0567	0,11494	0,93952
8,8	77,44	681,472	2,9665	2,0646	0,11364	0,94448
8,9	79,21	704,969	2,9833	2,0724	0,11236	0,94939
9,0	81,00	729,000	3,0000	2,0801	0,11111	0,95424
9,1	82,81	753,571	3,0166	2,0878	0,10989	0,95904
9,2	84,64	778,688	3,0332	2,0954	0,10870	0,96379
9,5	90,25	857,375	3,0822	2,1179	0,10526	0,97772
9,8	96,04	941,192	3,1305	2,1400	0,10204	0,99123

10 ÷ 49

n	n^2	n^3	$\sqrt{n}$	$\sqrt[3]{n}$	$\frac{1}{n} \cdot 10$	$\lg n$
10	100,00	1000,0	3,1623	2,1544	1,00000	1,00000
10,5	110,25	1157,6	3,2404	2,1898	0,95238	1,02119
11	121,00	1331,0	3,3166	2,2239	0,90909	1,04139
11,5	132,25	1520,9	3,3912	2,2572	0,86957	1,06070
12	144,00	1728,0	3,4641	2,2894	0,83333	1,07918
12,5	156,25	1953,1	3,5355	2,3208	0,80000	1,09691
13	169,00	2197,0	3,6056	2,3513	0,76923	1,11394
13,5	182,25	2460,4	3,6742	2,3811	0,74074	1,13033
14	196,00	2744,0	3,7417	2,4101	0,71429	1,14613
14,5	210,25	3048,6	3,8079	2,4385	0,68966	1,16137
15	225,00	3375,0	3,8730	2,4662	0,66667	1,17609
15,5	240,25	3723,9	3,9370	2,4933	0,64516	1,19033
16	256,00	4096,0	4,0000	2,5198	0,62500	1,20412
16,5	272,25	4492,1	4,0620	2,5458	0,60606	1,21748
17	289,00	4913,0	4,1231	2,5713	0,58824	1,23045
17,5	306,25	5359,4	4,1833	2,5962	0,57143	1,24304
18	324,00	5832,0	[illegible]	2,6207	0,55556	1,25527
18,5	342,25	6331,6	[illegible]	2,6448	0,54054	1,26717
19	361,00	6859,0	4,3589	2,6684	0,52632	1,27875
19,5	380,25	7414,9	4,4159	2,6916	0,51282	1,29003
20	400	8000	4,4721	2,7144	0,50000	1,30103
21	441	9261	4,5826	2,7589	0,47619	1,32222
22	484	10648	4,6904	2,8020	0,45455	1,34242
23	529	12167	4,7958	2,8439	0,43478	1,36173
24	576	13824	4,8990	2,8845	0,41667	1,38021
25	625	15625	5,0000	2,9240	0,40000	1,39794
26	676	17576	5,0990	2,9625	0,38462	1,41497
27	729	19683	5,1962	3,0000	0,37037	1,43136
28	784	21952	5,2915	3,0366	0,35714	1,44716
29	841	24389	5,3852	3,0723	0,34483	1,46240
30	900	27000	5,4772	3,1072	0,33333	1,47712
31	961	29791	5,5678	3,1414	0,32258	1,49136
32	1024	32768	5,6569	3,1748	0,31250	1,50515
33	1089	35937	5,7446	3,2075	0,30303	1,51851
34	1156	39304	5,8310	3,2396	0,29412	1,53148
35	1225	42875	5,9161	3,2711	0,28571	1,54407
36	1296	46656	6,0000	3,3019	0,27778	1,55630
37	1369	50653	6,0828	3,3322	0,27027	1,56820
38	1444	54872	6,1644	3,3620	0,26316	1,57978
39	1521	59319	6,2450	3,3912	0,25641	1,59106
40	1600	64000	6,3246	3,4200	0,25000	1,60206
41	1681	68921	6,4031	3,4482	0,24390	1,61278
42	1764	74088	6,4807	3,4760	0,23810	1,62325
43	1849	79507	6,5574	3,5034	0,23256	1,63347
44	1936	85184	6,6332	3,5303	0,22727	1,64345
45	2025	91125	6,7082	3,5569	0,22222	1,65321
46	2116	97336	6,7823	3,5830	0,21739	1,66276
47	2209	103823	6,8557	3,6088	0,21277	1,67210
48	2304	110592	6,9282	3,6342	0,20833	1,68124
49	2401	117649	7,0000	3,6593	0,20408	1,69020

n	n^2	n^3	$\sqrt{n}$	$\sqrt[3]{n}$	$\frac{1}{n}\cdot 10$	$\lg n$
50	2500	125000	7,0711	3,6840	0,20000	1,69897
51	2601	132651	7,1414	3,7084	0,19608	1,70757
52	2704	140608	7,2111	3,7325	0,19231	1,71600
53	2809	148877	7,2801	3,7563	0,18868	1,72428
54	2916	157464	7,3485	3,7798	0,18519	1,73239
55	3025	166375	7,4162	3,8030	0,18182	1,74036
56	3136	175616	7,4833	3,8259	0,17857	1,74819
57	3249	185193	7,5498	3,8485	0,17544	1,75587
58	3364	195112	7,6158	3,8709	0,17241	1,76343
59	3481	205379	7,6811	3,8930	0,16949	1,77085
60	3600	216000	7,7460	3,9149	0,16667	1,77815
61	3721	226981	7,8102	3,9365	0,16393	1,78533
62	3844	238328	7,8740	3,9579	0,16129	1,79239
63	3969	250047	7,9373	3,9791	0,15873	1,79934
64	4096	262144	8,0000	4,0000	0,15625	1,80618
65	4225	274625	8,0623	4,0207	0,15385	1,81291
66	4356	287496	8,1240	4,0412	0,15152	1,81954
67	4489	300763	8,1854	4,0615	0,14925	1,82607
68	4624	314432	8,2462	4,0817	0,14706	1,83251
69	4761	328509	8,3066	4,1016	0,14493	1,83885
70	4900	343000	8,3666	4,1213	0,14286	1,84510
71	5041	357911	8,4261	4,1408	0,14085	1,85126
72	5184	373248	8,4853	4,1602	0,13889	1,85733
73	5329	389017	8,5440	4,1793	0,13699	1,86332
74	5476	405224	8,6023	4,1983	0,13514	1,86923
75	5625	421875	8,6603	4,2172	0,13333	1,87506
76	5776	438976	8,7178	4,2358	0,13158	1,88081
77	5929	456533	8,7750	4,2543	0,12987	1,88649
78	6084	474552	8,8318	4,2727	0,12821	1,89209
79	6241	493039	8,8882	4,2908	0,12658	1,89763
80	6400	512000	8,9443	4,3089	0,12500	1,90309
81	6561	531441	9,0000	4,3267	0,12346	1,90849
82	6724	551368	9,0554	4,3445	0,12195	1,91381
83	6889	571787	9,1104	4,3621	0,12048	1,91908
84	7056	592704	9,1652	4,3795	0,11905	1,92428
85	7225	614125	9,2195	4,3968	0,11765	1,92942
86	7396	636056	9,2736	4,4140	0,11628	1,93450
87	7569	658503	9,3274	4,4310	0,11494	1,93952
88	7744	681472	9,3808	4,4480	0,11364	1,94448
89	7921	704969	9,4340	4,4647	0,11236	1,94939
90	8100	729000	9,4868	4,4814	0,11111	1,95424
91	8281	753571	9,5394	4,4979	0,10989	1,95904
92	8464	778688	9,5917	4,5144	0,10870	1,96379
93	8649	804357	9,6437	4,5307	0,10753	1,96848
94	8836	830584	9,6954	4,5468	0,10638	1,97313
95	9025	857375	9,7468	4,5629	0,10526	1,97772
96	9216	884736	9,7980	4,5789	0,10417	1,98227
97	9409	912673	9,8489	4,5947	0,10309	1,98677
98	9604	941192	9,8995	4,6104	0,10204	1,99123
99	9801	970299	9,9499	4,6261	0,10101	1,99564

100 ÷ 149

n	n^2	n^3	$\sqrt{n}$	$\sqrt[3]{n}$	$\frac{1}{n}\cdot 100$	$\lg n$
100	10000	1000000	10,0000	4,6416	1,00000	2,00000
101	10201	1030301	10,0499	4,6570	0,99010	2,00432
102	10404	1061208	10,0995	4,6723	0,98039	2,00860
103	10609	1092727	10,1489	4,6875	0,97087	2,01284
104	10816	1124864	10,1980	4,7027	0,96154	2,01703
105	11025	1157625	10,2470	4,7177	0,95238	2,02119
106	11236	1191016	10,2956	4,7326	0,94340	2,02531
107	11449	1225043	10,3441	4,7475	0,93458	2,02938
108	11664	1259712	10,3923	4,7622	0,92593	2,03342
109	11881	1295029	10,4403	4,7769	0,91743	2,03743
110	12100	1331000	10,4881	4,7914	0,90909	2,04139
111	12321	1367631	10,5357	4,8059	0,90090	2,04532
112	12544	1404928	10,5830	4,8203	0,89286	2,04922
113	12769	1442897	10,6301	4,8346	0,88496	2,05308
114	12996	1481544	10,6771	4,8488	0,87719	2,05690
115	13225	1520875	10,7238	4,8629	0,86957	2,06070
116	13456	1560896	10,7703	4,8770	0,86207	2,06446
117	13689	1601613	10,8167	4,8910	0,85470	2,06819
118	13924	1643032	10,8628	4,9049	0,84746	2,07188
119	14161	1685159	10,9087	4,9187	0,84034	2,07555
120	14400	1728000	10,9545	4,9324	0,83333	2,07918
121	14641	1771561	11,0000	4,9461	0,82645	2,08279
122	14884	1815848	11,0454	4,9597	0,81967	2,08636
123	15129	1860867	11,0905	4,9732	0,81301	2,08991
124	15376	1906624	11,1355	4,9866	0,80645	2,09342
125	15625	1953125	11,1803	5,0000	0,80000	2,09691
126	15876	2000376	11,2250	5,0133	0,79365	2,10037
127	16129	2048383	11,2694	5,0265	0,78740	2,10380
128	16384	2097152	11,3137	5,0397	0,78125	2,10721
129	16641	2146689	11,3578	5,0528	0,77519	2,11059
130	16900	2197000	11,4018	5,0658	0,76923	2,11394
131	17161	2248091	11,4455	5,0788	0,76336	2,11727
132	17424	2299968	11,4891	5,0916	0,75758	2,12057
133	17689	2352637	11,5326	5,1045	0,75188	2,12385
134	17956	2406104	11,5758	5,1172	0,74627	2,12710
135	18225	2460375	11,6190	5,1299	0,74074	2,13033
136	18496	2515456	11,6619	5,1426	0,73529	2,13354
137	18769	2571353	11,7047	5,1551	0,72993	2,13672
138	19044	2628072	11,7473	5,1676	0,72464	2,13988
139	19321	2685619	11,7898	5,1801	0,71942	2,14301
140	19600	2744000	11,8322	5,1925	0,71429	2,14613
141	19881	2803221	11,8743	5,2048	0,70922	2,14922
142	20164	2863288	11,9164	5,2171	0,70423	2,15229
143	20449	2924207	11,9583	5,2293	0,69930	2,15534
144	20736	2985984	12,0000	5,2415	0,69444	2,15836
145	21025	3048625	12,0416	5,2536	0,68966	2,16137
146	21316	3112136	12,0830	5,2656	0,68493	2,16435
147	21609	3176523	12,1244	5,2776	0,68027	2,16732
148	21904	3241792	12,1655	5,2896	0,67568	2,17026
149	22201	3307949	12,2066	5,3015	0,67114	2,17319

n	n^2	n^3	$\sqrt{n}$	$\sqrt[3]{n}$	$\frac{1}{n}\cdot 100$	lg n
150	22500	3375000	12,2474	5,3133	0,66667	2,17609
151	22801	3442951	12,2882	5,3251	0,66225	2,17898
152	23104	3511808	12,3288	5,3368	0,65790	2,18184
153	23409	3581577	12,3693	5,3485	0,65360	2,18469
154	23716	3652264	12,4097	5,3601	0,64935	2,18752
155	24025	3723875	12,4499	5,3717	0,64516	2,19033
156	24336	3796416	12,4900	5,3832	0,64103	2,19312
157	24649	3869893	12,5300	5,3947	0,63694	2,19590
158	24964	3944312	12,5698	5,4061	0,63291	2,19866
159	25281	4019679	12,6095	5,4175	0,62893	2,20140
160	25600	4096000	12,6491	5,4288	0,62500	2,20412
161	25921	4173281	12,6886	5,4401	0,62112	2,20683
162	26244	4251528	12,7279	5,4514	0,61728	2,20952
163	26569	4330747	12,7671	5,4626	0,61350	2,21219
164	26896	4410944	12,8062	5,4737	0,60976	2,21484
165	27225	4492125	12,8452	5,4848	0,60606	2,21748
166	27556	4574296	12,8841	5,4959	0,60241	2,22011
167	27889	4657463	12,9228	5,5069	0,59880	2,22272
168	28224	4741632	12,9615	5,5178	0,59524	2,22531
169	28561	4826809	13,0000	5,5288	0,59172	2,22789
170	28900	4913000	13,0384	5,5397	0,58824	2,23045
171	29241	5000211	13,0767	5,5505	0,58480	2,23300
172	29584	5088448	13,1149	5,5613	0,58140	2,23553
173	29929	5177717	13,1529	5,5721	0,57804	2,23805
174	30276	5268024	13,1909	5,5828	0,57471	2,24055
175	30625	5359375	13,2288	5,5934	0,57143	2,24304
176	30976	5451776	13,2665	5,6041	0,56818	2,24551
177	31329	5545233	13,3041	5,6147	0,56497	2,24797
178	31684	5639752	13,3417	5,6252	0,56180	2,25042
179	32041	5735339	13,3791	5.6357	0,55866	2,25285
180	32400	5832000	13,4164	5,6462	0.55556	2,25527
181	32761	5929741	13,4536	5,6567	0.55249	2,25768
182	33124	6028568	13,4907	5,6671	0,54945	2,26007
183	33489	6128487	13,5277	5,6774	0,54645	2,26245
184	33856	6229504	13,5647	5,6877	0,54348	2,26482
185	34225	6331625	13,6015	5,6980	0,54054	2,26717
186	34596	6434856	13,6382	5,7083	0,53763	2,26951
187	34969	6539203	13,6748	5.7185	0,53476	2,27184
188	35344	6644672	13,7113	5,7287	0,53192	2,27416
189	35721	6751269	13,7477	5,7388	0,52910	2,27646
190	36100	6859000	13,7840	5,7489	0,52632	2,27875
191	36481	6967871	13,8203	5,7590	0,52356	2,28103
192	36864	7077888	13,8564	5,7690	0,52083	2,28330
193	37249	7189057	13,8924	5,7790	0,51814	2,28556
194	37636	7301384	13,9284	5,7890	0,51546	2,28780
195	38025	7414875	13,9642	5,7989	0,51282	2,29003
196	38416	7529536	14,0000	5,8088	0,51020	2,29226
197	38809	7645373	14,0357	5,8186	0,50761	2,29447
198	39204	7762392	14,0712	5,8285	0,50505	2,29667
199	39601	7880599	14,1067	5,8383	0,50251	2,29885

200 ÷ 249

n	n^2	n^3	$\sqrt{n}$	$\sqrt[3]{n}$	$\frac{1}{n}\cdot 100$	$\lg n$
200	40000	8000000	14,1421	5,8480	0,50000	2,30103
201	40401	8120601	14,1774	5,8578	0,49751	2,30320
202	40804	8242408	14,2127	5,8675	0,49505	2,30535
203	41209	8365427	14,2478	5,8771	0,49261	2,30750
204	41616	8489664	14,2829	5,8868	0,49020	2,30963
205	42025	8615125	14,3178	5,8964	0,48781	2,31175
206	42436	8741816	14,3527	5,9059	0,48544	2,31387
207	42849	8869743	14,3875	5,9155	0,48309	2,31597
208	43264	8998912	14,4222	5,9250	0,48077	2,31806
209	43681	9129329	14,4568	5,9345	0,47847	2,32015
210	44100	9261000	14,4914	5,9439	0,47619	2,32222
211	44521	9393931	14,5258	5,9533	0,47393	2,32428
212	44944	9528128	14,5602	5,9627	0,47170	2,32634
213	45369	9663597	14,5945	5,9721	0,46948	2,32838
214	45796	9800344	14,6287	5,9814	0,46729	2,33041
215	46225	9938375	14,6629	5,9907	0,46512	2,33244
216	46656	10077696	14,6969	6,0000	0,46296	2,33445
217	47089	10218313	14,7309	6,0092	0,46083	2,33646
218	47524	10360232	14,7648	6,0185	0,45872	2,33846
219	47961	10503459	14,7986	6,0277	0,45662	2,34044
220	48400	10648000	14,8324	6,0368	0,45455	2,34242
221	48841	10793861	14,8661	6,0459	0,45249	2,34439
222	49284	10941048	14,8997	6,0550	0,45045	2,34635
223	49729	11089567	14,9332	6,0641	0,44843	2,34830
224	50176	11239424	14,9666	6,0732	0,44643	2,35025
225	50625	11390625	15,0000	6,0822	0,44444	2,35218
226	51076	11543176	15,0333	6,0912	0,44248	2,35411
227	51529	11697083	15,0665	6,1002	0,44053	2,35603
228	51984	11852352	15,0997	6,1091	0,43860	2,35793
229	52441	12008989	15,1327	6,1180	0,43668	2,35984
230	52900	12167000	15,1658	6,1269	0,43478	2,36173
231	53361	12326391	15,1987	6,1358	0,43290	2,36361
232	53824	12487168	15,2315	6,1446	0,43103	2,36549
233	54289	12649337	15,2643	6,1534	0,42919	2,36736
234	54756	12812904	15,2971	6,1622	0,42735	2,36922
235	55225	12977875	15,3297	6,1710	0,42553	2,37107
236	55696	13144256	15,3623	6,1797	0,42373	2,37291
237	56169	13312053	15,3948	6,1885	0,42194	2,37475
238	56644	13481272	15,4272	6,1972	0,42017	2,37658
239	57121	13651919	15,4596	6,2058	0,41841	2,37840
240	57600	13824000	15,4919	6,2145	0,41667	2,38021
241	58081	13997521	15,5242	6,2231	0,41494	2,38202
242	58564	14172488	15,5563	6,2317	0,41322	2,38382
243	59049	14348907	15,5885	6,2403	0,41152	2,38561
244	59536	14526784	15,6205	6,2488	0,40984	2,38739
245	60025	14706125	15,6525	6,2573	0,40816	2,38917
246	60516	14886936	15,6844	6,2658	0,40650	2,39094
247	61009	15069223	15,7162	6,2743	0,40486	2,39270
248	61504	15252992	15,7480	6,2828	0,40323	2,39445
249	62001	15438249	15,7797	6,2912	0,40161	2,39620

n	n^2	n^3	$\sqrt{n}$	$\sqrt[3]{n}$	$\frac{1}{n}\cdot 100$	lg n
250	62500	15625000	15,8114	6,2996	0,40000	2,39794
251	63001	15813251	15,8430	6,3080	0,39841	2,39967
252	63504	16003008	15,8745	6,3164	0,39683	2,40140
253	64009	16194277	15,9060	6,3247	0,39526	2,40312
254	64516	16387064	15,9374	6,3330	0,39370	2,40483
255	65025	16581375	15,9687	6,3413	0,39216	2,40654
256	65536	16777216	16,0000	6,3496	0,39063	2,40824
257	66049	16974593	16,0312	6,3579	0,38911	2,40993
258	66564	17173512	16,0624	6,3661	0,38760	2,41162
259	67081	17373979	16,0935	6,3743	0,38610	2,41330
260	67600	17576000	16,1245	6,3825	0,38462	2,41497
261	68121	17779581	16,1555	6,3907	0,38314	2,41664
262	68644	17984728	16,1864	6,3988	0,38168	2,41830
263	69169	18191447	16,2173	6,4070	0,38023	2,41996
264	69696	18399744	16,2481	6,4151	0,37879	2,42160
265	70225	18609625	16,2788	6,4232	0,37736	2,42325
266	70756	18821096	16,3095	6,4312	0,37594	2,42488
267	71289	19034163	16,3401	6,4393	0,37453	2,42651
268	71824	19248832	16,3707	6,4473	0,37313	2,42813
269	72361	19465109	16,4012	6,4553	0,37175	2,42975
270	72900	19683000	16,4317	6,4633	0,37037	2,43136
271	73441	19902511	16,4621	6,4713	0,36900	2,43297
272	73984	20123648	16,4924	6,4792	0,36765	2,43457
273	74529	20346417	16,5227	6,4872	0,36630	2,43616
274	75076	20570824	16,5529	6,4951	0,36496	2,43775
275	75625	20796875	16,5831	6,5030	0,36364	2,43933
276	76176	21024576	16,6132	6,5108	0,36232	2,44091
277	76729	21253933	16,6433	6,5187	0,36101	2,44248
278	77284	21484952	16,6733	6,5265	0,35971	2,44404
279	77841	21717639	16,7033	6,5343	0,35842	2,44560
280	78400	21952000	16,7332	6,5421	0,35714	2,44716
281	78961	22188041	16,7631	6,5499	0,35587	2,44871
282	79524	22425768	16,7929	6,5577	0,35461	2,45025
283	80089	22665187	16,8226	6,5654	0,35336	2.45179
284	80656	22906304	16,8523	6,5731	0,35211	2,45332
285	81225	23149125	16,8819	6,5808	0,35088	2,45484
286	81796	23393656	16.9115	6,5885	0,34965	2,45637
287	82369	23639903	16,9411	6.5962	0,34843	3,45788
288	82944	23887872	16,9706	6,6039	0,34722	2,45939
289	83521	24137569	17,0000	6,6115	0,34602	2,46090
290	84100	24389000	17,0294	6,6191	0,34483	2,46240
291	84681	24642171	17,0587	6,6267	0,34364	2,46389
292	85264	24897088	17,0880	6,6343	0,34247	2,46538
293	85849	25153757	17,1172	6,6419	0,34130	2,46687
294	86136	25412184	17,1464	6,6494	0,34014	2,46835
295	87025	25672375	17.1756	6,6569	0,33898	2,46982
296	87616	25934336	17,2047	6,6644	0,33784	2,47129
297	88209	26198073	17,2337	6,6719	0,33670	2,47276
298	88804	26463592	17,2627	6.6794	0,33557	2,47422
299	89401	26730899	17,2916	6,6869	0,33445	2,47567

300 ÷ 349

n	n^2	n^3	$\sqrt{n}$	$\sqrt[3]{n}$	$\frac{1}{n}\cdot 100$	lg n
300	90000	27000000	17,3205	6,6943	0,33333	2,47712
301	90601	27270901	17,3494	6,7018	0,33223	2,47857
302	91204	27543608	17,3781	6,7092	0,33113	2,48001
303	91809	27818127	17,4069	6,7166	0,33003	2,48144
304	92416	28094464	17,4356	6,7240	0,32895	2,48287
305	93025	28372625	17,4642	6,7313	0,32787	2,48430
306	93636	28652616	17,4929	6,7387	0,32680	2,48572
307	94249	28934443	17,5214	6,7460	0,32573	2,48714
308	94864	29218112	17,5499	6,7533	0,32468	2,48855
309	95481	29503629	17,5784	6,7606	0,32363	2,48996
310	96100	29791000	17,6068	6,7679	0,32258	2,49136
311	96721	30080231	17,6352	6,7752	0,32154	2,49276
312	97344	30371328	17,6635	6,7824	0,32051	2,49415
313	97969	30664297	17,6918	6,7897	0,31949	2,49554
314	98596	30959144	17,7200	6,7969	0,31847	2,49693
315	99225	31255875	17,7482	6,8041	0,31746	2,49831
316	99856	31554496	17,7764	6,8113	0,31646	2,49969
317	100489	31855013	17,8045	6,8185	0,31546	2,50106
318	101124	32157432	17,8326	6,8256	0,31447	2,50243
319	101761	32461759	17,8606	6,8328	0,31348	2,50379
320	102400	32768000	17,8885	6,8399	0,31250	2,50515
321	103041	33076161	17,9165	6,8470	0,31153	2,50651
322	103684	33386248	17,9444	6,8541	0,31056	2,50786
323	104329	33698267	17,9722	6,8612	0,30960	2,50920
324	104976	34012224	18,0000	6,8683	0,30864	2,51055
325	105625	34328125	18,0278	6,8753	0,30769	2,51188
326	106276	34645976	18,0555	6,8824	0,30675	2,51322
327	106929	34965783	18,0831	6,8894	0,30581	2,51455
328	107584	35287552	18,1108	6,8964	0,30488	2,51587
329	108241	35611289	18,1384	6,9034	0,30395	2,51720
330	108900	35937000	18,1659	6,9104	0,30303	2,51851
331	109561	36264691	18,1934	6,9174	0,30212	2,51983
332	110224	36594368	18,2209	6,9244	0,30121	2,52114
333	110889	36926037	18,2483	6,9313	0,30030	2,52244
334	111556	37259704	18,2757	6,9382	0,29940	2,52375
335	112225	37595375	18,3030	6,9451	0,29851	2,52504
336	112896	37933056	18,3303	6,9521	0,29762	2,52634
337	113569	38272753	18,3576	6,9589	0,29674	2,52763
338	114244	38614472	18,3848	6,9658	0,29586	2,52892
339	114921	38958219	18,4120	6,9727	0,29499	2,53020
340	115600	39304000	18,4391	6,9795	0,29412	2,53148
341	116281	39651821	18,4662	6,9864	0,29326	2,53275
342	116964	40001688	18,4932	6,9932	0,29240	2,53403
343	117649	40353607	18,5203	7,0000	0,29155	2,53529
344	118336	40707584	18,5472	7,0068	0,29070	2,53656
345	119025	41063625	18,5742	7,0136	0,28986	2,53782
346	119716	41421736	18,6011	7,0203	0,28902	2,53908
347	120409	41781923	18,6279	7,0271	0,28818	2,54033
348	121104	42144192	18,6548	7,0338	0,28736	2,54158
349	121801	42508549	18,6815	7,0406	0,28653	2,54283

n	n^2	n^3	$\sqrt{n}$	$\sqrt[3]{n}$	$\frac{1}{n}\cdot 100$	$\lg n$
350	122500	42875000	18,7083	7,0473	0,28571	2,54407
351	123201	43243551	18,7350	7,0540	0,28490	2,54531
352	123904	43614208	18,7617	7,0607	0,28409	2,54654
353	124609	43986977	18,7883	7,0674	0,28329	2,54777
354	125316	44361864	18,8149	7,0740	0,28249	2,54900
355	126025	44738875	18,8414	7,0807	0,28169	2,55023
356	126736	45118016	18,8680	7,0873	0,28090	2,55145
357	127449	45499293	18,8944	7,0940	0,28011	2,55267
358	128164	45882712	18,9209	7,1006	0,27933	2,55388
359	128881	46268279	18,9473	7,1072	0,27855	2,55509
360	129600	46656000	18,9737	7,1138	0,27778	2,55630
361	130321	47045881	19,0000	7,1204	0,27701	2,55751
362	131044	47437928	19,0263	7,1269	0,27624	2,55871
363	131769	47832147	19,0526	7,1335	0,27548	2,55991
364	132496	48228544	19,0788	7,1400	0,27473	2,56110
365	133225	48627125	19,1050	7,1466	0,27397	2,56229
366	133956	49027896	19,1311	7,1531	0,27322	2,56348
367	134689	49430863	19,1572	7,1596	0,27248	2,56467
368	135424	49836032	19,1833	7,1661	0,27174	2,56585
369	136161	50243409	19,2094	7,1726	0,27100	2,56703
370	136900	50653000	19,2354	7,1791	0,27027	2,56820
371	137641	51064811	19,2614	7,1855	0,26954	2,56937
372	138384	51478848	19,2873	7,1920	0,26882	2,57054
373	139129	51895117	19,3132	7,1984	0,26810	2,57171
374	139876	52313624	19,3391	7,2048	0,26738	2,57287
375	140625	52734375	19,3649	7,2112	0,26667	2,57403
376	141376	53157376	19,3907	7,2177	0,26596	2,57519
377	142129	53582633	19,4165	7,2240	0,26525	2,57634
378	142884	54010152	19,4422	7,2304	0,26455	2,57749
379	143641	54439939	19,4679	7,2368	0,26385	2,57864
380	144400	54872000	19,4936	7,2432	0,26316	2,57978
381	145161	55306341	19,5192	7,2495	0,26247	2,58092
382	145924	55742968	19,5448	7,2558	0,26178	2,58206
383	146689	56181887	19,5704	7,2622	0,26110	2,58320
384	147456	56623104	19,5959	7,2685	0,26042	2,58433
385	148225	57066625	19,6214	7,2748	0,25974	2,58546
386	148996	57512456	19,6469	7,2811	0,25907	2,58659
387	149769	57960608	19,6723	7,2874	0,25840	2,58771
388	150544	58411072	19,6977	7,2936	0,25773	2,58883
389	151321	58863869	19,7231	7,2999	0,25707	2,58995
390	152100	59319000	19,7484	7,3061	0,25641	2,59106
391	152881	59776471	19,7737	7,3124	0,25575	2,59218
392	153664	60236288	19,7990	7,3186	0,25510	2,59329
393	154449	60698457	19,8242	7,3248	0,25445	2,59439
394	155236	61162984	19,8494	7,3310	0,25381	2,59550
395	156025	61629875	19,8746	7,3372	0,25317	2,59660
396	156816	62099136	19,8997	7,3434	0,25253	2,59770
397	157609	62570773	19,9249	7,3496	0,25189	2,59879
398	158404	63044792	19,9499	7,3558	0,25126	2,59988
399	159201	63521199	19,9750	7,3619	0,25063	2,60097

400 ÷ 449

n	n^2	n^3	$\sqrt{n}$	$\sqrt[3]{n}$	$\frac{1}{n}\cdot 100$	$\lg n$
400	160000	64000000	20,0000	7,3681	0,25000	2,60206
401	160801	64481201	20,0250	7,3742	0,24938	2,60314
402	161604	64964808	20,0499	7,3803	0,24876	2,60123
403	162409	65450827	20,0749	7,3864	0,24814	2,60531
404	163216	65939264	20,0998	7,3925	0,24753	2,60638
405	164025	66430125	20,1246	7,3986	0,24691	2,60746
406	164836	66923416	20,1494	7,4047	0,24631	2,60853
407	165649	67419143	20,1742	7,4108	0,24570	2,60959
408	166464	67917312	20,1990	7,4169	0,24510	2,61066
409	167281	68417929	20,2237	7,4229	0,24450	2,61172
410	168100	68921000	20,2485	7,4290	0,24390	2,61278
411	168921	69426531	20,2731	7,4350	0,24331	2,61384
412	169744	69934528	20,2978	7,4410	0,24272	2,61490
413	170569	70444997	20,3224	7,4470	0,24213	2,61595
414	171396	70957944	20,3470	7,4530	0,24155	2,61700
415	172225	71473375	20,3715	7,4590	0,24096	2,61805
416	173056	71991296	20,3961	7,4650	0,24039	2,61909
417	173889	72511713	20,4206	7,4710	0,23981	2,62014
418	174724	73034632	20,4450	7,4770	0,23923	2,62118
419	175561	73560059	20,4695	7,4829	0,23866	2,62221
420	176400	74088000	20,4939	7,4889	0,23810	2,62325
421	177241	74618461	20,5183	7,4948	0,23753	2,62428
422	178084	75151448	20,5426	7,5007	0,23697	2,62531
423	178929	75686967	20,5670	7,5067	0,23641	2,62634
424	179776	76225024	20,5913	7,5126	0,23585	2,62737
425	180625	76765625	20,6155	7,5185	0,23529	2,62839
426	181476	77308776	20,6398	7,5244	0,23474	2,62941
427	182329	77854483	20,6640	7,5302	0,23419	2,63043
428	183184	78402752	20,6882	7,5361	0,23365	2,63144
429	184041	78953589	20,7123	7,5420	0,23310	2,53246
430	184900	79507000	20,7364	7,5478	0,23256	2,63347
431	185761	80062991	20,7605	7,5537	0,23202	2,63448
432	186624	80621568	20,7846	7,5595	0,23148	2,63548
433	187489	81182737	20.8087	7,5654	0,23095	2,63649
434	188356	81746504	20,8327	7,5712	0,23041	2,63749
435	189225	82312875	20,8567	7,5770	0,22989	2,63849
436	190096	82881856	20,8806	7,5828	0,22936	2,63949
437	190969	83453453	20,9045	7,5886	0,22883	2,64048
438	191844	84027672	20,9284	7,5944	0,22831	2,64147
439	192721	84604519	20,9523	7,6001	0,22779	2,64246
440	193600	85184000	20,9762	7,6059	0.22727	2,64345
441	194481	85766121	21,0000	7,6117	0,22676	2,64444
442	195364	86350888	21,0238	7,6174	0,22624	2,64542
443	196249	86938307	21,0476	7,6232	0,22573	2,64640
444	197136	87528384	21,0713	7,6289	0,22523	2,64738
445	198025	88121125	21,0950	7,6346	0,22472	2,64836
446	198916	88716536	21,1187	7,6403	0,22422	2,64933
447	199809	89314623	21,1424	7,6460	0,22371	2,65031
448	200704	89915392	21,1660	7,6517	0,22321	2,65128
449	201601	90518849	21,1896	7,6574	0,22272	2,65225

n	n^2	n^3	$\sqrt{n}$	$\sqrt[3]{n}$	$\frac{1}{n}\cdot 100$	$\lg n$
450	202500	91125000	21.2132	7.6631	0.22222	2,65321
451	203401	91733851	21.2368	7,6688	0.22173	2,65418
452	204304	92345408	21,2603	7,6744	0,22124	2,65514
453	205209	92959677	21,2838	7,6801	0.22075	2,65610
454	206116	93576664	21,3073	7,6857	0,22026	2,65706
455	207025	94196375	21,3307	7,6914	0,21978	2,65801
456	207936	94818816	21,3542	7,6970	0,21930	2,65896
457	208849	95443993	21,3776	7,7026	0,21882	2,65992
458	209764	96071912	21,4009	7,7082	0,21834	2,66087
459	210681	96702579	21,4243	7,7138	0,21787	2,66181
460	211600	97336000	21,4476	7,7194	0,21739	2,66276
461	212521	97972181	21,4709	7,7250	0,21692	2,66370
462	213444	98611128	21,4942	7,7306	0,21645	2,66464
463	214369	99252847	21,5174	7,7362	0,21598	2,66558
464	215296	99897344	21,5407	7,7418	0,21552	2,66652
465	216225	100544625	21,5639	7,7473	0,21505	2,66745
466	217156	101194696	21,5870	7,7529	0,21459	2,66839
467	218089	101847563	21,6102	7,7584	0,21413	2,66932
468	219024	102503232	21,6333	7,7639	0,21368	2,67025
469	219961	103161709	21,6564	7,7695	0,21322	2,67117
470	220900	103823000	21,6795	7,7750	0,21277	2,67210
471	221841	104487111	21,7025	7,7805	0,21231	2,67302
472	222784	105154048	21,7256	7,7860	0,21186	2,67394
473	223729	105823817	21,7486	7,7915	0,21142	2,67486
474	224676	106496424	21,7715	7,7970	0,21097	2,67578
475	225625	107171875	21,7945	7,8025	0,21053	2,67669
476	226576	107850176	21,8174	7,8079	0,21008	2,67761
477	227529	108531333	21,8403	7,8134	0,20964	2,67852
478	228484	109215352	21,8632	7,8188	0,20921	2,67943
479	229441	109902239	21,8861	7,8243	0,20877	2,68034
480	230400	110592000	21,9089	7,8297	0,20833	2,68124
481	231361	111284641	21,9317	7,8352	0,20790	2,68215
482	232324	111980168	21,9545	7,8406	0,20747	2.68305
483	233289	112678587	21,9773	7,8460	0,20704	2,68395
484	234256	113379904	22,0000	7,8514	0,20661	2.68485
485	235225	114084125	22.0227	7,8568	0,20619	2,68574
486	236196	114791256	22,0454	7,8622	0,20576	2,68664
487	237169	115501303	22,0681	7,8676	0,20534	2,68753
488	238144	116214272	22,0907	7,8730	0,20492	2,68842
489	239121	116930169	22,1133	7.8784	0,20450	2,68931
490	240100	117649000	22,1359	7,8837	0,20408	2,69020
491	241081	118370771	22,1585	7,8891	0,20367	2,69108
492	242064	119095488	22,1811	7,8944	0,20325	2,69197
493	243049	119823157	22,2036	7,8998	0,20284	2,69285
494	244036	120553784	22,2261	7,9051	0,20243	2,69373
495	245025	121287375	22,2486	7,9105	0,20202	2,69461
496	246016	122023936	22,2711	7,9158	0,20161	2,69548
497	247009	122763473	22,2935	7,9211	0,20121	2,69636
498	248004	123505992	22,3159	7,9264	0,20080	2,69723
499	249001	124251499	22,3383	7,9317	0,20040	2,69810

500 ÷ 549

n	n^2	n^3	$\sqrt{n}$	$\sqrt[3]{n}$	$\frac{1}{n}\cdot 100$	lg n
500	250000	125000000	22,3607	7,9370	0,20000	2,69897
501	251001	125751501	22,3830	7,9423	0,19960	2,69984
502	252004	126506008	22,4054	7,9476	0,19920	2,70070
503	253009	127263527	22,4277	7,9528	0,19881	2,70157
504	254016	128024064	22,4499	7,9581	0,19841	2,70243
505	255025	128787625	22,4722	7,9634	0,19802	2,70329
506	256036	129554216	22,4944	7,9686	0,19763	2,70415
507	257049	130323843	22,5167	7,9739	0,19724	2,70501
508	258064	131096512	22,5389	7,9791	0,19685	2,70586
509	259081	131872229	22,5610	7,9843	0,19646	2,70672
510	260100	132651000	22,5832	7 9896	0,19608	2,70757
511	261121	133432831	22,6053	7,9948	0,19570	2,70842
512	262144	134217728	22,6274	8,0000	0,19531	2,70927
513	263169	135005697	22,6495	8,0052	0,19493	2,71012
514	264196	135796744	22,6716	8,0104	0,19455	2,71096
515	265225	136590875	22,6936	8,0156	0,19418	2,71181
516	266256	137388096	22,7156	8,0208	0,19380	2,71265
517	267289	138188413	22,7376	8,0260	0,19342	2,71349
518	268324	138991832	22,7596	8,0311	0,19305	2,71433
519	269361	139798359	22,7816	8,0363	0,19268	2,71517
520	270400	140608000	22,8035	8,0415	0,19231	2,71600
521	271441	141420761	22,8254	8,0466	0,19194	2,71684
522	272484	142236648	22,8473	8,0517	0,19157	2,71767
523	273529	143055667	22,8692	8,0569	0,19121	2,71850
524	274576	143877824	22,8910	8,0620	0,19084	2,71933
525	275625	144703125	22,9129	8,0671	0,19048	2,72016
526	276676	145531576	22,9347	8,0723	0,19011	2,72099
527	277729	146363183	22,9565	8,0774	0,18975	2,72181
528	278784	147197952	22,9783	8,0825	0,18939	2,72263
529	279841	148035889	23,0000	8,0876	0,18904	2,72346
530	280900	148877000	23,0217	8,0927	0,18868	2,72428
531	281961	149721291	23,0434	8,0978	0,18832	2,72509
532	283024	150568768	23,0651	8,1028	0,18797	2 72591
533	284089	151419437	23,0868	8,1079	0,18762	2,72673
534	285156	152273304	23,1084	8,1130	0,18727	2,72754
535	286225	153130375	23,1301	8,1180	0,18692	2,72835
536	287296	153990656	23,1517	8,1231	0,18657	2,72916
537	288369	154854153	23,1733	8,1281	0,18622	2,72997
538	289444	155720872	23,1948	8,1332	0,18587	2,73078
539	290521	156590819	23,2164	8,1382	0,18553	2,73159
540	291600	157464000	23,2379	8,1433	0,18519	2,73239
541	292681	158340421	23,2594	8,1483	0,18484	2,73320
542	293764	159220088	23,2809	8,1533	0,18450	2,73400
543	294849	160103007	23,3024	8,1583	0,18416	2,73460
544	295936	160989184	23,3238	8,1633	0,18382	2,73560
545	297025	161878625	23,3452	8,1683	0,18349	2,73640
546	298116	162771336	23,3666	8,1733	0,18315	2,73719
547	299209	163667323	23,3880	8,1783	0,18282	2,73799
548	300304	164566592	23,4094	8,1833	0,18248	2,73878
549	301401	165469149	23,4307	8,1882	0,18215	2,73957

n	n^2	n^3	$\sqrt{n}$	$\sqrt[3]{n}$	$\frac{1}{n}\cdot 100$	$\lg n$
550	302500	166375000	23,4521	8,1932	0,18182	2,74036
551	303601	167284151	23,4734	8,1982	0,18149	2,74115
552	304704	168196608	23,4947	8,2031	0,18116	2,74194
553	305809	169112377	23,5160	8,2081	0,18083	2,74273
554	306916	170031464	23,5372	8,2130	0,18051	2,74351
555	308025	170953875	23,5584	8,2180	0,18018	2,74429
556	309136	171879616	23,5797	8,2229	0,17986	2,74507
557	310249	172808693	23,6008	8,2278	0,17953	2,74586
558	311364	173741112	23,6220	8,2327	0,17921	2,74663
559	312481	174676879	23,6432	8,2377	0,17889	2,74741
560	313600	175616000	23,6643	8,2426	0,17857	2,74819
561	314721	176558481	23,6854	8,2475	0,17825	2,74896
562	315844	177504328	23,7065	8,2524	0,17794	2,74974
563	316969	178453547	23,7276	8,2573	0,17762	2,75051
564	318096	179406144	23,7487	8,2621	0,17731	2,75128
565	319225	180362125	23,7697	8,2670	0,17699	2,75205
566	320356	181321496	23,7908	8,2719	0,17668	2,75282
567	321489	182284263	23,8118	8,2768	0,17637	2,75358
568	322624	183250432	23,8328	8,2816	0,17606	2,75435
569	323761	184220009	23,8537	8,2865	0,17575	2,75511
570	324900	185193000	23,8747	8,2913	0,17544	2,75587
571	326041	186169411	23,8956	8,2962	0,17513	2,75664
572	327184	187149248	23,9165	8,3010	0,17483	2,75740
573	328329	188132517	23,9374	8,3059	0,17452	2,75815
574	329476	189119224	23,9583	8,3107	0,17422	2,75891
575	330625	190109375	23,9792	8,3155	0,17391	2,75967
576	331776	191102976	24,0000	8,3203	0,17361	2,76042
577	332929	192100033	24,0208	8,3251	0,17331	2,76118
578	334084	193100552	24,0416	8,3300	0,17301	2,76193
579	335241	194104539	24,0624	8,3348	0,17271	2,76268
580	336400	195112000	24,0832	8,3396	0,17241	2,76343
581	337561	196122941	24,1039	8,3443	0,17212	2,76418
582	338724	197137368	24,1247	8,3491	0,17182	2,76492
583	339889	198155287	24,1454	8,3539	0,17153	2,76567
584	341056	199176704	24,1661	8,3587	0,17123	2,76641
585	342225	200201625	24,1868	8,3634	0,17094	2,76716
586	343396	201230056	24,2074	8,3682	0,17065	2,76790
587	344569	202262003	24,2281	8,3730	0,17036	2,76864
588	345744	203297472	24,2487	8,3777	0,17007	2,76938
589	346921	204336469	24,2693	8,3825	0,16978	2,77012
590	348100	205379000	24,2899	8,3872	0,16949	2,77085
591	349281	206425071	24,3105	8,3919	0,16921	2,77159
592	350464	207474688	24,3311	8,3967	0,16892	2,77232
593	351649	208527857	24,3516	8,4014	0,16863	2,77305
594	352836	209584584	24,3721	8,4061	0,16835	2,77379
595	354025	210644875	24,3926	8,4108	0,16807	2,77452
596	355216	211708736	24,4131	8,4155	0,16779	2,77525
597	356409	212776173	24,4336	8,4202	0,16750	2,77597
598	357604	213847192	24,4540	8,4249	0,16722	2,77670
599	358801	214921799	24,4745	8,4296	0,16695	2,77743

600 ÷ 649

n	n^2	n^3	$\sqrt{n}$	$\sqrt[3]{n}$	$\frac{1}{n}\cdot 100$	$\lg n$
600	360000	216000000	24,4949	8,4343	0,16667	2,77815
601	361201	217081801	24,5153	8,4390	0,16639	2,77887
602	362404	218167208	24,5357	8,4437	0,16611	2,77960
603	363609	219256227	24,5561	8,4484	0,16584	2,78032
604	364816	220348864	24,5764	8,4530	0,16556	2,78104
605	366025	221445125	24,5967	8,4577	0,16529	2,78176
606	367236	222545016	24,6171	8,4623	0,16502	2,78247
607	368449	223648543	24,6374	8,4670	0,16475	2,78319
608	369664	224755712	24,6577	8,4716	0,16447	2,78390
609	370881	225866529	24,6779	8,4763	0,16420	2,78462
610	372100	226981000	24,6982	8,4809	0,16393	2,78533
611	373321	228099131	24,7184	8,4856	0,16367	2,78604
612	374544	229220928	24,7386	8,4902	0,16340	2,78675
613	375769	230346397	24,7588	8,4948	0,16313	2,78746
614	376996	231475544	24,7790	8,4994	0,16287	2,78817
615	378225	232608375	24,7992	8,5040	0,16260	2,78888
616	379456	233744896	24,8193	8,5086	0,16234	2,78958
617	380689	234885113	24,8395	8,5132	0,16208	2,79029
618	381924	236029032	24,8596	8,5178	0,16181	2,79099
619	383161	237176659	24,8797	8,5224	0,16155	2,79169
620	384400	238328000	24,8998	8,5270	0,16129	2,79239
621	385641	239483061	24,9199	8,5316	0,16103	2,79309
622	386884	240641848	24,9399	8,5362	0,16077	2,79379
623	388129	241804367	24,9600	8,5408	0,16051	2,79449
624	389376	242970624	24,9800	8,5453	0,16026	2,79518
625	390625	244140625	25,0000	8,5499	0,16000	2,79588
626	391876	245314376	25,0200	8,5544	0,15974	2,79657
627	393129	246491883	25,0400	8,5590	0,15949	2,79727
628	394384	247673152	25,0599	8,5635	0,15924	2,79796
629	395641	248858189	25,0799	8,5681	0,15898	2,79865
630	396900	250047000	25,0998	8,5726	0,15873	2,79934
631	398161	251239591	25,1197	8,5772	0,15848	2,80003
632	399424	252435968	25,1396	8,5817	0,15823	2,80072
633	400689	253636137	25,1595	8,5862	0,15798	2,80140
634	401956	254840104	25,1794	8,5907	0,15773	2,80209
635	403225	256047875	25,1992	8,5952	0,15748	2,80277
636	404496	257259456	25,2190	8,5997	0,15723	2,80346
637	405769	258474853	25,2389	8,6043	0,15699	2,80414
638	407044	259694072	25,2587	8,6088	0,15674	2,80482
639	408321	260917119	25,2784	8,6132	0,15650	2,80550
640	409600	262144000	25,2982	8,6177	0,15625	2,80618
641	410881	263374721	25,3180	8,6222	0,15601	2,80686
642	412164	264609288	25,3377	8,6267	0,15576	2,80754
643	413449	265847707	25,3574	8,6312	0,15552	2,80821
644	414736	267089984	25,3772	8,6357	0,15528	2,80889
645	416025	268336125	25,3969	8,6401	0,15504	2,80956
646	417316	269586156	25,4165	8,6446	0,15480	2,81023
647	418609	270840023	25,4362	8,6490	0,15456	2,81090
648	419904	272097792	25,4558	8,6535	0,15432	2,81158
649	421201	273359449	25,4755	8,6579	0,15408	2,81224

n	n^2	n^3	$\sqrt{n}$	$\sqrt[3]{n}$	$\frac{1}{n}\cdot 100$	$\lg n$
650	422500	274625000	25,4951	8,6624	0,15385	2,81291
651	423801	275894451	25,5147	8,6668	0,15361	2,81358
652	425104	277167808	25,5343	8,6713	0,15337	2,81425
653	426409	278445077	25,5539	8,6757	0,15314	2,81491
654	427716	279726264	25,5734	8,6801	0,15291	2,81558
655	429025	281011375	25,5930	8,6845	0,15267	2,81624
656	430336	282300416	25,6125	8,6890	0,15244	2,81690
657	431649	283593393	25,6320	8,6934	0,15221	2,81757
658	432964	284890312	25,6515	8,6978	0,15198	2,81823
659	434281	286191179	25,6710	8,7022	0,15175	2,81889
660	435600	287496000	25,6905	8,7066	0,15152	2,81954
661	436921	288804781	25,7099	8,7110	0,15129	2,82020
662	438244	290117528	25,7294	8,7154	0,15106	2,82086
663	439569	291434247	25,7488	8,7198	0,15083	2,82151
664	440896	292754944	25,7682	8,7241	0,15060	2,82217
665	442225	294079625	25,7876	8,7285	0,15038	2,82282
666	443556	295408296	25,8070	8,7329	0,15015	2,82347
667	444889	296740963	25,8263	8,7373	0,14993	2,82413
668	446224	298077632	25,8457	8,7416	0,14970	2,82478
669	447561	299418309	25,8650	8,7460	0,14948	2,82543
670	448900	300763000	25,8844	8,7503	0,14925	2,82607
671	450241	302111711	25,9037	8,7547	0,14903	2,82672
672	451584	303464448	25,9230	8,7590	0,14881	2,82737
673	452929	304821217	25,9422	8,7634	0,14859	2,82802
674	454276	306182024	25,9615	8,7677	0,14837	2,82866
675	455625	307546875	25,9808	8,7721	0,14815	2,82930
676	456976	308915776	26,0000	8,7764	0,14793	2,82995
677	458329	310288733	26,0192	8,7807	0,14771	2,83059
678	459684	311665752	26,0384	8,7850	0,14749	2,83123
679	461041	313046839	26,0576	8,7893	0,14728	2,83187
680	462400	314432000	26,0768	8,7937	0,14706	2,83251
681	463761	315821241	26,0960	8,7980	0,14684	2,83315
682	465124	317214568	26,1151	8,8023	0,14663	2,83378
683	466489	318611987	26,1343	8,8066	0,14641	2,83442
684	467856	320013504	26,1534	8,8109	0,14620	2,83506
685	469225	321419125	26,1725	8,8152	0,14599	2,83569
686	470596	322828856	26,1916	8,8194	0,14577	2,83632
687	471969	324242703	26,2107	8,8237	0,14556	2,83696
688	473344	325660672	26,2298	8,8280	0,14535	2,83759
689	474721	327082769	26,2488	8,8323	0,14514	2,83822
690	476100	328509000	26,2679	8,8366	0,14493	2,83885
691	477481	329939371	26,2869	8,8408	0,14472	2,83948
692	478864	331373888	26,3059	8,8451	0,14451	2,84011
693	480249	332812557	26,3249	8,8493	0,14430	2,84073
694	481636	334255384	26,3439	8,8536	0,14409	2,84136
695	483025	335702375	26,3629	8,8578	0,14389	2,84198
696	484416	337153536	26,3818	8,8621	0,14368	2,84261
697	485809	338608873	26,4008	8,8663	0,14347	2,84323
698	487204	340068392	26,4197	8,8706	0,14327	2,84386
699	488601	341532099	26,4386	8,8748	0,14306	2,84448

700 ÷ 749

n	n^2	n^3	$\sqrt{n}$	$\sqrt[3]{n}$	$\frac{1}{n}\cdot 100$	lg n
700	490000	343000000	26,4575	8,8790	0,14286	2,84510
701	491401	344472101	26,4764	8,8833	0,14265	2,84572
702	492804	345948408	26,4953	8,8875	0,14245	2,84634
703	494209	347428927	26,5141	8,8917	0,14225	2,84696
704	495616	348913664	26,5330	8,8959	0,14205	2,84757
705	497025	350402625	26,5518	8,9001	0,14184	2,84819
706	498436	351895816	26,5707	8,9043	0,14164	2,84880
707	499849	353393243	26,5895	8,9085	0,14144	2,84942
708	501264	354894912	26,6083	8,9127	0,14124	2,85003
709	502681	356400829	26,6271	8,9169	0,14104	2,85065
710	504100	357911000	26,6458	8,9211	0,14085	2,85126
711	505521	359425431	26,6646	8,9253	0,14065	2,85187
712	506944	360944128	26,6833	8,9295	0,14045	2,85248
713	508369	362467097	26,7021	8,9337	0,14025	2,85309
714	509796	363994344	26,7208	8,9378	0,14006	2,85370
715	511225	365525875	26,7395	8,9420	0,13986	2,85431
716	512656	367061696	26,7582	8,9462	0,13967	2,85491
717	514089	368601813	26,7769	8,9503	0,13947	2,85552
718	515524	370146232	26,7955	8,9545	0,13928	2,85612
719	516961	371694959	26,8142	8,9587	0,13908	2,85673
720	518400	373248000	26,8328	8,9628	0,13889	2,85733
721	519841	374805361	26,8514	8,9670	0,13870	2,85794
722	521284	376367048	26,8701	8,9711	0,13850	2,85854
723	522729	377933067	26,8887	8,9752	0,13831	2,85914
724	524176	379503424	26,9072	8,9794	0,13812	2,85974
725	525625	381078125	26,9258	8,9835	0,13793	2,86034
726	527076	382657176	26,9444	8,9876	0,13774	2,86094
727	528529	384240583	26,9629	8,9918	0,13755	2,86153
728	529984	385828352	26,9815	8,9959	0,13736	2,86213
729	531441	387420489	27,0000	9,0000	0,13717	2,86273
730	532900	389017000	27,0185	9,0041	0,13699	2,86332
731	534361	390617891	27,0370	9,0082	0,13680	2,86392
732	535824	392223168	27,0555	9,0123	0,13661	2,86451
733	537289	393832837	27,0740	9,0164	0,13643	2,86510
734	538756	395446904	27,0924	9,0205	0,13624	2,86570
735	540225	397065375	27,1109	9,0246	0,13605	2,86629
736	541696	398688256	27,1293	9,0287	0,13587	2,86688
737	543169	400315553	27,1477	9,0328	0,13569	2,86747
738	544644	401947272	27,1662	9,0369	0,13550	2,86806
739	546121	403583419	27,1846	9,0410	0,13532	2,86864
740	547600	405224000	27,2029	9,0450	0,13514	2,86923
741	549081	406869021	27,2213	9,0491	0,13495	2,86982
742	550564	408518488	27,2397	9,0532	0,13477	2,87040
743	552049	410172407	27,2580	9,0572	0,13459	2,87099
744	553536	411830784	27,2764	9,0613	0,13441	2,87157
745	555025	413493625	27,2947	9,0654	0,13423	2,87216
746	556516	415160936	27,3130	9,0694	0,13405	2,87274
747	558009	416832723	27,3313	9,0735	0,13387	2,87332
748	559504	418508992	27,3496	9,0775	0,13369	2,87390
749	561001	420189749	27,3679	9,0816	0,13351	2,87448

n	n^2	n^3	$\sqrt{n}$	$\sqrt[3]{n}$	$\frac{1}{n}\cdot 100$	lg n
750	562500	421875000	27,3861	9,0856	0,13333	2,87506
751	564001	423564751	27,4044	9,0896	0,13316	2,87564
752	565504	425259008	27,4226	9,0937	0,13298	2,87622
753	567009	426957777	27,4408	9,0977	0,13280	2,87679
754	568516	428661064	27,4591	9,1017	0,13263	2,87737
755	570025	430368875	27,4773	9,1057	0,13245	2,87795
756	571536	432081216	27,4955	9,1098	0,13228	2,87852
757	573049	433798093	27,5136	9,1138	0,13210	2,87910
758	574564	435519512	27,5318	9,1178	0,13193	2,87967
759	576081	437245479	27,5500	9,1218	0,13175	2,88024
760	577600	438976000	27,5681	9,1258	0,13158	2,88081
761	579121	440711081	27,5862	9,1298	0,13141	2,88138
762	580644	442450728	27,6043	9,1338	0,13123	2,88195
763	582169	444194947	27,6225	9,1378	0,13106	2,88252
764	583696	445943744	27,6405	9,1418	0,13089	2,88309
765	585225	447697125	27,6586	9,1458	0,13072	2,88366
766	586756	449455096	27,6767	9,1498	0,13055	2,88423
767	588289	451217663	27,6948	9,1537	0,13038	2,88480
768	589824	452984832	27,7128	9,1577	0,13021	2,88536
769	591361	454756609	27,7308	9,1617	0,13004	2,88593
770	592900	456533000	27,7489	9,1657	0,12987	2,88649
771	594441	458314011	27,7669	9,1696	0,12970	2,88705
772	595984	460099648	27,7849	9,1736	0,12953	2,88762
773	597529	461889917	27,8029	9,1775	0,12937	2,88818
774	599076	463684824	27,8209	9,1815	0,12920	2,88874
775	600625	465484375	27,8388	9,1855	0,12903	2,88930
776	602176	467288576	27,8568	9,1894	0,12887	2,88986
777	603729	469097433	27,8747	9,1933	0,12870	2,89042
778	605284	470910952	27,8927	9,1973	0,12854	2,89098
779	606841	472729139	27,9106	9,2012	0,12837	2,89154
780	608400	474552000	27,9285	9,2052	0,12821	2,89209
781	609961	476379541	27,9464	9,2091	0,12804	2,89265
782	611524	478211768	27,9643	9,2130	0,12788	2,89321
783	613089	480048687	27,9821	9,2170	0,12771	2,89376
784	614656	481890304	28,0000	9,2209	0,12755	2,89432
785	616225	483736625	28,0179	9,2248	0,12739	2,89487
786	617796	485587656	28,0357	9,2287	0,12723	2,89542
787	619369	487443403	28,0535	9,2326	0,12707	2,89597
788	620944	489303872	28,0713	9,2365	0,12690	2,89653
789	622521	491169069	28,0891	9,2404	0,12674	2,89708
790	624100	493039000	28,1069	9,2443	0,12658	2,89763
791	625681	494913671	28,1247	9,2482	0,12642	2,89818
792	627264	496793088	28,1425	9,2521	0,12626	2,89873
793	628849	498677257	28,1603	9,2560	0,12610	2,89927
794	630436	500566184	28,1780	9,2599	0,12595	2,89982
795	632025	502459875	28,1957	9,2638	0,12579	2,90037
796	633616	504358336	28,2135	9,2677	0,12563	2,90091
797	636209	506261573	28,2312	9,2716	0,12547	2,90146
798	636804	508169592	28,2489	9,2754	0,12531	2,90200
799	638401	510082399	28,2666	9,2793	0,12516	2,90255

800 ÷ 849

n	n^2	n^3	$\sqrt{n}$	$\sqrt[3]{n}$	$\frac{1}{n}\cdot 100$	lg n
800	640000	512000000	28,2843	9,2832	0,12500	2,90309
801	641601	513922401	28,3019	9,2870	0,12484	2,90363
802	643204	515849608	28,3196	9,2909	0,12469	2,90417
803	644809	517781627	28,3373	9,2948	0,12453	2,90472
804	646416	519718464	28,3549	9,2986	0,12438	2,90526
805	648025	521660125	28,3725	9,3025	0,12422	2,90580
806	649636	523606616	28,3901	9,3063	0,12407	2,90634
807	651249	525557943	28,4077	9,3102	0,12392	2,90687
808	652864	527514112	28,4253	9,3140	0,12376	2,90741
809	654481	529475129	28,4429	9,3179	0,12361	2,90795
810	656100	531441000	28,4605	9,3217	0,12346	2,90849
811	657721	533411731	28,4781	9,3255	0,12331	2,90902
812	659344	535387328	28,4956	9,3294	0,12315	2,90956
813	660969	537367797	28,5132	9,3332	0,12300	2,91009
814	662596	539353144	28,5307	9,3370	0,12285	2,91062
815	664225	541343375	28,5482	9,3408	0,12270	2,91116
816	665856	543338496	28,5657	9,3447	0,12255	2,91169
817	667489	545338513	28,5832	9,3485	0,12240	2,91222
818	669124	547343432	28,6007	9,3523	0,12225	2,91275
819	670761	549353259	28,6182	9,3561	0,12210	2,91328
820	672400	551368000	28,6356	9,3599	0,12195	2,91381
821	674041	553387661	28,6531	9,3637	0,12180	2,91434
822	675684	555412248	28,6705	9,3675	0,12166	2,91487
823	677329	557441767	28,6880	9,3713	0,12151	2,91540
824	678976	559476224	28,7054	9,3751	0,12136	2,91593
825	680625	561515625	28,7228	9,3789	0,12121	2,91645
826	682276	563559976	28,7402	9,3827	0,12107	2,91698
827	683929	565609283	28,7576	9,3865	0,12092	2,91751
828	685584	567663552	28,7750	9,3902	0,12077	2,91803
829	687241	569722789	28,7924	9,3940	0,12063	2,91855
830	688900	571787000	28,8097	9,3978	0,12048	2,91908
831	690561	573856191	28,8271	9,4016	0,12034	2,91960
832	692224	575930368	28,8444	9,4053	0,12019	2,92012
833	693889	578009537	28,8617	9,4091	0,12005	2,92065
834	695556	580093704	28,8791	9,4129	0,11990	2,92117
835	697225	582182875	28,8964	9,4166	0,11976	2,92169
836	698896	584277056	28,9137	9,4204	0,11962	2,92221
837	700569	586376253	28,9310	9,4241	0,11947	2,92273
838	702244	588480472	28,9482	9,4279	0,11933	2,92324
839	703921	590589719	28,9655	9,4316	0,11919	2,92376
840	705600	592704000	28,9828	9,4354	0,11905	2,92428
841	707281	594823321	29,0000	9,4391	0,11891	2,92480
842	708964	596947688	29,0172	9,4429	0,11877	2,92531
843	710649	599077107	29,0345	9,4466	0,11862	2,92583
844	712336	601211584	29,0517	9,4503	0,11848	2,92634
845	714025	603351125	29,0689	9,4541	0,11834	2,92686
846	715716	605495736	29,0861	9,4578	0,11820	2,92737
847	717409	607645423	29,1033	9,4615	0,11806	2,92788
848	719104	609800192	29,1204	9,4652	0,11793	2,92840
849	720801	611960049	29,1376	9,4690	0,11779	2,92891

n	n^2	n^3	$\sqrt{n}$	$\sqrt[3]{n}$	$\frac{1}{n}\cdot 100$	$\lg n$
850	722500	614125000	29,1548	9,4727	0,11765	2,92942
851	724201	616295051	29,1719	9,4764	0,11751	2,92993
852	725904	618470208	29,1890	9,4801	0,11737	2,93044
853	727609	620650477	29,2062	9,4838	0,11723	2,93095
854	729316	622835864	29,2233	9,4875	0,11710	2,93146
855	731025	625026375	29,2404	9,4912	0,11696	2,93197
856	732736	627222016	29,2575	9,4949	0,11682	2,93247
857	734449	629422793	29,2746	9,4986	0,11669	2,93298
858	736164	631628712	29,2916	9,5023	0,11655	2,93349
859	737881	633839779	29,3087	9,5060	0,11641	2,93399
860	739600	636056000	29,3258	9,5097	0,11628	2,93450
861	741321	638277381	29,3428	9,5134	0,11614	2,93500
862	743044	640503928	29,3598	9,5171	0,11601	2,93551
863	744769	642735647	29,3769	9,5207	0,11588	2,93601
864	746496	644972544	29,3939	9,5244	0,11574	2,93651
865	748225	647214625	29,4109	9,5281	0,11561	2,93702
866	749956	649461896	29,4279	9,5317	0,11547	2,93752
867	751689	651714363	29,4449	9,5354	0,11534	2,93802
868	753424	653972032	29,4618	9,5391	0,11521	2,93852
869	755161	656234909	29,4788	9,5427	0,11508	2,93902
870	756900	658503000	29,4958	9,5464	0,11494	2,93952
871	758641	660776311	29,5127	9,5501	0,11481	2,94002
872	760384	663054848	29,5296	9,5537	0,11468	2,94052
873	762129	665338617	29,5466	9,5574	0,11455	2,94101
874	763876	667627624	29,5635	9,5610	0,11442	2,94151
875	765625	669921875	29,5804	9,5647	0,11429	2,94201
876	767376	672221376	29,5973	9,5683	0,11416	2,94250
877	769129	674526133	29,6142	9,5719	0,11403	2,94300
878	770884	676836152	29,6311	9,5756	0,11390	2,94349
879	772641	679151439	29,6479	9,5792	0,11377	2,94399
880	774400	681472000	29,6648	9,5828	0,11364	2,94448
881	776161	683797841	29,6816	9,5865	0,11351	2,94498
882	777924	686128968	29,6985	9,5901	0,11338	2,94547
883	779689	688465387	29,7153	9,5937	0,11325	2,94596
884	781456	690807104	29,7321	9,5973	0,11312	2,94645
885	783225	693154125	29,7489	9,6010	0,11299	2,94694
886	784996	695506456	29,7658	9,6046	0,11287	2,94743
887	786769	697864103	29,7825	9,6082	0,11274	2,94792
888	788544	700227072	29,7993	9,6118	0,11261	2,94841
889	790321	702595369	29,8161	9,6154	0,11249	2,94890
890	792100	704969000	29,8329	9,6190	0,11236	2,94939
891	793881	707347971	29,8496	9,6226	0,11223	2,94988
892	795664	709732288	29,8664	9,6262	0,11211	2,95036
893	797449	712121957	29,8831	9,6298	0,11198	2,95085
894	799236	714516984	29,8998	9,6334	0,11186	2,95134
895	801025	716917375	29,9166	9,6370	0,11173	2,95182
896	802816	719323136	29,9333	9,6406	0,11161	2,95231
897	804609	721734273	29,9500	9,6442	0,11148	2,95279
898	806404	724150792	29,9666	9,6477	0,11136	2,95328
899	808201	726572699	29,9833	9,6513	0,11124	2,95376

900 ÷ 949

n	n^2	n^3	$\sqrt{n}$	$\sqrt[3]{n}$	$\frac{1}{n}\cdot 100$	lg n
900	810000	729000000	30,0000	9,6549	0,11111	2,95424
901	811801	731432701	30,0167	9,6585	0,11099	2,95472
902	813604	733870808	30,0333	9,6620	0,11087	2,95521
903	815409	736314327	30,0500	9,6656	0,11074	2,95569
904	817216	738763264	30,0666	9,6692	0,11062	2,95617
905	819025	741217625	30,0832	9,6727	0,11050	2,95665
906	820836	743677416	30,0998	9,6763	0,11038	2,95713
907	822649	746142643	30,1164	9,6799	0,11025	2,95761
908	824464	748613312	30,1330	9,6834	0,11013	2,95809
909	826281	751089429	30,1496	9,6870	0,11001	2,95856
910	828100	753571000	30,1662	9,6905	0,10989	2,95904
911	829921	756058031	30,1828	9,6941	0,10977	2,95952
912	831744	758550528	30,1993	9,6976	0,10965	2,95999
913	833569	761048497	30,2159	9,7012	0,10953	2,96047
914	835396	763551944	30,2324	9,7047	0,10941	2,96095
915	837225	766060875	30,2490	9,7082	0,10929	2,96142
916	839056	768575296	30,2655	9,7118	0,10917	2,96190
917	840889	771095213	30,2820	9,7153	0,10905	2,96237
918	842724	773620632	30,2985	9,7188	0,10893	2,96284
919	844561	776151559	30,3150	9,7224	0,10881	2,96332
920	846400	778688000	30,3315	9,7259	0,10870	2,96379
921	848241	781229961	30,3480	9,7294	0,10858	2,96426
922	850084	783777448	30,3645	9,7329	0,10846	2,96473
923	851929	786330467	30,3809	9,7364	0,10834	2,96520
924	853776	788889024	30,3974	9,7400	0,10823	2,96567
925	855625	791453125	30,4138	9,7435	0,10811	2,96614
926	857476	794022776	30,4302	9,7470	0,10799	2,96661
927	859329	796597983	30,4467	9,7505	0,10788	2,96708
928	861184	799178752	30,4631	9,7540	0,10776	2,96755
929	863041	801765089	30,4795	9,7575	0,10764	2,96802
930	864900	804357000	30,4959	9,7610	0,10753	2,96848
931	866761	806954491	30,5123	9,7645	0,10741	2,96895
932	868624	809557568	30,5287	9,7680	0,10730	2,96942
933	870489	812166237	30,5450	9,7715	0,10718	2,96988
934	872356	814780504	30,5614	9,7750	0,10707	2,97035
935	874225	817400375	30,5778	9,7785	0,10695	2,97081
936	876096	820025856	30,5941	9,7819	0,10684	2,97128
937	877969	822656953	30,6105	9,7854	0,10672	2,97174
938	879844	825293672	30,6268	9,7889	0,10661	2,97220
939	881721	827936019	30,6431	9,7924	0,10650	2,97267
940	883600	830584000	30,6594	9,7959	0,10638	2,97313
941	885481	833237621	30,6757	9,7993	0,10627	2,97359
942	887364	835896888	30,6920	9,8028	0,10616	2,97405
943	889249	838561807	30,7083	9,8063	0,10605	2,97451
944	891136	841232384	30,7246	9,8097	0,10593	2,97497
945	893025	843908625	30,7409	9,8132	0,10582	2,97543
946	894916	846590536	30,7571	9,8167	0,10571	2,97589
947	896809	849278123	30,7734	9,8201	0,10560	2,97635
948	898704	851971392	30,7896	9,8236	0,10549	2,97681
949	900601	854670349	30,8058	9,8270	0,10537	2,97727

n	n^2	n^3	$\sqrt{n}$	$\sqrt[3]{n}$	$\frac{1}{n}\cdot 100$	$\lg n$
950	902500	857375000	30,8221	9,8305	0,10526	2,97772
951	904401	860085351	30,8383	9,8339	0,10515	2,97818
952	906304	862801408	30,8545	9,8374	0,10504	2,97864
953	908209	865523177	30,8707	9,8408	0,10493	2,97909
954	910116	868250664	30,8869	9,8443	0,10482	2,97955
955	912025	870983875	30,9031	9,8477	0,10471	2,98000
956	913936	873722816	30,9192	9,8511	0,10460	2,98046
957	915849	876467493	30,9354	9,8546	0,10449	2,98091
958	917764	879217912	30,9516	9,8580	0,10438	2,98137
959	919681	881974079	30,9677	9,8614	0,10428	2,98182
960	921600	884736000	30,9839	9,8648	0,10417	2,98227
961	923521	887503681	31,0000	9,8683	0,10406	2,98272
962	925444	890277128	31,0161	9,8717	0,10395	2,98318
963	927369	893056347	31,0322	9,8751	0,10384	2,98363
964	929296	895841344	31,0483	9,8785	0,10373	2,98408
965	931225	898632125	31,0644	9,8819	0,10363	2,98453
966	933156	901428696	31,0805	9,8854	0,10352	2,98498
967	935089	904231063	31,0966	9,8888	0,10341	2,98543
968	937024	907039232	31,1127	9,8922	0,10331	2,98588
969	938961	909853209	31,1288	9,8956	0,10320	2,98632
970	940900	912673000	31,1448	9,8990	0,10309	2,98677
971	942841	915498611	31,1609	9,9024	0,10299	2,98722
972	944784	918330048	31,1769	9,9058	0,10288	2,98767
973	946729	921167317	31,1929	9,9092	0,10278	2,98811
974	948676	924010424	31,2090	9,9126	0,10267	2,98856
975	950625	926859375	31,2250	9,9160	0,10256	2,98900
976	952576	929714176	31,2410	9,9194	0,10246	2,98945
977	954529	932574833	31,2570	9,9227	0,10235	2,98989
978	956484	935441352	31,2730	9,9261	0,10225	2,99034
979	958441	938313739	31,2890	9,9295	0,10215	2,99078
980	960400	941192000	31,3050	9,9329	0,10204	2,99123
981	962361	944076141	31,3209	9,9363	0,10194	2,99167
982	964324	946966168	31,3369	9,9396	0,10183	2,99211
983	966289	949862087	31,3528	9,9430	0,10173	2,99255
984	968256	952763904	31,3688	9,9464	0,10163	2,99300
985	970225	955671625	31,3847	9,9497	0,10152	2,99344
986	972196	958585256	31,4006	9,9531	0,10142	2,99388
987	974169	961504803	31,4166	9,9565	0,10132	2,99432
988	976144	964430272	31,4325	9,9598	0,10122	2,99476
989	978121	967361669	31,4484	9,9632	0,10111	2,99520
990	980100	970299000	31,4643	9,9666	0,10101	2,99564
991	982081	973242271	31,4802	9,9699	0,10091	2,99607
992	984064	976191488	31,4960	9,9733	0,10081	2,99651
993	986049	979146657	31,5119	9,9766	0,10071	2,99695
994	988036	982107784	31,5278	9,9800	0,10060	2,99739
995	990025	985074875	31,5436	9,9833	0,10050	2,99782
996	992016	988047936	31,5595	9,9866	0,10040	2,99826
997	994009	991026973	31,5753	9,9900	0,10030	2,99870
998	996004	994011992	31,5911	9,9933	0,10020	2,99913
999	998001	997002999	31,6070	9,9967	0,10010	2,99957

Tabela 2

Tabele trygonometryczne

0°- 45°

FUNKCJE TRYGONOMETRYCZNE

°	Sinus 0′	10′	20′	30′	40′	50′	60′		Δ dl
0	0,0000	0,0029	0,0058	0,0087	0,0116	0,0145	0,0175	89	2
1	0175	0204	0233	0262	0291	0320	0349	88	2
2	0349	0378.	0407	0436	0465	0494	0523	87	2
3	0523	0552	0581	0610	0640	0669	0698	86	2
4	0698	0727	0756	0,0785	0,0814	0,0843	0,0872	85	2
5	0,0872	0,0901	0,0929	0,0958	0987	1016	1045	84	2
6	1045	1074	1103	1132	1161	1190	1219	83	2
7	1219	1248	1276	1305	1334	1363	1392	82	2
8	1392	1421	1449	1478	1507	1536	1564	81	2
9	1564	1593	1622	0,1650	0,1679	0,1708	0,1736	80	2
10	0,1736	0,1765	0,1794	0,1822	1851	1880	1908	79	2
11	1908	1937	1965	1994	2022	2051	2079	78	2
12	2079	2108	2136	2164	2193	2221	2250	77	2
13	2250	2278	2306	2334	2363	2391	2419	76	2
14	2419	2447	2476	0,2504	0,2532	0,2560	0,2588	75	2
15	0,2588	0,2616	0,2644	0,2672	2700	2728	2756	74	2
16	2756	2784	2812	2840	2868	2896	2924	73	2
17	2924	2952	2979	3007	3035	3062	3090	72	2
18	3090	3118	3145	3173	3201	3228	3256	71	2
19	3256	3283	3311	0,3338	0,3365	0,3393	0,3420	70	2
20	0,3420	0,3448	0,3475	0,3502	3529	3557	3584	69	2
21	3584	3611	3638	3665	3692	3719	3746	68	2
22	3746	3773	3800	3827	3854	3881	3907	67	2
23	3907	3934	3961	3987	4014	4041	4067	66	2
24	4067	4094	4120	0,4147	0,4173	0,4200	0,4226	65	2
25	0,4226	0,4253	0,4279	0,4305	4331	4358	4384	64	2
26	4384	4410	4436	4462	4488	4514	4540	63	2
27	4540	4566	4592	4617	4643	4669	4695	62	2
28	4695	4720	4746	4772	4797	4823	4848	61	2
29	4848	4874	4899	0,4924	0,4950	0,4975	0,5000	60	2
30	0,5000	0,5025	0,5050	0,5075	5100	5125	5150	59	2
31	5150	5175	5200	5225	5250	5275	5299	58	2
32	5299	5324	5348	5373	5398	5422	5446	57	2
33	5446	5471	5495	5519	5544	5568	5592	56	2
34	5592	5616	5640	0,5664	0,5688	0,5712	0,5736	55	2
35	0,5736	0,5760	0,5783	0,5807	5831	5854	5878	54	2
36	5878	5901	5925	5948	5972	5995	6018	53	2
37	6018	6041	6065	6088	6111	6134	6157	52	2
38	6157	6180	6202	6225	6248	6271	6293	51	2
39	6293	6316	6338	0,6361	0,6383	0,6406	0,6428	50	2
40	0,6428	0,6450	0,6472	0,6494	6517	6539	6561	49	2
41	6561	6583	6604	6626	6648	6670	6691	48	2
42	6691	6713	6734	6756	6777	6799	6820	47	2
43	6820	6841.	6862	6884	6905	6926	6947	46	2
44	0,6947	0,6967	0,6988	0,7009	0,7030	0,7050	0,7071	45	2
	60′	50′	40′	30′	20′	10′	0′	°/ a	dl Δ
				Cosinus					

45°-90°

45°-90°

Δ śr. dla 1'	a /o/	Sinus 0'	10'	20'	30'	40'	50'	60'	
2,0	45	0,7071	0,7092	0,7112	0,7133	0,7153	0,7173	0,7193	44
2,0	46	7193	7214	7234	7254	7274	7294	7314	43
1,9	47	7314	7333	7353	7373	7392	7412	7431	42
1,9	48	7431	7451	7470	7490	7509	7528	7547	41
1,9	49	7547	7566	7585	0,7604	0,7623	0,7642	0,7660	40
1,8	50	0,7660	0,7679	0,7698	0,7716	7735	7753	7771	39
1,8	51	7771	7790	7808	7826	7844	7862	7880	38
1,8	52	7880	7898	7916	7934	7951	7969	7986	37
1,7	53	7986	8004	8021	8039	8056	8073	8090	36
1,7	54	8090	8107	8124	0,8141	0,8158	0,8175	0,8192	35
1,6	55	0,8192	0,8208	0,8225	0,8241	8258	8274	8290	34
1,6	56	8290	8307	8323	8339	8355	8371	8387	33
1,5	57	8387	8403	8418	8434	8450	8465	8480	32
1,5	58	8480	8496	8511	8526	8542	8557	8572	31
1,5	59	8572	8587	8601	0,8616	0,8631	0,8646	0,8660	30
1,4	60	0,8660	0,8675	0,8689	0,8704	8718	8732	8746	29
1,4	61	8746	8760	8774	8788	8802	8816	8829	28
1,3	62	8829	8843	8857	8870	8884	8897	8910	27
1,3	63	8910	8923	8936	8949	8962	8975	8988	26
1,2	64	8988	9001	9013	0,9026	0,9038	0,9051	0,9063	25
1,2	65	0,9063	0,9075	0,9088	0,9100	9112	9124	9135	24
1,2	66	9135	9147	9159	9171	9182	9194	9205	23
1,1	67	9205	9216	9228	9239	9250	9261	9272	22
1,1	68	9272	9283	9293	9304	9315	9325	9336	21
1,0	69	9336	9346	9356	0,9367	0,9377	0,9387	0,9397	20
1,0	70	0,9397	0,9407	0,9417	0,9426	9438	9446	9455	19
0,9	71	9455	9465	9474	9483	9492	9502	9511	18
0,9	72	9511	9520	9528	9537	9546	9555	9563	17
0,8	73	9563	9572	9580	9588	9596	9605	9613	16
0,8	74	9613	9621	9628	0,9636	0,9644	0,9652	0,9659	15
0,7	75	0,9659	0,9667	0,9674	0,9681	9689	9696	9703	14
0,7	76	9703	9710	9717	9724	9730	9737	9744	13
0,6	77	9744	9750	9757	9763	9769	9775	9781	12
o,6	78	9781	9787	9793	9799	9805	9811	9816	11
0,5	79	9816	9822	9827	0,9833	0,9838	0,9843	0,9848	10
0,5	8o	0,9848	0,9853	0,9858	0,9863	9868	9872	9877	9
0,4	81	9877	9881	9886	9890	9894	9899	9903	8
0,4	82	9903	9907	9911	9914	9918	9922	9925	7
0,3	83	9925	9929	9932	9936	9939	9942	9945	6
0,3	84	9945	9948	9951	0,9954	0,9957	0,9959	0,9962	5
	85	0,99619	0,99644	0,99668	0,99692	99714	99736	99756	4
	86	99756	99776	99795	99813	99831	99847	99863	3
	87	99863	99878	99892	99905	99917	99929	99939	2
	88	99939	99949	99958	99966	99973	99979	99985	1
	89	0,99985	0,99989	0,99993	0,99996	0,99998	0,99999	1,00000	0
dla 1' Δ śr,	śr,	60'	50'	40'	30'	20'	10'	0' Cosinus	/o/ a

0°-45°

0°-45°

a /o/	Tangens 0′	10′	20′	30′	40′	50′	60′		Δ śr. dla 1′
0	0,0000	0,0029	0,0058	0,0087	0,0116	0,0145	0,0175	89	2,9
1	0175	0204	0233	0262	0291	0320	0349	88	2,9
2	0349	0378	0407	0437	0466	0495	0524	87	2,9
3	0524	0553	0582	0612	0641	0670	0699	86	2,9
4	0699	0729	0758	0,0787	0,0816	0,0846	0,0875	85	2,9
5	0,0875	0,0904	0,0934	0,0963	0992	1022	1051	84	2,9
6	1051	1080	1110	1139	1169	1198	1228	83	2,9
7	1228	1257	1287	1317	1346	1376	1405	82	2,9
8	1405	1435	1465	1495	1524	1554	1584	81	3,00
9	1584	1614	1644	0,1673	0,1703	0,1733	0,1763	80	3,0
10	0,1763	0,1793	0,1823	0,1853	1883	1914	1944	79	3,0
11	1944	1974	2004	2035	2065	2095	2126	78	3,0
12	2126	2156	2186	2217	2247	2278	2309	77	3,0
13	2309	2339	2370	2401	2432	2462	2493	76	3,1
14	2493	2524	2555	0,2586	0,2617	0,2648	0,2679	75	3,1
15	0,2679	0,2711	0,2742	0,2773	2805	2836	2867	74	3,1
16	2867	2899	2931	2962	2994	3026	3057	73	3,2
17	3057	3089	3121	3153	3185	3217	3249	72	3,2
18	3249	3281	3314	3346	3378	3411	3443	71	3,2
19	3443	3476	3508	0,3541	0,3574	0,3607	0,3640	70	3,3
20	0,3640	0,3673	0,3706	0,3739	3772	3805	3839	69	3,3
21	3839	3872	3806	3939	3973	4006	4040	68	3,4
22	4040	4074	4108	4142	4176	4210	4245	67	3,4
23	4245	4279	4314	4348	4383	4417	4452	66	3,5
24	4452	4487	4522	0,4557	0,4592	0,4628	0,4663	65	3,5
25	0,4663	0,4699	0,4734	0,4770	4806	4841	4877	64	3,6
26	4877	4913	4950	4936	5022	5059	5095	63	3,6
27	5095	5132	5169	5206	5243	5280	5317	62	3,7
28	5317	5254	5392	5430	5467	5505	5543	61	3,7
29	5543	5581	5619	0,5658	0,5696	0,5735	0,5774	60	3,8
30	0,5774	0,5812	0,5851	0,5890	5930	5969	6009	59	3,9
31	6009	6048	6088	6128	6168	6208	6249	58	4,0
32	6249	6289	6330	6371	6412	6453	6494	57	4,1
33	6494	6536	6577	6619	6661	6703	6745	56	4,2
34	6745	6787	6830	0,6873	0,6916	0,6959	0,7002	55	4,3
35	0,7002	0,7046	0,7089	0,7133	7177	7221	7265	54	4,4
36	7265	7310	7355	7400	7445	7490	7536	53	4,5
37	7536	7581	7627	7673	7720	7766	7813	52	4,6
38	7813	7860	7907	7954	8002	8050	8098	51	4,7
39	8098	8146	8195	0,8243	0,8292	0,8342	0,8391	50	4,8 4,9
40	0,8391	0,8441	0,8491	0,8541	8591	8642	8693	49	5,0 5,1
41	8693	8744	8796	8847	8899	8952	9004	48	5,1 5,2
42	9004	9057	9110	9163	9217	9271	9325	47	5,3 5,4
43	9325	9380	9435	9490	9545	9601	9657	46	5,5 5,6
44	0,9657	0,9713	0,9770	0,9827	0,9884	0,9942	1,0000	45	5,7 5,8
	60′	50′	40′	30′	20′	10′	0′	/o/ a	dla 1′ Δ śr.
	Cotangens								

45°-90°

Δ śr. dla 1'		a /o/	Tangens 0'	10'	20'	30'	40'	50'	60'	
5,9	6,0	45	1,0000	1,0058	1,0117	1,0176	1,0235	1,0295	1,0355	44
6,1	6,2	46	1,0355	1,0416	1,0477	1,0538	1,0599	1,0661	1,0724	43
6,3	6,4	47	1,0724	1,0786	1,0850	1,0913	1,0977	1,1041	1,1106	42
6,6	6,7	48	1,1106	1,1171	1,1237	1,1303	1,1369	1,1436	1,1504	41
6,8	7,0	49	1,1504	1,1572	1,1640	1,1708	1,1778	1,1847	1,1918	40
7,1	7,2	50	1,1918	1,1988	1,2059	1,2131	1,2203	1,2276	1,2349	39
7,4	7,5	51	1,2349	1,2423	1,2497	1,2572	1,2647	1,2723	1,2799	38
7,7	7,9	52	1,2799	1,2876	1,2954	1,3032	1,3111	1,3190	1,3270	37
8,1	8,3	53	1,3270	1,3351	1,3432	1,3514	1,3597	1,3680	1,3764	36
8,5	8,7	54	1,3764	1,3848	1,3934	1,4019	1,4106	1,4193	1,4281	35
9,0	9,2	55	1,4281	1,4370	1,4460	1,4550	1,4641	1,4733	1,4826	34
9,4	9,7	56	1,4826	1,4919	1,5013	1,5108	1,5204	1,5301	1,5399	33
9,9	10,2	57	1,5399	1,5497	1,5597	1,5697	1,5798	1,5900	1,6003	32
10,5	10,8	58	1,6003	1,6107	1,6213	1,6318	1,6426	1,6534	1,6643	31
11,1	11,5	59	1,6643	1,6753	1,6864	1,6977	1,7090	1,7205	1,7321	30
11,8	12,2	60	1,7321	1,7438	1,7556	1,7675	1,7796	1,7917	1,8041	29
12,6	13,0	61	1,8041	1,8165	1,8291	1,8418	1,8546	1,8676	1,8807	28
13,4	13,9	62	1,8807	1,8940	1,9074	1,9210	1,9347	1,9486	1,9626	27
14,4	14,9	63	1,9626	1,9768	1,9912	2,0057	2,0204	2,0353	2,0503	26
15,4	16,0	64	2,0503	2,0655	2,0809	2,0965	2,1123	2,1283	2,1445	25
16,6	17,2	65	2,1445	2,1609	2,1775	2,1943	2,2113	2,2286	2,2460	24
17,9	18,6	66	2,2460	2,2637	2,2817	2,2998	2,3183	2,3368	2,3559	23
19,4	20,3	67	2,3559	2,3750	2,3945	2,4142	2,4342	2,4545	2,4751	22
21,2	22,2	68	2,4751	2,4960	2,5172	2,5387	2,5605	2,5826	2,6051	21
23,2	24,3	69	2,6051	2,6279	2,6511	2,6746	2.6985	2,7228	2,7475	20
dla lewej połowy tabeli,	dla prawej połowy tabeli	70	2,7475	2,7725	2,7980	2,8239	28502	2,8770	2,9042	19
		71	2,9042	2,9319	2,9600	2,9887	3.0178	3,0475	3,0777	18
		72	3,0777	3,1084	3,1397	3,1716	3,2041	3,2371	3,2709	17
		73	3,2709	3,3052	3,3402	3,3759	3,4124	3,4495	3,4874	16
		74	3,4874	3,5261	3,5656	3,6059	3,6470	3,6891	3,7321	15
		75	3,7321	3,7760	3,8208	3,8667	3,9136	3,9617	4,0108	14
		76	4,0108	4,0611	4,1126	4,1653	4,2193	4,2747	4,3315	13
		77	4,3315	4,3897	4,4494	4,5107	4,5736	4,6383	4,7046	12
		78	4,7046	4,7729	4,8430	4,9152	4,9894	5,0658	5,1446	11
		79	5,1446	5,2257	5,3093	5,3955	5,4845	5,5764	5,6713	10
		80	5,6713	5,7694	5,8708	5,9758	6,0844	6,1970	6,3138	9
		81	6,3138	6,4348	6,5606	6,6912	6,8269	6,9682	7,1154	8
		82	7,1154	7,2687	7,4287	7,5958	7,7704	7,9530	8,1444	7
		83	8,1444	8,3450	8,5556	8,7769	9,0098	9.2553	9,5144	6
		84	9,5144	9,7882	10,078	10,385	10,712	11,059	11,430	5
		85	11,430	11,826	12,251	12,706	13,197	13,727	14,301	4
		86	14,301	14,924	15,605	16,350	17,169	18,075	19,081	3
		87	19,081	20,206	21,470	22,904	24,542	26,432	28,636	2
		88	28,636	31,242	34,368	38,188	42,964	49,104	57,290	1
		89	57,290	68,750	85,940	114,59	171,89	343,77	∞	0
dla 1' Δ śr.			60'	50'	40'	30'	20'	10'	0' Cotangens	/o/ a

0°-45°

Tabela 3

Tabele do rachunku prawdopodobieństwa

Wartości funkcji Laplace'a $\phi(x) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^x e^{-t^2} dt$

x	ϕ /x/	Δ	x	ϕ /x/	Δ	x	ϕ /x/	Δ
0,00	0,0000	564	1,95	0,8209	218	1,90	0,9928	14
0,05	0,0564	561	1,00	0,8427	197	1,95	0,9942	11
0,10	0,1125	555	1,05	0,8624	178	2,00	0,9953	10
0,15	0,1680	547	1,10	0,8802	159	2,05	0,9963	7
0,20	0,2227	536	1,15	0,8961	142	2,10	0,9970	6
0,25	0,2763	523	1,20	0,9103	126	2,15	0,9976	5
0,30	0,3286	508	1,25	0,9229	111	2,20	0,9981	4
0,35	0,3794	490	1,30	0,9340	98	2,25	0,9985	3
0,40	0,4284	471	1,35	0,9438	85	2,30	0,9988	3
0,45	0,4755	450	1,40	0,9523	74	2,35	0,9991	2
0,50	0,5205	428	1,45	0,9597	64	2,40	0,9993	2
0,55	0,5633	406	1,50	0,9661	55	2,45	0,9995	1
0,60	0,6039	381	1,55	0,9716	47	2,50	0,9996	1
0,65	0,6420	358	1,60	0,9736	41	2,55	0,9997	1
0,70	0,6778	334	1,65	0,9804	34	2,60	0,9998	0
0,75	0,7112	309	1,70	0,9838	29	2,65	0,9998	1
0,80	0,7421	286	1,75	0,9867	24	2,70	0,9999	0
0,85	0,7707	262	1,80	0,9891	20	2,75	0,9999	0
0,90	0,7969	240	1,85	0,9911	17	2,80	0,9999	1
0,95	0,8209		1,90	0,9928		3,00	1,0000	

WARTOŚCI FUNKCJI $\phi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^x e^{-\frac{t^2}{2}} dt$

x	ϕ /x/	x	ϕ /x/	x	ϕ /x/	x	ϕ /x/
0,00	0,0000	0,32	0,1255	0,64	0,2389	0,96	0,3315
0,01	0,0040	0,33	0,1293	0,65	0,2422	0,97	0,3340
0,02	0,0080	0,34	0,1131	0,66	0,2454	0,98	0,3365
0,03	0,0210	0,35	0,1368	0,67	0,2486	0,99	0,3389
0,04	0,0160	0,36	0,1406	0,68	0,2517	1,00	0,3413
0,05	0,199	0,37	0,1443	0,69	0,2549	1,01	0,3438
0,06	0,0239	0,38	0,1480	0,70	0,2580	1,02	0,3461
0,07	0,0279	0,39	0,1517	0,71	0,2611	1,03	0,3485
0,08	0,0319	0,40	0,1554	0,72	0,2642	1,04	0,3508
0,09	0,0359	0,41	0,1591	0,73	0,2673	1,05	0,5531
0,10	0,0398	0,42	0,1628	0,74	0,2703	1,06	0,3554
0,11	0,0438	0,43	0,1664	0,75	0,2734	1,07	0,3577
0,12	0,0478	0,44	0,1700	0,76	0,2764	1,08	0,3599
0,13	0,0517	0,45	0,1736	0,77	0,2794	1,09	0,3621
0,14	0,0557	0,46	0,1772	0,78	0,2823	1,10	0,3643
0,15	0,0596	0,47	0,1808	0,79	0,2852	1,11	0,3665
0,16	0,0636	0,48	0,1844	0,80	0,2881	1,12	0,3686
0,17	0,0675	0,49	0,1879	0,81	0,2910	1,13	0,3708
0,18	0,0714	0,50	0,1916	0,82	0,2939	1,14	0,3729
0,19	0,0753	0,51	0,1950	0,83	0,2967	1,15	0,3749
0,20	0,0793	0,52	0,1985	0,84	0,2995	1,16	0,3770
0,21	0,0832	0,53	0,2019	0,85	0,3023	1,17	0,3790
0,22	0,0871	0,54	0,2054	0,86	0,3051	1,18	0,3810
0,23	0,0910	0,55	0,2088	0,87	0,3078	1,19	0,3830
0,24	0,0948	0,56	0,2123	0,88	0,3106		
0,25	0,0987	0,57	0,2157	0,89	0,3133	1,20	0,3849
0,26	0,1026	0,58	0,2190	0,20	0,3159	1,21	0,3869
0,27	0,1064	0,59	0,2224	0,91	0,3186	1,22	0,3883
0,28	0,1103	0,60	0,2257	0,92	0,3212	1,23	0,3907
0,29	0,1141	0,61	0,2291	0,93	0,3238		
0,30	0,1179	0,62	0,2324	0,94	0,3264	1,24	0,3925
0,31	0,1217	0,63	0,2357	0,95	0,3289	1,25	0,3944

x	Φ /x/	x	Φ /x/	x	Φ /x/	x	Φ /x/
1,26	0,3962	1,59	0,4441	1,92	0,4726	2,50	0,4938
1,27	0,3980	1,60	0,4452	1,93	0,4732	2,52	0,4941
1,28	0,3997	1,61	0,4463	1,94	0,4738	2,54	0,4945
1,29	0,4015	1,62	0,4474	1,95	0,4744	2,56	0,4948
1,30	0,4032	1,63	0,4484	1,96	0,4750	2,58	0,4951
1,31	0,4049	1,64	0,4495	1,97	0,4756	2,60	0,4953
1,32	0,4066	1,65	0,4505	1,98	0,4761	2,62	0,4956
1,33	0,4082	1,66	0,4515	1,99	0,4767	2,64	0,4959
1,34	0,4099	1,67	0,4525	2,00	0,4772	2,66	0,4961
1,35	0,4115	1,68	0,4535	2,02	0,4789	2,68	0,4963
1,36	0,4131	1,69	0,4545	2,04	0,4793	2,70	0,4965
1,37	0,4147	1,70	0,4554	2,06	0,4803	2,72	0,4976
1,38	0,4162	1,71	0,4564	2,08	0,4812	2,74	0,4969
1,39	0,4177	1,72	0,4573	2,10	0,4821	2,76	0,4971
1,40	0,4192	1,73	0,4582	2,12	0,4830	2,78	0,4973
1,41	0,4207	1,74	0,4591	2,14	0,4838	2,80	0,4974
1,42	0,4222	1,75	0,4599	2,16	0,4846	2,82	0,4976
1,43	0,4236	1,76	0,4608	2,18	0,4854	2,84	0,4977
1,44	0,4251	1,77	0,4616	2,20	0,4861	2,86	0,4979
1,45	0,4265	1,78	0,4625	2,22	0,4868	2,88	0,4980
1,46	0,4279	1,79	0,4633	2,24	0,4875	2,90	0,4981
1,47	0,4292	1,80	0,4641	2,26	0,4881	2,92	0,4982
1,48	0,4306	1,87	0,4649	2,28	0,4887	2,94	0,4984
1,49	0,4319	1,82	0,4656	2,30	0,4893	2,96	0,4985
1,50	0,4332	1,83	0,4664	2,32	0,4898	2,98	0,4986
1,51	0,4345	1,84	0,4671	2,34	0,4904	3,00	0,49865
1,52	0,4357	1,85	0,4678	2,36	0,4909	2,30	0,49931
1,53	0,4370	1,86	0,4686	2,38	0,4913	3,40	0,49966
1,54	0,4382	1,87	0,4693	2,40	0,4918	3,60	0,499841
1,55	0,4394	1,88	0,4699	2,42	0,4922	3,80	0,499928
1,56	0,4406	1,89	0,4706	2,44	0,4927	4,00	0,499968
1,57	0,4418	1,90	0,4713	2,46	0,4931	4,50	0,499997
1,58	0,4429	1,91	0,4719	2,48	0,4934	5,00	0,499997

WARTOŚCI ZREDUKOWANEJ FUNKCJI LAPPAC`A $\hat{\phi}(x) = \phi(\varrho x)$

x	$\hat{\phi}$ /x/	Δ	x	$\hat{\phi}$ /x/	Δ	x	$\hat{\phi}$ /x/	Δ
0,00	0,0000	54	0,40	0,2127	52	0,80	0,4105	47
0,01	0,0054	54	0,41	0,2179	51	0,81	0,4152	46
0,02	0,0108	53	0,42	0,2230	52	0,82	0,4198	46
0,03	0,0161	54	0,43	0,2282	52	0,83	0,4244	46
0,04	0,0215	54	0,44	0,2334	51	0,84	0,4290	46
0,05	0,0269	54	0,45	0,2385	51	0,85	0,4336	45
0,06	0,0323	54	0,46	0,2436	52	0,86	0,4381	46
0,07	0,0377	53	0,47	0,2488	51	0,87	0,4427	45
0,08	0,0430	54	0,48	0,2539	51	0,88	0,4472	45
0,09	0,0484	54	0,49	0,2590	51	0,89	0,4517	45
0,10	0,0538	53	0,50	0,2641	51	0,90	0,4562	44
0,11	0,0591	54	0,51	0,2692	50	0,91	0,4606	45
0,12	0,0645	54	0,52	0,2742	51	0,92	0,4651	44
0,13	0,0699	53	0,53	0,2793	50	0,93	0,4695	44
0,14	0,0752	54	0,54	0,2843	50	0,94	0,4739	44
0,15	0,0806	53	0,55	0,2893	51	0,95	0,4783	44
0,16	0,0899	54	0,56	0,2944	50	0,96	0,4827	43
0,17	0,0913	53	0,57	0,2994	50	0,97	0,4870	44
0,18	0,0966	54	0,58	0,3044	49	0,98	0,4914	43
0,19	0,1020	53	0,59	0,3093	50	0,99	0,4957	43
0,[illegible]0	0,1073	53	0,60	0,3143	49	1,00	0,5000	43
0,21	0,1126	54	0,61	0,3192	50	1,01	0,5043	42
0,22	0,1130	53	0,62	0,3242	49	1,02	0,5085	43
0,23	0,1233	53	0,63	0,3291	49	1,03	0,5128	42
0,24	0,1286	53	0,64	0,3340	49	1,04	0,5170	42
0,25	0,1339	53	0,65	0,3389	49	1,05	0,5212	42
0,26	0,1392	53	0,66	0,3438	49	1,06	0,5254	41
0,27	0,1445	53	0,67	0,3487	48	1,07	0,5295	42
0,28	0,1498	53	0,68	0,3535	49	1,08	0,5337	41
0,29	0,1551	53	0,69	0,3584	48	1,09	0,5378	41
0,30	0,1604	52	0,70	0,3632	48	1,10	0,5419	41
0,31	0,1656	53	0,71	0,3680	48	1,11	0,5460	40

x	$\hat{\Phi}$ /x/	Δ	x	$\hat{\Phi}$ /x/	Δ	x	$\hat{\Phi}$ /x/	Δ
0,32	0,1709	52	0,72	0,3728	48	1,12	0,5500	40
0,33	0,1761	53	0,73	0,3776	47	1,13	0,5540	40
0,34	0,1814	52	0,74	0,3823	47	1,14	0,5580	40
0,35	0,1866	52	0,75	0,3870	48	1,15	0,5620	40
0,36	0,1918	53	0,76	0,3918	47	1,16	0,8660	40
0,37	0,1971	52	0,77	0,3955	47	1,17	0,5700	39
0,38	0,2023	52	0,78	0,4012	47	1,18	0,5739	39
0,39	0,2075	52	0,79	0,4059	46	1,19	0,7778	39
0,40	0,2127		0,80	0,4105		1,20	0,5817	
1,20	0,5817	39	1,60	0,7195	30	2,00	0,8227	21
1,21	0,5856	38	1,61	0,7225	30	2,01	0,8248	21
1,22	0,5894	38	1,62	0,7255	29	2,02	0,8269	22
1,23	0,5932	38	1,63	0,7284	29	2,03	0,8291	21
1,24	0,5970	38	1,64	0,7313	29	2,04	0,8312	20
1,25	0,6008	38	1,65	0,7342	29	2,05	0,8332	21
1,26	0,6046	37	1,66	0,7371	29	2,06	0,8353	20
1,27	0,6083	37	1,67	0,7400	29	2,07	0,8373	21
1,28	0,6120	37	1,68	0,7429	28	2,08	0,8394	20
1,29	0,6157	37	1,69	0,7457	28	2,09	0,8414	20
1,30	0,6194	37	1,70	0,7485	27	2,10	0,8434	19
1,31	0,6231	36	1,71	0,7512	28	2,11	0,8453	20
1,32	0,6267	36	1,72	0,7540	27	2,12	0,8473	19
1,33	0,6303	36	1,73	0,7567	27	2,13	0,8492	19
1,34	0,6339	36	1,74	0,7594	27	2,14	0,8511	19
1,35	0,6375	35	1,75	0,7621	27	2,15	0,8530	19
1,36	0,6410	35	1,76	0,7648	27	2,16	0,8549	18
1,37	0,6445	35	1,77	0,7675	26	2,17	0,8567	18
1,38	0,6480	35	1,78	0,7701	26	2,18	0,8585	19
1,39	0,6515	35	1,79	0,7727	26	2,19	0,8604	18
1,40	0,6550	34	1,80	0,7753	26	2,20	0,8622	17

x	$\hat{\Phi}$/x/	Δ	x	$\hat{\Phi}$/x/	Δ	x	$\hat{\Phi}$/x/	Δ
1,41	0,6584	34	1,81	0,7779	25	2,21	0,8639	18
1,42	0,6618	34	1,82	0,7804	25	2,22	0,0657	18
1,43	0,6652	34	1,83	0,7829	25	2,23	0,8675	17
1,44	0,6686	33	1,84	0,7854	25	2,24	0,8692	17
1,45	0,6719	34	1,85	0,7879	25	2,25	0,8709	16
1,46	0,6753	33	1,86	0,7904	24	2,26	0,8725	17
1,47	0,6786	33	1,87	0,7928	24	2,27	0,8742	17
1,48	0,6819	32	1,88	0,7952	24	2,28	0,3759	17
1,49	0,6851	32	1,89	0,7976	24	2,29	0,8776	16
1,50	0,6883	32	1,90	0,8000	24	2,30	0,8792	16
1,51	0,6915	32	1,91	0,8024	23	2,31	0,8808	16
1,52	0,6947	32	1,92	0,8047	23	2,32	0,8824	16
1,53	0,6979	32	1,93	0,8070	23	2,33	0,8840	15
1,54	0,7011	31	1,94	0,8093	23	2,34	0,8855	16
1,55	0,7042	31	1,95	0,8116	22	2,35	0,8871	15
1,56	0,7973	31	1,96	0,8138	23	2,36	0,8886	15
1,57	0,7104	30	1,97	0,8161	22	2,37	0,8901	15
1,58	0,7134	31	1,98	0,8183	22	2,38	0,8916	14
1,59	0,7165	30	1,99	0,8205	22	2,39	0,8930	15
1,60	0,7195		2,00	0,8227		2,40	0,8945	
2,40	0,8945	15	2,80	0,9410	9	3,20	0,9691	5
2,41	0,8960	14	2,81	0,4919	9	3,21	0,9696	5
2,42	0,8974	14	2,82	0,9428	9	3,22	0,9701	5
2,43	0,8988	14	2,83	0,9437	9	3,23	0,9706	5
2,44	0,9002	14	2,84	0,9446	8	3,24	0,9711	5
2,45	0,9016	13	2,85	0,9454	9	3,25	0,9716	5
2,46	0,9029	14	2,86	0,9463	8	3,26	0,9721	5
2,47	0,9043	13	2,87	0,9471	8	3,27	0,9726	5
2,48	0,9056	13	2,88	0,9479	8	3,28	0,9731	4
2,49	0,9069	13	2,89	0,9487	8	3,29	0,9735	5
2,50	0,9082	13	2,90	0,9495	8	3,30	0,9740	4

x	$\hat{\Phi}$ /x/	Δ	x	$\hat{\Phi}$ /x/	Δ	x	$\hat{\Phi}$ /x/	Δ
2,51	0,9095	13	2,91	0,0503	8	3,31	0,9744	5
2,52	0,9108	13	2,92	0,9511	8	3,32	0,9749	4
2,53	0,9121	12	2,93	0,9519	7	3,33	0,9753	4
2,54	0,9133	13	2,94	0,9526	8	3,34	0,9757	4
2,55	0,9146	12	2,95	0,9534	7	3,35	0,9761	5
2,56	0,9168	12	2,96	0,9541	7	3,36	0,9766	4
2,57	0,9170	12	2,97	0,9548	8	3,37	0,9770	4
2,58	0,9182	11	2,98	0,9556	7	3,38	0,9774	4
2,59	0,9193	12	2,99	0,9563	7	3,39	0,9778	4
2,60	0,9205	12	3,00	0,9570	7	3,40	0,9782	36
2,61	0,9217	11	3,01	0,9577	7	3,50	0,9818	30
2,62	0,9228	11	3,02	0,9584	6	3,60	0,9848	26
2,63	0,9239	11	3,03	0,9590	7	3,70	0,9874	22
2,64	0,9250	11	3,04	0,9597	6	3,80	0,9896	19
2,65	0,9251	11	3,05	0,9693	7	3,90	0,9915	15
2,66	0,9272	11	3,06	0,9610	6	4,00	0,9930	13
2,67	0,9283	10	3,07	0,9616	6	4,10	0,9943	11
2,68	0,9293	11	3,08	0,9622	7	4,20	0,9954	9
2,69	0,9304	10	3,09	0,7629	6	4,30	0,9963	7
2,70	0,9314	10	3,10	0,9635	6	4,40	0,9970	6
2,71	0,9324	10	3,11	0,9641	6	4,50	0,9976	5
2,72	0,9334	10	3,12	0,9647	5	4,60	0,9981	4
2,73	0,9344	10	3,13	0,9652	6	4,70	0,9985	3
2,74	0,9354	10	3,14	0,9668	6	4,80	0,9988	3
2,75	0,9364	9	3,15	0,9664	5	4,90	0,9991	2
2,76	0,9373	10	3,16	0,9669	6	5,00	0,9993	1
2,77	0,9383	9	3,17	0,9675	5	5,10	0,9994	2
2,78	0,9392	9	3,18	0,9680	6	5,20	0,9996	1
2,79	0,9401	9	3,19	0,9686	5	5,30	0,9997	0
2,80	0,9410		3,20	0,9691		5,40	0,9997	

Algebra.

Potęgowanie.

a/ $a_n = a \cdot a \cdot a \,.......$ /n razy/;
a - podstawa /liczba potęgowania/; n - wykładnik potęgi.

b/ dla $n > 0$ $0^n = 0$; dla $n < 0$ $0^n = \infty$
$1^n = 1$

c/ $a^0 = a^{n-n} = \frac{a^n}{a^n} = 1$; $a^1 = a$;

dla $a = 1$, $a^\infty = 1$, dla $a > 1$, $a^\infty = \infty$; $\frac{1}{a^\infty} = 0$

dla $0 < a < 1$, $a^\infty = 0$; $\frac{1}{a^\infty} = \infty$

d/ $/+ a/^{2n} = + a^{2n}$ np. $/+ 3/^2 = 9$
$/ - a/^{2n} = + a^{2n}$ $/- 3/^4 = 81$

2n oznacza liczbę parzystą

e/ $/+ a/^{2n+1} = + a^{2n+1}$ $/+ 3/^3 = 27$
$/ - a/^{2n+1} = - a^{2n+1}$ $/- 3/^3 = - 27$
2n + 1 oznacza liczbę nieparzystą

f/ $a^m \cdot a^n = a^{m+n}$ $2^2 \cdot 2^5 = 2^7 = 128$

g/ $a^m : a^n = a^{m-n}$; $3^7 : 3^5 = 3^2$; $3^2 : 3^7 = 3^{-5} = \frac{1}{3^5} = \frac{1}{243}$

$a^{-n} = \frac{1}{a^n} = \left(\frac{1}{a}\right)^n$ $5^{-1} = \frac{1}{5}$; $10^{-5} = \frac{1}{10^5} = 0{,}00001$

h/ $a^n \cdot b^n = /a \cdot b/^n$ $5^3 \cdot 4^3 = /5 \cdot 4/^3 = 20^3 = 8000$

$\frac{a^n}{b^n} = \frac{a}{b}^{\,n}$ $\frac{12^2}{3^2} = \left(\frac{12}{3}\right)^2 = 4^2 = 16$

i/ $/a^m/^n = a^{m \cdot n}$ $/3^5/^2 = 3^{10}$

Wzory e i są ważne dla każdej wartości m i n - dodatniej, ujemnej lub ułamkowej.

j/ $/a + b/^2 = a^2 + 2ab + b^2$; $/a - b/^2 = a^2 - 2ab + b^2$

k/ $/a + b/^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$
$/a - b/^3 = a^3 - 3a^2b + 3ab^2 - b^3$

l/ $/a + b/ /a + c/ = a^2 + ab + ac + bc = a^2 + a /b + c/ + bc$

m/ $/a + b/ /a - b/ = a^2 - b^2$

n/ $a^3 + b^3 = /a + b/ /a^2 - ab + b^2/$

$a^3 - b^3 = /a - b/ /a^2 + ab + b^2/$

Przykład: Obliczyć $82^2 - 75^2$. Wykorzystując zależność m/ otrzymamy:

$$82^2 - 75^2 = /82 + 75/ /82 - 75/ = 157 \cdot 7 = 1099$$

Dwumian Newtona:

$$/a + b/^n = a^n + na^{n-1}b + \frac{n/n - 1/}{1 \cdot 2} a^n - 2b2 + \frac{n /n-1/ /n - 2}{1 \cdot 2 \cdot 3} a^{n-3}b^3 + \dots + nab^{n-1} + b^n,$$

gdzie n - dowolna liczba całkowita.

Pierwiastkowanie.

Jeżeli $a^n = b$, to $a = \sqrt[n]{b} = b^{\frac{1}{n}}$

a - pierwiastek, b - liczba pierwiastkowana, n- stopień pierwiastka.

a/ $\sqrt[n]{1} = 1$; $\sqrt[n]{0} = 0$;

b/ $\sqrt[n]{a \cdot b} = \sqrt[n]{a} \cdot \sqrt[n]{b}$; np. $\sqrt[3]{64 \cdot 125} = \sqrt[3]{64} \cdot \sqrt[3]{125} = 4 \cdot 5 = 20$

c/ $\sqrt[n]{\frac{a}{b}} = \frac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}}$ np. $\sqrt[3]{\frac{64}{125}} = \frac{\sqrt[3]{64}}{\sqrt[3]{125}} = \frac{4}{5}$

d/ $\sqrt[n]{\frac{1}{a}} = \frac{1}{\sqrt[n]{a}} = \frac{1}{a^{1/n}} = a^{-1/n}$ np. $\sqrt{\frac{1}{64}} = \frac{1}{\sqrt{64}} = \frac{1}{8}$

e/ $\sqrt[n]{a^m} = a^{\frac{m}{n}}$ np. $\sqrt[3]{a^6} = a^{\frac{6}{3}} = a^2$

f/ $\sqrt[n]{a^{m \cdot n}} = a^{\frac{m \cdot n}{n}} = a^m$;

g/ $\sqrt{+ a^2} = \pm a$;

h/ $\sqrt[2n+1]{+ a} = + a^{\frac{1}{2n+1}}$

i/ $\sqrt[m]{\sqrt[n]{a^x}} = a^{\frac{x}{m \cdot n}}$

j/ $\sqrt[2n]{a} = \pm a^{\frac{1}{2n}}$

k/ $\sqrt[2n-1]{- a} = - a^{\frac{1}{2n+1}}$

Logarytmowanie.

Logarytm liczby a przy danej podstawie b nazywa się taki wykładnik x potęgi, do której należy podnieść podstawę b, aby otrzymać liczbę logarytmowaną a.

Jeżeli $b^x = a$, to

$$\log_b^a = x$$

Czytamy: logarytmem liczby a przy podstawie b jest x.

Własności logarytmów:

$\log_b 1 = 0$, gdyż $b^0 = 1$ $\qquad$ $\log_2 8 = 3$, gdyż $2^3 = 8$;
$\log_b b = 1$, gdyż $b^1 = b$ $\qquad$ $\log_3 3 = 1$, gdyż $3^1 = 3$;
$\log_b 0 = -\infty$, gdyż $b^{-\infty} = 0$; $\qquad$ $\log_4 0 = -\infty$, gdyż $4^{-\infty} = 0$.

Prawidła logarytmowania

Działanie	sprowadza się do	log x =
mnożenie $x = a \cdot b$	dodawania	$\log /a \cdot b/ =$ $= \log a + \log b$
dzielenie $x = \frac{a}{b}$	odejmowania	$\log\left(\frac{a}{b}\right) = \log a - \log b$
potęgowanie $x = a^n$	mnożenia	$\log a^n = n \log a$
pierwiastkowanie $x = \sqrt[n]{a}$	dzielenia	$\log \sqrt[n]{a} = \frac{1}{n} \log a$

Logarytmem dziesiętnym liczby a nazywamy logarytm tej liczby przy podstawie 10 i piszemy w postaci

$$\log\ 10^{a} = \lg a$$

Logarytmy naturalne mają za podstawę liczbę przestępną e określoną jako sumę szeregu liczb Nepera

$$e = a + \frac{1}{1} + \frac{1}{1 \cdot 2} + \frac{1}{1 \cdot 2 \cdot 3} + \ldots = 2{,}71828$$

Logarytmy naturalne piszemy w postaci

$$\log_e a = \ln a$$

Zamiana logarytmów naturalnych na zwyczajne

$$\ln a = \frac{\lg a}{\lg e} = \frac{\lg a}{0{,}434294} = 2{,}302585 \lg a.$$

Szukany wykładnik potęgowy nazywamy logarytmem, a wynik potęgowania liczbą logarytmowaną:

liczba logarytmowana

1. Wyrażenie $\log_2 8 = 3$ ← logarytm

podstawa logarytmu

odczytujemy w sposób następujący: logarytm z ośmiu przy zasadzie dwa równa się trzy.

$\log_2 8 = 3$, bo $2^3 = 8$; $\log_3 81 = 4$ bo, $3^4 = 81$;
$\log_{10} 100 = 2$, bo $10^2 = 100$;

2. Do obliczeń w technice i fizyce najczęściej stosuje się tzw. logarytmy dziesiętne, tj. logarytmy o podstawie 10. Oznacza się je skrótem lg, nie pisząc z zasady 10.
Np. lg 1000 = 3 /bo $10^3 = 1000$/;

$$\lg 100 = 2;\ \lg 10 = 1;\ \lg 1 = 0$$

Tablice matematyczne podają wartości logarytmów dziesiętnych

$\lg 325 = \underbrace{2}_{\text{cecha}},\underbrace{5119}_{\text{mantysa}}$

Wartość logarytmu dziesiętnego składa się z liczby całkowitej tzw. cechy, oraz ułamka dziesiętnego - zwanego mantysą.

Cecha jest zawsze liczbą całkowitą: dodatnią, ujemną lub równą zeru i obliczamy ją według niżej podanych prawideł. Mantysy zaś są zawsze dodatnie i znajdujemy je z tablic logarytmicznych. Mantysa odczytana z tablic nie zależy od ilości miejsc całkowitych lub dziesiętnych liczby logarytmowanej, a więc np. liczby 325; 32,5; 0,325 itd. mają jednakową mantysę 0,5119. Logarytmy tych liczb różnią się jednak cechą, którą obliczamy w sposób następujący:

a/ cecha logarytmu liczby większej od jedności jest dodatnią i o jeden mniejsza od ilości cyfr części przedstawiającej liczbę całkowitą;

a więc cecha liczby 325 wynosi 2, a logarytm 2,5119; cecha liczby 32,5 wynosi 1, a logarytm 1,5119, cecha zaś liczby 3,25 wynosi 0, a logarytm 0,5119;

b/ cecha logarytmu liczby mniejszej od 1, czyli ułamka dziesiętnego jest ujemna i zawiera tyle jedności, ile zer w liczbie logarytmowanej poprzedza pierwszą cyfrę znaczącą /to zn. różną od zera/.

np. cecha liczby 0,325 wynosi -1, liczby 0,0325 wynosi -2 itd.

Cechy ujemne zapisujemy w ten sposób: $\bar{1}$, $\bar{2}$ itd., a czynimy to w celu podkreślenia, że w obliczonym logarytmie ujemna jest tylko cecha, a mantysa jest zawsze dodatnia

np. $\lg 0,325 = \underbrace{\bar{1}}_{\text{liczb.ujemn.}},\ \underbrace{5119}_{\text{liczb.dodatnia}}$ $\qquad \lg 0,0325 = \bar{2},5119$

Równania 2 stopnia z jedną niewiadomą.

Równanie drugiego stopnia /zwane również równaniem kwadratowym/ charakteryzuje się tym, że niewiadoma x występuje w nim w drugiej potędze.

1. Każde równanie drugiego stopnia da się na ogół sprowadzić do następującej postaci:

$$ax^2 + bx + c = 0$$

gdzie x jest niewiadomą, natomiast a, b, c liczbami posiadającymi dowolne lecz określone wartości.

Równanie $ax^2 + bx + c = 0$ posiada:

a/ dwa pierwiastki

$$x_1 = \frac{-b + \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}; \quad x_2 = \frac{-b - \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

pod warunkiem, że wyrażenie podpierwiastkowe zwane wyróżnikiem równania $\Delta = b^2 - 4ac > 0$ / Δ czytaj delta/ np. $3x^2 - 6x + 6 = x^2 - x + 3$;

$3x^2 - 6x + 6 - x^2 + x - 3 = 0$; $2x^2 - 5x + 3 = 0$

$$x_1 = \frac{5 \pm \sqrt{25 - 24}}{4} = \frac{5 + 1}{4} = \frac{6}{4} = 1\frac{1}{2};$$

$$x_2 = \frac{5 - 1}{4} = 1;$$

b/ jeden podwójny pierwiastek

$$x_1 = x_2 = -\frac{b}{2a} \quad \text{gdy} \quad = b^2 - 4ac = 0;$$

np. $x^2 - 6x + 9 = 0$; $\Delta = b^2 - 4ac = 36 - 36 = 0$;

$$x_1 = x_2 = \frac{6}{2} = 3$$

c/ w przypadku, gdy $\Delta = b^2 - 4ac < 0$ wówczas równanie pierwiastków rzeczywistych nie posiada:

np. $2x^2 - x + 8 = 0$; $\Delta = 1 - 64 < 0$;

2. Gdy równanie kwadratowe posiada postać niepełną, wówczas wartość pierwiastków obliczamy w sposób uproszczony np:

a/ $ax^2 + c = 0$; $ax^2 = -c$; $x^2 = -\frac{c}{a}$; $x_{1,2} = \pm\sqrt{-\frac{c}{a}}$;

np: $x^2 - 9 = 0$; $x_{1,2} = \pm\sqrt{9} = \pm 3$; $x_1 = 3$; $x_2 = -3$

b/ $ax^2 + bx = 0$; $x\,/ax + b/ = 0$; $x_1 = 0$; $ax_2 + b = 0$;

$$x_2 = \frac{-b}{a};$$

Na przykład: $3x^2 - 2x = 0$; $x/3x - 2/ = 0$; $x_1 = 0$;

$$3x_2 - 2 = 0;\quad 3x_2 = 2;\quad x_2 = \frac{2}{3}.$$

3. Równanie w postaci ułamkowej uwalniamy od ułamków mnożąc je przez NWW mianowników.

$$\frac{x - 3}{3x+1} + \frac{2x + 1}{x - 2} = 7$$

$$/x - 3/\ /x - 2/ + /2x + 1/\ /3x + 1/ = 7\ /3x + 1/\ /x - 2/$$

a stąd $2x^2 - 5x - 3 = 0$

$$x_{1,2} = \frac{5 \pm\sqrt{25 + 24}}{4} = \frac{5 \pm 7}{4};\quad x_1 = 3;\quad x_2 = -\frac{1}{2}$$

4. Równanie w postaci niewymiernej rozwiązujemy zostawiając wyrażenie pierwiastkowe po jednej stronie równania, a pozostałe wyrazy przenosząc na drugą stronę. Po czym obie strony podnosimy do potęgi pierwiastka.

$$\sqrt{x + 2} + x = 4;$$

$$\sqrt{x + 2} = 4 - x;\quad x + 2 = /4 - x/^2;\quad x^2 - 9x + 14 = 0;$$

$$x_1 = 2;\quad x_2 = 7$$

Równania wykładnicze.

Równanie wykładnicze jest to równanie, w którym niewiadoma występuje w wykładniku potęgi. Rozwiązujemy je logarytmując

$$3^{3x + 1} = 2187$$

$$/3x + 1/\ \lg 3 = \lg 2187;\quad 3x + 1 = \frac{\lg 2187}{\lg 3} = \frac{3.33984}{0,47712} = 7$$

/wartości logarytmów wzięto z tablicy/

$$3x + 1 = 7;\quad 3x = 6;\quad x = 2$$

Równania logarytmiczne.

Równanie logarytmiczne jest to równanie, w którym nie -

wiadoma występuje pod znakiem logarytmu. Równania tego typu rozwiązujemy wykorzystując prawidła logarytmowania

$$\lg/x + 3/ - \lg/x + 1/ = 0{,}301$$

$\lg \frac{x+3}{x+1} = 0{,}301$; oznaczając $\frac{x+3}{x+1} = n$, znajdziemy z tablicy dla $\lg n = 0{,}301$; $n = 2$

$$\frac{x+3}{x+1} = 2; \quad x + 3 = 2 \ /x+1/; \quad x = 1.$$

Ciągi

Zbiór liczb uszeregowanych według pewnego dowolnego prawa nazywamy ciągiem

np. 1, 2, 3, 4...; 2, 4, 6, 8, 10, 12...; 3, 6, 12, 24, 48...; 100, 125, 150, 175...; $1^2, 2^2, 3^2, 4^2$ ...; 1, 0,5, 0,25, 0,125,...; przy czym liczby tworzące ciąg nazywamy wyrazami ciągu.

a/ Postęp arytmetyczny

Ciąg, w którym każdy wyraz jest większy /lub mniejszy/ od poprzedniego o tę samą wielkość d zwaną różnicą ciągu, nazywamy postępem arytmetycznym. Np. 10, 15, 20, 25, 30...;

P r z y k ł a d. Średnice normalne nitów:

$$d_n = 10, 13, 16, 19, 22, 25, 28, 31, 34, 37.$$

Jeśli oznaczymy pierwszy wyraz postępu przez a_1, dowolny wyraz przez a_n, ilość wyrazów między a_1 i a_n przez n, różnicę postępu przez r, przez S_n - sumę n wyrazów, wówczas:

1. wzór na n-ty wyraz postępu:

$$a_n = a_{n-1} + r$$

lub

$$a_n = a_1 + /n - 1/ r$$

2. suma n wyrazów postępu

$$S_n = \frac{(a_1 + a_n) \cdot n}{2}$$

b/ Postęp geometryczny.

Ciąg, w którym każdy wyraz jest większy /lub mniejszy/ od poprzedniego o pewną stałą ilość razy q zwaną ilorazem /współczynnikiem/ ciągu nazywamy postępem geometrycznym. Np. 10, 50, 250, 1250.......

1. Wzór na dowolny wyraz postępu

$$a_n = a_{n-1} \cdot q$$

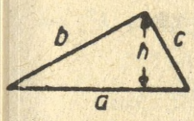
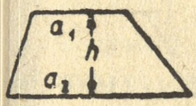
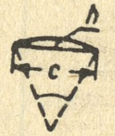
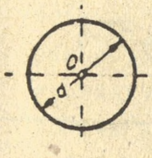
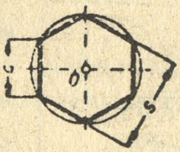
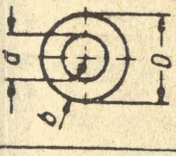
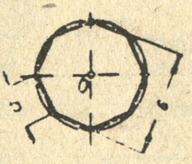
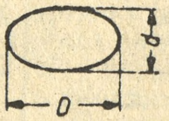
lub $$a_n = a_1 \cdot q^{n-1}$$

2. Suma n wyrazów postępu

$$S_n = \frac{a_1(q^n - 1)}{q-1}$$

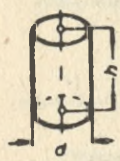
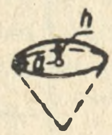
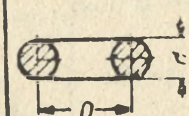
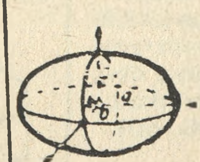
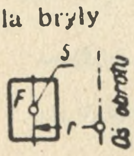
Planimetria

F — powierzchnia, U — obwód, S — położenie środka ciężkości, $\pi = 3{,}1416$

Figura płaska	Wzory	Figura płaska	Wzory
Trójkąt 	$F = \frac{ah}{2}$ $U = a + b + c$	Wycinek koła 	$F = \frac{\varphi \cdot r^2}{2}$ φ — w mierze łukowej $b = \varphi r$
Trapez 	$F = \frac{a_1 + a_2}{2} h$	Odcinek koła 	$F = \frac{r^2}{2} (\varphi - \sin\varphi)$ φ — w mierze łukowej $c = 2r \sin \frac{\varphi}{2}$ $h = \frac{c}{2} \operatorname{tg} \frac{\varphi}{4} =$ $= 2r \sin^2 \frac{\varphi}{4}$
Równoległobok 	$F = ah = ab \sin\gamma$ $U = 2a + 2b =$ $= 2\left(a + \frac{h}{\sin\gamma}\right)$		
Koło 	$F = \frac{\pi d^2}{4} \approx 0{,}785\, d^2$ $U = \pi d \approx 3{,}142\, d$	Sześciokąt równoboczny 	$F = s^2 \frac{\sqrt{3}}{2} \approx 0{,}866\, s^2$ $a = \frac{2s}{\sqrt{3}} \approx 1{,}1547\, s$ $U = 6a$
Pierścień kołowy 	$F = \frac{\pi}{4} (D^2 - d^2) =$ $= \frac{\pi}{2} (D + d) b$	Ośmiokąt równoboczny 	$F \approx 0{,}828\, s^2$ $a \approx 1{,}0824\, s$ $U = 8a$
Reguła Guldina dla powierzchni 	$F = 2\pi r L$ (F — powierzchnia płaszczyzny powstałej z obrotu odcinka L dookoła osi)	Elipsa 	$F = \frac{\pi D d}{4} \approx 0{,}785\, Dd$ $U = \frac{\pi}{2} (D + d) \approx$ $\approx 1{,}5708\, (D + d)$

Stereometria

F — powierzchnia całkowita, M — powierzchnia pobocznicy, V — objętość, P — powierzchnia podstawy, S — położenie środka ciężkości, $\pi = 3{,}1416$

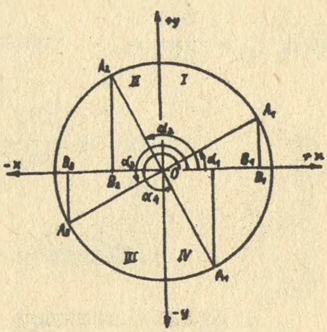
Bryła	Wzory	Bryła	Wzory
Walec kołowy prosty 	$M = \pi dh$ $V = \frac{\pi d^2 h}{4} \approx 0{,}785\, d^2 h$ $F = \pi d(d/2 + d)$	Odcinek kuli 	$V = \frac{\pi h}{6}(3a^2 + h^2) =$ $= \pi h^2 (3r - h)/3$ $M = 2\pi rh = \pi(a^2 + h^2)$
Ostrosłup prosty 	$V = \frac{Ph}{3}$	Wycinek kuli 	$V = \frac{2}{3}\pi r^2 h \approx 2{,}0944\, r^2 h$ $F = \pi r(2h + a)$
Stożek kołowy prosty 	$V = \pi d^2 h/12 \approx$ $\approx 0{,}2618\, d^2 h$ $M = \pi dp/2 =$ $= \pi d\sqrt{d^2 + 4h^2}/4 \approx$ $\approx 0{,}785\, d\sqrt{d^2 + 4h^2}$	Pas kulisty 	$V = \frac{\pi h}{6}(3a^2 + 3b^2 + h^2)$ $M = 2\pi rh$
Stożek kołowy ścięty 	$V = \pi h(D^2 + Dd + d^2)/12 \approx$ $\approx 0{,}2618h\,(D^2 + Dd + d^2)$ $M = \pi(D + d)p/2$	Pierścień walcowy (torus) 	$V = \frac{\pi^2}{4} Dd^2 \approx 2{,}4674 Dd^2$ $F = \pi^2 Dd \approx 9{,}8696\, Dd$
Kula 	$V = \frac{\pi d^3}{6} \approx 0{,}5236\, d^3$ $F = \pi d^2$	Elipsoida 	$V = \frac{4}{3}\pi abc \approx 4{,}1888\, abc$
Reguła Guldina dla bryły 	$V = 2\pi rF$ (V — objętość bryły powstałej z obrotu powierzchni F dookoła osi) (S — środek ciężkości powierzchni F)		

TRYGONOMETRIA

A. FUNKCJE TRYGONOMETRYCZNE

1. Koło funkcji trygonometrycznych

Układ osi współrzędnych xy wespół z dowolnym kołem posiadającym środek w początku układu O oraz ruchomym promieniem wodzącym OA /OA_1, OA_2.../ nazywamy kołem funkcji trygonometrycznych /rys. 1/.



Rys. 1.

Koło to posiada 4 ćwiartki. Ćwiartka I w zakresie $0^o \div 90^o$, ćwiartka II - 90^o do 180^o, ćwiartka III- 180^o do 270^o i ćwiartka IV-270^o do 360^o.

Rzędne punktu przecięcia promienia wodzącego z okręgiem koła /AB/ posiadają wartość dodatnią w ćwiartce I i II, a ujemną w ćwiartkach III i IV, odcięte /OB/ zaś posiadają wartości dodatnie w ćwiartkach I i IV, a ujemne w ćwiartkach II i III.

Promień koła OA /OA_1, OA_2.../ posiada wartość stałą i zawsze dodatnią.

2. Funkcja sinus.

Stosunek rzędnej punktu przecięcia promienia wodzącego z okręgiem koła do promienia tego koła nazywamy sinusem kąta α

$$\sin\alpha = \frac{AB}{OA}$$

$$\sin\alpha_1 = \frac{A_1B_1}{OA_1}; \quad \sin\alpha_2 = \frac{A_2B_2}{OA_2}; \quad \sin\alpha_3 = \frac{A_3B_3}{OA_3};$$

$$\sin\alpha_4 = \frac{A_4B_4}{OA_4}; \qquad -1 \leqslant \sin\alpha \leqslant +1$$

3. Funkcja cosinus.

Stosunek odciętej punktu przecięcia promienia wodzącego z okręgiem koła do promienia tego koła nazywamy cosinusem kąta α.

$$\cos\alpha = \frac{OB}{OA}$$

$$\cos\alpha_1 = \frac{OB_1}{OA_1}; \quad \cos\alpha_2 = \frac{OB_2}{OA_2}; \quad \cos\alpha_3 = \frac{OB_3}{OA_3};$$

$$\cos\alpha_4 = \frac{OB_4}{OA_4} \qquad -1 \leqslant \cos\alpha \leqslant +1$$

4. Funkcja tanges.

Stosunek rzędnej punktu przecięcia promienia wodzącego z okręgiem koła, do odciętej tego punktu nazywamy tangensem kąta α.

$$\operatorname{tg}\alpha = \frac{AB}{OB}$$

$$\operatorname{tg}\alpha_1 = \frac{A_1B_1}{OB_1}; \quad \operatorname{tg}\alpha_2 = \frac{A_2B_2}{OB_2}; \quad \operatorname{tg}\alpha_3 = \frac{A_3B_3}{OB_3}; \quad \operatorname{tg}\alpha_4 = \frac{A_4B_4}{OB_4}$$

$$-\infty < \operatorname{tg}\alpha < +\infty$$

5. Funkcja cotangens.

Stosunek odciętej punktu przecięcia promienia wodzącego z okręgiem koła do rzędnej tego punktu nazywamy cotangensem kąta α.

$$\operatorname{ctg}\alpha = \frac{OB}{AB}$$

$$\operatorname{ctg}\alpha_1 = \frac{OB_1}{A_1B_1}; \quad \operatorname{ctg}\alpha_2 = \frac{OB_2}{A_2B_2}; \quad \operatorname{ctg}\alpha_3 = \frac{OB_3}{A_3B_3}; \quad \operatorname{ctg}\alpha_4 = \frac{OB_4}{A_4B_4}$$

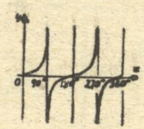
$$-\infty < \operatorname{ctg}\alpha < +\infty$$

6. Zmienność funkcji trygonometrycznych

Ćwiartka i kąt / Funkcja	I					II		III		IV		
	0°	30°	45°	60°	90°	135°	180°	225°	270°	315°	360°	okres
$\sin\alpha$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	0	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$	-1	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$	0	360°
$\cos\alpha$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$	-1	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$	0	$\pm\frac{\sqrt{2}}{2}$	1	360°
$\mathrm{tg}\,\alpha$	0	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	1	$\sqrt{3}$	$+\infty$ $-\infty$	-1	0	1	$+\infty$ $-\infty$	-1	0	180°
$\mathrm{ctg}\,\alpha$	$+\infty$	$\sqrt{3}$	1	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	0	-1	$+\infty$ $-\infty$	1	0	-1	$-\infty$	180°

Rys. 2
y = sin x
sinusoida

Rys. 3
y = cos x
cosinusoida



Rys. 4
y = tg x
tangensoida

Rys. 5
y = ctg x
contangensoida

7. Wartości funkcji trygonometrycznych częściej spotykanych kątów.

Kąt / Funkcja	0°	15°	18°	$22,5^\circ$	30°	36°	45°	60°	72°	90°
sin	0	0,2588	0,3090	0,3827	0,5000	0,5878	0,7071	0,8660	0,9511	1
cos	1	0,9659	0,9511	0,9250	0,8660	0,8090	0,7071	0,5000	0,3090	0
tg	0	0,2679	0,3249	0,4108	0,5774	0,7265	1,0000	1,7321	3,0777	∞
ctg	∞	3,7321	3,0777	2,4342	1,7321	1,3764	1,0000	0,5774	0,3249	0

d/ Wartości funkcji trygonometrycznych dla małych kątów.

1. Dla małych kątów /np. do 10°/ można przyjmować, że $\mathrm{arc}\,\alpha \approx \sin\alpha \approx \mathrm{tg}\,\alpha$
   np. dla $\alpha = 5^\circ$; $\mathrm{arc}\,\alpha = 0,0873$ rd; $\sin\alpha = 0,0872$; $\mathrm{tg}\,\alpha = 0,0875$;

2. $\cos\alpha \approx 1$;
3. Dla $\alpha > 80^\circ$ $\sin\alpha \approx 1$;

Zależność wzajemna funkcji trygonometrycznych.

1. Zależność między funkcjami kąta danego.

$$tg\alpha = \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}\ ;\quad ctg\alpha = \frac{\cos\alpha}{\sin\alpha};\quad tg\alpha = \frac{1}{ctg\alpha};\quad ctg\alpha = \frac{1}{tg\alpha}$$

$$tg\alpha \cdot ctg\alpha = 1;$$

$$\sin^2\alpha + \cos^2\alpha = 1;\quad 1 + tg^2\alpha = \frac{1}{\cos^2\alpha};\quad 1 + ctg^2\alpha = \frac{1}{\sin^2\alpha}$$

2. Wzory redukcyjne.

a/ $\sin/-\alpha/ = -\sin\alpha\ ;\quad \cos/-\alpha/ = \cos\alpha\ ;$
$tg/-\alpha/ = -tg\,\alpha\ ;\quad ctg/-\alpha/ = -ctg\,\alpha;$

b/ $\sin/90^0 \pm\alpha/ = \cos\alpha;\quad \cos/90^0 \pm\alpha/ = \mp\sin\alpha;$
$tg/90^0 \pm\alpha/ = \mp ctg\alpha;\quad ctg/90^0 \pm\alpha/ = \mp tg\alpha;$

c/ $\sin/180^0 \pm\alpha/ = \mp\sin\alpha;\quad \cos/180^0 \pm\alpha/ = -\cos\alpha$
$tgn/180^0 \pm\alpha/ = \pm tg\alpha;\quad ctg/180^0 \pm\alpha/ = \pm ctg\alpha$

d/ $\sin/270^0 \pm\alpha/ = -\cos\alpha;\quad \cos/270^0 \pm\alpha/ = \pm\sin\alpha$
$tg/270^0 \pm\alpha/ = \mp ctg\alpha;\quad ctg/270^0 \pm\alpha/ = \mp tg\alpha$

e/ $\sin/360^0 \pm\alpha/ = \pm\sin\alpha;\quad \cos/360^0 \pm\alpha/ = \cos\alpha$
$tg/360^0 \pm\alpha/ = \pm tg\alpha\ ;\quad ctg/360^0 \pm\alpha/ = ctg\,\alpha$

3. Funkcje trygonometryczne sumy i różnice dwóch kątów

$$\sin/\alpha \pm\beta/ = \sin\alpha \cdot \cos\beta \pm \cos\alpha \cdot \sin\beta$$

$$\cos/\alpha \pm\beta/ = \cos\alpha \cdot \cos\beta \mp \sin\alpha \cdot \sin\beta$$

$$tg/\alpha \pm\beta/ = \frac{tg\alpha \pm tg\beta}{1 \mp tg\alpha\ tg\beta}\ ;$$

$$ctg/\alpha \pm\beta/ = \frac{ctg\alpha\ ctg\beta \mp 1}{ctg\beta \pm ctg\alpha};$$

4. Suma i różnica funkcji trygonometrycznych różnych kątów:

$$\sin\alpha + \sin\beta = 2\sin\frac{\alpha+\beta}{2}\cos\frac{\alpha-\beta}{2}$$

$$\sin\alpha - \sin\beta = 2\cos\frac{\alpha+\beta}{2}\sin\frac{\alpha-\beta}{2}$$

$$\cos\alpha + \cos\beta = 2\cos\frac{\alpha+\beta}{2}\cos\frac{\alpha-\beta}{2}$$

$$\operatorname{tg}\alpha \mp \operatorname{tg}\beta = \frac{\sin/\alpha \mp \beta/}{\cos\alpha\cos\beta};$$

$$\operatorname{ctg}\alpha \mp \operatorname{ctg}\beta = \frac{\sin/\beta \mp \alpha/}{\sin\alpha\sin\beta};$$

5. Funkcje kątów wielokrotnych.

$$\sin 2\alpha = 2\sin\alpha\cos\alpha; \quad \cos 2\alpha = \cos^2\alpha - \sin^2\alpha;$$

$$\operatorname{tg}2\alpha = \frac{2\operatorname{tg}\alpha}{1-\operatorname{tg}^2\alpha}; \quad \operatorname{ctg}2\alpha = \frac{\operatorname{ctg}^2\alpha - 1}{2\operatorname{ctg}\alpha};$$

$$\sin 3\alpha = 3\sin\alpha - 4\sin^3\alpha; \quad \cos 3\alpha = 4\cos^3\alpha - 3\cos\alpha;$$

$$\operatorname{tg}3\alpha = \frac{3\operatorname{tg}\alpha - \operatorname{tg}^3\alpha}{1-3\operatorname{tg}^2\alpha}; \quad \operatorname{ctg}3\alpha = \frac{\operatorname{ctg}^3\alpha - 3\operatorname{ctg}\alpha}{3\operatorname{ctg}^2\alpha - 1};$$

6. Potęgi funkcji trygonometrycznych.

$$\sin^2\alpha = \frac{1}{2}/1-\cos 2\alpha/; \quad \cos^2\alpha = \frac{1}{2}/1+\cos 2\alpha/$$

stąd: $1 - \cos\alpha = 2\sin^2\frac{\alpha}{2}$; $1 + \cos\alpha = 2\cos^2\frac{\alpha}{2}$

$\cos\alpha = 1 - 2\sin^2\frac{\alpha}{2}$ oraz $\cos\alpha = 2\cos^2\frac{\alpha}{2} - 1$

$$\sin^2\alpha - \sin^2\beta = \cos^2\beta - \cos^2\alpha = \sin/\alpha+\beta/\sin/\alpha-\beta/$$

$$\cos^2\alpha - \sin^2\beta = \cos^2\beta - \sin^2\alpha = \cos/\alpha+\beta/\cos/\alpha-\beta/$$

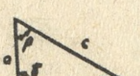
B. ZASTOSOWANIE FUNKCJI TRYGONOMETRYCZNYCH

1. Trójkąt prostokątny /rys. 6/

1. Zależność między bokami

$$a^2 + b^2 = c^2; \quad a = \sqrt{c^2 - b^2}; \quad b = \sqrt{c^2 - a^2}; \quad c = \sqrt{a^2 + b^2}$$

2. Zależność między kątami



Rys. 6

$$\alpha + \beta + \gamma = 180^\circ; \quad \gamma = 90^\circ; \quad \alpha + \beta = 90^\circ$$

$$\alpha = 90^\circ - \beta; \quad \beta = 90^\circ - \alpha;$$

3. Zależność między kątami a odpowiednimi bokami trójkąta prostokątnego.

a/ $\sin\alpha = \frac{a}{c} = \frac{\text{przyprostokątna przeciwległa}}{\text{przeciwprostokątna}}$; $\sin\beta = \frac{b}{c}$

b/ $\cos\alpha = \frac{b}{c} = \frac{\text{przyprostokątna przyległa}}{\text{przeciwprostokątna}}$; $\cos\beta = \frac{a}{c}$

c/ $\mathrm{tg}\,\alpha = \frac{a}{b} = \frac{\text{przyprostokątna przeciwległa}}{\text{przyprostokątna przyległa}}$; $\mathrm{tg}\,\beta = \frac{b}{a}$

d/ $\mathrm{ctg}\,\alpha = \frac{b}{c} = \frac{\text{przyprostokątna przyległa}}{\text{przyprostokątna przeciwległa}}$; $\mathrm{ctg}\,\beta = \frac{a}{b}$

4. Zależność między funkcjami trygonometrycznymi

$\sin\alpha = \cos\beta$; $\sin\beta = \cos\alpha$

$\mathrm{tg}\,\alpha = \mathrm{ctg}\,\beta$; $\mathrm{tg}\,\beta = \mathrm{ctg}\,\alpha$

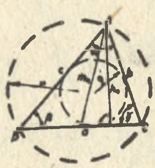
<u>Rozwiązywanie trójkątów prostokątnych</u>

a i b - przyprostokątne; c przeciwprostokątna

Dane	szukane	
	boki	kąty
a, α	$c = \frac{a}{\sin\alpha}$; $b = a\,\mathrm{ctg}\,\alpha$	$\beta = 90^\circ - \alpha$
a, α	$a = c\sin\alpha$; $b = c\cos\alpha$	$\beta = 90^\circ - \alpha$
a, b	$c = \sqrt{a^2 + b^2} = \frac{a}{\sin\alpha} = \frac{b}{\sin\beta}$	$\mathrm{tg}\,\alpha = \frac{a}{b}$; $\mathrm{tg}\,\beta = \frac{b}{c}$
a, c	$b = \sqrt{c^2 - a^2} = c\cos\alpha = a\,\mathrm{ctg}\,\alpha$	$\sin\alpha = \cos\beta = \frac{a}{c}$

Rozwiązywanie trójkątów nieprostokątnych.

1. Podstawowe zależności i twierdzenia.

1	2
 Rys. 7	a, b, c, - boki; α , β , γ - kąty; h_a - wysokość opuszczona na bok a; m_a - środkowa boku a; r - promień koła opisanego; ρ - promień koła wpisanego; s - połowa długości obwodu
1 Podstawowe zależności	$\alpha + \beta + \gamma = 180^\circ$; $\frac{\alpha}{2} + \frac{\beta}{2} + \frac{\gamma}{2} = 90^\circ$ $\sin/\alpha + \beta/ = \sin\gamma$; $\sin\frac{\alpha+\beta}{2} = \cos\frac{\gamma}{2}$ $\cos/\alpha + \beta/ = -\cos\gamma$; $\cos\frac{\alpha+\beta}{2} = \sin\frac{\gamma}{2}$
2 Twierdzenie rzutów	$a = b\cos\gamma + c\cos\beta$
3 Twierdzenie sinusów	$\frac{a}{\sin\alpha} = \frac{b}{\sin\beta} = \frac{c}{\sin\gamma} = 2r$ $a : b = \sin\alpha : \sin\beta$
4 Twierdzenie cosinusów /twierdzenie Carnota lub uogólnienie twierdzenia Pitagorasa/	$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc\cos\alpha = /b-c/^2 - 4bc\cos^2\frac{\alpha}{2} = /b+c/^2 + 4bc\sin^2\frac{\alpha}{2}$
5 Twierdzenie tangensów /równania Nepera/	$/a+b/ : /a-b/ = \operatorname{tg}\frac{\alpha+\beta}{2} : \operatorname{tg}\frac{\alpha-\beta}{2}$
6 Równanie Mollweidego	$a\cos\frac{\beta-\gamma}{2} = /b+c/\cos\frac{\beta+\gamma}{2} = /b+c/\sin\frac{\alpha}{2}$ $a\sin\frac{\beta-\gamma}{2} = /b-c/\sin\frac{\beta+\gamma}{2} = /b-c/\cos\frac{\alpha}{2}$

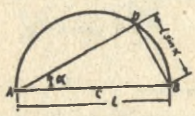
	1	2
7	Wzory cięciwowe	$a = 2r \sin\alpha$; $b = 2r \sin\beta$; $c = 2r \sin\gamma$;
8	Wzory połówkowe	Jeżeli $a + b + c = 2s$ mamy: $a + b - c = 2/s - c/$; $a-b+c = 2/s-b/$ $-a+b+c=2/s-a/$, wówczas: $\sin\frac{\alpha}{2} = \sqrt{\frac{/s-b/\,/s-c/}{bc}}$; $\cos\frac{\alpha}{2} = \sqrt{\frac{s/s-a/}{bc}}$ $\mathrm{tg}\,\frac{\alpha}{2} = \sqrt{\frac{/s-b/\,/s-c/}{s/s-a/}} = \frac{\rho}{s-a}$
9	Pole trójkąta	$F = \frac{1}{2}ah_a = \frac{ab\sin\gamma}{2} = \frac{abc}{4r} = \rho s =$ $= 2r^2\sin\alpha \cdot \sin\beta \cdot \sin\gamma =$ $= \sqrt{s/s-a/\,/s-b/\,/s-c/}$

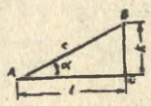
2. Wyznaczanie elementów trójkąta ukośnokątnego.

L.p.	Dane	s z u k a n e		P o l e
		b o k i	k ą t y	
1.	$a, \beta, \gamma,$	twierdzenie sinusów	twierdzenie sinusów oraz $\alpha = 180-/\beta+\gamma/$	$a^2 \cdot \frac{\sin\beta \sin\gamma}{2 \sin}$
2	$a, b, \gamma,$	twierdzenie cosinusów	twierdzenie sinusów lub tangensów	$\frac{1}{2} \cdot ab \sin\gamma$
3	a, b, ,	twierdzenie sinusów	twierdzenie sinusów	$\frac{1}{2}ab \sin\gamma$ $\frac{1}{2}b \sin\alpha\,/b\cos\alpha + \pm\sqrt{a^2-b^2 \sin^2}\,/$ + dla $b > a$; - dla $b < a$
4	a, b, c,	$\rho = \sqrt{\frac{/s-a/\,/s-b/\,/s-c/}{s}}$	twierdzenie sinusów lub $\mathrm{tg}\,\frac{\alpha}{2} = \frac{\rho}{s-a}$	

3, Wykreślanie kątów gdy znana jest ich funkcja trygonometryczna

a/ Jeśli mamy podaną wartość $\sin\alpha = k$ i chcemy wykreślnie znaleźć przynależny kąt α wówczas odmierzamy odcinek AB = 1 w dowolnej skali np: jako 10 mm lub 100 mm /rys. 8/. Połowimy odcinek AB i z punktu C zakreślamy promieniem AC = CB półkole.





Rys. 8 Rys. 9

Z punktu B odcinamy na łuku wielkość $1 \cdot \sin\alpha = 1 \cdot k$. Otrzymany punkt D łączymy z A. Kąt DAB jest szukanym kątem α.

b/ Dany jest $\operatorname{tg}\alpha = k$, wykreślić kąt α.

1. Rysujemy odcinek AC = 1 /rys. 9/.
2. Z punktu C wykreślamy odcinek $BC \perp AC$ przy czym BC = k.
3. $\sphericalangle BAC = \alpha$.

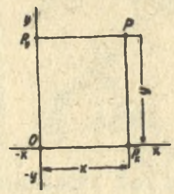
GEOMETRIA ANALITYCZNA

Geometria analityczna bada twory geometryczne płaskie lub przestrzenne, opisując ich wielkość, kształt i położenie za pomocą równań.

Aby określić własności tworów geometrycznych za pomocą równań, stosujemy układy współrzędnych, umożliwiające jednoznaczne określenie położenia tworu geometrycznego na płaszczyźnie lub w przestrzeni.

1. Układ współrzędnych prostokątnych

Układ współrzędnych prostokątnych /rys. 10/ tworzą dwie linie proste x - x i y - y, przecinające się pod kątem prostym w punkcie O, zwanym początkiem układu współrzędnych. Prostą x - x nazywamy osią odciętych a prostą y-y osią rzędnych; obie proste - osiami współrzędnych. Położenie dowolnego punktu P na płaszczyźnie jest jednoznacznie określone dwoma odcinkami:



Rys. 10

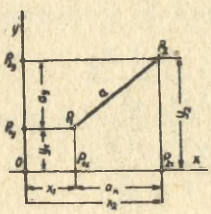
odciętą $x = \overline{OP}_x$ i rzędną $y = \overline{OP}_y$. Oba odcinki x i y nazywamy współrzędnymi punktu P:

$$x = \overline{OP}_x = \overline{P_yP} \qquad y = \overline{OP}_y = \overline{P_xP}$$

2. Zastosowania układu współrzędnych do planimetrii.

a/ Rzuty odcinka

Rzuty odcinka $\overline{P_1P_2}$ ograniczonego punktami $P_1/x_1,y_1/$ i $P_2/x_2,y_2/$ na osie współrzędnych /rys. 11/:



Rys. 11

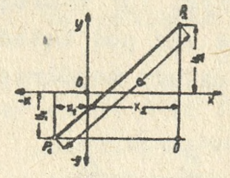
$$a_x = \overline{P_{1x}P_{2x}} = x_2 - x_1$$

$$a_y = \overline{P_{1y}P_{2y}} = y_2 - y_1$$

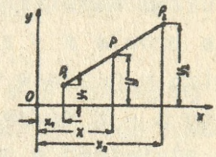
b/ Długość odcinka

Długość odcinka $a = \overline{P_1P_2}$ /rys. 12/, ograniczonego punktami $P_1/x_1,y_1/$ i $P_2/x_2,y_2/$:

$$a = \sqrt{/x_1-x_2/^2 + /y_1-y_2/^2}$$



Rys. 12



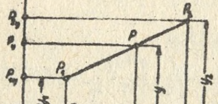
Rys. 13

c/ Podział odcinka

1. Współrzędne punktu dzielącego odcinek na połowy /rys. 13/:

$$x = x_1 + \frac{x_2 - x_1}{2} = \frac{x_1 + x_2}{2}$$

$$y = y_1 + \frac{y_2 - y_1}{2} = \frac{y_1 + y_2}{2}$$



Rys. 14

2. Współrzędne punktu dzielącego odcinek w dowolnym stosunku λ = m:n /rys.14/:

$$x = \frac{x_1 + \lambda x_2}{1 + \lambda}$$

$$y = \frac{y_1 + \lambda y_2}{1 + \lambda}$$

3. Linia prosta

a/ Kierunek linii prostej.

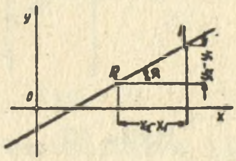
Kierunek linii prostej określamy tangensem kąta, jaki ta linia tworzy z dodatnim kierunkiem osi x /rys. 15/:

$$\operatorname{tg}\alpha = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$$

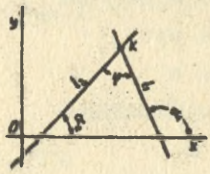
oznaczając różnicę $x_2 - x_1 = \Delta x$, a różnicę $y_2 - y_1 = \Delta y$ / Δ - grecka litera duże delta oznacza różnicę/, otrzymamy:

$$\operatorname{tg}\alpha = \frac{\Delta y}{\Delta x} = a$$

Wartość liczbową a nazywamy współczynnikiem kierunkowym albo spadkiem linii prostej.



Rys. 15



Rys. 16

b/ dwie proste

Kąt nachylenia φ między dwiema prostymi l_1 i l_2 o współczynnikach kierunkowych: $a_1 = tg\,\alpha_1$ i $a_2 = tg\,\alpha_2$ /rys. 16/:

$$tg\,\varphi = \frac{a_1 - a_2}{1 + a_1 a_2}$$

warunek równoległości dwu prostych

$$a_1 = a_2$$

warunek prostopadłości dwu prostych

$$a_1 = -\frac{1}{a_2}$$

c/ Równanie linii prostej

Równanie linii prostej określa zależność, jaka zachodzi między współrzędnymi wszystkich punktów położonych na tej linii.

1. Proste równoległe do osi /rys. 17/

Równanie prostej równoległej do osi x i położonej od niej w odległości b:

$$y = b$$

Równanie osi x:

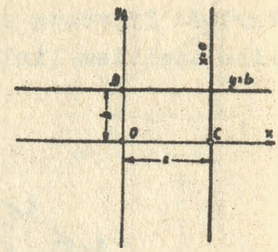
$y = 0$

Równanie prostej równoległej do osi y i odległej od niej o c:

$x = c$

Równanie osi y:

$x = 0$

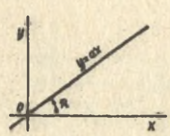


Rys. 17

p r o s t e p r z e c h o d z ą c e p r z e z p o c z ą t e k u k ł a d u w s p ó ł r z ę d n y c h /Rys. 18/.

Równanie linii przechodzącej przez początek układu współrzędnych:

$$y = ax$$



Rys. 18

gdzie $a = tg\alpha$ oznacza współczynnik kierunkowy linii prostej.

Równanie linii połowiącej kąt zawarty między dodatnimi kierunkami osi współrzędnych:

$$y = x$$

ponieważ $a = tg\,\alpha = tg\,45^{o} = 1$.

Proste w położeniu dowolnym

Równanie kierunkowe prostej /Rys. 19/

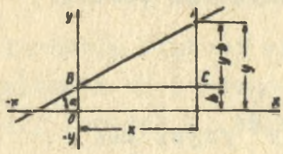
$$y = ax + b$$

gdzie $a = tg\,\alpha = \frac{y-b}{x}$.

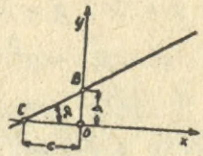
Równanie ogólne linii prostej:

$$Ax + By + C = 0$$

- Każde równanie pierwszego stopnia o dwu zmiennych przedstawia jakąś linię prostą; dlatego też równania pierwszego stopnia nazywamy również równaniami liniowymi.



Rys. 19



Rys. 20

Równanie odcinkowe linii prostej /rys. 20/

$$\frac{y}{b} + \frac{x}{c} = 1$$

gdzie b i c - odcinki skierowane /mające znaki + i - w zależności od tego, czy są skierowane zgodnie z dodatnim kierunkiem osi współrzędnych czy przeciwnie/.

4. K o ł o.

Okrąg koła stanowi miejsce geometryczne punktów na płaszczyźnie równo oddalonych od punktu stałego, zwanego środkiem koła.

a/ Równanie koła

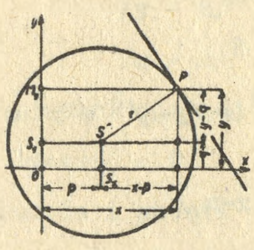
1. O g ó l n e   r ó w n a n i e   k o ł a /rys. 21/.
Oznaczając przez p i q współrzędne środka koła S, odległość dowolnego punktu P /x-y/ od środka S wyznaczymy z wzoru Pitagorasa /rys. 21/.

$$r^2 = /x-p/^2 + /y - q/^2$$

Równanie to nazywamy ogólnym równaniem koła.
Rozwijając lewą stronę równania otrzymamy:

$$x^2 + y^2-2px-2py+p^2+q^2-r^2 = 0$$

Jest to równanie drugiego stopnia, w którym współczynniki przy x^2 i y^2 są sobie równe, a nie ma wyrazu xy.



Rys. 21

2. Środkowe równanie koła.
Środkowe równanie koła otrzymujemy wówczas, gdy środek koła znajduje się w początku układu współrzędnych.

Wówczas $p = 0$ i $q = 0$, a równanie przybiera postać:

$$x^2 + y^2 = r^2$$

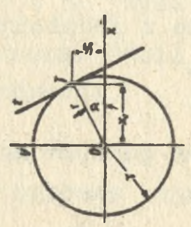
b/ Koło i linia prosta.

1. Równanie siecznej koła $x^2 + y^2 = r^2$ /rys. 22/

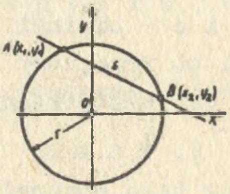
$$\frac{y - y_1}{x - x_1} = - \frac{x_1 + x_2}{y_1 + y_2}$$

2. Równanie stycznej do koła $x^2 + y^2 = r^2$ /rys. 23/

$$xx_1 + yy_1 = r^2$$



Rys. 22



Rys. 23

3. Równanie stycznej do koła $/x - p/^2 + /y - q/^2 = r^2$

$$/x-p/\ /x_1-p/+/y-q/\ /y_1-q/ = r^2$$

4. Równanie normalnej do koła $x^2+y^2 = r^2$ w punkcie $P/x_1,y_1/$ jest identyczne z równaniem promienia:

$$y = \frac{y_1}{x_1}\, x$$

5. Równanie normalnej do koła $/x-p/^2 + /y-q/^2 = r^2$ w punkcie $P/x_1,y_1/$:

$$y - y_1 = \frac{y_1-q}{x_1-p}\ /x-x_1/$$

P a r a b o l a

Parabola stanowi miejsce geometryczne punktów równo oddalonych od stałego punktu, zwanego ogniskiem F i od stałej prostej k, zwanej kierownicą paraboli /rys. 24/.

a/ Równania paraboli.

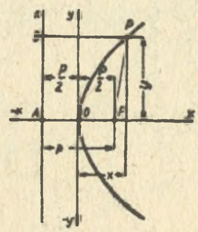
1. Równanie wierzchołkowe paraboli

$$y^2 = 2\ px$$

której wierzchołek leży w początku układu współrzędnych, a oś x jest osią paraboli.

2. Równanie paraboli, której wierzchołek leży na osi y, a oś y jest osią paraboli

$$x^2 = 2\ py$$



Rys. 24

Równanie to przedstawia parabolę zwróooną wklęsłością ku górze, gdy $p > 0$ lub ku dołowi, gdy $p < 0$.

3. Równanie paraboli, której oś jest równoległa do osi x lub do osi y, a wierzchołek znajduje się w punkcie /m,n/:

$$/y - n/^2 = 2p/x-m/$$

$$/x - m/^2 = 2p/p-n/$$

lub w postaci ogólnej

$$ay^2 + by+cx+d = 0 \qquad ax^2 + by + cx + d = 0$$

b/ Parabola i prosta

1. Prosta równoległa do osi paraboli. Prosta $y = b$ przecina parabolę $y^2 = 2px$ w jednym punkcie o współrzędnych:

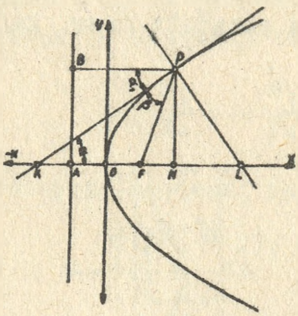
$$x = \frac{b^2}{2p} \text{ i } y = b.$$

2. Prosta styczna do paraboli. Równanie stycznej do paraboli $y^2 = 2\,px$ w punkcie $P/x_1, y_1/$ /rys. 16/:

$$y\,y_1 = p/x+x_1/$$

Styczna do paraboli $x^2 = 2\,py$

$$x\,x_1 = p/y+y_1/$$



Rys. 25

3. Równanie normalnej do paraboli w punkcie $P/x_1,y_1/$ /rys. 25/

$$y - y_1 = -\frac{y_1}{p}/x-x_1/$$

4. Podstyczna i podnormalna. Podstyczną $\overline{KN}$ nazywamy rzut odcinka stycznej $\overline{KP}$ zawartego między osią odciętych a punktem styczności.

Długość podstycznej:

$$\overline{KN} = \overline{KO} + \overline{ON} = 2\,x_1$$

Podnormalną $\overline{NL}$ nazywamy rzut odcinka $\overline{PL}$ normalnej na oś x.

Długość podnormalnej równa się parametrowi:

$$\overline{NL} = \overline{OL} - \overline{ON} = p + x_1 - x_1 = p$$

5. Twierdzenie o stycznej. Styczna do paraboli /rys. 16/ połowi kąt zawarty między promieniem wodzącym PF a prostą PB równoległą do osi.

c/ Pole odcinków paraboli

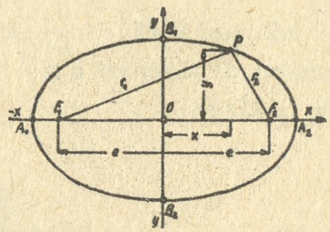
Pole odcinka paraboli równa się 4/3 iloczynu współrzędnych końcowego punktu łuku paraboli

$$F = \frac{4}{3}\,x_1 y_1$$

E L I P S A

Elipsa /rys. 26/ jest to miejsce geometryczne punktów na płaszczyźnie, których suma odległości od dwu punktów stałych jest wielkością stałą $r_1 + r_2 = 2a$

Punkty stałe F_1 i F_2 nazywamy ogniskami elipsy: proste łączące dowolny punkt elipsy z jej ogniskami $r_1 = \overline{PF_1}$ i $r_2 = \overline{PF_2}$ promieniami wodzącymi. Prostą przechodzącą przez ogniska nazywamy osią wielką a prostą do niej prostopadłą i przechodzącą przez środek elipsy O - osią małą.



Rys. 26

Osie $A_1 A_2$ i B_1B_2 nazywamy osiami głównymi elipsy.

a/ Równania elipsy

1. Równanie środkowe elipsy. Oznaczając przez $2e = \overline{F_1F_2}$ odległość ognisk otrzymamy:

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{a^2-e^2} = 1$$

Wprowadzając nową wielkość $b^2 = a^2 - e^2$ /dla zaznaczenia, że różnica $a^2 - e^2$ jest zawsze liczbą dodatnią/, otrzymamy środkowe równanie elipsy:

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$$

Odcinek 2a przedstawia długość osi wielkiej, a 2b- długość osi małej elipsy.

2. Ogólne równanie elipsy. Jeżeli środek elipsy ma współ - rzędne S /p,q/, a osie główne są równoległe do osi współrzędnych wówczas równanie elipsy

$$\frac{(x-p)^2}{a^2} + \frac{(y-q)^2}{b^2} = 1$$

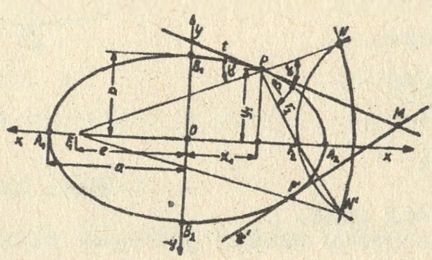
lub w postaci ogólnej

$$b^2x^2 + a^2y^2 + cx + dy + e = 0$$

Charakterystyczne równania elipsy o osiach równoległych do osi współrzędnych: 1/ jest to równanie drugiego stopnia bez wyrazu xy, 2/ x^2 i y^2 mają współczynniki różne, lecz o tym samym znaku.

b/ Elipsa i prosta

1. Równanie stycznej do elipsy /rys. 27/ określonej równaniem środkowym $b^2x^2 + a^2y^2 = a^2b^2$ w punkcie $P/x_1, y_1/$ ma postać:



Rys. 27

$$y - y_1 = -\frac{b^2x_1}{a^2y_1} /x-x_1/$$

lub też w postaci

$$\frac{xx_1}{a^2} + \frac{yy_1}{b^2} = 1$$

2. Równanie normalnej do elipsy otrzymujemy, zastępując w równaniu kierunkowym stycznej współczynnik $-\frac{b^2}{a^2} \cdot \frac{x_1}{y_1}$

przez współczynnik $\frac{a^2}{b^2} \cdot \frac{y_1}{x_1}$:

$$y - y_1 = \frac{a^2}{b^2} \frac{y_1}{x_1} /x-x_1/$$

3. Twierdzenie o stycznej do elipsy. Styczna do elipsy połowi kąt zawarty między jednym promieniem wodzącym, a przedłużeniem drugiego promienia /rys. 27/.

Tangens kąta, jaki styczna tworzy z promieniami wodzącymi:

$$\mathrm{tg} = \frac{b^2/a^2+ex_1/}{ey_1/a^2+ex_1/} = \frac{b^2}{ey_1} = \mathrm{tg}\,\beta$$

czyli $\alpha = \beta$

c/ Pole elipsy

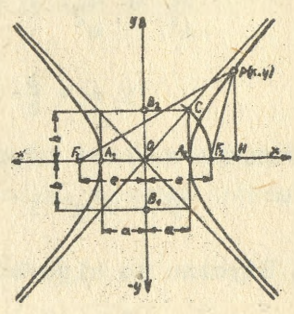
$$F = \pi ab$$

HIPERBOLA

Hiperbola /rys. 28/ jest to miejsce geometryczne punktów na płaszczyźnie, których różnica długości od dwu punktów stałych jest wielkością stałą:

$$r_1 - r_2 = \pm 2a$$

Znak „+" odnosi się do punktów położonych bliżej F_2, a znak „-" do punktów leżących bliżej F_1. Punkty F_1 i F_2 nazywamy ogniskami hiperboli. Prostą przechodzącą przez oba ogniska nazywamy osią główną albo rzeczywistą, a jej symetralną osią boczną albo urojoną; punkt przecięcia się obu osi nazywamy środkiem hiperboli. Proste łączące dowolny punkt hiperboli z jej ogniskami nazywamy promieniami wodzącymi. Proste przecinające hiperbolę w nieskończoności nazywamy jej asymptotami.



Rys. 28

a/ Równania hiperboli

1. Równanie środkowe hiperboli. Oznaczywszy przez 2e odległość ognisk $2e = F_1F_2$, równanie środkowe hiperboli napiszemy w postaci:

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$$

Gdyby ogniska hiperboli leżały na osi y, wówczas jej równanie środkowe:

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = -1$$

2. Równanie hiperboli równobocznej /a=b/.
Jeżeli a = b, to równanie przybiera postać:

$$x^2 - y^2 = a^2$$

jeżeli hiperbolę równoboczną obrócimy o 45°, to jej równanie przybierze postać:

$$xy = C$$

gdzie stała dodatnia $C = \frac{a^2}{2}$

b/ Hiperbola i prosta

1. Równanie asymtot do hiperboli o równaniu

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$$

$$y = +\frac{b}{a}x \quad \text{i} \quad y = -\frac{b}{a}x$$

Równania asymtot hiperboli równobocznej /a = b/:

$$y = +x \quad \text{i} \quad y = -x$$

2. Styczna do hiperboli w punkcie $P/x_1, y_1/$

o równaniu $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$

$$b^2xx_1 - a^2yy_1 = a^2b^2$$

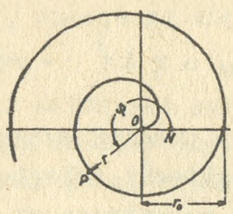
3. Normalna do hiperboli w punkcie $P/x_1, y_1/$:

$$y - y_1 = - \frac{a^2}{b^2} \cdot \frac{y_1}{x_1} /x-x_1/$$

SPIRALE

a/ Spirala Archimedesa

Spirala Archimedesa /rys. 29/ powstaje jako tor punktu P, poruszającego się jednostajnie po promieniu obracającym się ze stałą prędkością kątową wokół bieguna O.



Rys. 29

Jeżeli drogę OP oznaczymy przez r, a kąt obrotu od położenia początkowego przez φ , to równanie biegunowe spirali Archimedesa napiszemy w postaci:

$$r = k\varphi$$

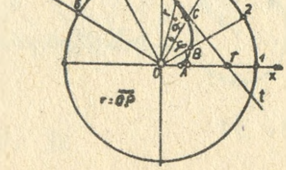
gdzie k oznacza współczynnik proporcjonalności.

Jeżeli przez r_o oznaczymy długość promienia wodzącego, odpowiadającą pełnemu obrotowi czyli kątowi 2π , równanie spirali Archimedesa przybierze postać:

$$r = \frac{r_o}{2\pi} \varphi$$

Jeżeli w chwili rozpoczęcia ruchu punkt znajdował się w położeniu A oddalonym a od środka, wówczas równanie spirali Archimedesa:

$$r = a + k\varphi$$



Rys. -30

Spirala Archimedesa przecina dowolny promień, wychodzący z punktu O, nieskończenie wiele razy; odległości punktów przecięcia od bieguna rosną w postępie arytmetycznym.

b/ Spirala logarytmiczna

Spiralę logarytmiczną /rys. 30/ zakreśla punkt P, poruszający się ruchem jednostajnie przyśpieszonym po promieniu, który jednocześnie obraca się ze stałą prędkością kątową do koła bieguna O.
Odległości punktów spirali logarytmicznej rosną od bieguna według postępu geometrycznego, a kąty obrotu promienia wodz cego według postępu artymetycznego.
Równanie biegunowe spirali logarytmicznej:

$$r = a^{\varphi}$$

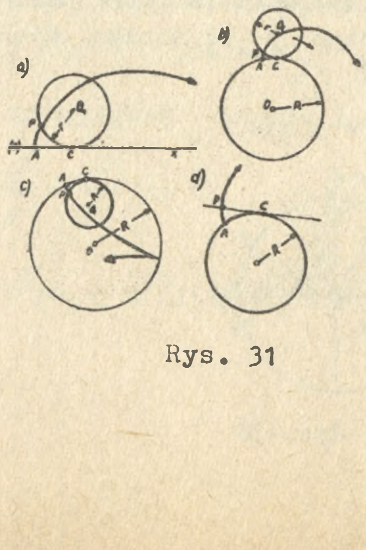
gdzie a jest dowolną stałą dodatnią, a r i φ - współrzędnymi biegunowymi punktu P.
Spirala logarytmiczna przecina każdy promień wychodzący z punktu O w nieskończenie wielu punktach; odległości tych punktów od bieguna rosną w postępie geometrycznym.

LINIE CYKLICZNE

a/ Określenie i klasyfikacja krzywych cyklicznych.

Linię cykliczną opisuje dowolny punkt koła toczącego się bez poślizgu po prostej lub po kole.

Do linii cyklicznej /rys. 31/ zaliczamy: a/ cykloidę zwyczajną czyli ortocykloidę, b/ epicykloidę i c/ hipocykloidę.



Rys. 31

Do linii cyklicznych należy również ewolwenta.

b/ Cykloida zwyczajna.

Cykloidę zwykłą, czyli, ortocykloidę /rys. 32/ zakreśla dowolny punkt P koła odtaczającego się bez poślizgu po prostej Ax.

Równanie parametryczne cykloidy zwyczajnej.

$$x = r\,/\varphi - \sin\varphi\,/$$
$$y = r\,/1 - \cos\varphi\,/$$

gdzie φ oznacza kąt środkowy, o jaki obrócił się promień przynależny do okręgu koła tworzącego ortocykloidę.

c/ Epicykloida i hipocykloida

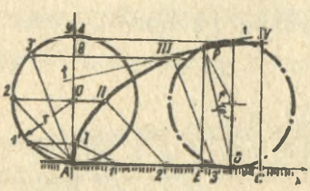
Epicykloidę /rys. 33/ zakreśla dowolny punkt koła o promieniu r, toczącego się bez poślizgu po odwodzie koła na zewnątrz.

Jeżeli natomiast koło toczy się po odwodzie koła od wewnątrz, wówczas dowolny jego punkt zakreśla hipocykloidę /rys. 34/.
Równania parametryczne

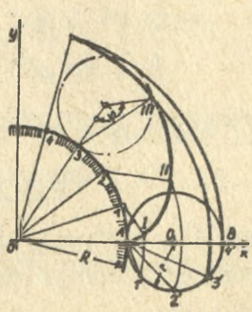
$$x = /R \pm r/ \cos / \frac{r}{R}\varphi / \mp r \cos / \frac{R \pm r}{R}\varphi /$$

$$y = /R \pm r/ \sin / \frac{r}{R}\varphi / - r \sin / \frac{R \pm r}{R}\varphi /$$

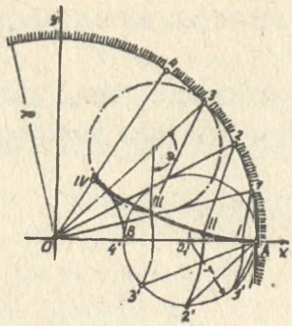
Górne znaki odnoszą się do epicykloidy, dolne zaś do hipocykloidy.



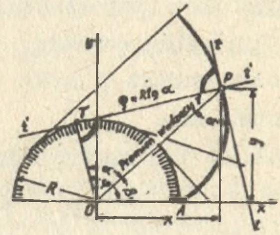
Rys. 32



Rys. 33



Rys. 34



Rys. 35

d/ Ewolwenta

Ewolwenta, czyli odwinięta koła /rys. 35/ powstaje przez ruch końcowego punktu nici nawijanej na koło o promieniu R i odwijanej w ten sposób, aby część odwinięta była prosta i styczna do okręgu.

Koło, z którego odwija się nić, nazywamy kołem zasadniczym.

1. Równania ewolwenty w prostokątnym układzie współrzędnych

$$x = r\cos\beta = \frac{R}{\cos\alpha}\cos\beta \;;\quad y = r\sin\beta = \frac{R}{\cos\alpha}\sin\beta \;;$$

gdzie r oznacza promień wodzący.

2. Równania ewolwenty parametryczne

$$x = R/\cos\varphi + \varphi\sin\varphi/ \qquad y = R/\sin\varphi - \varphi\cos\varphi/$$

3. Równanie ewolwenty kątowe

$$\overset{\frown}{AT} = \overline{PT};\quad \overset{\frown}{AT} = R/\alpha + \beta/;\quad \overline{PT} = R\,\mathrm{tg}\,\alpha$$

kąty α i β wyrażono w mierze łukowej

$$\beta = \mathrm{tg}\,\alpha - \hat{\alpha} = \mathrm{inv}\,\alpha$$

inv /czytaj inwoluta alfa/ nazywa się funkcją ewolwentową.

A N A L I Z A

Analizą matematyczną nazywamy dział matematyki zajmujący się badaniem funkcji przy pomocy metod rachunku różniczkowego i całkowego.

1. O FUNKCJACH

a/ Funkcja jednej zmiennej.

Weźmy pod uwagę dowolny zbiór liczb /x/; jeżeli każdej liczbie x, przynależnej do zbioru/x/, będzie odpowiadać jedna ściśle określona wartość liczby y, przynależnej do zbioru /y/, to y nazywamy funkcją zmiennej x; y = f /x/.

Liczbę x nazywamy zmienną niezależną, a liczbę y - zmienną zależną.

Postacią lub formą wyraźną funkcji jednej zmiennej nazywamy taki wzór matematyczny, w którym po jednej stronie znaku równości znajduje się tylko zmienna zależna, a po drugiej stronie wyrażenie zawierające zmienną niezależną:

$$y = f/x/$$

Natomiast przedstawienie funkcji w postaci równania warunkowego o dwu zmiennych: niezależnej i zależnej, nazywamy uwikłaną postacią funkcji:

$$f/x,\ y/ = 0$$

Jeżeli jednej wartości x odpowiada tylko jedna wartość y, to takie funkcje nazywamy jednoznacznymi.

Zbiór /x/ nazywamy zakresem istnienia funkcji f /x/, a zbiór /y/ - zbiorem wartości funkcji.

b/ Funkcja złożona

Jeżeli każdej liczbie x zbioru /x/ odpowiada jakaś liczba $z = \varphi/x/$, a wszystkim lub niektórym liczbom zbioru /z/ odpowiadają liczby y = f/z/, to y nazywamy funkcją złożoną zmiennej x i oznaczamy ją symbolem:

$$y = f/z/ = f[\varphi/x/]$$

c/ Funkcja dwu zmiennych

Jeżeli każdej parze liczb /x, y/ odpowiada liczba z, to wielkość z nazywamy funkcją dwu zmiennych x i y:

$$z = f/x,y/$$

Liczby x i y nazywamy zmiennymi niezależnymi, a liczbę z - zmienną zależną.

d/ Sposoby przedstawiania funkcji.

Mając podane określenie funkcji w postaci wzoru matematycznego możemy przedstawić jej przebieg za pomocą tablicy liczbowej lub wykresu.

Tablica liczbowa zawiera w odpowiednich rubrykach /wierszach i kolumnach/ wartości zmiennej niezależnej i zmiennej zależnej.

Wykresem funkcji nazywamy miejsce geometryczne punktów których współrzędne spełniają daną funkcję.

2. GRANICE FUNKCJI

a/ Granica funkcji.

Funkcja f /x/ określona w pewnym przedziale otaczającym wartość y_0 posiada granicę g dla zmiennej x dążącej do x_0 wtedy, gdy dla każdego ciągu liczb x_1, x_2, x_3 ..... różnych od x_0 ale dążących do x_0 odpowiedni ciąg wartości funkcji $f/x_1/$, $f/x_2/$, $f/x_3/$ ... dąży do tej samej liczby g.

Piszemy wówczas:

$$\lim_{x \to x_0} f/x/ = g$$

Jeżeli g ma wartość skończoną, to granicę określoną tą wartością nazywamy właściwą.

Przy badaniu granicy funkcji nie chodzi nam o to, jaką wartość przyjmuje funkcja w samym punkcie x_0, leoz jak rozpatrywana funkcja zachowuje się w otoczeniu punktu x_0.

b/ Twierdzenie o granicach funkcji.

T w i e r d z e n i e 1. Funkcja nie może posiadać w tym samym punkcie dwu różnych granic.

T w i e r d z e n i e 2. Granicą funkcji y = C jest C.

$$\lim_{x \to x_0} C = C$$

T w i e r d z e n i e 3. Jeżeli dwie funkcje f/x/ i g/x/ dążą do tej samej granicy przy $x \to x_0$, to trzecia funkcja h/x/ zawarta między dwiema funkcjami w otoczeniu x_0 dąży do tej samej granicy przy $x \to x_0$.

Jeżeli $\lim_{x \to x_0} f/x/ = A$ i $\lim_{x \to x_0} g/x/ = A$, a $f/x/ \leqslant h/x/ \leqslant g/x/$

to $$\lim_{x \to x_0} h/x/ = A$$

T w i e r d z e n i e 4. Granica sumy dwu funkcji jest równa sumie granic tych funkcji.

Jeżeli $\lim_{x \to x_0} f/x/ = A$ i $\lim_{x \to x_0} g/x/ = B$, to

$$\lim_{x \to x_0} f/x/ + g/x/ = A + B$$

T w i e r d z e n i e 5. Granica iloczynu dwu funkcji równa się iloczynowi granic tych funkcji.

Jeżeli $\lim_{x \to x_0} f/x/ = A$ i $\lim_{x \to x_0} g/x/ = B$, to

$$\lim_{x \to x_0} f/x/ \cdot g/x/ = A \cdot B$$

T w i e r d z e n i e 6. Granica ilorazu dwu funkcji równa się ilorazowi granic tych funkcji, jeżeli w otoczeniu punktu x_0 dzielna i dzielnik są różne od zera.

Jeżeli $\lim_{x \to x_0} f/x/ = A$ i $\lim_{x \to x_0} g/x/ = B$, a równocześnie $g/x/ \neq 0$

i $B \neq 0$, to $$\lim_{x \to x_0} \frac{f/x/}{g/x/} = \frac{A}{B}$$

T w i e r d z e n i e 7. Granicą funkcji wymiernej ułamkowej, gdy zmienna niezależna dąży do dowolnej liczby a, przy której mianownik jest różny od zera, jest wartość, jaką ta funkcja przybiera dla a.

Dla funkcji $f/x/ = \frac{g/x/}{h/x/}$

$$\lim f/x/ = \frac{g/a/}{h/a/}$$

c/ Ciągłość funkcji.

Funkcję y = f/x/, której wykres przedstawia się w postaci linii ciągłej, nazywamy funkcją ciągłą.

Funkcję f/x/ nazywamy ciągłą w punkcie x_0, jeżeli funkcja ta przy x dążącym do x_0 dąży obustronnie /tzn.z lewej i prawej strony /do granicznej wartości $f/x_0/$:

$$\lim_{x \to x_0} f/x/ = f/x_0/$$

Różnicę x $- x_0$ między zmienną x a stałą wartości x_0 nazywamy przyrostem zmiennej niezależnej.

3. ZASADY RACHUNKU RÓŻNICZKOWEGO

Określenie pochodnej.

1. Metoda granic.

Weźmy pod uwagę funkcję y = f /x/, której obrazem geometrycznym jest krzywa przedstawiona na rysunku 36. Jeżeli wartość zmiennej niezależnej /odciętej/ x punktu A wzrasta o Δ x, to równocześnie wartość zmiennej zależnej /rzędnej/ y wzrasta o Δy /delta oznacza przyrost/ przy czym wartość przyrostu Δ y jest zależna od Δ x w sposób uwarunkowany postacią funkcji y = f /x/, a tym samym i kształtem krzywej y = f/x/.

Zastępując w równaniu y = f /x/ zmienną x przez x + Δ x, a zmienną y przez y + Δy, otrzymamy:

$$y + \Delta y = f/x + \Delta x/$$

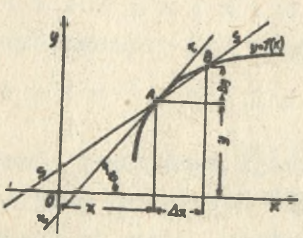
Wyznaczmy granicę, do której dąży iloraz.

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{f/x + \Delta x/ - f/x/}{\Delta x}$$

gdy Δx dąży do 0.

Oznaczmy tę granicę przez

$$\frac{dy}{dx} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x}$$



Rys. 36

Symbol $\frac{dy}{dx}$ nie jest ułamkiem lecz granicą /limes/, do której dąży iloraz $\frac{\Delta y}{\Delta x}$, gdy Δx dąży do zera.

Granica wyrażona symbolem $\frac{dy}{dx}$ nazywa się pochodną y względem x.

Wartość pochodnej zależy oczywiście od wartości x:

$$\frac{dy}{dx} = f\ /x/$$

Pochodna $\frac{dy}{dx}$ funkcji f/x/ jest zatem nową funkcją zmiennej x. Dla zaznaczenia, że pochodna funkcji f/x/ jest również funkcją zmiennej x, oznaczamy ją przez f′/x/.

Pochodna $y' = f'/x/ = \frac{dy}{dx}$ przedstawia dla każdej wartości zmiennej niezależnej x granicę, do której dąży iloraz różnicowy $\frac{\Delta y}{\Delta x}$, gdy Δx dąży do zera.

Opisana wyżej metoda wyznaczania pochodnej funkcji czyli różniczkowania funkcji, wynaleziona przez Newtona zwie się metodą granic.

2. Metoda różniczek. Różniczką wielkości zmiennej x nazywamy nieskończenie mały przyrost zmiennej x; wielkość tę graniczącą z zerem ale różną od zera oznaczamy symbolem dx /czytaj de iks/.

Jeżeli zmienna y jest pewną funkcją zmiennej niezależnej x:y = f/x/, to różniczka dy zależy od różniczki dx, przyjętej za miarę innych wielkości zmiennych zależnych od x.

Nieskończenie małą zmianę dx zmiennej niezależnej x nazywamy różniczką zmiennej niezależnej, a różniczkę dy = = d f/x/ - różniczką zmiennej zależnej y, czyli różniczką funkcji f/x/. Jest to również wielkość nieskończenie mała dążąca do zera lecz różna od zera.

Różnicę funkcji y = f/x/ określa wzór:

$$dy = d\,[f\ /x/] = f/x+dx/-f/x/$$

Stosunek $\frac{dy}{dx} = \frac{d\,[f/x+dx/-f/x/]}{dx}$

nazywamy ilorazem różniczkowym funkcji y = f /x/.

Metoda różniczkowania funkcji, polegająca na wyznaczaniu różniczki zmiennej zależnej i stosunku różniczkowego z wzoru zwie się metodą różniczek. Opiera się ona wprowadzeniu wielkości nieskończenie małych wyższych rzędów: $/dx/^2$, $/dx/^3$,... $/dx/^n$ i na założeniu, iż wielkości nieskończenie małe wyższych rzędów, występujące jako dodajniki w sumie, w której figuruje również różniczka niższego rzędu, można przyrównać do zera. A więc na przykład różniczkę $/dx/^2$ przyjmujemy równą zeru przy różniczce dx jako dodajniku sumy $dx + /dx/^2$; różniczkę $/dx/^3$ - równą zeru przy różniczce $/dx/^2$ itd.

3. Porównanie metod różniczkowania

a/ metoda granic

$$y + \Delta y = /x + \Delta x/^2 = x^2 + 2x\,\Delta x + /\Delta x/^2$$

Podstawiając $y = x^2$, otrzymamy:

$$\Delta y = 2x \cdot \Delta x + /\Delta x/^2$$

Iloraz różniczkowy $\frac{\Delta y}{\Delta x} = 2x + \Delta x$

Pochodna $\frac{dy}{dx} = \lim\limits_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = 2x$

Ponieważ $\lim\limits_{\Delta x \to 0} \Delta x = 0$.

b/ metoda różniczek

$$y + dy = /x+dx/^2 = x^2 + 2x\,dx + /dx/^2$$

Podstawiając $y = x^2$ otrzymamy:

$$dy = 2\,x\,dx + /dx/^2$$

Ponieważ różniczkę drugiego stopnia $/dx/^2$ jako wielkość nieskończenie małą rzędu wyższego wobec różniczki dx możemy przyjąć równą zeru, przeto:

$$dy = 2x\,dx$$

a zatem iloraz różniczkowy

$$\frac{dy}{dx} = 2x$$

Prawidła różniczkowania

Oznaczmy przez $u = f/x/$ i $v = g/x/$ dwie różne funkcje zmiennej x, a przez a i C wielkości stałe .

1. Pochodna wielkości stałej jest zerem.

$$x = C = Cx^0$$

$$y + \Delta y = C/x + \Delta x/^{0} = C$$

$$\Delta y = C - C = 0$$

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{0}{\Delta x} = 0 \quad \lim_{x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = 0$$

A zatem: gdy $x = C$, to $\frac{dy}{dx} = 0$

2. Pochodna wielokrotności danej funkcji równa się wielokrotności pochodnej tej funkcji.

$$y = af/x/; \; y + \Delta y = af/x + \Delta x/$$

$$\Delta y = af/x + \Delta x/ - af/x/$$

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = a\frac{f/x + \Delta x/ - f/x/}{\Delta x}$$

$$\frac{dy}{dx} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = a \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f/x + \Delta x/ - f/x/}{\Delta x}$$

Ale $\lim_{\Delta x \to 0} \frac{f/x + \Delta x/ - f/x/}{\Delta x} = f'/x/$

A zatem: gdy $y = af/x/$, to $\frac{dy}{dx} = a f'/x/$

3. Pochodna sumy lub różnicy dwu funkcji równa się sumie lub różnicy pochodnych tych funkcji.

$y = u \pm v$, przy czym $u = f/x/$ i $v = g/x/$

$$y = \Delta y = u + \Delta u \pm /v + \Delta v/$$

$$\Delta y = \Delta u \pm \Delta v \qquad \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{\Delta u}{\Delta x} \pm \frac{\Delta v}{\Delta x}$$

$$\lim_{x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{x \to 0} \frac{\Delta u}{\Delta x} \pm \lim_{x \to 0} \frac{\Delta v}{\Delta x}$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{d/u \mp v/}{dx} = \frac{du}{dx} \pm \frac{dv}{dx}$$

4. Pochodna iloczynu dwu funkcji równa się sumie iloczynów pierwszego czynnika przez pochodną drugiego czynnika i drugiego czynnika oraz pochodną pierwszego czynnika.

$y = uv$, przy czym $u = f/x/$ i $v = g/x/$

$$y + \Delta y = /u + \Delta u/\ /v + \Delta v/$$

$$\Delta y = v \Delta u + v \Delta v + \Delta u \cdot \Delta v$$

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = v \frac{\Delta u}{\Delta x} + u \frac{\Delta v}{\Delta x} + \Delta u \cdot \frac{\Delta v}{\Delta x}$$

$$\lim_{\Delta x \to o} \frac{\Delta y}{\Delta x} = v \lim_{\Delta x \to o} \frac{\Delta u}{\Delta x} + u \lim_{\Delta x \to o} \frac{\Delta v}{\Delta x} + \lim_{\Delta x \to o} \Delta u \cdot \lim_{\Delta x \to o} \frac{\Delta v}{\Delta x}$$

Ponieważ $\lim\limits_{\Delta x \to o} u = o$, przeto

$$\frac{dy}{dx} = \frac{d/uv/}{dx} = u \frac{dv}{dx} + v \frac{du}{dx}$$

5. Pochodna potęgi. Pochodna funkcji $y = x^n$ /wykładnik n jest całkowity i dodatni/ wyraża się wzorem:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{d/x^n/}{dx} = nx^{n-1}$$

6. Pochodna ilorazu dwu funkcji.

$y = \frac{u}{v}$, przy czym $u = f/x/$ a $v = g/x/$

$$y + \Delta y = \frac{u + \Delta u}{v + \Delta v}$$

$$y = \frac{u + \Delta u}{v + \Delta v} - \frac{u}{v} = \frac{v \Delta u - u \Delta v}{v/v + \Delta v/}$$

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{v \frac{\Delta u}{\Delta x} - u \frac{\Delta v}{\Delta x}}{v/v + \Delta v/}$$

$$\frac{dy}{dx} = \lim_{\Delta x \to o} \frac{v}{x} = \frac{v \lim\limits_{\Delta x \to o} \frac{\Delta u}{\Delta x} - u \lim\limits_{\Delta x \to o} \frac{\Delta v}{\Delta x}}{v \lim\limits_{\Delta x \to o} /v + \Delta v/}$$

Ponieważ $\lim\limits_{\Delta x \to o} /v + \Delta v/ = v$, przeto

$$\frac{dy}{dx} = \frac{d \frac{u}{v}}{dx} = \frac{v \frac{du}{dx} - u \frac{dv}{dx}}{v^2}$$

<u>Różniczkowanie funkcji złożonej</u>

1. Pochodne funkcji złożonej. Jeżeli $y = f/z/$, a $z = \quad /x/$, to $y = f \quad /x/$. Wówczas:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{dz} \cdot \frac{dz}{dx}$$

2. Pochodne funkcji odwrotnej. Jeżeli y jest funkcją x, to x jest również funkcją y:

$$\frac{dy}{dx} \cdot \frac{dx}{dy} = 1$$

Zmienna, względem której różniczkujemy, nazywa się zmienną niezależną, a zmienna rozpatrywana jako funkcja zmiennej niezależnej - zmienną zależną.

Wzór możemy napisać w postaci:

$$\frac{dx}{dy} = \frac{1}{dy/dx}$$

Pochodna funkcji odwrotnej równa się odwrotności pochodnej funkcji pierwotnej.

<u>Druga pochodna</u>.

Jeżeli pochodna względem x pewnej funkcji y = f/x/ jest funkcją x: $y' = f'/x/$, to możemy tę funkcję znowu zróżniczkować. Otrzymamy wówczas drugą pochodną funkcji f/x/ względem x i oznaczamy ją symbolami:

$$\frac{d\frac{dy}{dx}}{dx} = \frac{d^2y}{dx^2} = y$$

gdy mamy obliczyć drugą pochodną funkcji f/x/, musimy wpierw znaleźć jej pierwszą pochodną, a potem otrzymaną wielkość ponownie zróżniczkować.

<u>Pochodne funkcji trygonometrycznych.</u>

1. Pochodna funkcji y = sinx

$$\frac{dy}{dx} = \frac{d\,/\sin x/}{dx} = \cos x$$

2. Pochodna funkcji y = cos x

$$\frac{dy}{dx} = \frac{d/\cos x/}{dx} = -\sin x$$

3. Pochodna funkcji y = tg x

$$\frac{dy}{dx} = \frac{d\,/\mathrm{tg}x/}{dx} = \frac{1}{\cos^2 x}$$

4. Pochodna funkcji y = ctgx

$$\frac{d/ctgx/}{dx} = \frac{1}{\sin^2 x}$$

Zastosowanie rachunku różniczkowego do badania funkcji.

Rachunek różniczkowy umożliwia badanie funkcji ciągłych, polegających na wyznaczaniu wartości pochodnej w punktach osobliwych funkcji i przebiegu tej funkcji w otoczeniu punktów osobliwych.

Największą wartość, jaką funkcja przybiera w otoczeniu jakiegoś punktu, nazywamy maksimum funkcji, a najmniejszą - minimum funkcji.

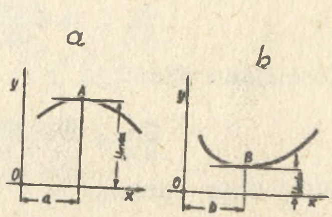
Maksimum i minimum obejmujemy wspólnym mianem extremum. Znalezienie extremum funkcji w pewnym przedziale polega na wyznaczeniu pochodnej funkcji w tym przedziale i przyrównywaniu jej do zera.

Jeżeli pochodna y' funkcji y = f/x/ jest w pewnym przedziale większa od zera $y' > 0$, to funkcja jest w tym przedziale rosnąca; natomiast gdy $y' < 0$, to wzrostowi x towarzyszy zmniejszenie się y; mówimy, iż funkcja w tym przedziale jest malejąca.

W punkcie, w którym y przestaje się zwiększać lub zmniejszać, a przy dalszym wzroście x zaczyna się zmniejszać lub zwiększać, pochodna $\frac{dy}{dx} = 0$, a styczna do wykresu jest równoległa do osi x.

W chwili, gdy y przestaje wzrastać a zaczyna się zmniejszać funkcja f/x/ posiada wartość największą, czyli maximum /rys. 37a/.

W chwili gdy funkcja y = f/x/ przestaje się zmniejszać, a zaczyna wzrastać, posiada wartość najmniejszą, czyli minimum /rys. 37b/.



Rys. 37

W punkcie A pochodna przechodzi przez zero, zmieniając znak + na -, a w punkcie B przechodzi przez zero zmieniając znak - na + .

W najbliższym otoczeniu punktu $x = a$, w którym funkcja osiąga maximum, wartości tej funkcji są mniejsze od $f/a/$ a w najbliższym otoczeniu punktu $x = b$, w którym funkcja ma minimum, wartości tej funkcji są większe od wartości $f/b/$.

zasady rachunku

ZASADY RACHUNKU CAŁKOWEGO

a/ Określenie całki.

Jedno z podstawowych zadań rachunku różniczkowego polega na tym, że mając daną funkcję /pierwotną/ $F/x/$ wyznaczamy jej funkcję pochodną $f/x/$.

W matematyce i jej zastosowaniach występuje częstokroć zagadnienie odwrotne: mając daną funkcję /pochodną/ $f/x/$ wyznaczyć jej funkcję pierwotną.

Jeżeli np. zróżniczkujemy funkcje $y = x^3$, otrzymamy pochodną $y' = \frac{dy}{dx} = 3x^2$. Ale ten sam wynik otrzymalibyśmy dla $y = x^3 + 1$, $y = x^3 + 2$, ..., $y = x^3 + C$.
Widzimy więc iż jednej funkcji pochodnej odpowiada rodzina funkcji pierwotnych $F/x/ + C$, którą oznaczamy symbolem:

$$\int f\,/x/\,dx = f/x/ + C$$

i nazywamy całką nieokreśloną lub nieoznaczoną funkcji $f/x/$.

Symbol $\int f/x/\,dx$ czytamy: całka z $f/x/dx$.

Funkcję /pochodną/ $f/x/$ znajdującą się pod znakiem całki nazywamy funkcją podcałkową, a liczbę C - stałą całkowania.

Różniczkując wyrażenie znajdujące się po prawej stronie równania otrzymamy funkcję podcałkową:

$$\frac{d}{dx}\,/F\,/x/ + C/ = f/x/$$

Obliczanie całki nieoznaczonej funkcji $f/x/$ nazywamy całkowaniem tej funkcji.

Metody obliczania całek i badanie ich własności stanowią przedmiot rachunku całkowego.

b/ Całka określona.

Różnica między dwiema wartościami funkcji pierwotnej F/x/ w miejscach aib przedstawia się jako suma nieskończenie wielu różniczek f/x/ dx w przedziale od x = a do x = b. Sumę taką nazywamy całką określoną lub oznaczoną funkcji i oznaczamy ją symbolem:

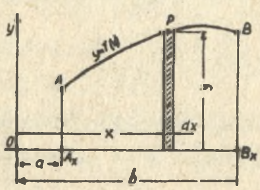
$$\int_a^b f\,/x/\,dx$$

Różnicę wartości funkcji pierwotnej F/b/ - F/a/, przedstawiającą zmianę zmiennej niezależnej od x = a do x = b przedstawiamy symbolicznie:

$$F/b/ - F/a/ = \Big|_a^b F\,/x/ = \int_a^b f/x/\quad dx$$

c/ Geometryczna interpretacja całki.

Aby wyznaczyć pole ograniczone krzywą y = f/x/, dwiema rzędnymi x = a i x = b oraz osią odciętych /rys. 38/, dzielimy odcinek A_xB_x na n równych części o szerokości Δx, a tym samym pole ABB_xA_x na n prostokątnych pasków elementarnych o zmiennym polu $y \cdot \Delta x$.



Rys. 38

Suma pól elementarnych

$$\sum y\ \Delta x = y_1\ \Delta x + y_2\ \Delta x + \ldots + y_n\ \Delta x$$

Jeżeli szerokość pasków dąży do zera, a liczba ich wzrasta nieograniczenie, to suma pasków elementarnych dąży do wartości pola ograniczonego krzywą y = f/x/.

Granicę, do której dąży suma $\sum y\ \Delta x$ nazywamy całką funkcji y względem x i oznaczamy symbolem

$$\int y dx = \lim_{\Delta x \to 0} \sum y\ \Delta x$$

Znak różniczki dx służy do oznaczenia, że odstępy x dążą do zera, a symbol $\int$ stanowiący wydłużoną literę S oznacza sumę ciągłą, czyli całkę.

Jeżeli chcemy zaznaczyć, iż sumowanie pasków elementarnych odbywa się w granicach od x = a do x = b, wówczas całkę taką oznaczamy symbolem

$$\int_a^b yd\,x$$

i nazywamy całką określoną granicami a i b.

d/ Całki zasadnicze.

Z pochodnych funkcji elementarnych wynikają jako odwrotności wzory całek zasadniczych.

1. $\int x^n dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} + C$

2. $\int \cos x dx = \sin x + C$, gdyż $\frac{d/\sin x/}{dx} = \cos x$

3. $\int \sin x dx = -\cos x + C$, gdyż $\frac{d/-\cos x/}{dx} = \sin x$

4. $\int \frac{dx}{\cos^2 x} = \mathrm{tg}x + C$, gdyż $\frac{d/\mathrm{tg}x/}{dx} = \frac{1}{\cos^2 x}$

5. $\int \frac{dx}{\sin^2 x} = -\mathrm{ctg}x + C$, gdyż $\frac{d/-\mathrm{ctg}x/}{dx} = \frac{1}{\sin^2 x}$

e/ Prawidła całkowania

Z prawideł różniczkowania wynikają odpowiednie prawidła całkowania.

1. Z wzoru d/u+v/ = du + dv wynika wzór:

$$\int /du + dv/ = \int du + \int dv$$

Całka sumy różniczek równa się sumie całek poszczególnych różniczek.

2. Z wzoru d/au/ = adu wynika:

$$\int adu = a \int du$$

W całce możemy czynnik stały wyłączyć przed znak całki.

3. Z wzoru d/uv/ = adv = udv + vdu wypływa wzór:

$$\int udv = uv - \int vdu$$

znany pod nazwą wzorów całkowania częściowego.

Elementarne metody całkowania.

Całkowanie funkcji może odbywać się w jednym z następujących sposobów:

1. Bezpośrednio w oparciu o całki zasadnicze.
2. Przez przekształcenie danej całki f/x/ dx za pomocą stosowanego podstawienia x = φ/t/ na jedną z całek zasadniczych.

   p. $\int \sqrt{a^2 + x^2}\, .\, xdx$ podstawiamy $a^2 + x^2 = t^2$.

Różniczkując otrzymamy: 2x dx = 2t dt, a zatem:
x dx = t dt i stąd

$$\int \sqrt{a^2 + x^2}\, .\, xdx = \frac{/a^2+x^2/^{3/2}}{3} + C$$

3. Przez sprowadzenie danej całki za pomocą stosownych przekształceń do jednej z całek zasadniczych np.

$$\int \sqrt{a^2 + x^2}\, .\, xdx = \int \sqrt{a^2 + x^2}\, \frac{d/a^2+x^2/}{2} =$$

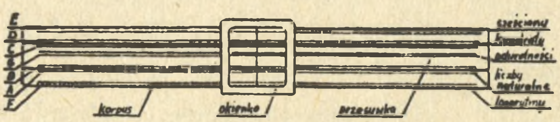
$$= \frac{1}{2}\int /a^2+x^2/^{1/2}\, d/a^2+x^2/ = \frac{1}{3}/a^2+x^2/^{3/2} + C$$

SUWAK RACHUNKOWY

1. Wiadomości ogólne

Suwak rachunkowy służy do szybkiego wykonywania mnożenia, dzielenia, potęgowania, pierwiastkowania, logarytmowania ora odczytywania wartości funkcji kątowych. Otrzymane wyniki posiadają wystarczającą dla praktyki warsztatowej dokładność.

Najbardziej rozpowszechniony typ suwaka /rys. 39/ składa się z trzech zasadniczych części: 1/ korpusu, 2/ przesuwki /ruchomej linijki/ i 3/ ruchomego okienka /szkiełka/.



Rys. 39

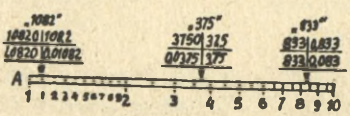
Na korpusie i przesuwce naniesiony jest zespół odpowiednio powiązanych ze sobą podziałek.

Okienko zaś posiada na szkiełku narysowaną jedną lub trzy kreseczki, które służą do ułatwienia odczytywania odpowiadających sobie liczb na różnych podziałkach.

2. Mnożenie

a/ Podziałki i odczytywanie liczb.

Mnożenie wykonujemy, posługując się najczęściej podziałkami A i B, które mają oznaczenia cyfrowe od 1 do 10. Nie znaczy to jednak, aby na suwaku można było mnożyć tylko liczby mniejsze od 10. Każdą bowiem dowolną liczbę umiejscawia się na podziałkach suwaka nie według bezwzględnej wartości danej liczby, lecz jako zespół uszeregowanych cyfr, bez uwzględnienia przecinka odcinającego miejsca dziesiętne i bez uwzględnienia początkowych zer.



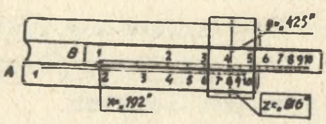
Rys. 40

A więc liczby na przykład: 3750; 37,5; 3,75; 0,0375 zajmują na podziałce A to samo miejsce, które nazywamy "375" /rys. 40/.

b/ Technika mnożenia i odczytywania wyniku.

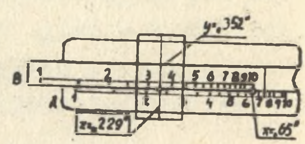
Rys. 41 przedstawia schematycznie sposób wykonywania mnożenia; dla przykładu x . y = z; 19,2 . 4,25 = 81,6, przy użyciu podziałek A i B.

1. Na podziałce A znajdujemy pierwszy czynnik x = "192" i ustawiamy nad nim 1 podziałki B, /2. na podziałce B znajdujemy drugi czynnik y = "425" i ustawiamy na nim kreskę okienka,



Rys. 41

3. kreska ta wskazuje na podziałce A miejsce iloczynu z = "816",
4. jeżeli iloczyn z wypada poza podziałką A, wówczas nad czynnikiem x ustawiamy "10" podziałki B /patrz rys. 42/ przykład: 0,065 . 35 200 = 2290/ i dalej postępujemy jak w przykładzie poprzednim,
5. Wartość iloczynu z ustalamy z sumy ilości miejsc, jaką posiadają oba czynniki. Przy czym ilość miejsc określa się w następujący sposób: na lewo od przecinka traktujemy miejsca jako dodatnie, a na prawo do pierwszej cyfry różnej od zera - jako ujemne.



Rys. 42

np. liczba 19,2 ma + 2 miejsca; 4,25 ma + 1 miejsce 0,31 ma 0 miejsc; 0,072 ma - jedno miejsce; 0,009 ma - 2 miejsca itd.

Jeśli przesuwka wysunięta była na prawo, należy od tej sumy odjąć 1. Jeśli zaś przesuwka wysunięta jest na lewo, suma miejsc pozostaje bez zmiany, przy czym liczby większe od jedności posiadają tyle miejsc ile mają cyfr na lewo od przecinka, a liczby mniejsze od jedności - tyle miejsc ujemnych, ile mają miejsc na prawo od przecinka do pierwszej cyfry różnej od zera.

P r z y k ł a d 1: /Rys. 41 przedstawia uproszczony schemat suwaka/ 19,2 . 4,25 = 81,6, gdyż 19,2 ma + 2 miejsca; 4,25 ma + 1 miejsce; przesuwka wysunięta na prawo więc - 1 miejsce, razem + 2 + 1 - 1 = 2 miejsca. A zatem "816" = = 81.6.

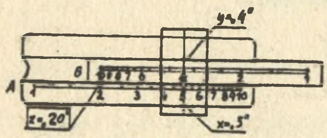
P r z y k ł a d 2: /Rys. 42/ 0,065 . 35200 = 2290; 0,065 - - 1 miejsce; 35200 - + 5 miejsc; przesuwka wysunięta na lewo - 0 miejsc; - 1 + 5 + 0 = + 4 miejsca; "229"= = 2290.

c/ Mnożenie kilku liczb.

Gdy mnożymy kilka liczb wówczas nie odczytujemy pośrednich iloczynów, lecz tylko wynik końcowy, przy czym wartość tego iloczynu obliczamy z sumy miejsc wszystkich czynników, pomniejszonej o tyle jedności, ile razy przesuwka wysunięta była na prawo.

d/ Użycie podziałek A i G /rys. 43/.

Przy pomocy podziałki G oraz podziałki A możemy mnożyć z taką samą dokładnością jak przy użyciu podziałek A i B, z tym nawet udogodnieniem, że nie potrzeba zastanawiać się nad tym czy przesuwkę wysunąć na prawo czy też na lewo, lecz po prostu nad liczbą x /przykładzie 5/, wyszukany na podziałce A, ustawiamy kreskę okienka, po czym przesuwamy przesuwkę tak, aby liczba y /4/ podziałki G znalazła się również pod kreską okienka; wynik z /20/ odczytujemy pod "1" lub "10" przesuwki na podziałce A /5 . 4 = 20/.



Rys. 43

Jeśli przesuwka wysunięta jest na prawo, iloczyn posiada tyle miejsc ile wynosi suma miejsc czynników. Jeśli na lewo - o jedno miejsce mniej.

Użycie podziałki G przy wykonywaniu mnożenia kilku liczb znacznie zwiększa szybkość znajdowania wyniku.

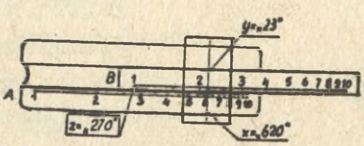
3. Dzielenie.

Zarówno dzielenie jak i mnożenie wykonujemy, posługując się tymi samymi podziałkami A i B /bądź A i G/.

a/ Technika dzielenia i odczytywania wyniku.

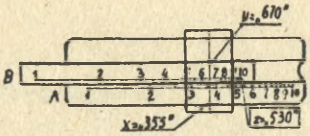
Rys. 44 przedstawia schematycznie sposób wykonywania dzielenia dla przykładu x : y = z; 620 : 0,23 = 2700 przy użyciu podziałek A i B.

1. Na podziałce A znajdujemy przy pomocy kreski okienka dzielną x = "620",
2. Podziałkę B przesuwamy tak, aby pod kreską ustawionego okienka znalazła się liczba y /dzielnik/ = "230",
3. pod "1" przesuwki odczytujemy na podziałce A wynik z.
4. Obliczanie przykładu, 3,55 : 67 = 0,053 podaje rys. 45.
5. Wartość ilorazu ustalamy z różnicy ilości miejsc dzielnej i dzielnika, przy czym, jeśli przesuwka wysunięta jest na prawo wówczas do różnicy należy dodać 1, jeśli natomiast przesuwka wysunięta jest na lewo, różnica miejsc pozostaje bez zmiany.



Rys. 44

P r z y k ł a d: 620 : 0,23 = 2700 /rys. 6/, 620/ + 3 miejsca/, 0,23 /0 miejsc/ przesuwka wysunięta na prawo /+ 1 miejsce/. Razem, + 3 - 0 + 1 = 4 miejsca, a zatem "27" = = 2700.

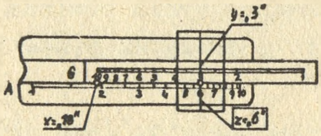


Rys. 45

P r z y k ł a d: 3,55 : 67 = 0,053 /rys. 7/; 3,55 /+ 1 miejsce/, 67 /+ 2 miejsca/, przesuwka wysunięta na lewo /0 miejsc/, razem + 1 - /+ 2/ + 0 = -1 miejsce, a więc "53" = 0,053.

b/ Użycie podziałek A i G.

Nad dzielną x = "18" /przykład: 18:3 = 6; Rys. 46/ znalezioną na podziałce A ustawiamy "10" przesuwki /w innych przykładach może być "1"/ i następnie przesuwamy okienko w ten sposób, aby pod kreską znalazła się na podziałce zwrotnej G liczba przedstawiająca dzielnik y /3/ i pod tą kreską na podziałce A odczytujemy iloraz z /6/.



Rys. 46

Ilość miejsc ilorazu obliczamy, odnośnie kierunku wysunięcia przesuwki, odwrotnie do zasady wyrażonej w punkcie a/ 5.

c/ Obliczanie ułamków.

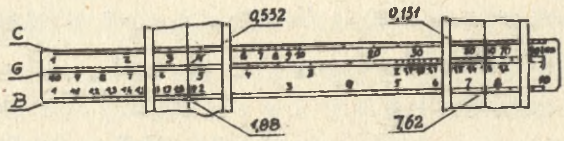
Wyrażenie ułamkowe typu $\frac{a \cdot b}{c \cdot d}$ najszybciej obliczamy wykonując na przemian najpierw dzielenie, potem mnożenie itd., w sposób następujący: a : c . b : d, przy czym częściowych wyników nie odczytujemy. Ilość miejsc obliczamy zachowując podane przy dzieleniu i mnożeniu prawidła.

P r z y k ł a d: $\frac{42,3 \cdot 743}{0,13 \cdot 49,2} = 49,3.$

d/ Odwrotności liczb.

Odwrotność liczb znajdujemy posiłkując się podziałkami B i G /Rys. 47/.

1. Jeśli znajdujemy odwrotność liczby większej od jedności, to wynik posiada tyle zer przed pierwszą cyfrą znaczącą, ile miejsc posiada liczba.



Rys. 47

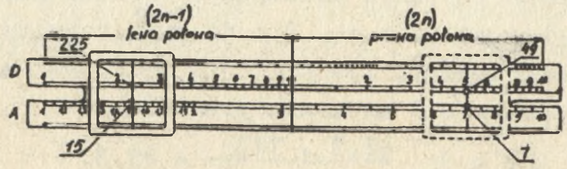
Np. a/ Odwrotność liczby 7,62 wynosi 0,131 /rys. 47/ gdyż 7,62 ma 1 miejsce całkowite, więc"131" = 0,131.
b/ Odwrotność liczby 250 wynosi 0,004, gdyż 250 ma 3 całkowite, więc "4" = 0,004.

2. Jeśli natomiast znajdujemy odwrotność liczby mniejszej od 1 /ułamek dziesiętny/, wówczas wynik posiada tyle miejsc ile jest w danej liczbie zer na początku przed pierwszą cyfrą znaczącą.

Np: odwrotność liczby 0,532 wynosi 1,88 /rys. 47/, gdyż 0,532 ma jedno zero, więc "188" = 1,88 /jedno miejsce/.

4. <u>Podnoszenie do kwadratu.</u>

Kwadraty dowolnych liczb obliczamy przy pomocy podziałek A i D /rys. 48/. Podziałka kwadratów D posiada dwie identyczne połowy, przedstawiające zakres cyfr od 1 do 10.



Rys. 48

Aby odnaleźć kwadrat dowolnej liczby x, wyszukujemy ją przy pomocy kreski okienka na podziałce A i pod tą kreską odczytujemy wynik na podziałce B. Jeśli jest on na lewej połowie podziałki D, wówczas kwadrat posiada ilość miejsc równą podwojonej ilości miejsc liczby potęgowanej mniej jedność /np. $15^2 = 225$/. Jeżeli natomiast kwadrat odczytujemy na prawej części podziałki D, wówczas ilość miejsc w wyniku równa się słownie podwójnej ilości miejsc liczby potęgowanej /np. $7^2 = 49$/ /rys. 10/.

Przykłady: 1/ $190^2 = 36100$; /2 x 3 - 1/ = 5 miejsc, gdyż 190 ma 3 miejsca, a wynik odczytano na lewej stronie podziałki D;

2/ $6{,}1^2 = 37{,}2$; /2 x 1/ = 2 miejsca, nie odejmuje się 1, gdyż wynik odczytano na prawej połowie,

3/ $0{,}265^2 = 0{,}0702$; /2 x 0 - 1/ = - 1 miejsce /lewa połowa/,

4/ $0{,}048^2 = 0{,}0023$; /2 x /-1/ /= -2miejsca /prawa połowa/.

5. OBLICZANIE PIERWIASTKA KWADRATOWEGO

Obliczanie pierwiastka kwadratowego jest działaniem odwrotnym potęgowania. A zatem używa się i w tym wypadku podziałek D i A, jak to przedstawiono na rys. 10 /49 = 7/.

Kierujemy się przy tym następującymi prawidłami:

1. Liczbę podpierwiastkową dzielimy, począwszy od przecinka dziesiętnego, na prawo i na lewo, na grupy dwucyfrowe np: 1 27; 42, 3; 2, 32 4; 0, 00 07 3, z czego widać, że pierwsza i ostatnia grupa mogą mieć, jedną lub dwie cyfry.
2. Jeżeli pierwsza od lewej strony grupa cyfr znaczących ma tylko jedności /3 43; 0, 07 4/, to liczbę podpierwiastkową wyszukujemy kreską okienka w lewej połowie podziałki D i wynik odczytujemy u dołu na podziałce A.
3. Jeżeli zaś pierwsza od lewej strony grupa cyfr znaczących zawiera dziesiątki /np. 42 34; 0, 80 3; 32, 4/, to liczbę podpierwiastkową nastawiamy na prawej połowie podziałki D i wynik odczytujemy również na podziałce A.

4. Ilość miejsc pierwiastka określając odpowiednio grupy cyfrowe liczby pierwiastkowanej, i tak: ilość miejsc pierwiastka liczby równej lub większej od jedności równa się ilości grup dwucyfrowych w liczbie podpierwiastkowej na lewo od przecinka;

1. $\sqrt{2500} = \sqrt{25'00} = 50$; 2. $\sqrt{9000} = \sqrt{9'00'00} = 300$;
/1//1/ /2/ /1//1//1/ /3/

3. $\sqrt{4} = 2$.
/1/ /1/

natomiast pierwiastek liczby mniejszej od jedności posiada na początku tyle zer, ile kolejnych grup zerowych posiada na początku liczba podpierwiastkowa np:

1. $\sqrt{0,25} = \sqrt{0,'25} = 0,5$; 2. $\sqrt{0,092} = \sqrt{0,'09'2} = 0,303$;
/0/ /0/

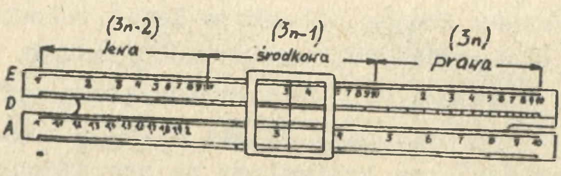
3. $\sqrt{0,0081} = \sqrt{0,00'81} = 0,09$; 4. $\sqrt{0,0092} = \sqrt{0,00'92} = 0,096$
/0//0/ /0//0/

6. Podnoszenie do trzeciej potęgi

Trzecią potęgę dowolnej liczby obliczamy przy pomocy podziałek A i E. Podziałka E zawiera trzy równe części: lewą, środkową i prawą. Każda część posiada zakres liczb od 1 do 10 analogicznie jak podziałka A, tylko w skali trzy razy mniejszej.

Aby obliczyć trzecią potęgę dowolnej liczby:

1. Wyszukujemy daną liczbę kreską okienka na podziałce A i
2. pod kreską na podziałce E odczytujemy trzecią potęgę /rys. 49/.



Rys. 49

3. ilość miejsc znalezionej trzeciej potęgi równa się:

a/ gdy odczytujemy wynik na lewej części podziałki E potrójnej ilości miejsc liczby potęgowanej, zmniejszonej o 2, a więc: /3n-2/,

b/ gdy odczytujemy wynik na środkowej części podziałki E - potrójnej ilości miejsc liczby potęgowanej, zmniejszonej o 1 tzn.: /3n-1/,

c/ gdy odczytujemy wynik na prawej części podziałki E - potrójnej ilości miejsc liczby potęgowanej: /3n/.

P r z y k ł a d y :

1. 13^3 = 3200 /lewa część/
/3.2-2/ = /4/ miejsca

2. $0,28^3$ = 0,022 /środkowa część/
/3 . 0-1/ = /-1/ miejsce

3. $8,1^3$ = 530 /prawa część/
/3 . 1/ = /3/

4. 961^3 = 888 000 000
/3 . 3/ = 9

7. Obliczanie pierwiastka sześciennego

Aby wyciągnąć pierwiastek sześcienny postępujemy odwrotnie aniżeli przy potęgowaniu używając tych samych podziałek E i A /rys. 49/. Mianowicie kreską okienka wyszukujemy na podziałce E liczbę podpierwiastkową, a wynik odczytujemy u dołu pod kreską na podziałce A. Zagadnienie, której części podziałki E lewej, środkowej czy prawej należy umiejscowić daną liczbę podpierwiastkową, rozstrzygamy w sposób następujący:

1. liczbę podpierwiastkową dzielimy poczynając od przecinka dziesiętnego na prawo i na lewo na grupy trzy-cyfrowe np: 48745 = 48´745; 23,3481 = 23,´348´1; 0,65 = 0,´650;

2. Jeżeli pierwsza od lewej strony grupa cyfr zawiera:

a/ tylko jedności, to nastawiamy liczbę w lewej części podziałki E, np: 3´471; 0,´008´28, b/ tylko dziesiątki i jedności, to nastawiamy na środkowej części np: 72´31; 0,´080´5;

c/ setki, to nastawiamy liczbę podpierwiastkową na prawej części podziałki E np: 321; 0,´497´2; 0,´72 = 0,´720.

3 a/ ilość miejsc pierwiastka liczby równej lub większej od jedności równa się ilości grup trzycyfrowych na lewo od przecinka w liczbie podpierwiastkowej, np:

1. $\sqrt[3]{15625} = \underset{/1//1/}{\sqrt[3]{15'625}} = \underset{/2/}{25}$

2. $\sqrt[3]{9,25} = \underset{/1/}{\sqrt[3]{9,'25}} = \underset{/1/}{2,1}$

Z a d a n i a : $\sqrt[3]{2,7} = 1,39$, $\sqrt[3]{26} = 2,96$,

$\sqrt[3]{148} = 5,29$.

b/ Pierwiastek liczby mniejszej od jedności posiada na początku tyle zer ile grup zerowych posiada liczba podpierwiastkowa np:

np: $\sqrt[3]{0,022} = \underset{/0/}{\sqrt[3]{0,022}} = \underset{/0/}{0,28}$

$\sqrt[3]{0,0041} = \underset{/0/}{\sqrt[3]{0,'004'1}} = \underset{/0/}{0,159}$

$\sqrt[3]{0,000027} = \underset{/0//0/}{\sqrt[3]{0,'000'027}} = \underset{/0//0/}{0,03}$

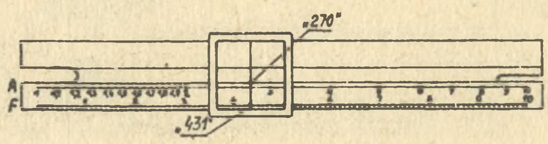
8. Logarytmowanie

a/ Ogólne zasady.

Do obliczenia logarytmów, a raczej mantys, służą podziałki A i F, przy czym kreskę szkiełka nastawiamy na daną liczbę w podziałce A i na skali F pod kreską odczytujemy mantysę.

P r z y k ł a d 1. Znaleźć logarytm z 270 /rys. 50/; cecha = = 2 /według reguł logarytm./ - mantysa 431 /z suwaka/, a zatem lg 270 = 2,431.

P r z y k ł a d 2. Lg 0, 093; cecha $\bar{2}$ /według reguły logarytmowania/, mantysa 968 /z podziałki F na suwaku/.



Rys. 50

Aby znaleźć liczbę, której logarytm jest znany, postępuje się odwrotnie: na podziałce F wyszukujemy kreską szkiełka mantysę i pod kreską szkiełka na podziałce A odczytujemy liczbę.

P r z y k ł a d : lg N = 1, 828, znaleźć N.

Kreską okienka na podziałce S znajdujemy "828", której odpowiada na podziałce A miejsce "673". Ponieważ cecha = 1, zatem liczba N posiada 2 miejsca tzn.: N = 67,3.

9. Funkcje trygonometryczne

a/ Funkcje sinus i cosinus.

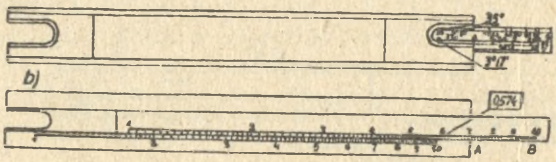
1. Aby obliczyć wartość funkcji sinus dla dowolnego kąta w zakresie od $5^{o}45'$ do 90^{o} /np. sin 35^{o}/ należy:

1/ Obrócić suwak o 180^{o} w ten sposób, aby jego spód skierowany był ku górze /rys. 51/.

2/ Wysunąć przesuwkę tak daleko, aby kreska podziałki S odpowiadająca kątowi 35^{o} pokryła się z górną kreską umieszczoną na prawym wykroju spodu korpusu.

3/ Odwrócić suwak do normalnej pozycji /rys. 51/ i na podziałce B nad "10" podziałki A odczytać wielkość "574", wartość zaś sin 35^{o} = 0,574, bowiem wszystkie wartości sinusów odczytane na tej podziałce tj. dla kątów od $5^{o}45'$ do 90^{o} są większe od 0,1 a mniejsze od 1.

2. Na podziałce S podane są kąty w zakresie od $5^{o}45'$do 90^{o}. Natomiast kąty od $0^{o}40'$do $5^{o}45'$zawiera podziałka



Rys. 51

"S . T", to jest podziałka sinusów i tangensów, które dla małych kątów posiadają wartości bardzo bliskie. Gdy chcemy obliczyć na przykład sin $3^{o}17'$ wówczas postępujemy jak poprzednio, z tą tylko różnicą, iż przesuwkę wysuwamy tak daleko, aż punkt $3^{o}17'$ na podziałce S . T pokryje się dolną kreską wykroju spodu korpusu i, odwróciwszy suwak, odczytujemy na podziałce B nad "10" podziałki A wielkość "574". Wartość zaś sin $3^{o}17'$wynosi 0,0574, gdyż dla kątów od $0^{o}40'$do $5^{o}45'$ wartości sinusów są większe od 0,01, a mniejsze od 0,1. Wartość funkcji cosinusów dowolnego kąta obliczamy, uwzględniając zależność

$$\cos\alpha = \sin/90^{o} - \alpha/$$

np. cos 35^{o} = sin/90^{o} - 35^{o}/ = sin 55^{o}, a wartość sin 55^{o} = 0,819 znajdujemy w sposób poprzednio podany.

P r z y k ł a d y: sin $14^{o}30'$= 0,25; sin $79^{o}20'$= 0,983; cos $20^{o}40'$= 0,936; cos $69^{o}10'$= 0,356.

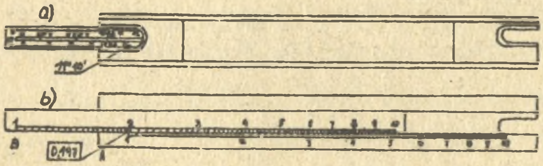
b/ <u>Funkcje tangens i cotangens.</u>

Gdy chcemy znaleźć wartość funkcji tangens dla kątów małych do $5^{o}45'$, to wyszukujemy ją posiłkując się podziałką S . T, jak to podano wyżej. Dla kątów zaś w zakresie od $5^{o}45'$do 45^{o} /np. tg$11^{o}10'$/ postępujemy w sposób następujący:

1/ odwracamy suwak spodem do góry /rys. 52/

2/ przesuwkę wyciągamy w lewo tak daleko, aby punkt odpowiadający danemu kątowi /$11^{\circ}10'$/ pokrywał się z kreską umieszczoną na lewym wykroju korpusu;

3/ odwracamy suwak do normalnej pozycji /rys. 52/ i na podziałce B nad "1" podziałki A odczytujemy wynik /w tym wypadku "197"/.



Rys. 52

Stąd wartość tg $11^{\circ}10'$ wynosi 0,197, gdyż tg $5^{\circ}45' = 0{,}1007$ a tg $45^{\circ} = 1$.

Wartość funkcji tg dla kątów większych od 45° znajdujemy ze wzoru:

$$\operatorname{tg}\alpha = \frac{1}{\operatorname{tg}/90^{\circ} - \alpha/}$$

np. $\operatorname{tg} 65^{\circ} \frac{1}{\operatorname{tg}/90^{\circ}-65^{\circ}/} = \frac{1}{\operatorname{tg} 25^{\circ}} = \frac{1}{0{,}466} = 2{,}145$

Natomiast funkcje cotangens obliczamy ze wzoru:

$$\operatorname{ctg}\alpha = \frac{1}{\operatorname{tg}\alpha}$$

np: $\operatorname{ctg} 42^{\circ} = \frac{1}{\operatorname{tg} 42^{\circ}} = \frac{1}{0{,}9} = 1{,}111$

P r z y k ł a d y : $\operatorname{tg}25^{\circ}30' = 0{,}477$; $\operatorname{tg} 66^{\circ}10' = 2{,}264$;
$\operatorname{ctg}39^{\circ}20' = 1{,}22$; $\operatorname{ctg}80^{\circ}40' = 0{,}164$

c/ <u>Obliczanie wartości kątów.</u>

Mając dane wartości funkcji, możemy, postępując w odwrotny sposób aniżeli podano wyżej, znaleźć wartości kątów, trzymając się przy tym następujących zasad: jeśli sin = = 0,01 do 0,1, to szukamy kąta na podziałce S . T.

jeśli sinα = 0,1 do 1 to szukamy kąta α na podziałce S
" tg α = 0,01 do 0,1 " " α " " S . T
" tg α = 0,1 do 1 " " α " " T

P r z y k ł a d: 1. sin α = 0,574. Znaleźć kąt α .

1. Wartość 0,574 na podziałce B ustawiamy nad "10" podziałki A.
2. Odwracamy suwak w ten sposób, aby jego spód był skierowany ku górze i podgórną kreską prawego wykroju odczytujemy na podziałce S kąt α = 35^{o}.

P r z y k ł a d 2. Sin α = 0,045. Znaleźć kąt α .

Ponieważ wartość sin α jest zawarta pomiędzy 0,01 i 0,1, więc kąt α odczytujemy na podziałce S . T jako α = $2^{o}35'$.

Jeśli mamy podaną wartość funkcji cosinus α i szukamy kąta α , wówczas pamiętając, że cos = sin /90^{o} - /, znajdujemy dla danej wartości na podziałce S lub S . T kąt /90^{o} - α / i stąd obliczamy .

Np. cos α = 0,495; sin /90^{o} - α / = 0,495; z podziałki S odczytujemy /90^{o} - α / = $29^{o}40'$; α = $60^{o}20'$.

Podobnie znajdujemy kąt α , znając wartość ctg α, gdyż ctg α = tg /90^{o} - α /.

np: ctgα = 0,27; tg/90^{o}- α/ = 0,27; z podziałki T odczytujemy /90^{o}- α / = $15^{o}10'$; α = $74^{o}50'$; ctg α = 0,08; tg/90^{o}- α/= = 0,08; Na podziałce S . T odczytujemy /90^{o} - α / = $4^{o}35'$, skąd α = $85^{o}25'$.

Zasadnicze wiadomości ze statystyki.

Zbiór, który podlega badaniu statystycznemu, nazywamy zbiorowością ogólną /lub zbiorowością generalną lub populacją generalną/.

Cecha elementów zbiorowości ogólnej mająca określać interesującą nas właściwość tej zbiorowości, nazywa się cechą zbiorczą.

Obserwowana cecha może przybierać różne wartości w zależności od tego, który element danej zbiorowości badamy. Jest to więc wielkość zmienna. W statystyce zajmujemy się tylko zmiennymi losowymi czyli przypadkowymi. Termin ten oznacza, że poszczególne wartości, które może przybierać cecha, mogą być różne i powstają na skutek przypadkowego współdziałania przyczyn, występujących przy kształtowaniu cechy.

Cecha zbiorcza jako cecha zmienna jest ciągła, gdy może przybierać wszystkie wartości w granicach swojej zmienności, lub nieciągła /skokowa/ - gdy może przybierać tylko pewne określone wartości.

Wielokrotność powtórzenia danej wartości zmiennej losowej nieciągłej w zbiorowości nazywamy licznością lub liczebnością tej wartości.

Liczności poszczególnych wartości zmiennej lub liczności w poszczególnych przedziałach będziemy oznaczali symbolem n_i, gdzie wskaźnik i oznacza kolejny numer przedziału.

Stosunek liczności n_i, odpowiadającej danej wartości zmiennej losowej /lub danemu przedziałowi jej wartości/, do liczności N całej rozpatrywanej zbiorowości, oznaczamy symbolem f_i i nazywamy częstością tej wartości /lub przedziału/.

$$f_i = \frac{n_i}{N}$$

Częstość jest liczbą niemianowaną i wyrażamy ją w ułamkach albo w procentach.

Stosunek liczności n_i do h_i odpowiedniego przedziału zmiennej losowej nazywamy gęstością liczności tej zmiennej i oznaczamy symbolem g_{ni}.

Analogicznie stosunek częstości f_i do wartości h_i odpowiedniego przedziału zmiennej losowej nazywamy gęstością częstości i oznaczamy symbolem g_{fi}.

Stąd $$g_{ni} = \frac{n_i}{h_i} \quad \text{oraz} \quad g_{fi} = \frac{h_i}{h_i}$$

Zależność liczności, częstości lub gęstości zmiennej losowej od wartości tej zmiennej nazywamy rozkładem /lub szeregiem rozdzielczym/ liczności częstości lub gęstości tej zmiennej.

Wartości średnie. Wartość średnia reprezentuje cechę zbiorowości jako całości jedną liczbę, koło której grupują się inne wartości.

Najczęściej stosowaną średnią jest średnia arytmetyczna. Jeżeli wartościami badanej cechy dla poszczególnych n elementów zbiorowości są X_1, X_2, ... X_n, to średnia arytmetyczna wynosi:

$$\bar{X} = \frac{X_1 + X_2 + ... + X_n}{n} = \frac{\Sigma X_i}{n}$$

Gdy elementy zbiorowości układają się w przybliżeniu w postępie geometrycznym, to lepszą miarą koncentracji jest średnia geometryczna, którą oznaczamy symbolem G.

Średnią geometryczną ciągu n wartości X_1, X_2, ...X_n określa się wzorem:

$$G = \sqrt[n]{X_1 \cdot X_2 \; .... \; X_n}$$

czyli średnia geometryczna jest równą pierwiastkowi n-tego stopnia z iloczynu poszczególnych wartości.

Stosuje się też średnią, zwaną mediana, oznaczaną symbolem M. Aby ją znaleźć, wypisujemy elementy zbioru statystycznego w porządku wzrastających /lub malejących/ wartości. Jeżeli liczność elementów zbioru jest liczbą nieparzystą, to medianą jest wartość zajmująca środkowe miejsce.
Jeżeli liczba elementów zbioru jest parzystą, to za medianę uważa się średnią arytmetyczną dwóch środkowych wyrazów uporządkowanego ciągu.

Miary rozrzutu. Średnie wskazują jedynie dookoła jakiej wartości są zgrupowane wartości ciągu statystycznego ale nie dają pojęcia o wielkości rozrzutu tych wartości.

Istnieją różne możliwości pod tym względem, miara ta jest bowiem wielkością umowną podobnie jak umowną jest średnia.

Bardzo często użyteczną i niezwykle prostą do obliczeń miarą rozrzutu jest rozstęp wartości ciągu, oznaczany przez R. Jest to różnica wartości największej i najmniejszej ciągu.

$$R = X_{max} - X_{min}$$

Lepszą miarą rozrzutu jest odchylenie średnie, oznaczone symbolem σ.

Dla ciągu wartości $X_1, X_2, X_3 \ldots X_n$, z których każda występuje tylko 1 raz, odchylenie średnie wyraża się wzorem:

$$\sigma = \sqrt{\frac{\sum /X_i - \bar{X}/^2}{n}}$$

Jak widać, odchylenie średnie uwzględnia wpływ każdej wartości ciągu, podczas gdy rozstęp opiera się tylko na wartościach skrajnych. Widać też, że odchylenie średnie jest miarą rozrzutu względem wartości średniej.

Z wzoru wynika, że w celu obliczenia odchylenia średniego σ ciągu wartości $X_i = X_1, X_2 \ldots X_n$, należy wyznaczyć ich średnią arytmetyczną $\bar{X}$, utworzyć różnice kolejnych wartości X_i i tej średniej $\bar{X}$ /czyli $X_i - \bar{X}$/, każdą z tych różnic podnieść do kwadratu, kwadraty te zsumować, sumę podzielić przez liczbę wartości n i z otrzymanej liczby wyciągnąć pierwiastek kwadratowy; jego dodatnia wartość jest równa

Kwadrat odchylenia średniego σ^2 nazywa się wariancja.

Jeżeli poszczególne wartości ciągu powtarzają się to odchylenie średnie wyraża się wzorem

$$\sigma = \sqrt{\frac{\sum ni /Xi - \bar{X}/^2}{\sum ni}}$$

Ten przypadek spotyka się najczęściej w obliczeniach statystycznych. Sumowanie w powyższych wzorach rozciąga się na skończoną liczbę wskaźników, równą ilości różnych wartości zmiennej X_i^2.

Podstawowe wiadomości z rachunku prawdopodobieństwa.

Ogólnie, gdy pewne zdarzenie A może zajść m równorzędnymi /równomożliwymi/ sposobami /zwanymi sprzyjającymi/ na n w ogóle równomożliwych przypadków, to prawdopodobieństwo zajścia danego zdarzenia jest

$$P\ /A/ = \frac{m}{n}$$

Jeżeli np. rzucamy kostkę sześcienną, doskonałą geometrycznie, jednorodną, jednorodną pod względem masy, o powierzchniach oznaczonych liczbami od 1 do 6, jesteśmy przekonani, że każda liczba od 1 do 6 ma jednakowe szanse pojawienia się. W naszym przykładzie n = 6 - jest 6 równomożliwych wyników rzutu kostką. Przypadkiem sprzyjającym jest wyrzucenie jakiejś określonej liczby oczek np. 5. Przy każdym rzucie może być tylko jeden taki przypadek, a więc m = 1. Wzór powyższy wyraża tzw. klasyczne określenie prawdopodobieństwa /Laplace'a/; prawdopodobieństwo zdarzenia jest stosunkiem liczby m przypadków sprzyjających jego zajściu do liczby n ogółu możliwych przypadków, tj. sprzyjających i niesprzyjających, pod warunkiem, że wszystkie przypadki są jednakowo możliwe.

Prawdopodobieństwo zdarzenia zupełnie pewnego /np. wyrzucenia jakiejkolwiek liczby oczek/ jest równe jedności /p = 1/, to m = n, a prawdopodobieństwo zdarzenia niemożliwego /np. niewyrzucenie żadnej liczby oczek/ jest równe zeru /p=o/, bo m=o. W przypadkach pośrednich p jest zawsze ułamkiem właściwym.

Obliczanie prawdopodobieństwa w przypadkach prostych może być dokonywane przez zwykłe policzenie przypadków w ogóle możliwych /n/ i przypadków sprzyjających /m/.

Jeżeli np. rzucamy 2 kostki i pytamy, jakie jest prawdopodobieństwo wyrzucenia w sumie 5 oczek /zdarzenie A/, to stwierdzamy, że jest n = 6 . 6 = 36 przypadków możliwych /bo każdej możliwej liczbie oczek I rzutu kostki odpowiada

6 możliwości II rzutu/, a sprzyjające są tylko te przypadki, w których suma wyników obu rzutów wynosi 5. Są to: 1 + 4; 2 + 3; 3 + 2; 4 + 1, czyli m = 4, zatem:

$$p\,/A/ = \frac{4}{36} = \frac{1}{9}$$

Takie liczenie jest dość mozolne, a nieraz praktycznie niemożliwe. Dla szczególnych zagadnień istnieją gotowe wzory oparte na kombinatoryce, które pozwalają obliczyć bezpośrednio prawdopodobieństwo p.

Prawdopodobieństwo zdarzenia przeciwnego do zdarzenia A oznaczamy symbolem p $/\bar{A}/$. W podanym wyżej przykładzie rzutu dwiema kostkami będzie nim prawdopodobieństwo niewyrzucenia 5 oczek. Jest zrozumiałe, że:

$$P/\bar{A}/ = 1 - p/A/ = 1 - \frac{1}{9} = \frac{8}{9}$$

a ogólnie:

$$P/\bar{A}/ = 1 - \frac{m}{n} = \frac{n-m}{n}$$

Dwa zdarzenia A_1 i A_2 nazywają się wyłączającymi, gdy zajście zdarzenia A_1 wyklucza możliwość jednoczesnego zajścia zdarzenia A_2 i odwrotnie.

Ponadto używane są pojęcia zdarzeń niezależnych. Dwa zdarzenia A_1 i A_2 nazywamy niezależnymi, jeżeli zajście zdarzenia A_1 nie ma wpływu na zajście zdarzenia A_2 i odwrotnie.

W przypadku gdy mamy do czynienia ze zderzeniem A, którego zajście zależy od zajścia innego zdarzenia B, mówimy o prawdopodobieństwie względnym /lub warunkowym/ zdarzenia A względem zdarzenia B. Przypuśćmy, że białe kulki znajdują się w kilku urnach o różnych składach, sięgamy do jednej z nich na chybił-trafił i zapytujemy o prawdopodobieństwo wyciągnięcia kulki białej /zdarzenie A/ dajmy na to z urny oznaczonej nr 5 /zdarzenie B/. Prawdopodobieństwo to zależy od tego, czy wybraliśmy urnę nr 5. Symbolem wyrażenia "zdarzenie A pod warunkiem zajścia zdarzenia B" jest A/B, zaś odpowiednie prawdopodobieństwo oznacza się przez P[A/B]. Często spotyka się też symbol $P_B/A/$. Gdyby chodziło wprost o wyciągnięcie kulki białej /bez względu na urnę/, mówilibyśmy o prawdopodobieństwie bezwzględnym /warunkowym/.

Rachunek prawdopodobieństwa opiera się na trzech zasadniczych prawach.

I. Prawo o sumie prawdopodobieństw. Prawdopodobieństwo zajścia jednego z wzajemnie wyłączających się zdarzeń $A_1, A_2 \dots A_n$ jest równe sumie prawdopodobieństw poszczególnych zdarzeń. Wyraża się wzorem

$$P/A_1 + A_2 + \dots + A_n/ = P/A_1/ + P/A_2/ + \dots + P/A_n/$$

Jest to więc prawdopodobieństwo, że zajdzie albo zdarzenie A_1, albo A_2, ... albo A_n. Jeżeli zdarzenie $A_1, A_2 \dots A_n$ stanowią pełną grupę zdarzeń, tzn. obejmują wszystkie możliwe zdarzenia, to suma ta jest równa 1.

II. Prawo o iloczynie prawdopodobieństw zdarzeń niezależnych. Prawdopodobieństwo jednoczesnego zajścia niezależnych zdarzeń A_1, $A_2 \dots A_n$ jest równe iloczynowi prawdopodobieństw zajść poszczególnych zdarzeń.

Wyraża się to wzorem:

$$P/A_1 A_2 \dots A_n/ = P/A_1/ \cdot P/A_2/ \dots P/A_n/.$$

Jest to więc prawdopodobieństwo, że zajdą zdarzenia A_1 i A_2 ... i A_n jednocześnie.

Rys. 53. Graficzne przedstawienie sumy i iloczynu prawdopodobieństw.

III. Prawo o iloczynie prawdopodobieństw zdarzeń zależnych. Prawdopodobieństwo P A/B jednoczesnego zajścia zdarzenia A i zdarzenia B, które jest uwarunkowane zajściem zdarzenia A, jest równe iloczynowi prawdopodobieństwa zajścia zdarzenia A, czyli P /A/, przez prawdopodobieństwo warunkowe P/B/A/ zajścia zdarzenia B pod warunkiem, że zaszło zdarzenie A. Wyrażamy to wzorem:

$$P/AB/ = P/A/ \cdot P\ B/A$$

Prawdopodobieństwo zdarzeń alternatywnych

Jeżeli zdarzenie A, którego zajście jest warunkiem zajścia zdarzenia B, może być zrealizowane n różnymi sposobami wzajemnie się wykluczającymi, to prawdopodobieństwo /bezwarunkowe/ zdarzenia B będzie.

$$P/B/ = P/A_1/ \cdot P\left[B/A_1\right] + P/A_2/ + \ldots + P/A_n/ \cdot$$

$$P\left[B/\ A_n\right] = \sum_{i=1}^{n} P\ /A_i/\ \cdot P\left[B/A_i\right]$$

gdzie A_1, A_2 ... A_n oznaczają właśnie różne możliwości zajścia zdarzenia A. Symbol po prawej stronie oznacza w skróceniu sumę składników $P\ /A_i/\ \cdot P\left[B/A_i\right]$ gdzie i = 1,2, ...n. Wzór ten nazywa się wzorem na prawdopodobieństwo zupełne.

Podstawowe wzory kombinatoryki.

Oddzielne elementy zbioru /np.zbioru różnych liter lub cyfr/ można ułożyć w grupy wg pewnych założeń. Kombinatoryka pozwala obliczyć liczbę różnych grup zgodnie z tymi założeniami. Rozróżnia się 3 zasadnicze rodzaje grup:

a/ Przemieszczenia /wariacje-v/ są zestawieniami, do których wchodzi część elementów zbioru. Za zestawienia różne uważa się zestawienia, które różnią się choćby jednym elementem lub ich uporządkowaniem. Tak więc np. w zestawieniach z 5 liter a. b. c. d. e. po 3 litery - takie zestawienia jak a, b, c i c, a, b uważa się za zestawienia różne.

Zauważyć można, że w powyższym przykładzie możemy zestawić 5 wariacyj po 1 elemencie,mianowicie a, b, c, d, e. Do każdej z nich możemy dołączyć po jednym z pozostałych elementów, a więc np. do a możemy dołączyć b lub c lub d lub e,skąd otrzymamy wariacje ab, ac, ad, ae. Ogółem otrzymamy więc 5 . 4 wariacji z 5 elementów po 2. Podobnie do każdej z tych wariacji możemy dołączyć jedną z pozostałych 3 liter, otrzymamy więc ogółem 5 . 4 . 3 wariacji po 3 elementy.

Ogólnie przy n elementach zbioru liczba wariacji po m elementów będzie:

$$V_n^m = n\ /n-1/\ \cdot\ /n-2/\ \ldots\ /n-m+1/$$

Wzór ten, jak łatwo sprawdzić jest równoznaczny ze wzorem:

$$V_n^m = \frac{n!}{/n-m/!}$$

gdzie symbol n! /czyli "n silnia"/ oznacza iloczyn kolejnych czynników od 1 do n, zaś /n-m/! = 1·2·3 ... /n-m/.

W powyższym przykładzie będzie

$$V_5^3 = \frac{5!}{/5-3/!} = \frac{1\cdot2\cdot3\cdot4\cdot5}{1\cdot 2} = 60$$

b/ <u>Przemiany /permutacje- β/</u> są szczególnym przypadkiem wariacji, mianowicie gdy do zestawienia wchodzą wszystkie elementy zbioru. W ten sposób liczba permutacji z n ele - mentów /β_n/ wynosi.

$$\beta_n = n!$$

co wynika z poprzedniego wzoru po podstawieniu m = n i zakładając, że 0! = 1. Tak więc np. z powyższych 5 liter można ułożyć P_5 = 5! = 1·2·3·4·5 = 120 permutacji /abede,abced, abdoe, abdec, .../.

c/ Kombinacje - C są to zestawienia, do których wchodzi część elementów zbioru, przy czym nie bierze się pod uwagę kolejności elementów, tzn. że np. w zestawieniach z 5 liter po 3 zestawienia takie jak abc, cab, bca uważa się za jedno i to samo zestawienie.

W danym przykładzie będzie można wykonać z 3 elementów, a więc m! = 3! = 1·2·3 = 6 razy. Uogólniając otrzymamy, że liczba kombinacji z n elementów po m, którą oznacza się przez C_n^m lub $/^n{}_m/$ wynosi

$$C_n^m = \frac{n!}{m!\ /n-m/!}$$

W naszym przykładzie liczba kombinacji z 5 liter po 3 wynosi więc:

$$C_5^3 = \frac{5!}{3!\ \ 2!} = \frac{1\cdot2\cdot3\cdot4\cdot5}{1\cdot2\cdot3\cdot1\cdot2} = 10$$

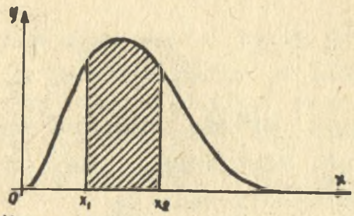
Przy większych wartościach n obliczanie n! jest kłopotliwe. Przeważnie wystarcza obliczenie przybliżone za pomocą wzoru Stirlinga

$$n! \approx n^n \cdot e^{-n}\sqrt{2\pi n}$$

który daje się logarytmować. Dla n = 10 błąd tego wzoru wynosi około 1%. Ze wzrostem n błąd względny dąży do zera.

Rozkłady prawdopodobieństwa

Zależność wyrażająca prawdopodobieństwo występowania poszczególnych wartości zmiennej losowej od tych wartości nazywamy rozkładem prawdopodobieństwa tej zmiennej.



Krzywa rozkładu prawdopodobieństwa zmiennej losowej ciągłej.

Rys. 54

Rzędne nie wyrażają więc tu prawdopodobieństw poszczególnych wartości i o nich nie mówi się w przypadku zmiennej losowej ciągłej. Natomiast mówi się "O prawdopodobieństwie, że zmienna losowa X będzie zawarta w granicach od X_1 do X_2". Prawdopodobieństwo to wyrażone jest za pomocą pola zakreskowanego na rysunku. Pole pod linią rozkładu dla całego obszaru zmienności zmiennej losowej odpowiada wartości prawdopodobieństwa = 1. Rzędne linii rozkładu wyobrażają tu zatem gęstość prawdopodobieństwa.

Zmienne losowe

Zmienna losowa jest to funkcja, której polem jest podstawowy zbiór zdarzeń.
Każde zdarzenie losowe zachodzi z odpowiednim prawdopodobieństwem, a ponieważ w przypadku zajścia określonych zda-

rzeń, zmienna losowa przyjmuje określoną wartość, to i tej wartości jest przypisane odpowiednie prawdopodobieństwo.

Prawdopodobieństwo tego, że zmienna losowa przyjmie wartość mniejszą od x, oznaczamy przez F/x/, nazywamy dystrybuantą zmiennej losowej X a mianowicie:

$$F/x/ = P/X < x/$$

Zmienną losową skokową nazywamy taką zmienną losową X, dla której istnieje funkcja $P/X = x_i/ = p_i/i = 0,1,2..../$ taka, że dla każdego rzeczywistego x zachodzi relacja

$$F/x/ = \sum_{x_i < x} P/X = x_i/$$

t.zn. $P/X < x/$ oblicza się przez zsumowanie wszystkich prawdopodobieństw $P/X = x_i/$ dla x_i mniejszych od x.

Przez zmienną losową ciągła należy rozumieć zmienną losową X, dla której istnieje taka nieujemna funkcja f/x/, że dla każdego rzeczywistego x zachodzi relacja

$$F/x/ = \int_{-\infty}^{+\infty} f/x/dx$$

Funkcję f/x/ spełniającą powyższy związek nazywamy gęstością prawdopodobieństwa albo po prostu gęstością zmiennej losowej X ciągłej. Powiadamy, że dany jest rozkład zmiennej losowej X, jeśli jest znana funkcja prawdopodobieństwa w przypadku zmiennej losowej skokowej lub jeśli znana jest gęstość w przypadku zmiennej losowej ciągłej.
Jeżeli gęstość f/x/ jest funkcją ciągłą w punkcie x, to zachodzi związek

$$F'/x/ = f/x/$$

Wartość oczekiwana i średnie odchylenie

Wartość oczekiwaną /nadzieja matematyczna/ zmiennej losowej nieciągłej X, mogącej przybierać wartości $x_1, x_2, ...x_n$ z prawdopodobieństwami odpowiednio równymi $P_1, P_2, ...P_n$ wyraża się wzorem:

$$M/X/ = x_1p_1 + x_2p_2 + ... + x_np_n = \sum x_ip_i.$$

Dla zmiennej losowej ciągłej wartość oczekiwana określa się wzorem:

$$M/x/ = \int_{x_2}^{x_1} xf/x/\,dx$$

gdzie X_1 i X_2 są to granice zmienności zmiennej X.

Przy obliczaniu wartości oczekiwanych zmiennych losowych korzystamy z następujących własności.

a/ Wartość oczekiwana sumy zmiennych losowych $X_1, X_2, \ldots X_n$ jest równa sumie wartości oczekiwanych poszczególnych zmiennych

$$M/X_1 + X_2 + \ldots X_n/ = M/X_1/ + M/X_2/ + \ldots M/X_n/$$

b/ Wartość oczekiwana iloczynu niezależnych zmiennych losowych $X_1, X_2, \ldots X_n$ jest równa iloczynowi wartości oczekiwanych poszczególnych zmiennych.

$$M/X_1 \cdot X_2 \ldots X_n/ = M/X_1/ \cdot M/X_2/ \ldots M/X_n/$$

Uwaga. Wartość oczekiwana kwadratu zmiennej losowej nie jest równa kwadratowi wartości oczekiwanej tej zmiennej

$$M\,/X^2/ \neq M^2/X/$$

c/ Wartość oczekiwana iloczynu wartości stałej C przez zmienną losową X jest równa iloczynowi tej stałej przez wartość oczekiwaną zmiennej to jest

$$M\,/CX/ = CM/X/$$

d/ Wartość oczekiwana średniej arytmetycznej zmiennych losowych $X_1, X_2, \ldots X_n$ jest równa średniej arytmetycznej wartości oczekiwanych tych zmiennych.

$$M \frac{X_1 + X_2 + \ldots X_n}{n} = \frac{1}{n}\left[M/X_1/ + M\,/X_2/ + \ldots M/X_n/\right]$$

Pojęcie <u>odchylenia średniego</u> jako miary rozrzutu zbiorowości wartości zmiennej losowej jest analogiczne do odpowiedniego pojęcia dla zbiorowości statystycznej.

$$\sigma = \sqrt{M\,/X^2/ - M^2/X/}$$

gdzie: $M/X^2/ = X_1^2 \cdot p/X_1/ + X_2^2 \cdot p/X_2/ + \ldots + X_n^2 \cdot p/X_n/$

$$M^2/X/ = X_1 \cdot p/X_1/ + X_2 \cdot p/X_2/ + \ldots + X_n \cdot p/X_n/^2$$

Dla zmiennej losowej ciągłej E /X²/ jest równy

$$M/X^2/ = \int_{x_1}^{x_2} x^2 \cdot p/x/\, dx$$

Własności odchylenia średniego.

a/ odchylenie średnie <u>sumy</u> albo <u>różnicy</u> niezależnych zmiennych losowych $X_1, X_2 \ldots X_n$ jest równe

$$\sigma_{x_1+x_2+x_3+\ldots x_n} = \sqrt{\sigma_{x_1}^2 + \sigma_{x_2}^2 + \cdots + \sigma_{x_n}^2}$$

b/ odchylenie średnie iloczynu stałej C przez zmienną losową X jest równe iloczynowi C przez odchylenie średnie tej zmiennej

$$\sigma_{cx} = c \cdot \sigma_x$$

c/ odchylenie średnie średniej arytmetycznej n niezależnych zmiennych losowych $X_1, X_2, \ldots X_n$ o jednakowym odchyleniu średnim σ jest równe $\frac{1}{\sqrt{n}}$ tego ostatniego

$$\sigma_{\bar{x}} = \frac{\sigma}{\sqrt{n}}$$

<u>Rozkład dwumianowy /Bernoulli'ego/.</u>

Niech prawdopodobieństwo pewnego zdarzenia przy jakiejś próbie wynosi zawsze p. Prawdopodobieństwo, że zdarzenie to zajdzie przy dwóch kolejnych niezależnych od siebie próbach, wynosi $p.p = p^2$ stosownie do prawa o iloczynie prawdopodobieństwa zdarzeń niezależnych. Prawdopodobieństwo, że zdarzenie to zajdzie przy wszystkich m kolejnych próbach jest p^m. Prawdopodobieństwo, że przy którejkolwiek próbie zdarzenie to nie zajdzie, wynosi 1-p. Prawdopodobieństwo, że przy n kolejnych próbach zdarzenie to zajdzie m razy, a nie zajdzie /n-m/ razy będzie więc

$$p^m /1-p/^{n-m}$$

Wzór ten byłby ostateczny, gdyby chodziło o wyżej podany wynik n prób w określonej kolejności, np. zajście zdarzenia przy pierwszych m próbach, nie zajście przy wszystkich pozostałych /n-m/. Jeżeli zaś kolejność ta jest obojętna, byleby zdarzenie zaszło m razy, a nie zaszło /n-m/ razy, to szukane prawdopodobieństwo jest tyle razy większe od podanego przez powyższe wyrażenie, ile wynosi liczba kombinacji, w których można otrzymać taki wynik, to znaczy C_n^m. Zatem szukane prawdopodobieństwo wynosi:

$$P\ /m,\ n;\ p/ = C_n^m\ p^m\ /1-p/^{n-m}$$

Symbol po lewej stronie należy czytać: "prawdopodobieństwo zajścia zdarzenia m razy przy n próbach, o ile w wyniku każdej próby prawdopodobieństwo jego zajścia wynosi p".

Wzór ten przedstawia dwumianowy rozkład prawdopodobieństwa /rozkład Bernoullie/. Zmienną losową jest tu liczba m zajść zdarzenia w n niezależnych próbach.

Rozkład Poissona

Gdy liczba powtórzeń próby n jest bardzo duża, a p zdarzenia w każdej próbie bardzo małe, przy tym iloczyn np = c jest wielkością stałą, to wyrażenie z poprzedniego wzoru dąży jako do granicy do wyrażenia.

$$P\ /m, C/ = \frac{C^m}{m\,!}\ e^{-c}$$

przedstawiającego rozkład Poissona zmiennej losowej m. Rozkład ten stosuje się zwykle z dostateczną dokładnością wzamian rozkładu dwumianowego, gdy $n > 20$ i $p < 0{,}2$.

Wartość oczekiwana zmiennej losowej m wynosi

$$E\ /m/ = C$$

zaś odchylenie średnie

$$\sigma = \sqrt{C}$$

W rozkładzie Poissona wartość oczekiwana M jest równa wariancji σ^2.

Rozkład równomierny.

W niektórych przypadkach każda wartość zmiennej w pewnych granicach ma jednakowe p pojawienia się. Np. jednakowe i równe 1/6 jest prawdopodobieństwo wyrzucenia jakiejkolwiek określanej liczby oczek 1,2,3 ... 6 doskonale sześciennej i jednorodnej kostki. Powyższy przykład dotyczył zmiennych nieciągłych /skokowych/.

Analogicznie jest dla zmiennych ciągłych. Zatrzymanie się doskonale wyważonego obracającego się swobodnie koła rowerowego jest dla każdego położenia jednakowo prawdopodobne. W danym wypadku za zmienną losową możemy uważać np. kąt α określonej średnicy z pionem. Oczywiście mówiąc o prawdopodobieństwie zatrzymania się koła w określonym położeniu = 0, mówić można jedynie o p, że zatrzymanie nastąpi w granicach od α_1 do α_2. Zakres wszystkich możliwych wartości kąta α wynosi w mierze łukowej 2 π /360°/. Gęstość prawdopodobieństwa p / α/ wyrażana rzędną wykresu wynosi $y = \frac{1}{2\pi}$, bo pole prostokąta rozkładu obejmujące wszystkie możliwe wartości kąta α , czyli $P/0 < \alpha < 360^\circ/ = 1$. Prawdopodobieństwo, że kąt ten będzie zawarty w granicach od α_1 do α_2 wynosi

$$P(\alpha_1 < \alpha < \alpha_2) = \int_{\alpha_1}^{\alpha_2} p(\alpha)\, d\alpha = \int_{\alpha_1}^{\alpha_2} \frac{1}{2\pi}\, d\alpha = \frac{1}{2\pi}(\alpha_2 - \alpha_1)$$

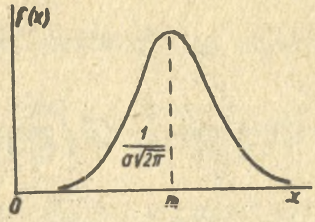
Ogólnie powiemy, że jeżeli zmienna losowa X może przybierać z jednakowym prawdopodobieństwem każdą wartość w granicach od α_1 do α_2, przy czym $\alpha_2 - \alpha_1 = \alpha$, to prawdopodobieństwo, że w zdarzeniu losowym okaże się ona w granicach między X_1 do X_2 jest

$$P/X_1 < X < X_2/ = \frac{1}{\alpha} /X_2 - X_1/$$

Rozkład normalny

Praktycznie najdonioślejsze znaczenie ma rozkład zmiennej losowej zwany rozkładem normalnym albo inaczej rozkładem Gaussa. Krzywa ta jest krzywą w kształcie dzwonu, symetryczną jednowierzchołkową rozciągającą się od $-\infty$ do $+\infty$ o równaniu

$$f/x/ = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \cdot e^{-\frac{/x - m/^2}{2\sigma^2}}$$



Rys. 55 rozkład normalny.

Maksymalna rzędna krzywej jest równa $\frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}$ i odpowiada wartości x = m. W miarę oddalania się od punktu m gęstość rozkładu maleje i przy $x \to \pm\infty$ krzywa zbliża się asymptotycznie do osi odciętych.

Prawdopodobieństwo trafienia w odcinek. Funkcja Laplasa.

Prawdopodobieństwo trafienia w odcinek w granicach od α do β wyraża wzór /uwzględniając rozkład normalny/:

$$P(\alpha < X < \beta) = \int_{\alpha}^{\beta} f(x)dx = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \int_{\alpha}^{\beta} e^{-\frac{(x-m)^2}{2\sigma^2}} dx$$

Podstawiając

$$\frac{x - m}{\sigma\sqrt{2}} = t$$

Otrzymamy

$$P(\alpha < X < \beta) = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_{\frac{\alpha-m}{\sigma\sqrt{2}}}^{\frac{\beta-m}{\sigma\sqrt{2}}} e^{-t^2} dt$$

Jak wiadomo, całka nieokreślona

$$\int e^{-t^2} dt$$

nie wyraża się przez elementarne funkcje; dlatego do obliczeń posługujemy się tablicami specjalnej funkcji, tak zwanej funkcji Laplasa, albo całki prawdopodobieństw Gaussa:

$$\Phi /x/ = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_{0}^{x} e^{-t^2} dt$$

Za pomocą funkcji Laplasa może być wyrażone prawdopodobieństwo

$$P\,/\alpha < x < \beta/ = \frac{1}{2}\left[\Phi\left(\frac{\beta-m}{\sigma\sqrt{2}}\right)-\Phi\left(\frac{\alpha-m}{\sigma\sqrt{2}}\right)\right]$$

Jest to wzór na prawdopodobieństwo trafienia w odcinek w granicach od α do β .

Prawdopodobieństwo trafienia w prostokąt o bokach równoległych do osi rozrzutu.

Dowolny punkt /X, Y/ na płaszczyźnie podlegający rozkładowi normalnemu jest określany:

$$f/x,y/ = \frac{1}{2\pi\sigma_x\sigma_y}\cdot e^{-\frac{/x-m_x/^2}{2\sigma_x^2}-\frac{/y-m_y/^2}{2\sigma_y^2}}$$

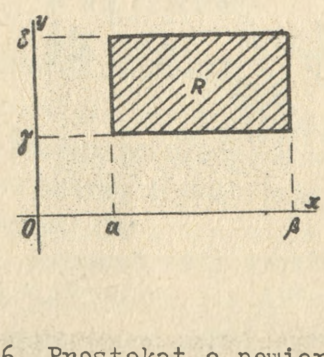
gdzie:

m_x, m_y - wartości oczekiwane /środka rozrzutu/ wielkości X i Y;

σ_x, σ_y - ich średnie wartości odchylenia kwadratowego.

Przy tym główne osie rozrzutu są równoległe do układu współrzędnych.

Chcemy wykreślić prawdopodobieństwo trafienia punktu /X,Y/ w prostokąt R, którego boki są równoległe do osi współrzędnych xoy i do głównych osi rozrzutu /rys. 56/.



Rys. 56. Prostokąt o powierzchni R.

Wzór na prawdopodobieństwo trafienia w prostokąt R posiada postać:

$$P[/X,Y/\subset R] = \int_{\alpha}^{\beta}\int_{\gamma}^{\delta} f/x,y/\ dx\ dy =$$

$$= \int_{\alpha}^{\beta} \frac{1}{\sigma_x\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(x-m)^2}{2\sigma_x^2}} dx \int_{\gamma}^{\delta} \frac{1}{\sigma_y\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(y-m_y)^2}{2\sigma_y^2}} dy$$

Posługując się wzorem na prawdopodobieństwo trafienia w odcinek, otrzymamy postać:

$$P\ /X,Y/\subset R =$$

$$= \frac{1}{4}\left[\Phi\left(\frac{\beta-m_x}{\sigma_x\sqrt{2}}\right)-\Phi\left(\frac{\alpha-m_x}{\sigma_x\sqrt{2}}\right)\right]\left[\Phi\left(\frac{\delta-m_y}{\sigma_y\sqrt{2}}\right)-\Phi\left(\frac{\gamma-m_y}{\sigma_y\sqrt{2}}\right)\right]$$

Przechodząc od średnich kwadratowych odchyleń do uchyleń prawdopodobnych /$E = \rho\sqrt{2}\cdot\sigma$; $\rho \approx 0,477$/ i wprowadzając funkcję Laplasa, otrzymamy:

$$P\ /X,Y/\subset R =$$

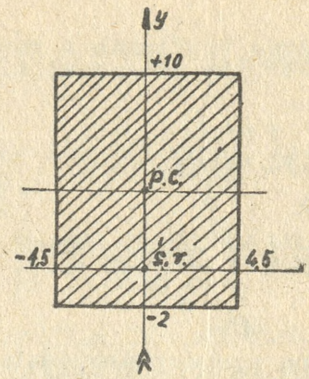
$$= \frac{1}{4}\left[\hat{\Phi}\left(\frac{\beta-m_x}{E_x}\right)-\hat{\Phi}\left(\frac{\alpha-m_x}{E_x}\right)\right]\left[\hat{\Phi}\left(\frac{\delta-m_y}{E_y}\right)-\hat{\Phi}\left(\frac{\gamma-m_y}{E_y}\right)\right]$$

Jeśli rozkład normalny na płaszczyźnie jest podany w formie kanonicznej to $m_x = m_y = 0$ i wzór powyższy posiada: postać:

$$P[(X,Y)\subset R] = \frac{1}{4}\left[\hat{\Phi}\left(\frac{\beta}{E_x}\right)-\hat{\Phi}\left(\frac{\alpha}{E_x}\right)\right]\left[\hat{\Phi}\left(\frac{\delta}{E_y}\right)-\hat{\Phi}\left(\frac{\gamma}{E_y}\right)\right]$$

P r z y k ł a d:

Wykonywane jest strzelanie z samolotu do prostokątnej tarczy 9 m x 12 m, leżącej na ziemi poziomo. Główne uchylenia prawdopodobne: w kierunku podłużnym 10 m, w kierunku bocznym 5 m. Przycelowanie się - do środka celu, wejście wzdłuż celu. Na skutek nie pokrycia się odległości przystrzeliwania i odległości faktycznego strzelania średni punkt trafienia przemieszcza się w stronę niedolotu o 4 m. Znaleźć prawdopodobieństwo trafienia jednym pociskiem.



Rys. 57

Rozwiązanie: Na rysunku nanosimy punkt celowania /p.c/ i środek rozrzutu /ś.r./. Przez ś.r. prowadzimy główne osie rozrzutu: zgodnie z kierunkiem lotu i prostopadle do niego. Wg ostatniego wzoru obliczamy prawdopodobieństwo:

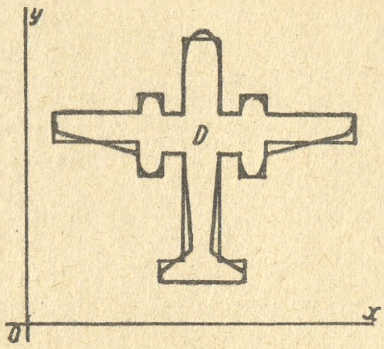
$$P[(X,Y)\subset R]=\frac{1}{4}\left[\hat{\Phi}\left(\frac{4,5}{5}\right)+\hat{\Phi}\left(\frac{4,5}{5}\right)\right]\left[\hat{\Phi}\left(\frac{10}{10}\right)+\hat{\Phi}\left(\frac{2}{10}\right)\right]=$$

$$=\frac{1}{2}\cdot 0,4562\cdot 0,6073\approx 0,138$$

Prawdopodobieństwo trafienia w cel o dowolnym kształcie.

Prawdopodobieństwo trafienia punktu /X,Y/ w cel o powierzchni D oblicza się ze wzoru:

$$P[(X,Y)\subset D]=\frac{1}{2\pi\sigma_x\sigma_y}\iint\limits_{(D)} e^{-\frac{x^2}{2\sigma_x^2}-\frac{y^2}{2\sigma_y^2}}\,dx\,dy$$



Rys. 58

Obszar D w przybliżeniu został zamieniony powierzchnią składającą się z prostokątów, których boki są równoległe do głównych osi rozrzutu jak na powyższym rysunku.

Mechanika

Przyjęte oznaczenia z mechaniki

V - prędkość
Δ - przyrost
S - droga
t - czas
a - przyspieszenie
g - przyspieszenie ziemskie /9,81 m/sek^2/
ω - prędkość kątowa
a_r - przyspieszenie dośrodkowe
a_t - " styczne
kG - kilogram siły
kg - kilogram masy
R - siła wypadkowa
m - masa /wyrażona w kilogramach masy/
P - oznaczenie siły /w kG/
r - ramię
G - siła ciężkości
M - moment
L - praca
kGm - kilogramometr
E_k - energia kinetyczna
E_p - energia potencjalna
N - moc
KM - koń mechaniczny
km - kilometr
η - sprawność
kcal - kilokaloria
μ - współczynnik tarcia posuwistego
f - współczynnik tarcia potoczystego

MECHANIKA OGÓLNA

W s t ę p

Naukę zajmującą się badaniem ruchu ciał w przestrzeni i w czasie oraz badaniem sił jako przyczyny tego ruchu nazywamy mechaniką.

Mechanika ogólna zajmuje się matematycznym opisem ruchu ciał pod założeniami upraszczającymi, że ciała te mogą być traktowane jako punkty materialne lub układy punktów materialnych lub też jako ciała sztywne /nieodkształcalne/.

Mechanikę ogólną dzieli się na kinematykę, statykę oraz dynamikę.

Wielkości, z którymi mamy do czynienia w mechanice /podobnie jak wszelkie inne wielkości fizyczne/, możemy podzielić ogólnie na dwie grupy:

1/. Wielkości skalarowe czyli skalary, które nie są związane z jakimkolwiek określonym kierunkiem przestrzeni i które mogą być określone jednoznacznie za pomocą wartości liczbowej i jednostki miary;
Skalarami są np: czas, masa, gęstość, powierzchnia, objętość itp.

2/. Wielkości wektorowe /kierunkowe/ czyli wektory, które są związane z określonym kierunkiem przestrzeni i wobec tego w celu jednoznacznego określenia tych wielkości konieczne jest podanie nie tylko wartości tych wielkości, ale również kierunku działania, tj. położenia prostej w przestrzeni, z którą wielkość jest związana oraz zwrotu wektora na danej prostej. Wielkości wektorowe przedstawiamy najczęściej za pomocą odcinka zaopatrzonego w grot. /strzałkę/; długość tego odcinka wyobraża w umownej skali wartość wielkości, linia prosta, na której leży odcinek, określa kierunek wektora, grot zaś wskazuje zwrot wektora. Jako wielkości wektorowe mogą być traktowane np. prędkość, przyspieszenie, siła itp.

I. KINEMATYKA

Kinematyka jest nauką zajmującą się badaniem ruchu ciał pod względem geometrycznym, bez badania przyczyn, które ten ruch wywołały, to jest sił.

1. Pojęcie ruchu i toru, ogólna klasyfikacja ruchu

Mówimy, że ciało rozpatrywane znajduje się w ruchu, jeżeli odległości tego ciała od innych przedmiotów ulegają zmianie w miarę upływu czasu. Ruch jest zatem pojęciem względnym, gdyż zależy od tego, jaki układ obieramy za nieruchomy. Układ bezwzględnie nieruchomy, a więc i ruch bezwzględny nie istnieje.

Droga, po której porusza się jakikolwiek punkt badanego ciała ruchomego w obranym układzie nazywa się torem tego punktu.

Jeżeli ciało badane porusza się w przestrzeni w taki sposób, że położenia punktów tego ciała w dowolnych chwilach pozostają do siebie równoległe, mówimy wówczas, że ciało znajduje się w ruchu postępowym.

W ruchu postępowym znajduje się np. wózek tzw. "młyna diabelskiego" o ile wózek nie podlega dodatkowym waha - niom/, pomimo, iż poszczególne punkty tego wózka poruszają się po liniach krzywych /po kołach/, ponieważ położenia wózka w każdej chwili są równoległe do położenia początkowego.

Tory wszystkich punktów ciała znajdujących się w ruchu postępowym są do siebie równoległe, drogi zaś przebyte w tych samych odstępach czasu przez dowolne punkty ciała są jednakowe.

Z powyższego widzimy, że do zbadania ruchu postępowego wystarczy zbadać ruch jednego dowolnego punktu ciała.

Ruch obrotowy ciała powstaje wtedy, gdy wszystkie punkty ciała /z wyjątkiem punktów położonych na osi obrotu/ zakreślają okręgi kół dookoła jednej linii prostej prostopadłej do płaszczyzn tych kół. W ciałach sztywnych znajdujących się w ruchu obrotowym kąty środkowe zakreślone w jednakowym czasie przez dowolne punkty ciała są jednakowe.

Każdy ruch możemy rozpatrywać jako złożony z ruchu postępowego po dowolnej linii i ruchu obrotowego, w którym środek obrotu zmienia również swoje położenie w każdej chwili.

2. Pojęcie prędkości

Prędkością v poruszającego się punktu nazywamy stosunek drogi s, którą przebywa punkt rozpatrywany do czasu t, w którym droga ta zostaje przebyta:

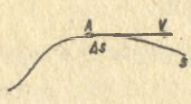
$$v = \frac{s}{t}$$

W ogólnym przypadku, gdy torem rozpatrywanego punktu jest linia krzywa /rys. 1/ oraz gdy drogi przebyte przez punkt badany w równych odstępach czasu nie są jednakowe, wprowadzamy pojęcie prędkości chwilowej, którą wyznaczamy stosunkiem bardzo małego odcinka drogi przebytej Δs do bardzo małego odstępu czasu Δt, w którym ta zmiana nastąpiła.

$$v = \frac{\Delta s}{\Delta t}$$ lub w postaci różniczkowej $$v = \frac{ds}{dt}$$

Prędkość chwilowa jest zawsze skierowana stycznie do toru.

Prędkością średnią na danym odcinku nazywamy stosunek tego odcinka drogi s do czasu t, w którym ten odcinek drogi został przebyty:



$$v_{śr} = \frac{s}{t}$$

Rys. 1

Jednostki, w których mierzymy prędkość, powstają przez podzielenie jednostek, w których jest wyrażona długość drogi, przez jednostkę czasu, a więc np: m/sek, km/h; cm/min itp.

Do określenia prędkości konieczna jest jednak, oprócz podania jej wartości, znajomość kierunku tej prędkości, tj. linii prostej, po której następuje chwilowa zmiana położenia punktu oraz zwrotu, tj. strzałki wskazującej, które położenia punktu są późniejsze.

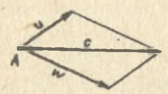
Prędkość jest więc wektorem.

3. Składanie prędkości

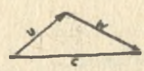
Jeżeli z układu, który uważamy za nieruchomy /np: z brzegu rzeki/, obserwujemy ruch innego układu /ruch wody/, poruszającego się z prędkością u, zaś w tym układzie ruchomym porusza się punkt A /np. łódź/ z prędkością w, to ruch punktu A będzie ruchem złożonym.

Prędkość c punktu A względem układu nieruchomego będzie przekątną równoległoboku zbudowanego w skali z wektorów u i w /rys. 2/.

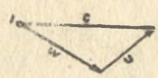
Wektory u i w noszą w tym przypadku nazwę prędkości składowych, przy czym wektor u nazywamy prędkością unoszenia, zaś wektor w prędkością względną. Wektor c nazywamy prędkością wypadkową.



Rys. 2



Rys. 3



Rys. 4

Powyższy sposób składania wektorów przy pomocy równoległoboku lub wieloboku nazywamy geometrycznym dodawaniem wektorów /rys. 3 i 4/. Podobnie każdy wektor możemy rozłożyć według tych zasad na dwa lub więcej wektory składowe.

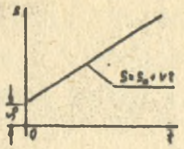
4. Ruch jednostajny po linii prostej

Ruch jednostajny po linii prostej jest najprostszym przykładem ruchu i zachodzi wtedy, gdy punkt badany porusza się po torze prostoliniowym z prędkością stałą.

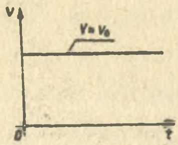
Droga przebyta s w tym ruchu wyraża się wzorem:

$$s = s_0 + vt$$

gdzie s_0 = odległość punktu ruchomego, w chwili od której rozpoczynamy pomiar czasu /t = 0/ od umownego punktu przyjętego jako początek układu.



Rys. 5



Rys. 6

Zależność pomiędzy drogą s i czasem t wg. powyższego wzoru przedstawia się na wykresie /rys. 5/ jako linia prosta pochylona pod kątem zależnym od prędkości v.

Zależność między prędkością v i czasem t wyraża się wzorem:

$$v = \frac{s-s_0}{t} = v_0$$

przy czym prędkość ta pozostaje wartością niezmienną w każdej chwili. Zależność ta, uwidoczniona na rysunku 6 przedstawia się jako linia prosta równoległa do osi t.

5. <u>Ruch jednostajnie zmienny prostoliniowy</u>

W ruchu tym punkt badany porusza się po linii prostej, jednak prędkość v nie jest wartością stałą, lecz wzrasta ona lub maleje stale o jednakową wartość w następujących po sobie jednostkach czasu.

Przyspieszeniem a ruchu zmiennego nazywamy stosunek przyrostu prędkości $v - v_0 = \Delta v$ do czasu $t - t_0 = \Delta t$, w którym przyrost ten nastąpił:

$$a = \frac{v - v_0}{t - t_0} = \frac{\Delta v}{\Delta t} \quad \text{lub} \quad a = \frac{dv}{dt}$$

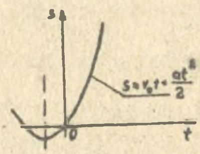
przy czym wartość ta w tym przypadku jest wartością stałą w dowolnej chwili.

Przyspieszenie mierzymy w jednostkach prędkości podzielonej przez jednostkę czasu, a więc w jednostkach długości podzielonej przez kwadrat jednostki czasu, np: cm/sek^2, km/godz^2 itp.

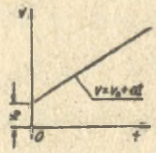
Jeżeli przyspieszenie ma wartość dodatnią, wówczas ruch jest jednostajnie przyspieszony, jeżeli zaś ujemną jednostajnie opóźniony. Zależność między drogą przebytą s i czasem t wyraża się w tym przypadku wzorem:

$$s = v_0 t + \frac{at^2}{2}$$

gdzie: v_0 = prędkość punktu w chwili, którą przyjmujemy za początkową,
a = przyspieszenie.



Rys. 7



Rys. 8

Wykreślnie zależność tę przedstawia linia krzywa /rys. 7/, linia ta jest parabolą.

Zależność między prędkością v i czasem t przedstawia linia prosta pochylona pod kątem zależnym od wartości przyspieszenia /rys. 8/ i wyraża się wzorem:

$$v = v_0 + at$$

Wszystkie ciała spadające swobodnie w próżni /lub w przestrzeni jeżeli opory powietrza mogą być pominięte/ stanowią przykład ruchu jednostajnie przyspieszonego, przy czym przyspieszenie tego ruchu, zwane przyspieszeniem ziemskim lub grawitacyjnym, nie zależy wcale od rodzaju ani od wielkości ciała spadającego.

Przyspieszenie ziemskie dla wszystkich ciał wynosi w przybliżeniu $g = 9{,}81$ m/sek^2. Wartość normalna przyspieszenia przyjęta do definicji kilograma siły wynosi $g=9{,}8066$ m/sek^2.

Przyspieszenie ziemskie nie jest jednak wartością zupełnie stałą w każdym miejscu na kuli ziemskiej. Jest ono w niewielkim stopniu zależne od szerokości geograficznej /np. na równiku $g = 9{,}778$ m/sek^2, na biegunie $g = 9{,}835$ m/sek^2, a w Warszawie przy $52{,}2^0$ szerokości geograficznej $g = 9{,}8124$ m/sek^2/, od wysokości nad poziomem morza, a nawet w bardzo małym stopniu od innych warunków lokalnych. Przyspieszenie ziemskie osiąga najmniejszą wartość na równiku, największą na biegunie.

W ruchu jednostajnie zmiennym zależność pomiędzy drogą przebytą s i prędkością v przedstawia się wzorem:

$$v^2 - v_o^2 = 2 a /s - s_o/$$

lub też w przypadku swobodnego spadku ciała z wysokości h, jeżeli prędkość początkowa $v_o = 0$

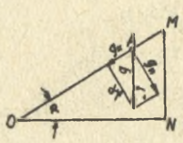
$$v = \sqrt{2gh}$$

6. Spadek po równi pochyłej

Ciała zsuwające się po równi pochyłej poruszają się również ruchem jednostajnie przyspieszonym, o ile ruch odbywa się bez żadnych przeszkód w postaci tarcia, oporów powietrza itp. Przyspieszenie jednak z jakim odbywa się ten ruch jest mniejsze niż w przypadku swobodnego spadania ciał. Przyspieszenie ziemskie g /rys. 9/ może być rozłożone jako wektor na dwie składowe g_n i g_x, przy czym jedynie przyspieszenie g_x powoduje ruch ciała A, zaś przyspieszenie g_n nie ma wpływu na ruch ciała, gdyż podłoże równi pochyłej nie pozwala na ruch ciała w kierunku prostopadłym do tego podłoża.

Trójkąt zbudowany z wektorów g, g_x i g_n jest podobny do trójkąta OMN i stąd wynika zależność:

$$g_x = g \frac{MN}{OM} = g \sin\alpha$$



Rys. 9

7. Ruch niejednostajnie zmienny prostoliniowy

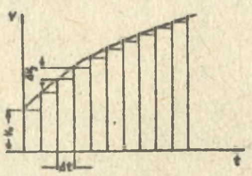
W ruchu tym przyspieszenie a nie jest wartością stałą lecz zmienia się w każdej chwili.

Jeżeli dana jest zależność prędkości v od czasu t wówczas zbudować możemy wykres v = f/t/ /rys. 10/.

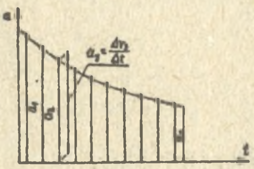
Wykres ten możemy podzielić na szereg elementów w równych odstępach czasu Δt, przy czym dla każdego z tych elementów obliczyć możemy przyspieszenie

$$a = \frac{\Delta v}{\Delta t}$$

Znalazłszy wartości przyspieszeń dla poszczególnych wartości czasu t, zbudować możemy wykres zależności przyspieszeń a od czasu t jak na rys. 11 /dla ruchu jednostaj - nie zmiennego wykres ten przedstawiałby linię prostą równoległą do osi t/.



Rys. 10



Rys. 11

Drogę przebytą w ciągu czasu t obliczyć możemy z wykresu /rys. 10/, posługując się wzorem:

$$s = s_o + /v_1 + v_2 + \dots + v_n/ \ \Delta t$$

przy czym wzór ten daje wartości tym bardziej dokładne im większa jest ilość elementów Δt, na którą dany odstęp czasu t został podzielony, tzn. im mniejsze są wartości elementów Δt.

Analogicznie, gdyby wykres v = f/t/ /rys.10/ nie był bezpośrednio dany, można by obliczyć prędkość v w danej chwili t z wykresu a = f /t/ /rys. 11/ podług wzoru:

$$v = v_o + /a_1 + a_2 + \dots + a_n/ \ \Delta t$$

Swobodny spadek ciał w powietrzu lub innym ośrodku powodującym opory ruchu, ruch pocisku w lufie, ruch tłoka w cylindrze dowolnego silnika, ruch elementów maszyn napędzanych za pomocą krzywek, jak też w ogóle ruch dowolnego ciała odbywający się pod wpływem zmiennych sił czynnych, stanowią przykłady ruchu niejednostajnie zmiennego.

8. Ruch obrotowy jednostajny

W ruchu obrotowym poszczególne punkty danego ciała zakreślają okręgi kół dookoła wspólnej osi obrotu, mówimy przy tym, że dowolny punkt tego ciała znajduje się w ruchu okrężnym po okręgu odpowiedniego koła.

W ruchu tym, oprócz prędkości liniowej

$$v = \frac{2\pi rn}{60} \text{ m/sek}$$

różnej dla poszczególnych punktów, niejednakowo oddalonych od osi obrotu i nazywanej w tym przypadku prędkością obwodową rozróżniamy również szybkość kątową ω, określoną jako stosunek przyrostu kąta $\Delta\varphi$ do odstępu czasu Δt, w którym kąt ten został zakreślony:

$$\omega = \frac{\Delta\varphi}{\Delta t} \text{ lub } \omega = \frac{d\varphi}{dt}$$

Jeżeli dowolny punkt znajdującego się w ruchu obrotowym ciała zakreśla w następujących po sobie jednostkach czasu jednakowe kąty obrotu, to mamy do czynienia z ruchem obrotowym jednostajnym.

Jednostki, w których mierzymy szybkość kątową, wynikają z dzielenia jednostek kąta przez jednostki czasu np: stopnie /sek, 1/sek = rd/sek /radian na sekundę/, rd/min, obr/min itp.

Radian /bezwzględna jednostka miary kąta/ jest to taki kąt, którego łuk równy jest promieniowi 1 rd = $57{,}296^{\circ}$.

Najczęściej stosowanymi jednostkami szybkości kątowej są: rd/sek - i wówczas szybkość kątową oznaczamy symbolem ω oraz obrót/min - i wówczas szybkość kątową oznaczamy symbolem n.

Pomiędzy szybkością kątową omega wyrażoną w rd/sek. i tą samą szybkością n wyrażoną w obr/min zachodzi związek

$$\omega = \frac{2\pi n}{60}$$

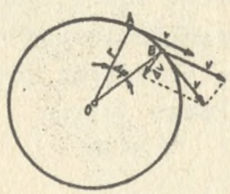
Pomiędzy prędkością obwodową v wyrażoną w m/sek i szybkością kątową ω lub n zachodzą związki:

$$v = r\omega$$

oraz $V = \frac{2\pi rn}{60}$ lub $v = \frac{\pi dn}{60}$

gdzie: r - promień koła w metrach
d - średnica koła w metrach

W ruchu jednostajnym po okręgu ciało ma przyspieszenie nawet w tym przypadku, gdy prędkość obwodowa v jest wartością niezmienną. Gdyby bowiem przyspieszenia nie było, kierunek prędkości nie mógł by się zmieniać /ciało musiało by poruszać się po linii prostej/.



Rys. 12

Jak wynika z rys. 12, zmianie kąta o $\Delta\varphi$ towarzyszy zawsze przyrost prędkości Δv /pomimo, że wartość prędkości nie ulega zmianie/.

Ten przyrost prędkości Δv /o ile tylko zmiana kąta o $\Delta\varphi$ jest dostatecznie mała/ma kierunek do środka koła. Stąd też i przyspieszenie w tym ruchu ma kierunek do środka koła i nazywa się ono przyspieszeniem dośrodkowym.

Wartość tego przyspieszenia wynosi:

$$a_r = \frac{v^2}{r} \quad \text{lub też} \quad a_r = r\omega^2$$

9. Ruch obrotowy niejednostajny

W ruchu obrotowym niejednostajnym ciała sztywnego poszczególne punkty tego ciała zakreślają również okręgi kół dookoła jednej osi obrotu, jednak zarówno szybkość kątowa ω jak też prędkości obwodowe v dowolnego punktu ulegają ciągłej zmianie w czasie.

Dla dowolnego punktu wykonującego niejednostajny ruch okrężny po kole o promieniu r występuje przy tym zmienna w czasie wartość przyspieszenia dośrodkowego

$$a_r = \frac{v^2}{r} = r\omega^2$$

oraz przyspieszenie styczne

$$a_t = \frac{\Delta v}{\Delta t} \quad \text{lub} \quad a_t = \frac{dv}{dt}$$

gdzie Δv /względnie dv/ oznacza tu jedynie zmianę wartości prędkości obwodowej bez uwzględnienia zmian kierunku tej prędkości.

Przyspieszenie całkowite możemy znaleźć, składając geometrycznie przyspieszenie dośrodkowe a_r z przyspieszeniem stycznym a_t według zasady równoległoboku wektorów.

W ruchu obrotowym niejednostajnym znajduje się np: wał korbowy tłokowego silnika parowego lub spalinowego zaopatrzonego w zbyt lekkie koło zamachowe, albo wał skośny napędzany za pośrednictwem sprzęgła Cardana, albo wskazówka wodomierza rejestrującego wodę przy zmiennym natężeniu przepływu itp.

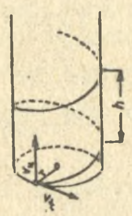
10. Ruch śrubowy

Jeżeli punkt porusza się ruchem złożonym, na który składa się ruch jednostajny po okręgu o promieniu r z prędkością v_t i ruch jednostajny prostoliniowy z prędkością v_u w kierunku prostopadłym do płaszczyzny ruchu po okręgu to punkt ten opisuje linię śrubową /rys. 13/. Prędkość wypadkowa punktu wzdłuż linii śrubowej wynosi wówczas

$$v = \sqrt{v_t^2 + v_u^2}$$

zaś skok linii śrubowej

$$h = 2\pi r \frac{v_u}{v_t}$$



Rys. 13

11. Rzut skośny

Jeżeli ciało rzucone zostaje z miejsca O /Rys. 14/ z prędkością początkową v_o pod kątem do poziomu, to pomijając opór powietrza, ciało to opisze krzywą zwaną parabolą. Zależność między wysokością i odległością w kierunku poziomym w dowolnej chwili wyraża się wzorem:

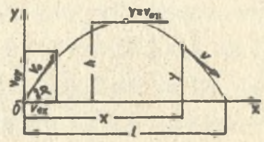
$$y = \frac{g}{2v_{ox}^2} \cdot x^2 \qquad \text{lub } y = \frac{g}{2v_o^2 \cos^2\alpha} x^2$$

Prędkość całkowita v, jaką osiąga ciało w chwili t, wynosi:

$$v = \sqrt{v_o^2 - 2\,g\,y}$$

Całkowita wysokość h, na jaką wzniesie się ciało, wynosi:

$$h = \frac{v_{oy}^{\,2}}{2g} = \frac{v_o^2 \sin^2\alpha}{2g}$$



Rys. 14

Donośność rzutu wynosi:

$$l = \frac{v_o^2 \sin^2\alpha}{g}$$

Donośność ta osiąga największą wartość l_{max} jeżeli rzut dokonany jest pod kątem $\alpha = 45^o$, przy czym:

$$l_{max} = \frac{v_o^2}{g}$$

Czas trwania przelotu wynosi:

$$T = \sqrt{\frac{8\,h}{g}}$$

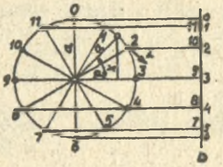
12. Ruch okresowy /drgający/

Każdy ruch, w którym ciało po upływie pewnego czasu powraca do położenia początkowego, aby następnie powtórzyć identyczny ruch do poprzedniego, nazywa się ruchem okresowym.

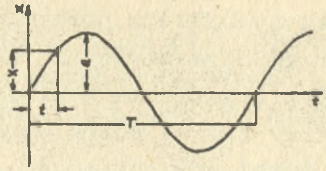
Spośród wielkiej rozmaitości ruchów okresowych szczególne znaczenie posiada ruch zwany ruchem harmonicznym prostym.

Wyobraźmy sobie, że po okręgu porusza się punkt ruchem jednostajnym /rys. 15/. Przypuśćmy, że z lewej strony rysunku znajduje się źródło światła, które oświetla promieniami równoległymi nasz punkt ruchomy, natomiast po stronie prawej rysunku umieszczony jest ekran, na którym obserwować możemy cień tego punktu zwany rzutem tego punktu na płaszczyznę P.

W miarę jak dany punkt porusza się po kole, jego rzut porusza się na ekranie ruchem prostoliniowym zwrotnym



Rys. 15



Rys. 16

wykonując ruch drgający. Ruch tego rzutu jest przykładem ruchu harmonicznego prostego,

Jeżeli rozpatrywać będziemy wychylenia x tego rzutu od położenia środkowego /odpowiadającego punktom 3 i 9 na rys. 15/, zwanego położeniem równowagi, w miarę upływu czasu t, to zależność tę możemy wyrazić wzorem:

$$x = a \sin \varphi = a \sin \omega t$$

gdzie ω oznacza szybkość kątową, z jaką porusza się punkt po kole.

Czas upływający między jednym i drugim przejściem rzutu przez ten sam /dowolny/ punkt w tę samą stronę równy jest czasowi obiegu punktu po kole; czas ten nazywany okresem wahań /drgań/ wyraża się wzorem:

$$T = \frac{2\pi}{\omega}$$

a więc

$$x = a \sin \frac{2\pi}{T} t$$

Odwrotność okresu drgań $\nu = \frac{1}{T}$ nazywamy częstotliwością drgań.

Największe wychylenie od środka wahań a /równe jest promieniowi koła/ nazywamy amplitudą drgań.

Wartość przyspieszenia w ruchu harmonicznym:

$$\frac{dv_x}{dt} = \omega^2 x = \frac{4\pi^2}{T^2} x$$

jest wprost proporcjonalna do wychylenia x, przy czym przyspieszenie to jest dodatnie, gdy rzut zbliża się do położenia środkowego, ujemne zaś przy oddalaniu się.

Składanie ruchów harmonicznych polega na algebraicznym dodawaniu wychyleń x różnych sinusoid drgań. Suma dwu lub wielu drgań harmonicznych prostych stanowi w ogólnym przypadku nowe drganie harmoniczne złożone.

Każdy rodzaj ruchu drgającego można uważać jako sumę szeregu drgań harmonicznych prostych.

Przykładem ruchu harmonicznego prostego jest ruch tłoka w silniku parowym lub spalinowym przy jednostajnym obrocie wału korbowego, gdy długość korbowodu jest znaczna. Wszelkie drgania maszyn, falowanie zwierciadła wody itp., stanowią przykłady ruchu harmonicznego złożonego.

II. STATYKA

Statyka jest nauką badającą zależności między siłami w tym szczególnym przypadku, gdy ciało badane znajduje się w spoczynku, a więc gdy wszystkie działające nań siły zewnętrzne wzajemnie się znoszą czyli są w równowadze.

1. Pojęcie siły

Przyczyny powodujące zmianę prędkości ciała pod względem jej wartości lub kierunku /powodujące przyspieszenie/lub opóźnienie ciała /nazywamy siłami.

Według II prawa Newtona siła P jest równa iloczynowi masy m i przyspieszenia a.

Jednostkami siły są więc dowolne iloczyny jednostek masy przez jednostki przyspieszenia np: g cm/sek^2 zwanej inaczej dyną, kg . m/sek^2 zwany newtonem /niutonem/ itd.

W technice siłę mierzymy przeważnie w kilogramach siły /kG/ zwanych inaczej kilopondami /kp/ i określonych jako

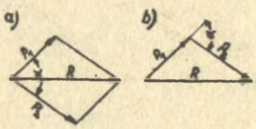
$$1 \text{ kG} = 1 \text{ kp} = 9{,}80665 \text{ kg m/sek}^2$$

Liczba 9,80665 jest umownie ustaloną wartością i jest tak dobrana, aby przeciętnie na ziemi 1 kg masy był przyciągany siłą /ważył/ około 1 kG.

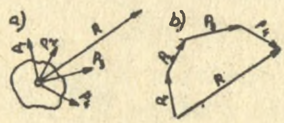
2. Składanie sił

Dodawanie sił o różnych kierunkach działania wykonujemy zgodnie z zasadą równoległoboku lub wieloboku sił /rys. 17 a i b/.

W przypadku gdy na ciało działa kilka sił, wówczas siła wypadkowa powstaje jako wektor zamykający wielobok sił /łączący początek wektora pierwszego z końcem ostatniego /rys. 18/.



Rys. 17



Rys. 18

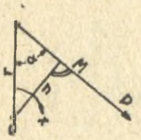
Odwrotnie, każdą siłę rozłożyć możemy na dwie lub więcej sił składowych.

3. Momenty sił

Momentem siły P względem dowolnego punktu O nazywamy iloczyn wartości siły przez jej ramię h:

$$M = Ph \quad \text{lub też} \quad M = P\,r\,\sin\alpha$$

Ramieniem siły względem dowolnego punktu O /rys. 19/ zwanego biegunem momentu, nazywamy odległość tej siły od punktu O, czyli odcinek OM prostopadły do wektorą P względnie jego przedłużenia. Moment siły na danej płaszczyźnie uważamy /umownie/ za dodatni, gdy powoduje on obrót ciała w kierunku zgodnym z ruchem wskazówek zegara, za ujemny przy ruchu przeciwnym.



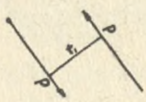
Rys. 19

Dwie siły równe co do swych wartości, równoległe do siebie i skierowane odwrotnie /rys. 20/ nazywamy parą sił. Momentem pary sił nazywamy iloczyn siły P przez jej odległość do drugiej siły.

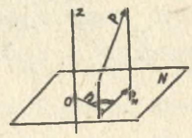
$$M = P \, . \, h$$

Momentem siły P względem osi z /dowolnej/ nazywamy moment jej rzutu P_N na płaszczyznę N prostopadłą do osi z, względem punktu O przecięcia się osi z płaszczyzną N /rys.21/.

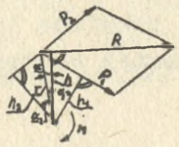
$$M = P_N h$$



Rys. 20



Rys. 21



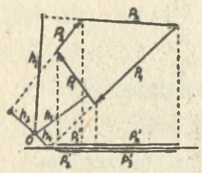
Rys. 25

Moment siły wypadkowej R względem dowolnego punktu równa się sumie momentów poszczególnych sił P_1 i P_2 względem tegoż punktu /rys. 22/.

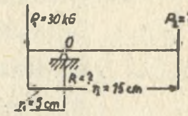
$$Rh = P_1h_1 + P_2h_2$$

4. Warunki równowagi sił

Jeżeli ciało znajduje się w równowadze, to wszystkie siły zewnętrzne działające nań muszą wzajemnie się znosić, więc wypadkowa sił zewnętrznych musi być równa o/wielobok sił musi tworzyć układ zamknięty/ /rys. 23/ skąd wynikają dwa podstawowe warunki równowagi sił:



Rys. 23



Rys. 24

a/ Suma rzutów wszystkich sił na dowolną linię prostą musi być równa zeru

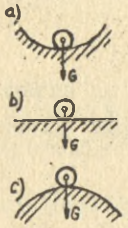
$$P_1' + P_2' + P_3' + \dots = 0$$

b/ Suma momentu wszystkich sił względem dowolnego bieguna momentów musi być równa 0

$$P_1h_1 + P_2h_2 + P_3h_3 + \dots = 0$$

5. Rodzaje równowagi

a/ Ciało znajduje się w równowadze stałej /rys. 25 a/ jeżeli po nieznacznym wychyleniu jego z tego położenia usiłuje ono powrócić do położenia pierwotnego.



Rys. 25

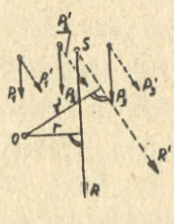
b/ Ciało znajduje się w równowadze obojętnej /rys. 25 b/, jeżeli po nieznacznym wychyleniu go z tego położenia znajduje się ono w nowym położeniu równowagi.

c/ Ciało znajduje się w równowadze chwiejnej /niestałej/ /rys. 25 c/, jeżeli po nieznacznym wychyleniu go z tego położenia, usiłuje ono oddalić się od pierwotnego położenia równowagi.

6. Środek sił równoległych. Środek ciężkości /środek masy/

a/ Zasadnicze pojęcia.

Jeżeli na jakiekolwiek ciało działa szereg sił równo - ległych do siebie to punkt S /rys. 26/, przez który prze - chodzą wypadkowe R i R′ tych sił, nazywamy środkiem sił równoległych; poszczególne siły nie mogą zmieniać swoich wartości, lecz mogą zmieniać swoje kierunki /wszystkie równocześnie/.



Rys. 26

Położenie punktu S możemy wyznaczyć znajdując położenia wypad - kowych R i R′ dla przynajmniej dwu różnych kierunków działania sił.

Obierając dowolnie biegun momentów O napisać możemy warunek momentów

$$M = R \cdot r = P_1 \cdot r_1 + P_2 r_2 + P_3 r_3 + \ldots$$

przy czym $R = P_1 + P_2 + P_3 + \ldots$

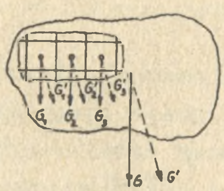
$$\text{stąd} \quad r = \frac{P_1 r_1 + P_2 r_2 + P_3 r_3 + \ldots}{P_1 + P_2 + P_3 + \ldots}$$

Podobnie wyznaczamy odległość r' w przypadku gdy wszystkie siły zmieniły swój kierunek, nie zmieniając wartości:

$$r' = \frac{P_1 r_1' + P_2 r_2' + P_3' r_3' + \ldots}{P_1' + P_2' + P_3' + \ldots}$$

Na przecięciu dwu kierunków wyznaczonych przez proste w odległościach r i r' od bieguna O znajdujemy położenie środka sił równoległych S.

W przypadku gdy siły działające na poszczególne elementy ciała są siłami ciężkości /proporcjonalnymi do masy tych elementów/, środek sił równoległych staje się środkiem ciężkości /środkiem masy/.



Rys. 27

Położenie środka ciężkości dowolnego ciała możemy wyznaczyć w ten sposób, że dzielimy ciało na szereg elementów i zakładamy, że w środku każdego elementu działają siły równoległe, proporcjonalne do wielkości tego elementu /to jest do masy zawartej w tym elemencie/ oraz wyznaczamy położenie siły wypadkowej G /rys. 27/. Następnie obracamy ciało w inne położenie /t.zn. zmieniamy kierunki wszystkich sił równoległych, nie zmieniając ich wartości/ i wyznaczamy położenie środka ciężkości /środka masy/, metodą wyżej wskazaną, jako środka wszystkich sił równoległych.

Położenie to zostanie wyznaczone na ogół tym dokładniej im na większą ilość drobnych elementów podzielimy dane ciało.

Każde ciało podparte w środku ciężkości znajduje się w równowadze.

Kilka uwag ułatwiających wyznaczenie środka ciężkości:

a/ jeżeli ciało /o stałej gęstości w każdym punkcie/ posiada oś lub płaszczyznę symetrii, to na tej osi lub płaszczyźnie musi leżeć środek ciężkości;

b/ jeżeli ciało posiada dwie osie symetrii, to na ich przecięciu musi leżeć środek ciężkości;

c/ na płaszczyźnie, którą przecina ciało na dwie części o równych /co do bezwzględnej wartości/ momentach statycznych względem tej płaszczyzny, musi leżeć środek ciężkości.

III. DYNAMIKA

Dynamika zajmuje się badaniem ruchu ciał materialnych z uwzględnieniem przyczyn tego ruchu tj. sił.

1. Prawa Newtona. Siły zewnętrzne i wewnętrzne.

Cała mechanika /t.zw. klasyczna/ zbudowana jest na czterech podstawowych prawach odkrytych przez Izaaka Newtona /1643 - 1727/.

I prawo: Każde ciało, na które nie działają żadne siły zewnętrzne /lub też jeżeli siły działające wzajemnie się znoszą/, znajduje się w ruchu jednostajnym i prostoliniowym lub też w spoczynku. Jest to t.zw. prawo bezwładności.

II prawo: Siła zewnętrzna P działająca na jakiekolwiek ciało o masie m powoduje przyspieszenie a tego ciała w kierunku działania siły P, wprost proporcjonalne do wartości siły P i odwrotnie proporcjonalne do masy m tego ciała:

$$a = \frac{P}{m}$$

skąd

$$P = m\,a$$

III prawo: Każdemu działaniu /akcji/ towarzyszy zawsze równe, lecz skierowane w przeciwną stronę przeciwdziałanie /reakcja/.

IV prawo: Każde dwa ciała materialne /o masach m_1 i m_2/ przyciągają się wzajemnie siłą wprost proporcjonalną do obu mas i odwrotnie proporcjonalną do kwadratu ich odległości /rys. 28/.

$$P = k \frac{m_1 m_2}{r^2}$$

Rys. 28

Jest to t.zw. prawo powszechnego ciążenia. Doświadczalnie wyznaczona wartość współczynnika k wynosi:

$$k = 6,664 \cdot 10^{-8} \frac{cm^3}{g \cdot sek^2}$$

Powyższe prawa Newtona wskazują wyraźnie, że jedynie siły zewnętrzne mogą być traktowane jako przyczyny zmiany ruchu ciał materialnych. Siły wewnętrzne natomiast nie mają żadnego wpływu na ruch ciał.

Drugie prawo Newtona wskazuje, że przyspieszenie jest nieodłącznym zjawiskiem występowania niezrównoważonych sił zewnętrznych, a więc tam, gdzie występuje przyspieszenie, muszą istnieć niezrównoważone siły zewnętrzne i na odwrót, gdzie siły takie występują musi istnieć przyspieszenie.

2. Siła ciężkości

Ciała spadające swobodnie /bez oporu/ na ziemię wykazują przyspieszenie $g \approx 9,81$ m/sek^2. Istnieje więc i siła ciężkości G /ciężar/, która to przyspieszenie powoduje:

$$G = m \cdot g$$

Istnienie siły ciężkości wypływa z czwartego prawa Newtona, mianowicie pomiędzy dowolnym ciałem o masie m i ziemią o masie M istnieją siły wzajemnego przyciągania:

$$G = k \frac{M m}{R^2}$$

gdzie R - w przybliżeniu promień ziemi w danym miejscu. Wynika stąd, że przyspieszenie ziemskie wynosi:

$$g = k \frac{M}{R^2}$$

Ponieważ ziemia jest kulą nieco spłaszczoną na biegunach /R na biegunie jest nieco mniejsze niż R na równiku/, więc przyśpieszenie ziemskie na biegunie musi być większe niż na równiku /wynika to z powyższego wzoru/. Innym powodem wpływającym w większym nawet stopniu na zmniejszenie przyśpieszenia ziemskiego na równiku jest występowanie przyśpieszenia odśrodkowego wywołanego obrotem ziemi dookoła osi, które to przyśpieszenie nie istnieje na biegunie .

3. Siła dośrodkowa

Przy ruchu jednostajnym po kole występuje przyśpieszenie dośrodkowe o wartości

$$a_r = \frac{v^2}{r}$$

Wobec tego /aby zmusić ciało o masie m do poruszania się po torze zakrzywionym/ występować musi siła dośrodkowa o wartości

$$P = \frac{mv^2}{r}$$

4. Prawo pędu i popędu

Z drugiego prawa Newtona P = m.a po uwzględnieniu

$$a = \frac{\Delta v}{\Delta t} = \frac{v_2 - v_1}{\Delta t}$$

wynika

$$P \Delta t = m v_2 - mv_1 = m\Delta V$$

Iloczyn siły działającej P przez czas t działania tej siły /P.t/ nosi nazwę popędu. Natomiast iloczyn masy m przez prędkość v nosi nazwę pędu.
Drugie prawo Newtona może być wyrażone w innej formie: popęd równy jest zawsze przyrostowi pędu.
Jeżeli wartość siły jest zmienna w czasie, wówczas równanie pędu i popędu wyrazić możemy w postaci różniczkowej

$$P\,dt = m\,dv$$

Z pierwszego prawa Newtona wynika, że pęd ciała, na które nie działają żadne siły zewnętrzne, nie ulega zmianie.

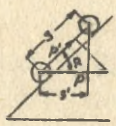
5. Praca i energia

Pracą L nazywamy iloczyn siły P przez wartość przesunięcia s, spowodowanego tą siłą w kierunku jej działania:

$$L = Ps$$

Jeżeli siła P powoduje przesunięcie s w kierunku niezgodnym z działaniem siły /rys. 29/, wówczas

$$L = P \cdot s \cdot \cos\alpha = P s' = P' s$$



praca równa jest iloczynowi siły P przez rzut s' przesunięcia s na kierunek siły lub też iloczynowi rzutu P' siły P na kierunek przesunięcia przez przesunięcie s.

Rys. 29

Pracę mierzymy w jednostkach powstałych z pomnożenia jednostek siły przez jednostki drogi. W układzie CGS jednostką pracy jest erg:

$$1 \text{ erg} = \text{dyna} \cdot \text{cm} = \text{g} \cdot \text{cm}^2/\text{sek}^2$$

Jeżeli ciało wykazuje zdolność do wykonania pracy, mówimy, że ciało to posiada energię.
Energię mierzymy ilością pracy, która może być wykonana.
Energię mierzymy w tych samych jednostkach co i pracę.
Spośród wielu rodzajów energii występują najczęściej następujące jej formy:

a/ Energia kinetyczna, tj. zdolność do wykonania pracy przez ciało o masie m, poruszające się z prędkością v:

$$E_k = \frac{mv^2}{2}$$

b/ energia położenia /potencjalna/ ciała o masie m i ciężarze G = m . g umieszczonego na wysokości h:

$$E_p = m\,g\,h = Gh$$

c/ energia cieplna ciała ogrzanego do temperatury wyższej od otoczenia;
energię cieplną mierzymy na ogół w kaloriach /cal/ lub kilokaloriach /kcal/ 1 kilokaloria jest to ilość ciepła potrzebna do ogrzania 1 kg wody o 1^oC /stopień Celsjusza/ od $14,5^o$ do $15,5^oC$

$$1 \text{ kcal} \approx 427 \text{ kGm}$$

d/ energia chemiczna ciała, które podczas reakcji chemicznej może wydzielić z siebie inny rodzaj energii;

e/ energia elektryczna ciała naładowanego ładunkiem elektrycznym;

f/ energia atomowa zawarta wewnątrz jąder atomów materii itd.

6. Prawo zachowania energii

Energia jest niezniszczalna i z niczego powstać nie może. Jeden rodzaj energii może być zamieniony na inne rodzaje, przy czym jednak w każdym zjawisku ilość energii na początku zjawiska musi być dokładnie równa sumie energii /innych rodzajów/ na końcu zjawiska.

Wszelkie maszyny służą do zamiany energii na inne bardziej użyteczne jej rodzaje.

Np. parowóz służy do zamiany energii cieplnej otrzymanej z węgla na energię kinetyczną biegnącego pociągu, dźwig elektryczny służy do zamiany energii elektrycznej na energię potencjalną podnoszonych ciężarów itd.

7. Moc

Stosunek ilości pracy L wykonanej przez dane ciało do czasu t wyrażonego w sekundach, w którym ta praca została wykonana, nazywamy mocą.

$$N = \frac{L}{t} = \frac{Ps}{t} = Pv = \text{siła x prędkość}$$

Jednostki służące do pomiaru mocy wynikają z podzielenia jednostek pracy przez jednostki czasu np. erg/sek; joule/sek zwany inaczej wat /W/; kilowat /kW/ = 1000 W; kGm/sek /kilogramometr na sekundę/, koń mechaniczny 1 KM = = 75 kGm/sek itp.

W technice używana jest inna jednostka mocy, a mianowicie koń mechaniczny /KM/, przy czym 1 KM = 75 kGm/sek. Jeżeli moc mierzymy w KM, pracę w kGm, czas w sek, siłę w kG i prędkość w m/sek to moc wyraża się formułą:

$$N = \frac{L}{75t} \text{ KM} = \frac{P \cdot v}{75} \text{ KM}$$

W ruchu obrotowym przy znanej ilości n obrotów na minutę prędkość określamy ze znanego określenia $v = \frac{2\pi r \cdot n}{60}$. Po podstawieniu tej wartości do poprzedniego wzoru otrzymamy

$$N = \frac{P \cdot r \cdot n \cdot \pi}{75 \cdot 30} \text{ KM}$$

Wyrażenie Pr jest momentem siły P względem osi obrotu. Jeżeli moment ten oznaczymy przez M i wyrazimy w kGcm, to otrzymamy nowe wyrażenie na moc:

$$N = \frac{M \cdot n}{716{,}20} \text{ KM}$$

8. Sprawność

W każdej maszynie służącej do zamiany energii włożonej L_o na inny rodzaj energii użytecznej L_u, występują straty, na których przezwyciężenie trzeba wykonać pracę nieużyteczną L_s. Mamy więc zgodnie z prawem zachowania energii:

$$L_o = L_u + L_s$$

Sprawnością η maszyny nazywamy stosunek energii użytecznej L_u do całkowitej energii włożonej L_o:

$$\eta = \frac{L_u}{L_o}$$

Ponieważ zawsze $L_u < L_o$, przeto $\eta < 1$.

Szczególnie niewielką sprawność wykazują maszyny, w których energia cieplna zostaje zamieniona na inne rodzaje energii np: maszyny parowe, silniki spalinowe itp.

Sprawność jest liczbą oderwaną.

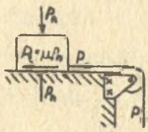
9. Tarcie

a/ Tarcie posuwiste /suwne/

Przypuśćmy, że dwa ciała stykają się ze sobą na powierzchni, przy czym docisk między tymi ciałami w kierunku prostopadłym do powierzchni styku wynosi P_n /rys. 30/.

Jeżeli do jednego z tych ciał przyłożymy siłę P w kierunku stycznym do powierzchni zetknięcia to ruch ciała nie nastąpi dopóki wartość siły P nie przekroczy pewnej wartości. Mówimy że w miejscu zetknięcia dwu ciał występuje siła tarcia P_t o kierunku przeciwnym do kierunku ruchu, a więc stycznie do powierzchni zetknięcia.

Siła tarcia jest skierowana zawsze w kierunku odwrotnym do tego, w którym ciało poruszałoby się gdyby tarcia nie było. Z doświadczeń wynika, że siła tarcia P_t jest wprost proporcjonalna do siły docisku P_n



Rys. 30

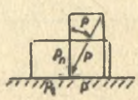
$$P_t = \mu \; P_n$$

Współczynnik μ w powyższym wzorze nazywamy współczynnikiem tarcia. Współczynnik tarcia μ nie zależy od wielkości powierzchni zetknięcia F/o ile tylko powierzchnia ta nie jest tak mała, że docisk P_n spowodować może jej odkształcenie/.

Współczynnik tarcia μ zależy natomiast od:

a/ od rodzaju materiałów ciał stykających się,
b/ stopnia gładkości powierzchni zetknięcia,
c/ od tego czy ciało znajduje się w ruchu czy w spoczynku / zmniejsza się znacznie, gdy ciało zaczyna się poruszać/ oraz
d/ od tego, czy powierzchnie styku są suche, czy też pokryte warstewką smaru.

Jeżeli siła nacisku P na ciało /rys. 31/ nie jest skierowana prostopadle do powierzchni styku, lecz pod kątem ρ do prostopadłej, to ruch ciała może nastąpić dopiero wówczas, gdy kąt ρ przekroczy odpowiednią wartość. Mamy za tym



Rys. 31

$$P_t = \operatorname{tg} \rho \; . \; P_n$$

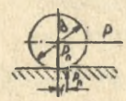
gdzie $\operatorname{tg} \rho = \mu$

Kąt ρ nazywa się kątem tarcia i jest często podawany zamiast μ.

Wartości współczynników tarcia podaje poniższa tablica.

b/ tarcie potoczyste /toczne/

Tarcie przy toczeniu jednego ciała po drugim /rys. 32/ jest na ogół bardzo małe w porównaniu do tarcia posuwistego. Tarcie to pochodzi częściowo ze spłaszczenia toczącej się rolki, częściowo zaś z odkształcenia podłoża pod wpływem wzajemnego docisku P_n, tak że styk rolki z podłożem nie następuje w jednym punkcie, lecz na pewnym odcinku. Reakcja więc przesuwa się w stosunku do osi obrotu rolki o wartość f. Z warunku momentów względem osi obrotu rolki mamy:



Rys. 32

$$P_t \cdot \frac{d}{2} = P_n \cdot f \quad \text{skąd} \quad P_t = P_n \frac{2f}{d}$$

Wartości współczynników tarcia posuwistego.

Materiały ciał trących się	μ w spoczynku			μ w ruchu		
	na sucho	smarowane olejem	zwilżone wodą	na sucho	smarowane olejem	zwilżone wodą
1	2	3	4	5	6	7
Stal o stal	0,15	0,1	-	0,1	0,009	-
Stal o żeliwo lub brąz	0,18	0,1	-	0,16	0,01	-
Żeliwo o żeliwo	0,45	0,25	-	0,2	0,05	-
Brąz o żeliwo lub brąz	0,21	-	-	0,18	-	-
Metal o drewno	0,5 0,6	0,1	-	0,2 0,5	0,02 0,08	0,22 0,26
Drewno o drewno	0,65	0,2	0,7	0,2 0,4	0,04 0,16	0,25
Skóra o metal /dławnice, uszczelki/	0,6	0,25	0,62	0,25	0,12	0,36
Pas skórzany o żeliwo	0,5	0,12	0,37	0,28	0,12	0,38
Pas skórzany o drewno	0,47	-	-	0,27	-	-

1	2	3	4	5	6	7
Lina konop.o stal	0,25	-	-	-	-	-
Lina konop. o drewno	0,4	-	-	-	-	-
Stal o lód	0,027	-	-	0,014	-	-

Przeciętne wartości współczynników tarcia potoczystego podaje następna tablica.

Przykład: Jaką siłą należy ciągnąć wóz na 4 kołach żelaznych o średnicach d = 60 cm poziomo po asfalcie, jeżeli ciężar wozu wynosi 400 kG?

Obciążenie jednego koła wynosi $Pn = \frac{400}{4} = 100$ kg

Z tablicy znajdujemy f = 6 mm. Średnica d = 60 cm = 600 mm.

Siła ciągnąca jednego koła

$$P_1 = P_n \frac{2f}{d} = 100 \frac{2 \cdot 6}{600} = 2 \text{ kG}$$

Siła całkowita $P = 4 \cdot P_1 = 8$ kG

Gdyby koła miały średnicę d = 40 cm = 400 mm, wówczas:

$$P_1 = 100 \frac{2 \cdot 6}{400} = 3 \text{ kG}$$

a całkowita siła $P = 4 \cdot P_1 = 12$ kG

Przeciętne wartości współczynników tarcia potoczystego.

Rolka /koło/	Podłoże	f mm
Żeliwo	po żeliwie	0,05
Koło stalowe	po szynie stal.	0,05
Twarde drzewo	po twardym drzewie	0,8
Miękkie drzewo	po miękkim "	1,5
Stalowe koło pojazdów	po gładkim bruku granit.	1,5
	po szynach	2,5
	po asfalcie	6,0
	po dobrej drodze polnej	4,5
	po drodze piaszczystej	15-30

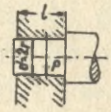
Porównując z poprzednim wynikiem widzimy, że im mniejsza jest średnica koła, tym większa musi być siła do pokonania oporu.

c/ Tarcie w łożyskach

Moment tarcia w łożysku /rys. 33/ wynosi

$$M = \mu \cdot P \cdot r$$

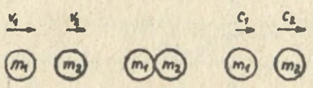
Współczynnik tarcia μ dla czopa stalowego w brązowej panewce przy prawidłowym smarowaniu zawarty jest w granicach od 0,0008 do 0,0020.



Rys. 33

10. Uderzenie ciał materialnych

O uderzeniu mówimy wtedy, gdy siły działające na ciało są bardzo krótkotrwałe i osiągają przy tym wielkie wartości. Uderzenie środkowe i proste zachodzi wtedy, gdy środki ciężkości brył oraz ich prędkości znajdują się na osi uderzenia, przy czym oba ciała poruszają się ruchem postępowym /bez obrotu/, zarówno przed jak i po zderzeniu. W przeciwnym przypadku mówimy o uderzeniu mimośrodowym lub złożonym. Oznaczamy m_1 i m_2 /rys. 34/ masy ciał zderzających się przez v_1 i v_2 prędkości tych ciał przed zderzeniem oraz przez c_1 i c_2 prędkości po zderzeniu.



Rys. 34

Uderzenie środkowe proste doskonale sprężyste zachodzi wtedy, gdy energia kinetyczna ciał nie ulega rozproszeniu po uderzeniu, czyli sumy energii kinetycznych przed i po zderzeniu są sobie równe:

$$\frac{m_1 V_1^2}{2} + \frac{m_2 V_2^2}{2} = \frac{m_1 c_1^2}{2} + \frac{m_2 c_2^2}{2}$$

Przy uderzeniu doskonale sprężystym prędkość po zderzeniu wynosi

$$c_1 = \frac{/m_1 - m_2/v_1 + 2\, m_2v_2}{m_1 + m_2}$$

zaś

$$c_2 = \frac{/m_2 - m_1/v_2 + 2m_1v_1}{m_1 + m_2}$$

Uderzenie nazywamy zupełnie sprężystym, gdy prędkości ciał po zderzeniu stają się sobie równe /po zderzeniu ciała biegną razem/. Wtedy

$$c_1 = c_2 = c = \frac{m_1v_1 + m_2v_2}{m_1 + m_2}$$

Energia stracona przy tym uderzeniu /zamieniona na pracę odkształcenia ciał oraz na ciepło/ wynosi

$$e = \frac{m_1\, m_2}{2/m_1+m_2/}\ /v_1 - v_2/^2$$

Najczęściej zachodzą przypadki pośrednie, tj. uderzeń nie - zupełnie sprężystych. Jeżeli współczynnik sprężystości oznaczamy przez k, przy czym k może przyjmować wartości pośrednie między k = 0 /dla ciał zupełnie niesprężystych/ i k = 1 /dla ciał doskonale sprężystych/, to prędkości po zderzeniu wynoszą

$$c_1 = \frac{m_1v_1 + m_2v_2 + \sqrt{k}.m_2/v_2 - v_1/}{m_1 + m_2}$$

oraz

$$c_2 = \frac{m_1v_1 + m_2v_2 + \sqrt{k}\ .\ m_1\ .\ /v_1 - v_2/}{m_1 + m_2}$$

Energia rozproszona w tym przypadku wynosi:

$$e = \frac{m_1m_2}{2/m_1+m_2/}/v_1 - v_2/^2\ /1-k/$$

<u>Przykład</u>: na stojący na torze wagon kolejowy o masie m_1=10 ton /v_1 = 0/ najechał inny wagon o masie m_2 = 15 ton z prędkością v_2 = 12 km/h. Jakie są prędkości c_1 i c_2 obu wagonów po zderzeniu, jeżeli uderzenie było doskonale sprężyste i żaden z wagonów nie uległ uszkodzeniu.

$$c_1 = \frac{(m_1-m_2)v_1+2m_2v_2}{m_1+m_2} = \frac{0 + 2 \cdot 15 \cdot 12 \text{ t km}}{10 + 15 \text{ t h}} = 14{,}4 \text{ km/h}$$

$$c_2 = \frac{(m_2-m_1)v_2+2m_1v_1}{m_1+m_2} = \frac{(15-10) \cdot 12+0 \text{ t km}}{10 + 15 \text{ t h}} = 2{,}4 \text{ km/h}$$

LITERATURA:

1. Mały poradnik mechanika - PWT 1954 r.

2. Analiza matematyczna - Witold Pogorzelski 1949.

3. Statystyczna kontrola jakości podczas produkcji - Jan Obalski 1955 r.

4. Tieoria wierojatnostiej - E.S. Wentcel 1962 r.

5. Awiacjonnyj sprawocznik - 1964 r.

6. Sprawocznik po matiematikie - 1948 r.

7. Sprawocznik po elementarnoj matiematikie, miechanikie i fizikie - 1960 r.

Aerodynamika

TABLICA MIĘDZYNARODOWEJ ATMOSFERY WZORCOWEJ /MAW/

Zastosowanie oznaczenia

a / $\frac{m}{sek}$; $\frac{km}{godz.}$ /prędkość dźwięku

H / m, km/ - wysokość

p /mm Hg/ - ciśnienie statyczne na danej wysokości

p_o /mm Hg/ - ciśnienie statyczne na H = Om

P_{rH} /KG/ - ciąg rozporządzalny na danej wysokości

P_{ro} /kG/ - ciąg rozporządzalny na H = Om

t^oC - temperatura

T^oK - temperatura bezwzględna

V / $\frac{m}{sek}$, $\frac{km}{godz.}$/ - rzeczywista prędkość lotu

Vi /$\frac{km}{godz.}$/ - wskazywana prędkość lotu /prędkość, którą wskazuje przyrząd po uwzględnieniu wszystkich poprawek/

ρ /$\frac{kG \cdot sek^2}{m^4}$/ - gęstość powietrza na danej wysokości

ρ_o/$\frac{kG\ sek^2}{m^4}$/ - gęstość powietrza na H = Om

δ - gęstość względna powietrza.

Oprócz charakterystyki międzynarodowej atmosfery wzorcowej podano w tablicy szereg spotykanych stale przy obliczeniach aerodynamicznych wielkości zależnych od wysokości lotu, mianowicie :

1. Stosunek prędkości lotu do prędkości wskazywanej przez przyrząd

$$\frac{V}{V_i} = \left(\frac{1}{\delta}\right)^{1/2}$$

2. Stosunek ciągu silnika turbo-odrzutowego na pewnej wysokości do ciągu przy ziemi.
Do wysokości 11 000 m wynosi on $\frac{Pr_H}{Pr_o} = \delta^{0,7}$, powyżej 11 000 m wynosi $\frac{Pr_H}{Pr_o} = 1,439 \cdot \delta$.

Tablica międzynarodowej atmosfery wzorcowej /AW/

H m	t ^oC	T ^oK	p mm Hg	$\frac{p}{p_o}$	ρ $\frac{kg \cdot sek^2}{m^4}$	$\delta = \frac{\rho}{\rho_o}$	$\left(\frac{1}{\delta}\right)^{1/2}$	$\delta^{0,7}$	$\frac{m}{sek}$	$\frac{km}{godz.}$
1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11
- 1000	21,50	294,5	854,59	1,1245	0.1374	1.0996	0,9537	1,069	344,9	1241,8
- 900	20,85	293,8	844,72	1,1115	0,1361	1,0894	0,9587	1,067	344,6	1240,4
- 800	20,20	293,2	834,95	1,0986	0,1349	1,0791	0,9627	1,055	344,2	1239,0
- 700	19,55	292,5	825,27	1,0859	0,1336	1,0690	0,9672	1,048	343,8	1237,6
- 600	18,90	291,9	815,67	1,0733	0,1323	1,0589	0,9718	1,041	343,4	1236,3
- 500	18,25	291,2	806,17	1,0608	0,1311	1,0499	0,9764	1,035	343,0	1234,9
- 400	17,60	290,6	796,76	1,0484	0,1298	1,0390	0,9811	1,028	342,6	1233,5
- 300	16,95	289,9	787,44	1,0361	0,1286	1,0291	0,9857	1,021	342,3	1232,1
- 200	16,30	289,3	778,20	1,0240	0,1274	1,0194	0.9905	1,014	341,9	1230,8
- 100	15,65	288,6	769,06	1.0119	0,1262	1,0095	0,9952	1,007	341,5	1229,4
0	15,00	288,0	760,00	1,0000	0,1250	1.0000	1,0000	1,000	341,1	1228,0
100	14,35	287,3	751,03	0.9882	0,1238	0,9904	1,0048	0,993	340,7	1226,6
200	13,70	286,7	742,14	0,9765	0,1226	0,9809	1.0097	0,986	340,3	1225,2

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11
300	13,05	286,0	733,34	0,9649	0,1214	0,9715	1,0146	0,980	340,0	1223,8
400	12,40	285,4	724,62	0,9535	0,1202	0,9621	1,0195	0,973	339,6	1222,4
500	11,75	284,7	715,99	0,9421	0,1191	0,9528	1,0245	0,966	339,2	1221,0
600	11,10	284,1	707,44	0,9308	0,1179	0,9436	1,0295	0,960	338,8	1219,6
700	10,45	283,4	698,98	0,9197	0,1168	0,9345	1,0344	0,953	338,4	1218,2
800	9,80	282,8	690,59	0,9087	0,1156	0,9254	1,0396	0,947	338,0	1216,8
900	9,15	282,1	682,29	0,8978	0,1145	0,9164	1,0446	0,940	337,6	1215,4
1000	8,50	281,5	674,07	0,8869	0,1134	0,9074	1,0498	0,934	337,2	1214,1
1100	7,85	280,8	665,93	0,8762	0,1123	0,8985	1,0550	0,928	336,8	1212,7
1200	7,20	280,2	657,87	0,8656	0,1112	0,8897	1,0602	0,922	336,4	1211,2
1300	6,55	279,5	649,89	0,8551	0,1101	0,8810	1,0654	0,915	336,1	1209,8
1400	5,90	278,9	641,98	0,8447	0,1090	0,8723	1,0707	0,909	335,7	1208,4
1500	5,25	278,2	634,16	0,8344	0,1079	0,8637	1,0760	0,903	335,3	1207,0
1600	4,60	277,6	626,41	0,8242	0,1069	0,8551	1,0815	0,896	334,9	1205,6
1700	3,95	276,9	618,74	0,8141	0,1058	0,8466	1,0869	0,890	334,5	1204,2
1800	3,30	276,3	611,15	0,8041	0,1047	0,8382	1,0923	0,884	334,1	1202,8
1900	2,65	275,6	603,63	0,7942	0,1037	0,8298	1,0977	0,878	333,7	1201,4
2000	2,00	275,0	596,18	0,7845	0,1027	0,8215	1,1032	0,871	333,3	1200,0
2100	1,35	274,3	588,81	0,7748	0,1016	0,8133	1,1089	0,865	332,9	1198,6
2200	0,70	273,7	581,52	0,7652	0,1006	0,8051	1,1145	0,859	332,5	1197,1
2300	0,05	273,0	574,30	0,7557	0,0996	0,7970	1,1201	0,853	332,1	1195,7
2400	-0,60	272,4	567,15	0,7462	0,0986	0,7890	1,1260	0,847	331,7	1194,2

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11
2500	- 1,25	271,7	560,07	0,7369	0,0976	0,7810	1,1316	0,841	331,4	1192,8
2600	- 1,90	271,1	553,06	0,7277	0,0966	0,7731	1,1374	0,835	331,0	1191,4
2700	- 2,55	270,4	546,13	0,7186	0,0956	0,7652	1,1432	0,830	330,6	1190,0
2800	- 3,20	269,8	539,27	0,7096	0,0947	0,7574	1,1490	0,824	330,2	1188,6
2900	- 3,85	269,1	532,47	0,7006	0,0937	0,7497	1,1550	0,818	329,8	1187,1
3000	- 4,50	268,5	525,75	0,6918	0,0927	0,7420	1,1609	0,812	329,4	1185,7
3100	- 5,15	267,8	519,09	0,6830	0,0918	0,7344	1,1661	0,806	329,0	1184,3
3200	- 5,80	267,2	512,51	0,6744	0,0908	0,7268	1,1729	0,800	328,6	1182,8
3300	- 6,45	266,5	505,99	0,6658	0,0899	0,7193	1,1790	0,794	328,2	1181,3
3400	- 7,10	265,9	499,54	0,6573	0,0890	0,7119	1,1852	0,788	327,8	1179,9
3500	- 7,75	265,2	493,15	0,6489	0,0880	0,7045	1,1913	0,782	327,4	1178,5
3600	- 8,40	264,6	486,83	0,6406	0,0871	0,6972	1,1976	0,777	327,0	1177,0
3700	- 9.05	263,9	480,58	0,6323	0,0862	0,6900	1,2039	0,772	326,5	1175,5
3800	- 9,70	263,3	474,39	0,6242	0,0853	0,6828	1,2102	0,766	326,1	1174,1
3900	-10,35	262,6	468.27	0,6161	0,0844	0,6756	1,2166	0,761	325,7	1172,7
4000	- 11,00	262,0	462,21	0,6082	0.0835	0,6685	1.2230	0.755	325,3	1171.2
4100	- 11,65	261,3	456,21	0,6003	0.0827	0,6615	1,2295	0,750	324,9	1169,8
4200	- 12,30	260,7	450,28	0,5925	0,0818	0,6545	1,2361	0.744	324.5	1168.3
4300	- 12.95	260.0	444,41	0.5846	0,0809	0,6476	1.2426	0,738	324,1	1166,9
4400	- 13.60	259.4	438,60	0.5771	0,0801	0.6407	1.2493	0,732	323.7	1165,4

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11
4500	-14,25	258,7	432,86	0,5696	0.0792	0.6339	1,2560	0,726	323,3	1164.0
4600	-14.90	258,1	427.17	0.5621	0,0784	0.6272	1.2627	0,721	322,9	1162,5
4700	-15,55	257.4	421.55	0.5547	0.0775	0,6205	1,2695	0,716	322.5	1161.0
4800	-16,20	256,8	415,99	0,5473	0,0767	0,6139	1,2763	0.711	322.1	1159,6
4900	-1685	256,1	410,48	0,5401	0,0759	0,6073	1.2832	0,706	321,7	1158.1
5000	- 17,50	255,5	405,04	0.5329	0.0751	0.6007	1,2902	0,700	321,3	1156,6
5100	- 18,15	254,8	399,65	0,5259	0,0743	0,5942	1,2972	0,695	320.9	1155,2
5200	- 18,80	254,2	394.32	0,5189	0,0735	0,5878	1,3043	0,690	320,5	1153,7
5300	- 19,45	253,5	389.05	0,5119	0,0727	0.5814	1.3114	0.684	320.0	1152.2
5400	- 20.10	252.9	388,84	0,5050	0,0719	0.5751	1,3186	0,679	319.6	1150,7
5500	- 20.75	252.2	378,68	0.4983	0,0711	0,5689	1,3258	0,673	319,2	1149,2
5600	- 21,40	251,6	373.58	0,4916	0,0703	0,5627	1,3332	0,668	318,8	1147,8
5700	- 22,05	250,9	368,53	0,4849	0,0695	0,5565	1.3405	0,663	318,4	1146,3
5800	- 22,70	250,3	363,54	0.4784	0,0688	0.5504	1.3481	0,658	318,0	1144,8
5900	- 23,35	249,6	358,61	0,4719	0,0680	0,5443	1,3554	0,653	317,6	1143,3
6000	- 24.00	249,0	353,73	0,4654	0,0673	0,5383	1.3629	0.648	317,2	1141,8
6100	- 24,65	248,3	348,90	0,4591	0,0665	0,5324	1,3705	0,643	316,8	1140,3
6200	- 25,30	247,7	344,13	0,4528	0,0658	0.5265	1.3782	0,638	316,3	1138,8
6300	- 25,95	247,0	339,41	0,4466	0,0651	0,5206	1,3859	0,633	315,9	1137,3
6400	- 26,60	246,4	334,74	0.4404	0.0643	0.5148	1,3937	0,628	315,5	1135,8

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11
6500	-27,25	245,7	330,13	0.4344	0,0636	0,5091	1,4016	0,623	315,1	1134,3
6600	-27,90	245,1	325,56	0,4284	0,0629	0,5034	1,4095	0,618	314,7	1132,9
6700	-28,55	244,4	321.05	0.4224	0,0622	0,4977	1,4174	0,613	314,3	1131,4
6800	-29.20	243,8	316.59	0.4166	0,0615	0,4921	1,4255	0,608	313,8	1129,8
6900	-29,85	243,1	312,18	0,4108	0,0608	0,4865	1,4337	0,604	313,4	1128,3
7000	-30,50	242,5	307.82	0,4050	0,0601	0,4810	1,4419	0,599	313,0	1126,8
7100	-31,15	241,8	303,50	0,3993	0,0594	0,4756	1,4501	0,594	312,6	1125,3
7200	-31.80	241,2	299,24	0,3937	0,0588	0,4702	1.4584	0.589	312.2	1123.8
7300	-32.45	240.5	295.03	0.3882	0.0581	0,4648	1.4668	0.584	311.8	1122.3
7400	-33,10	239.9	290.86	0.3827	0,0574	0,4594	1,4753	0,580	311.3	1120,8
7500	-33,75	239.2	286.74	0.3773	0.0568	0.4542	1.4838	0.576	310,9	1119,3
7600	-34.40	238.6	282.67	0.3719	0.0561	0.4489	1.4925	0.571	310.5	1117,7
7700	-35,05	237,9	278,65	0,3666	0,0555	0.4438	1.5011	0,566	310.1	1116.2
7800	-35,70	237.3	274.67	0.3614	0.0548	0.4386	1.5100	0,562	309.6	1114.6
7900	-36.35	236.6	270.74	0.3562	0.0542	0.4335	1.5188	0.558	309.2	1113.1
8000	-37.00	236.0	266.85	0.3511	0.0535	0.4285	1.5277	0.553	308.8	1111.6
8100	-37,65	235.3	263,01	0.3461	0.0529	0.4235	1.5367	0,548	308.4	1110,1
8200	-38,30	234,7	259,22	0,3411	0,0523	0,4185	1,5458	0,544	307.9	1108.5
8300	-38,95	234,0	255,47	0,3361	0,0517	0.4136	1,5549	0,539	307.5	1107,0
8400	-39,60	233,4	251.76	0.3313	0.0511	0.4087	1,5641	0,535	307,1	1105.4

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11
8500	- 40,25	232,7	248.10	0.3265	0,0505	0,4039	1.5734	0,530	306,6	1103,9
8600	- 40.90	232.1	244,48	0.3217	0.0499	0.3992	1,5828	0.526	306,2	1102,4
8700	- 41.55	231.4	240,90	0.3170	0,0493	0,3944	1,5923	0,522	305.8	1100,8
8800	- 42.20	230.8	237,36	0.3123	0,0487	0.3897	1,6018	0.518	305.4	1099,3
8900	- 42.85	230,1	233,87	0.3077	0.0481	0,3851	1,6115	0,513	304.9	1097,8
9000	- 43,50	229.5	230.42	0,3032	0,0475	0,3805	1,6212	0,509	304,5	1096,2
9100	- 44,15	228,8	227.01	0,2987	0.0470	0,3759	1,6311	0,504	304,1	1094.6
9200	- 44.80	228,2	223,64	0.2943	0.0464	0,3714	1,6409	0,500	303,6	1093,1
9300	- 45,45	227,5	220,31	0,2899	0,0459	0.3669	1,6509	0,496	303.2	1091,6
9400	- 46,10	226,9	217,03	0,2856	0,0453	0,3625	1,6610	0,492	302,8	1090,0
9500	- 46.75	226,2	213,78	0,2813	0,0447	0,3581	1,6711	0,488	302.3	1088.4
9600	- 47,40	225,6	210.57	0,2771	0,0442	0,3537	1,6814	0,483	301,9	1086.8
9700	- 48.05	224.9	207.40	0,2729	0,0437	0,3494	1,6918	0,479	301,5	1085,3
9800	- 48,70	224,3	204,27	0,2688	0.0431	0.3451	1.7022	0.475	301,0	1083.7
9900	- 49,35	223.6	201,18	0.2647	0.0426	0.3409	1,7128	0.471	300.6	1082.2
10000	- 50.00	223.0	198.12	0,2607	0.0421	0.3367	1,7234	0,467	300,2	1080.6
10100	- 50.65	222.3	195.11	0.2567	0.0416	0.3325	1,7341	0,463	299,7	1079,0
10200	- 51,30	221,7	192.13	0.2528	0.0410	0.3284	1.7450	0,459	299,3	1077,4
10300	- 51,95	221,0	189.19	0,2489	0.0405	0.3243	1.7559	0,455	298,8	1075,8
10400	- 52,60	220,4	186,28	0,2451	0.0400	0,3203	1.7670	0.451	298.4	1074.2

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11
10500	- 53.25	219,7	183,41	0.2413	0,0395	0,3163	1,7781	0.447	298.0	1072,7
10600	- 53.90	219,1	180.58	0.2376	0.0390	0.3123	1,7894	0.443	297,5	1071,1
10700	- 54.55	218,4	177.78	0.2339	0.0385	0.3084	1.8007	0.439	297,1	1069.5
10800	- 55.20	217.8	175.02	0.2303	0.0381	0.3045	1.8121	0.435	296.6	1067,9
10900	- 55.85	217.1	172.29	0.2267	0.0376	0.3007	1.8237	0.431	296.2	1066,3
11000	- 56.50	216.5	169.60	0.2232	0.0371	0.2968	1.8357	0.427	295,8	1064,7

h m	t ^oC	T ^oK	P mm Hg	$\frac{Po}{p}$	ϱ $\frac{kg \cdot sek^2}{m^4}$	$\sigma = \frac{\varrho}{\varrho_o}$	$/\frac{1}{\sigma}/^{1/2}$	1.439σ
1	2	3	4	5	6	7	8	9
11100	- 56,5	216,5	166,94	0.2197	0.0365	0,2922	1,8499	0,420
11200	- 56,5	216.5	164,33	0.2162	0,0359	0,2876	1,8646	0.414
11300	- 56,5	216.5	161,75	0.2128	0.0354	0.2831	1,8793	0,407
11400	- 56,5	216.5	159.22	0.2095	0.0348	0.2787	1,8942	0,401
11500	- 56,5	216,5	156,73	0,2065	0,0343	0.2743	1.9093	0,395
11600	- 56,5	216,5	154,27	0,2030	0.0337	0.2700	1,9244	0.388
11700	- 56.5	216,5	151,86	0.1998	0.0332	0.2658	1,9396	0,382
11800	- 56.5	216,5	149,48	0.1967	0.0327	0.2616	1,9550	0,376
11900	- 56,5	216.5	147,14	0,1936	0,0322	0.2576	1.9705	0.371
12000	- 56,5	216.5	144,84	0,1906	0,0317	0,2535	1,9861	0.365

1	2	3	4	5	6	7	8	9
12100	- 56.5	216.5	142,57	0,1876	0,0312	0,2496	2.0018	0.359
12200	- 56,5	216.5	140,34	0,1847	0,0307	0,2456	2,0176	0,353
12300	- 56,5	216.5	138,14	0,1818	0.0302	0.2418	2.0336	0.348
12400	- 56.5	216.5	135.98	0,1789	0.0297	0.2380	2.0498	0.342
12500	- 56,5	216,5	133,85	0,1761	0.0293	0,2343	2,0660	0,337
12600	- 56.5	216,5	131,75	0,1734	0.0288	0.2306	2,0824	0.332
12700	- 56.5	216.5	129.69	0.1707	0,0284	0.2270	2.0989	0.327
12800	- 56,5	216.5	127,66	0,1680	0,0279	0.2235	2,1155	0,322
12900	- 56.5	216.5	125.66	0,1654	0.0275	0,2199	2,1322	0.317
13000	- 56,5	216.5	123,69	0.1628	0,0271	0.2165	2.1491	0.312
13100	- 56.5	216.5	121.76	0,1602	0.0266	0,2131	2.1661	0,307
13200	- 56.5	216.5	119.85	0.1577	0.0262	0.2098	2,1833	0.302
13300	- 56.5	216,5	117,98	0,1552	0,0258	0,2065	2,2006	0.297
13400	- 56.5	216,5	116,13	0,1528	0.0254	0.2033	2,2180	0,292
13500	- 56,5	216,5	114.31	0,1504	0.0250	0.2001	2,2356	0.288
13600	- 56,5	216,5	112,52	0,1480	0.0246	0.1969	2,2533	0,284
13700	- 56.5	216.5	110,76	0,1457	0,0242	0.1939	2.2712	0.279
13800	- 56,5	216.5	109.09	0.1434	0.0238	0.1908	2.2892	0,275
13900	- 56.5	216,5	107,32	0,1412	0.0235	0,1878	2.3073	0.270
14000	- 56.5	216.5	105.64	0.1390	0.0231	0.1849	2.3256	0.266

1	2	3	4	5	6	7	8	9
14100	- 56,5	216,5	103,98	0,1368	0,0227	0,1820	2,3440	0,262
14200	- 56,5	216,5	102,36	0,1347	0,0224	0,1792	2,3626	0,258
14300	- 56,5	216,5	100,75	0,1326	0,0220	0,1763	2,3813	0,254
14400	- 56,5	216,5	99,18	0,1305	0,0217	0,1736	2,4002	0,250
14500	- 56,5	216,5	97,62	0,1284	0,0214	0,1709	2,4192	0,246
14600	- 56,5	216,5	96,09	0,1264	0,0210	0,1682	2,4383	0,242
14700	- 56,5	216,5	94,59	0,1244	0,0207	0,1656	2,4576	0,238
14800	- 56,5	216,5	93,11	0,1225	0,0204	0,1630	2,4771	0,235
14900	- 56,5	216,5	91,65	0,1206	0,0200	0,1604	2,4967	0,231
15000	- 56,5	216,5	90,22	0,1187	0,0197	0,1579	2,5164	0,227
15100	- 56,5	216,5	88,80	0,1168	0,0194	0,1554	2,5364	0,224
15200	- 56,5	216,5	87,41	0,1150	0,0191	0,1530	2,5565	0,220
15300	- 56,5	216,5	86,05	0,1132	0,0188	0,1506	2,5768	0,217
15400	- 56,5	216,5	84,70	0,1114	0,0185	0,1482	2,5972	0,213
15500	- 56,5	216,5	83,37	0,1097	0,0182	0,1459	2,6178	0,210
15600	- 56,5	216,5	82,07	0,1080	0,0180	0,1436	2,6385	0,207
15700	- 56,5	216,5	80,78	0,1063	0,0177	0,1414	2,6594	0,204
15800	- 56,5	216,5	79,52	0,1046	0,0174	0,1392	2,6805	0,200
15900	- 56,5	216,5	78,27	0,1030	0,0171	0,1370	2,7017	0,197
16000	- 56,5	216,5	77,05	0,1014	0,0169	0,1349	2,7231	0,194
16100	- 56,5	216,5	75,84	0,0998	0,0166	0,1327	2,7447	0,191
16200	- 56,5	216,5	74,65	0,0982	0,0163	0,1307	2,7664	0,188
16300	- 56,5	216,5	73,48	0,0967	0,0161	0,1286	2,7883	0,185
16400	- 56,5	216,5	72,33	0,0952	0,0158	0,1266	2,8104	0,182
16500	- 56,5	216,5	71,20	0,0937	0,0156	0,1246	2,8327	0,179

1	2	3	4	5	6	7	8	9
16600	- 56,5	216,5	70,09	0,0922	0,0153	0,1227	2,8551	0,177
16700	- 56,5	216.5	68.99	0.0908	0,0151	0,1207	2,8777	0.174
16800	- 56,5	216,5	67,91	0,0894	0,0149	0,1189	2,9005	0,171
16900	- 56,5	216,5	68,85	0,0880	0,0146	0,1170	2,9235	0,168
17000	- 56,5	216,5	65,80	0,0866	0,0144	0,1152	2,9467	0,166
17100	- 56,5	216,5	64.77	0,0852	0,0142	0,1134	2,9700	0,163
17200	- 56,5	216,5	63,76	0,0839	0,0139	0,1116	2,9935	0,161
17300	- 56,5	216,5	62,76	0.0826	0,0137	0,1098	3,0172	0,158
17400	- 56,5	216,5	61,77	0,0813	0.0135	0,1081	3,0411	0,156
17500	- 56,5	216,5	60,81	0,0800	0,0133	0,1064	3,0652	0,153
17600	- 56,5	216.5	59,86	0.0787	0,0131	0,1084	3,0895	0,151
17700	- 56,5	216,5	58,92	0.0775	0,0129	0,1031	3,1140	0.148
17800	- 56.5	216.5	58.00	0.0763	0.0127	0.1015	3,1387	0,146
17900	- 56.5	216,5	57,09	0.0751	0.0125	0.0999	3,1635	0.144
18000	- 56,5	216.5	56,19	0,0739	0.0123	0.0984	3.1886	0.142
18100	- 56,5	216.5	55.31	0.0727	0.0121	0.0968	3.2138	0.139
18200	- 56,5	216,5	54.45	0,0716	0,0119	0,0953	3,2392	0.137
18300	- 56,5	216,5	53,60	0.0705	0,0117	0,0938	3.2649	0,135
18400	- 56,5	216.5	52.76	0.0694	0.0115	0,0923	3.2908	0.133
18500	- 56,5	216.5	51,93	0,0683	0.0114	0.0909	3.3168	0,131
18600	- 56,5	216,5	51.12	0,0672	0,0112	0,0895	3,3431	0,129
18700	- 56,5	216.5	50.32	0.0662	0.0110	0.0881	3.3696	0,127
18800	- 56.5	216.5	49.53	0,0652	0.0108	0.0867	3.3963	0.125
18900	- 56.5	216,5	48.75	0,0642	0.0107	0,0853	3.4232	0.123
19000	- 56.5	216.5	47,99	0,0632	0.0105	0,0840	3,4503	0,121

1	2	3	4	5	6	7	8	9
19100	- 56,5	216,5	47,24	0,0622	0,0103	0.0827	3,4777	0,119
19200	- 56,5	216,5	46,50	0,0612	0,0102	0,0814	3,5052	0,117
19300	- 56,5	216,5	45,77	0,0602	0.0100	0,0801	3,5330	0,115
19400	- 56,5	216,5	45.06	0,0593	0,0099	0,0789	3,5609	0,114
19500	- 56,5	216,5	44,35	0,0584	0,0097	0,0776	3,5891	0.112
19600	- 56.5	216.5	43.66	0.0575	0,0095	0.0764	3,6175	0.110
19700	- 56.5	216,5	42,97	0.0566	0,0094	0.0752	3.6462	0,108
19800	- 56,5	216,5	42,30	0,0557	0,0093	0.0740	3,6751	0,106
19900	- 56,5	216,5	41.64	0,0548	0,0091	0.0729	3,7043	0,105
20000	- 56,5	216,5	40,99	0,0539	0,0090	0,0717	3,7336	0,103

H /m/	p /mm Hg/	T /°K/	$\delta = \frac{\varrho}{\varrho_0}$	a /m/sek/
21000	35,02	216,5	0,0613	295,0
22000	29,90	216,5	0,0523	295,0
23000	25,54	216,5	0,0447	295,0
24000	21,81	216,5	0,0382	295,0
25000	18,63	216,5	0,0326	295,0
26000	15,91	216,5	0,0278	295,0
27000	13,59	216,5	0,0238	295,0
28000	11,60	216,5	0,0203	295,0
29000	9,91	216,5	0,0173	295,0
30000	8,46	216,5	0,0148	295,0

Przybliżone dane o właściwościach atmosfery na wysokościach od 35 do 80 km

H /km/	T /°K/	p /kG/m²/	ρ /kG·m⁻⁴·sek²/	$\frac{p}{p_o}$	$\frac{\rho}{\rho_o} = \sigma$	a /m/sek/
35	246,2	59,0	$8,347 \times 10^{-4}$	$5,710 \times 10^{-3}$	$8,172 \times 10^{-2}$	314,4
40	261,0	30,40	$4,058 \times 10^{-4}$	$2,942 \times 10^{-3}$	$5,697 \times 10^{-2}$	324,0
45	275,7	16,28	$2,056 \times 10^{-4}$	$1,576 \times 10^{-3}$	$4,056 \times 10^{-2}$	332,8
50	282,7	8,958	$1,104 \times 10^{-4}$	$8,670 \times 10^{-4}$	$2,972 \times 10^{-2}$	337,0
55	276,7	4,934	$0,6210 \times 10^{-4}$	$4,775 \times 10^{-4}$	$2,229 \times 10^{-2}$	333,4
60	257,5	2,632	$0,3559 \times 10^{-4}$	$2,547 \times 10^{-4}$	$1,687 \times 10^{-2}$	321,8
65	238,4	1,370	$20,02 \times 10^{-6}$	$1,326 \times 10^{-4}$	$12,65 \times 10^{-3}$	309,8
70	219,3	0,6445	$10,23 \times 10^{-6}$	$6,238 \times 10^{-5}$	$9,048 \times 10^{-3}$	297,0
75	200,3	0,2905	$5,052 \times 10^{-6}$	$2,812 \times 10^{-5}$	$6,358 \times 10^{-3}$	283,7
80	196,9	0,1247	$2,206 \times 10^{-6}$	$1,247 \times 10^{-5}$	$4,201 \times 10^{-3}$	281,3

Przybliżone dane o właściwościach atmosfery na wysokościach od 90 do 300 km

H /km/	T /°K/	p /dyn/cm²/	ρ /g/cm³/
90	211	$2,50 \times 10$	$4,12 \times 10^{-9}$
100	237	$5,69 \times 10^{-1}$	$8,29 \times 10^{-10}$
110	267	$1,58 \times 10^{-1}$	$1,97 \times 10^{-10}$
120	301	$5,32 \times 10^{-2}$	$5,61 \times 10^{-11}$
130	340	$2,13 \times 10^{-2}$	$1,90 \times 10^{-11}$
140	380	$9,72 \times 10^{-3}$	$7,57 \times 10^{-12}$
150	418	$4,88 \times 10^{-3}$	$3,40 \times 10^{-12}$
160	461	$2,63 \times 10^{-3}$	$1,65 \times 10^{-12}$
170	505	$1,51 \times 10^{-3}$	$8,61 \times 10^{-13}$
180	553	$9,08 \times 10^{-4}$	$4,73 \times 10^{-13}$
190	601	$5,72 \times 10^{-4}$	$2,74 \times 10^{-13}$
200	647	$3,73 \times 10^{-4}$	$1,66 \times 10^{-13}$
220	732	$1,73 \times 10^{-4}$	$6,82 \times 10^{-14}$
240	798	$8,74 \times 10^{-5}$	$3,11 \times 10^{-14}$
250	827	$6,38 \times 10^{-5}$	$2,15 \times 10^{-14}$
260	853	$4,74 \times 10^{-5}$	$1,52 \times 10^{-14}$
280	887	$2,74 \times 10^{-5}$	$7,93 \times 10^{-15}$
300	901	$1,66 \times 10^{-5}$	$4,42 \times 10^{-15}$

Tabele zestawiono na podstawie:

1. "Aerodynamika szybkich samolotów" B. Goroszczenko Państwowe Wydawnictwo Naukowe - 1953 r.
2. "Aeromiechanika" D.M. Pickier i W.A. Turjan-Oborongiz 1960 r.
3. "Dinamika polieta" B. Etkin - Maszinostrojenije 1964 r.

PODSTAWOWE WZORY I DEFINICJE Z AERODYNAMIKI

Przyjęte oznaczenia

A - wielkość określająca współczynnik oporu indukowanego, zależna przy przepływie poddźwiękowym od obrysu skrzydła a przy naddźwiękowym od liczby M

$a/\frac{m}{sek}/$ - prędkość dźwięku

c /m/ - grubość profilu

$\bar{c}$ /%/ - procentowa grubość profilu

c_{max}/m/ - maksymalna grubość profilu

c_R - współczynnik całkowitej /wypadkowej/ siły aerodynamicznej

$c_p/\frac{kcal}{kG^oC}/$ - ciepło właściwe przy stałym ciśnieniu

$c_v/\frac{kcal}{kG^oC}/$ - ciepło właściwe przy stałej objętości

c_x - współczynnik oporu

c_{xf} - współczynnik oporu falowego

c_{xi} - współczynnik oporu indukowanego

c_{xk} - współczynnik oporu kadłuba

c_{xsam} - współczynnik oporu samolotu

c_{xp} - współczynnik oporu profilowego

c_{xpodw} - współczynnik oporu podwozia

c_{xskrz} - współczynnik oporu skrzydła

c_{xszk} - współczynnik oporu szkodliwego /współczynnik oporu samolotu bez skrzydła odniesiony do powierzchni skrzydła/

c_{xt} - współczynnik oporu tarcia

c_{xust} - współczynnik oporu usterzenia

$c_{x\varkappa}$ - współczynnik oporu skrzydła skośnego o kącie skosu $\varkappa^o$

c_z - współczynnik siły nośnej

c_{zsam} - współczynnik siły nośnej samolotu

$c_{z\,skrz}$	- współczynnik siły nośnej skrzydła
$c_{z\,ściś}$	- współczynnik siły nośnej z uwzględnieniem ściśliwości powietrza
$c_{z\,\chi}$	- współczynnik siły nośnej skrzydła skośnego o kącie skosu χ°
D	- doskonałość aerodynamiczna
D_k/m/	- średnica kadłuba
D_{sam}	- doskonałość aerodynamiczna samolotu
F/m^2/	- powierzchnia przekroju strumienia
f/m/	- krzywizna profilu
f_{max}/m/	- maksymalna krzywizna profilu
$\bar{f}$/%/	- względna /procentowa/ krzywizna profilu
g/$\frac{m}{sek^2}$/	- przyspieszenie ziemskie
H/m, km/	- wysokość
K	- wykładnik adiabaty
L_M/m/	- charakterystyczny wymiar liniowy modelu
L_S/m/	- charakterystyczny wymiar liniowy samolotu
L_k/m/	- długość kadłuba
M	- liczba Macha
M_H	- liczba Macha na wysokości H metrów /km/
M_{kryt}	- krytyczna liczba Macha
$M_{kryt\,\chi}$	- krytyczna liczba Macha skrzydła skośnego o kącie skosu χ°
M_M	- liczba Macha dla modelu
M_S	- liczba Macha dla samolotu
M_y	- moment aerodynamiczny względem osi przechodzącej wzdłuż rozpiętości skrzydła
m_y	- współczynnik momentu M_y
$m = \frac{Q}{g}$	- masa
P_x/kG/	- siła oporu
P_{xi}/kG/	- siła oporu indukowanego
P_{xk}/kG/	- siła oporu kształtu
P_{xp}/kG/	- siła oporu profilowego
P_{xsam}/kG	- siła oporu samolotu

P_{xskrz} /kG/	- siła oporu skrzydła
P_{xszk} /kG/	- siła oporu szkodliwego
P_{xt} /kG/	- siła oporu tarcia
P_z /kG/	- siła nośna
p /$\frac{kG}{m^2}$;mm Hg/	- ciśnienie
p_o /$\frac{kG}{m^2}$;mm Hg/	- ciśnienie powietrza na wysokości H = 0 lub ciśnienie hamowania strumienia
p_∞ /$\frac{kG}{m^2}$/	- ciśnienie gazu w odpowiednio dużej odległości od opływanego ciała
p_{st} /$\frac{kG}{m^2}$/	- ciśnienie statyczne
R /kG/	- całkowita /wypadkowa/ siła aerodynamiczna lub stała gazowa
R_e	- liczba Reynoldsa
R_{eM}	- liczba Reynoldsa modelu
R_{eS}	- " " samolotu
S /m^2/	- powierzchnia charakterystyczna danego aparatu latającego - dla samolotu powierzchnia skrzydła
S_k /m^2/	- powierzchnia przekroju poprzecznego kadłuba
S_{pk} /m^2/	- powierzchnia skrzydła objęta kadłubem /pod kadłubowa/
S_{podw} /m^2/	- powierzchnia przekroju poprzecznego podwozia płaszczyzną prostopadłą do wektora prędkości lotu
S_{ust} /m^2/	- powierzchnia usterzenia
T /^oK/	- temperatura bezwzględna
T_o /^oK/	- temperatura powietrza na wysokości H = 0 lub temperatura hamowania strumienia
T_∞ /^oK/	- temperatura gazu w odpowiednio dużej odległości od opływanego ciała
t /^oC/	- temperatura w skali Celsjusza
t /m/	- cięciwa profilu skrzydła
t_k /m/	- cięciwa końcowa skrzydła

t_n /m/	- cięciwa nasadowa /na osi podłużnej samolotu/ skrzydła
Q /kG/	- ciężar
q /$\frac{kG}{m^2}$/	- ciśnienie dynamiczne
V /$\frac{m}{sek}$/	- prędkość lotu /przepływu strumienia/
V_o/$\frac{m}{sek}$/	- prędkość w punkcie krytycznym /hamowania/
V_{kryt}/$\frac{m}{sek}$/	- krytyczna prędkość lotu /przepływu strumienia/
V_M/$\frac{m}{sek}$/	- prędkość opływu modelu
ϑ/m^3/	- objętość
V_S/$\frac{m}{sek}$/	- prędkość samolotu
V_{przyrz}/$\frac{m}{sek}$/	- prędkość wskazywania przez przyrząd /po uwzględnieniu poprawek $V_{przyrz} = V_i$/
V_∞ /$\frac{m}{sek}$/	- prędkość strumienia w odpowiednio dużej odległości od opływanego ciała
X_c/m/	- współrzędna określająca położenie maksymalnej grubości profilu
$\bar{X}_c$/%/	- położenie maksymalnej grubości profilu wyrażone w procentach cięciwy profilu
z /m/	- współrzędna pionowa
α°	- kąt natarcia
α°_{opt}	- optymalny kąt natarcia
γ/$\frac{kG}{m^3}$/	- ciężar właściwy
$\Delta = \delta$	- gęstość względna powietrza /stosunek gęstości na danej wysokości do gęstości na H = 0/
$\Delta\alpha^\circ$	- przyrost kąta natarcia
ΔC_x	- przyrost współczynnika oporu
ΔC_{xf}	- przyrost współczynnika oporu falowego
Δp/$\frac{kG}{m^2}$/	- przyrost ciśnienia
δ°	- kąt zaklinowania skrzydła /kąt montażowy/
η	- zbieżność skrzydła
κ	- kąt stosu skrzydła
λ	- wydłużenie skrzydła
λ_k	- wydłużenie kadłuba

μ /$\frac{kGsek}{m^2}$/ - dynamiczny współczynnik lepkości

ν /$\frac{m^2}{sek}$/ - kinematyczny współczynnik lepkości

ν_H/$\frac{m^2}{sek}$/ - kinematyczny współczynnik lepkości dla modelu

ν_S/$\frac{m^2}{sek}$/ - kinematyczny współczynnik lepkości dla samolotu

π = 314 - stosunek obwodu okręgu do jego średnicy

ρ /$\frac{kGsek^2}{m^4}$/ - gęstość powietrza

ρ_0 /$\frac{kG\ sek^2}{m^4}$/ - gęstość powietrza na H = 0 /m/

ρ_H /$\frac{kGsek^2}{m^4}$/ - gęstość powietrza na danej wysokości H

δ - gęstość względna powietrza

φ° - kąt stożka Macha

ψ° - kąt wzniosu skrzydła

Podstawowe właściwości gazów

Stan i fizyczne właściwości powietrza charakteryzują się:

- <u>ciśnieniem</u> - p $/\frac{kG}{m^2}/$ lub $/mm\ Hg/$

760 mm Hg = 1,0333 $/\frac{kG}{cm^2}/$ = 10333 $/\frac{kG}{m^2}/$

- <u>temperatura</u> - t^oC lub T^oK

$$T = 273^o + t$$

- <u>gęstością</u> - $\rho\ /\frac{kGsek^2}{m^4}/$

$$\rho = \frac{m}{v} = \frac{Q}{gv}$$

- gdzie:

m - masa
v - objętość
Q - ciężar
g - przyspieszenie ziemskie

- <u>ciężarem właściwym</u> $\gamma\ /\frac{kG}{m^3}/$

$$\gamma = \frac{Q}{v}$$

Określenie gęstości powietrza na dowolnej wysokości:

$$\rho_H = \rho_o \frac{p}{p_o} \cdot \frac{T_o}{T} = 0,125 \frac{p}{760} \cdot \frac{288}{273+t}$$

- gdzie:

ρ_H i ρ_o - gęstości na danej wysokości i na H=0
p i p_o - ciśnienie na danej wysokości i na H=0
T i To - temperatury " " "

- gęstość względna

$$\Delta = \delta = \frac{\rho_H}{\rho_o}$$

-kinematyczny współczynnik lepkości

$$\nu = \frac{\mu}{\rho}\ /\frac{m^2}{sek}/$$

gdzie:

μ - dynamiczny współczynnik lepkości. Dla powietrza przy $t = 15^{o}C$

$$\mu = 1{,}82 \cdot 10^{-6} \left/ \frac{kGsek}{m^2} \right/$$

$$\nu = 1{,}45 \cdot 10^{-5} \left/ \frac{m^2}{sek} \right/$$

Równania przepływów

Równanie ciągłości:

$$\rho_1 F_1 V_1 = \rho_2 F_2 V_2 = \rho FV = const$$

gdzie: ρ_1 i ρ_2 - gęstość gazu w dwu dowolnych przekrojach strumienia

F_1 i F_2 - odpowiednie powierzchnie przekrojów tego strumienia

V_1 i V_2 - odpowiednie prędkości przepływu

W przypadku gazu ściśliwego masa przepływająca w jednostce czasu przez dowolny przekrój strumienia pozostaje stała i wyraża się iloczynem $FV\rho$ $\left/ \frac{kG \cdot sek}{m} \right/$

Dla gazu nieściśliwego, gdzie $\rho_1 = \rho_2 = \rho$ równanie przybiera postać:

$$F_1 \cdot V_1 = F_2 \cdot V_2 = F \cdot V = const$$

albo:

$$\frac{F_1}{F_2} = \frac{V_2}{V_1}$$

Równanie Bernoulliego:

$$Z_1 + \frac{p_1}{\gamma} + \frac{V_1^2}{2g} = Z_2 + \frac{p_2}{\gamma} + \frac{V_2^2}{2g} = Z + \frac{p}{\gamma} + \frac{V^2}{2g} = const$$

- gdzie: Z_1 i Z_2 - współrzędne położenia dwu dowolnych przekrojów strumienia

  p_1 i p_2 - odpowiednie ciśnienie

  V_1 i V_2 - odpowiednie prędkości

- każdy człon tego równania przedstawia sobą pewną energię, odniesioną do jednostki ciężaru płynu, a mianowicie:

  $\frac{V^2}{2g}$ - energia kinetyczna przepływającego płynu

  z - energia potencjalna położenia

  $\frac{p}{\gamma}$ - energia potencjalna ciśnienia

- przy poziomym przepływie strumienia, kiedy $Z_1 = Z_2 = Z$ równanie przyjmuje postać:

$$\frac{p}{\gamma} + \frac{V_2}{2g} = \qquad p + \rho\frac{V^2}{2} = \text{const}$$

- gdzie p - ciśnienie statyczne $/\frac{kG}{m^2}/$

  $q = \rho\frac{V^2}{2}$ - ciśnienie dynamiczne $/\frac{kG}{m^2}/$

W dowolnym przekroju strumienia przepływającego płynu /cieczy lub gazu/ suma ciśnienia **statycznego** i dynamicznego jest wielkością stałą.

Prędkość wskazywana przez prędkościomierz

$$V_{przyrz} = \sqrt{\frac{2(p_1 - p_{st})}{\rho}}$$

gdzie p_{st} - ciśnienie statyczne

$$p_1 = p_{st} + \frac{\rho V^2}{2}$$

- ponieważ prędkościomierz jest skalowany przy gęstości powietrza $\rho_0 = 0,125 /\frac{kG \cdot sek^2}{m^4}/$, to przy zmianie gęstości należy do wskazań prędkościomierza wnieść poprawkę:

$$V = V_{przyrz}\sqrt{\frac{\rho_0}{\rho}}$$

gdzie: V - prędkość rzeczywista

ρ - gęstość rzeczywista

- W warunkach rzeczywistych należy jeszcze uwzględnić poprawki /aerodynamiczna,na ściśliwość itp/.

Rozkład ciśnień

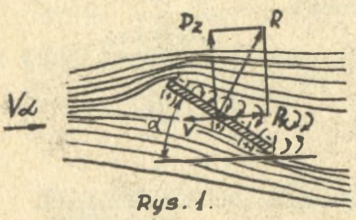
- Rozkład **ciśnienia** na powierzchni opływanego ciała można określić wg. wzoru:

$$\Delta p = \frac{\rho v^2}{2}\left[1 - \left(\frac{v_1}{v}\right)^2\right]$$

- gdzie Δp - przyrost ciśnienia w rozpatrywanym punkcie opływanego ciała;
  v - prędkość lotu /przepływu/
  v_1 - prędkość lokalna w rozpatrywanym punkcie.

Siły aerodynamiczne

Siła aerodynamiczna-jest to siła działająca na ciało poruszające się w powietrzu lub ustawione nieruchomo w poruszającym się strumieniu powietrza. Wielkość tej siły zależna jest od kształtu ciała, wielkości, gęstości powietrza oraz od prędkości ciała względem powietrza.



Rys. 1.
Siły aerodynamiczne

α - kąt natarcia
V_∞ - prędkość strumienia w odpowiednio dużej odległości od płytki
R - całkowita siła aerodynamiczna

$$R = C_R \cdot \frac{\rho V^2}{2} \cdot S \quad /kG/$$

P_z - siła nośna

$$P_z = C_z \cdot \frac{\rho V^2}{2} \cdot S = 0{,}7\, C_z S\, M^2 \cdot p$$

P_x - siła oporu

$$P_x = C_x \cdot \frac{\rho V^2}{2} \cdot S = 0{,}7\, C_x S\, M^2 \cdot p$$

- gdzie: S - powierzchnia płytki

$C_R C_z C_x$ - współczynniki bezwymiarowe określane doświadczalnie, uwzględniające kąt natarcia, gładkość powierzchni płytki oraz lepkość i ściśliwość powietrzna.

M - liczba Macha

- Dla płaskiej płytki prostopadłej do strumienia C_x = 1,28.

Liczba Reynoldsa

Stosunek siły bezwładności do siły lepkości nazywa się liczbą Reynoldsa i oznacza np.

$$R_{es} = R_{eM} \frac{V_s \cdot L_s}{\nu_s} = \frac{V_M \cdot L_M}{\nu_M}$$

- gdzie: R_{es} i R_{eM} - liczby Reynoldsa odpowiednio do samolotu i modelu

V_s i V_M -prędkość opływu samolotu i modelu

L_s i L_M - charakterystyczne wymiary liniowe samolotu i modelu

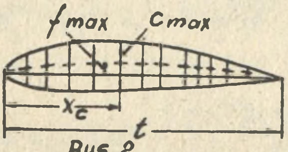
ν_s i ν_M - kinetyczne współczynniki lepkości samolotu i modelu

- Liczba R_e jest kryterium podobieństwa w warunkach, gdy dominującą rolę odgrywają siły lepkości.
- Kryterium podobieństwa przy przepływach ściśliwych jest również liczba M

$$M_s = M_M = \frac{V}{a}$$

Podstawowe charakterystyki aerodynamiczne skrzydła i samolotu

Charakterystyki geometryczne skrzydła



Rys. 2
Parametry profilu skrzydła

t - cięciwa

C_{max} - maksymalna grubość

f_{max} - maksymalna krzywizna profilu

x_c - współrzędna określająca położenie maksymalnej grubości profilu.

Parametrami charakteryzującymi profil są:

- cięciwa t - odległość między końcowymi punktami profilu

- grubość względna $\bar{c}$ w procentach cięciwy - stosunek C_{max} do t

$$\bar{C} = \frac{C_{max}}{t} \cdot 100\%$$

Stosowane obecnie grubości względne na samolotach myśliwskich - 3,5 - 4% na bombowcach 4 - 10% i na komunikacyjnych 8 - 14%

- współrzędna $\bar{X}_c$

$$\bar{X}_c = \frac{X_c}{t} \cdot 100\%$$

na współczesnych samolotach $\bar{X}_c$ = 35 - 50%

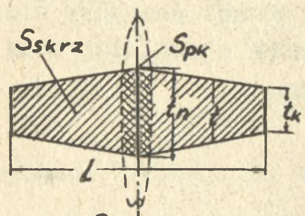
- względna krzywizna $\bar{f}$

$$\bar{f} = \frac{f_{max}}{t} \cdot 100\%$$

Maksymalną krzywizną profilu nazywa się maksymalne odchylenie środkowej linii profilu od cięciwy, a środkową linią profilu:

- linię przechodzącą przez środki odcinków, łączących punkty z jednakową współrzędną X na górnej i dolnej krzywej obrysu profilu.

  Dla profilów symetrycznych $\bar{f}$ = 0



Rys. 3
Parametry skrzydła trapezowego

- Powierzchnia skrzydła S jest to rzut powierzchni skrzydła na płaszczyznę poziomą. Na samolocie do powierzchni skrzydła S wlicza się również powierzchnię podkadłubową S_{pk}
- Rozpiętość skrzydła l jest to odległość między końcowymi punktami skrzydła mierzona po prostopadłej do osi symetrii skrzydła.
- Skrzydło może być wykonane ze zmienną cięciwą, dlatego też rozróżnia się cięciwę nasadową tn i cięciwę końcową t_k
- Zbieżność skrzydła η:

$$\eta = \frac{t_n}{t_k}$$

Zbieżność trapezowych skrzydeł myśliwców zawiera się w granicach 1 ÷ 2, bombowców 2 ÷ 2,5. Zbieżność skrzydeł trójkątnych zawiera się w granicach ~ 20 $\div \infty$

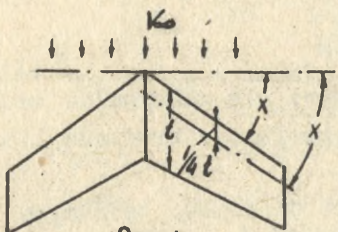
- Wydłużenie skrzydła λ.

$$\lambda = \frac{l^2}{S}$$

Skrzydła prostokątnego $\lambda = \frac{l}{t}$

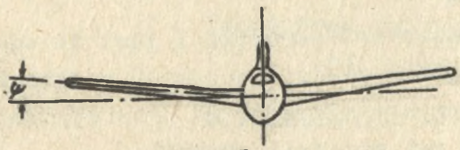
ponieważ tu powierzchnia skrzydła S = l . t
Samoloty naddźwiękowe mają skrzydła o λ = 2 - 4, poddźwiękowe λ = 6 - 9.

- Kąt skosu skrzydła χ jest to kąt pomiędzy linią przechodzącą przez wierzchołek skrzydła i prostopadłą do osi symetrii a prostą łączącą punkty leżące na 1/4 cięciwy. Czasem również określa się kąt skosu biorąc za podstawę nie 1/4 cięciw a krawędź natarcia skrzydła

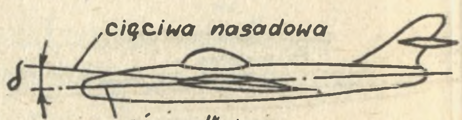


Rys. 4
Skrzydło skośne

- kąt wzniosu skrzydła Ψ jest to kąt pomiędzy osią skrzydła i linią prostopadłą do płaszczyzny symetrii samolotu
- kąt zaklinowania skrzydła δ jest to kąt pomiędzy cięciwą nasadową a podłużną osią samolotu.



Rys.5
Dodatni kąt wzniosu skrzydła



Rys. 6.
kąt zaklinowania skrzydła

Siła nośna i siła oporu skrzydła

Siła nośna $P_z = C_z \frac{\rho \cdot V^2}{2} \cdot S$

Moment aerodynamiczny M_y

$$M_y = m_y \frac{\rho V^2}{2} S \cdot t$$

gdzie: m_y - współczynnik momentu względem osi przechodzącej wzdłuż rozpiętości skrzydła

t - cięciwa.

Siła oporu skrzydła jest sumą oporu tarcia, oporu kształtu i oporu indukowanego

$$P_x = P_{xt} + P_{xk} + P_{xi}$$

Sumę oporu tarcia i oporu kształtu nazywa się oporem profilowym skrzydła

$$P_{xt} + P_{xk} = P_{xp}$$

- wobec tego

$$P_x = P_{xp} + P_{xi}$$

- albo:

$$C_x \cdot \frac{\rho V^2}{2} \cdot S = C_{xp} \cdot \frac{\rho V^2}{2} \cdot S + C_{xi} \cdot \frac{\rho V^2}{2} \cdot S$$

$$C_x = C_{xp} + C_{xi}$$

gdzie współczynnik oporu indukowanego:

$$C_{xi} = C_z \cdot \Delta\alpha = \frac{C_z^2}{\pi\lambda}$$

$$\Delta\alpha = \frac{C_z}{\pi\lambda} \quad /\text{rad}/$$

$\Delta\alpha$ - kąt odchylenia strumienia spływającego ze skrzydła

Współczynnik oporu indukowanego może być przedstawiony również jako:

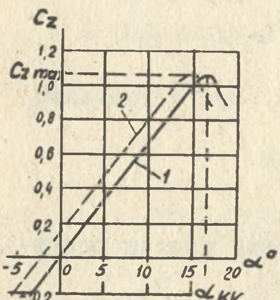
$$C_{xi} = A \cdot C_z^2$$

- gdzie - A - wielkość zależna przy przepływie poddźwiękowym od obrysu skrzydła a przy naddźwiękowym -od liczby M.

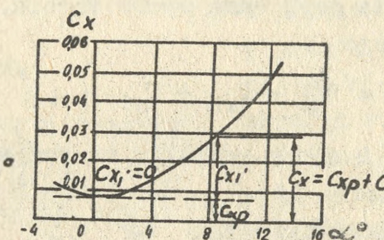
Orientacyjne wartości A dla typowego współczesnego samolotu naddźwiękowego.

M	0,8	1,0	1,2	1,4	1,6	1,8	2,0	2,4	2,8
A	0,21	0,27	0,32	0,36	0,4	0,47	0,52	0,64	0,76

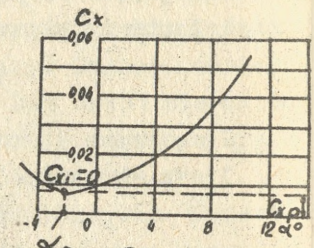
Wykresy współczynników C_z i C_x w funkcji kąta natarcia



Rys.7
$C_z = f_1/\alpha/$
1. profil symetryczny
2. -"- niesymetryczny



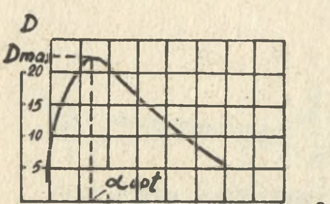
Rys.8
$C_x = f_2/\alpha/$ profilu symtrycznego



Rys.9
$C_x = f_2/\alpha/$ profilu niesymetrycznego

Doskonałość aerodynamiczna skrzydła D

$$D = \frac{P_z}{P_x} = \frac{C_z \frac{\varrho V^2}{2} S}{C_x \frac{\varrho V^2}{2} S} = \frac{C_z}{C_x}$$



Rys.10 $D = f(\alpha)$

- kąt natarcia, przy którym doskonałość osiąga maksymalną wartość nazywa się optymalnym /najwygodniejszym/ kątem natarcia

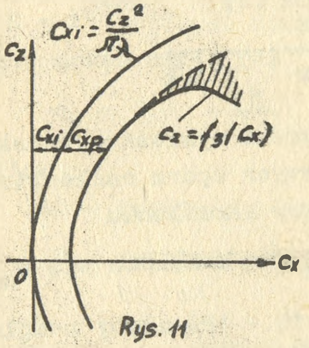
-Dla współczesnych skrzydeł

$\alpha_{opt} = 4 \div 5^{\circ}$

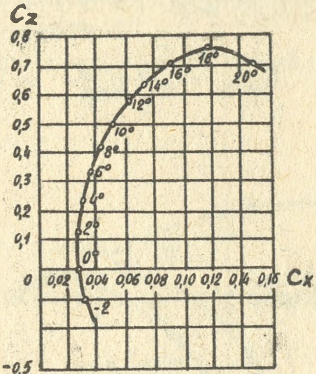
$D_{max} = 20 \div 25$

Biegunowa skrzydła

Zależności $C_z = f_1 /\alpha/$ i $C_x = f_2 /\alpha/$ mogą być ujęte na jednym wykresie w postaci funkcji $C_z = f_3 /C_x/$. Krzywą otrzymaną tą drogą nazywamy biegunową skrzydła.



Rys. 11
Budowa biegunowej



Rys. 12
Biegunowa skrzydła

Na rys. 11 pokazane jest otrzymanie biegunowej poprzez przemieszczenie paraboli oporu indukowanego w prawo o wartości współczynnika oporu profilowego C_{xp}.

Opór i biegunowa samolotu.

Ze względu na małe wartości siły nośnej powstającej na kadłubie i usterzeniu poziomym można przyjąć, że:

$$P_z \text{ samolotu} = P_{z\,skrzydła}$$

$$C_{z\ sam} = C_{z\ skrz}$$

- Opór samolotu jest sumą oporu skrzydła jako powierzchni nośnej oraz oporu szkodliwego powierzchni i elementów nienośnych

$$P_{xsam} = P_{x\ skrz} + P_{x\ szkodliwy}$$

$$C_{x\ sam} = C_x\ skrz + C_{x\ szk}$$

Współczynnik oporu szkodliwego można określić:

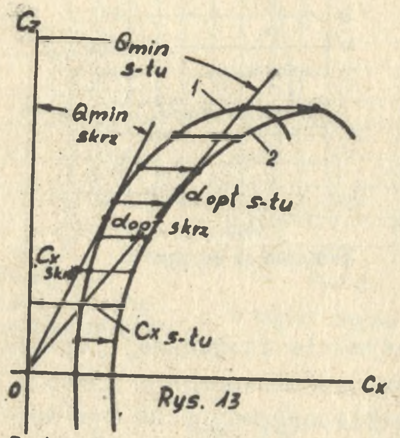
$$C_{x\ szk} = 1{,}03\ \frac{C_{xk} \cdot S_k + C_{x\ ust} \cdot S_{ust} + C_{x\ podw} \cdot S_{podw} + \ldots}{S_{skrzydła}}$$

gdzie: 1,03 - współczynnik liczbowy, uwzględniający opór drobnych elementów, jak: anteny, stanowiska broni pokładowej itp.

S_{ust} - powierzchnia usterzenia

S_k, S_{pod} - powierzchnia poprzecznych przekrojów kadłuba, podwozia itp.

$$D_{sam} = \frac{C_{z\ sam}}{C_{x\ sam}} = \frac{C_{z\ skrz}}{C_{x\ skrz} + C_{x\ szk}}$$



Rys. 13

Budowa biegunowej samolotu
1. biegunowa skrzydła
2. biegunowa samolotu

- Oprócz wymienionych składowych oporu całkowitego przy określaniu C_x sam zwiększa się $C_{x\ szk}$ o 10 - 12% ażeby uwzględnić opór interferencyjny.

Aerodynamika dużych prędkości

Prędkość dźwięku w gazach a:

$$a = \sqrt{\frac{dp}{d\rho}}$$

- przy procesie adiabatycznym

$$a = \sqrt{K \frac{p}{\rho}}$$

- gdzie K - wykładnik adiabaty

$$K = \frac{C_p}{C_v}$$

- dla powietrza k = 1,4

- C_p - ciepło właściwe gazu przy stałym ciśnieniu
- C_v - ciepło właściwe przy stałej objętości:
- Z równania stanu gazu

$$\frac{p}{\varrho} = g.RT$$

- gdzie R stała gazowa

$$a = \sqrt{kgRT} = \sqrt{1,4 \cdot 9,81 \cdot 29,27 \cdot T} = 20,1 \cdot \sqrt{T} \ /\frac{m}{sek}/$$

- Do H = 11 km prędkość dźwięku na poszczególnych wysokościach można określić:

$$a_H = 340 - \frac{H}{250} \ /\frac{m}{sek}/$$

- gdzie:

340 - prędkość dźwięku przy ziemi $/\frac{m}{sek}/$

H - wysokość, na której określamy prędkość dźwięku /m/

Liczba M

$$M = \frac{V}{a}$$

do H = 11 km

$$M_H = \frac{V}{340 - \frac{H}{250}}$$

- powyżej 11 km

$$M_H = \frac{V}{295}$$

Równanie Bernoulliego z uwzględnieniem ściśliwości powietrza

$$\frac{V_1^2}{2} + \frac{K}{K-1} \cdot gRT_1 = \frac{V_2^2}{2} + \frac{k}{K-1} \cdot g.RT_2 = const$$

- gdzie: V_1, V_2 - prędkości przepływu w dowolnych przekrojach strumienia

T_1, T_2 - temperatury gazu w tych przekrojach

- podstawiając do tego równania dane liczbowe, otrzymać można: $V^2 + 2000\ T = const$
- podstawiając zaś prędkość dźwięku a:

$$\frac{V^2}{2} + \frac{a^2}{K-1} = const$$

Temperatura i ciśnienie hamowania strumienia

- Przy pomocy równania Bernoulliego można określić temperaturę i wzrost ciśnienia na czołowych powierzchniach ciała, opływanego strumieniem gazu ściśliwego

$$V_\infty^2 + 2000\, T_\infty = V_o^2 + 2000\, T_o$$

V_∞ i T_∞ - prędkość i temperatura gazu w odpowiednio dużej odległości od opływanego ciała

V_o i T_o - prędkość i temperatura w punkcie krytycznym. W punkcie tym $V = 0$, a T_o nazywana jest temperaturą hamowania.

- wówczas:

$$T_o = \frac{2000\, T_\infty + V_\infty^2}{2000} = T_\infty + \frac{V_\infty^2}{2000}$$

- zamieniając prędkość na liczbę Macha będzie:

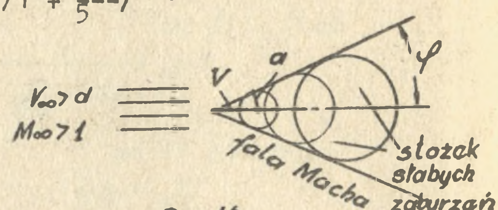
$$T_o = T_\infty \left(1 + \frac{M^2}{5}\right)$$

odpowiednio:

$$p_o = p_\infty \left(1 + \frac{M^2}{5}\right)^{3,5}$$

Sinus kata stożka Macha:

$$\sin \varphi = \frac{a}{V} = \frac{1}{M}$$



Rys. 14
Stożek Macha

Liczba Mkrytyczna

$$M_{kryt} = \frac{V_{kryt}}{a}$$

- gdzie Vkryt - prędkość lotu, przy której występują lokalne prędkości opływu samolotu równe prędkości dźwięku.

Mkryt skrzydła skośnego

$$M_{kryt\,\chi} = \frac{M_{kryt}}{\sqrt{\cos \chi}}$$

- gdzie Mkryt - krytyczna liczba M skrzydła prostego.

Mkryt dowolnego profilu można określić:

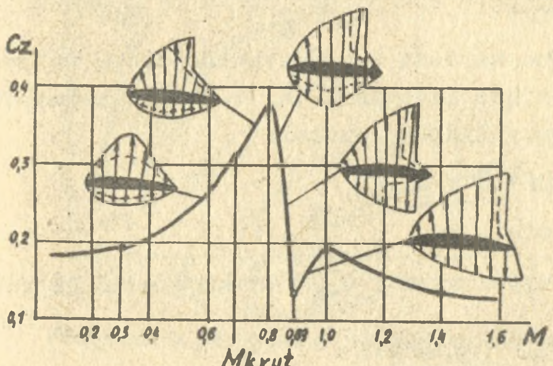
$$M_{kryt} = 1 - 0,7\sqrt{\bar{c}} - 3,2\,\bar{c}\,.\,C_z^{1,5}$$

gdzie $\bar{C}$ - grubość względna profilu.
Współczynniki sił aerodynamicznych dla skrzydła skośnego:

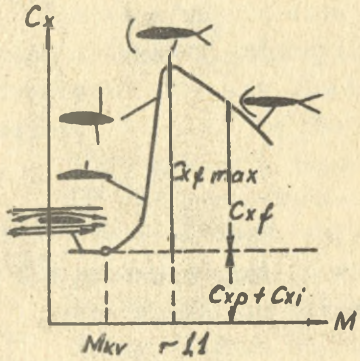
$$C_{z\chi} = C_z \cdot \cos^2 \chi$$
$$C_{x\chi} = C_x \cos^3 \chi + C_{xf} \sin^3 \chi$$

-gdzie: C_z, C_x - współczynniki sił aerodynamicznych dla skrzydła prostego
χ - kąt skosu skrzydła

Wpływ ściśliwości powietrza na C_z i C_x



Rys. 15
Zależność Cz od liczby M



Rys. 16
Zależność Cx od liczby M

- Do M = 0,3 C_z prawie nie ulega zmianie. W zakresie od M = 0,3 do Mkryt C_z zaczyna intensywnie wzrastać wskutek wpływu ściśliwości powietrza. Rzeczywistą wartość Cz w tym zakresie można obliczyć wg przybliżonego wzoru:

$$Cz_{ściś} = \frac{Cz}{\sqrt{1-M^2}}$$

gdzie Cz - wartość współczynnika siły nośnej bez uwzględnienia ściśliwości powietrza.

- Przy prędkości naddźwiękowej współczynnik Cz cienkiego skrzydła może być określony wg wzoru:

$$Cz_{ściś} = \frac{4\alpha}{\sqrt{M^2-1}}$$

- gdzie α - kąt natarcia w radianach

Można przyjąć, że do Mkryt współczynnik C_x nie ulega zmianie, natomiast po przekroczeniu Mkryt występuje nowy rodzaj oporu - opór falowy i wzór na C_x będzie:

$$Cx = Cxp + Cxi + Cxf$$

- gdzie Cxf - współczynnik oporu falowego, który może być określony:

$$C_{xf} = /C_{xf}/ \max . \; / \; 0,25\, x + 1,2\, x^2 - 0,45\, x^5/$$

- gdzie: $X = \frac{M - Mkryt}{1 - Mkryt}$

$/C_{xf}/ \max$ - maksymalna wartość współczynnika oporu falowego odpowiadająca liczbie $M \cong 1$, którą można określić przybliżonym wzorem:

$$/C_{xf}/_{max} = 0,0081\, \bar{C} - 0,017$$

- gdzie $\bar{C}$ podstawia się w %

Przy liczbach $M > 1$ współczynnik C_{xf} cienkich profili może być określony:

$$C_{xf} \cong \frac{4/\alpha^2 + \bar{c}^2/}{\sqrt{M^2 - 1}}$$

- gdzie α - kąt natarcia w radianach
$\bar{C}$ - względna grubość profilu

Fale uderzeniowe

Fala uderzeniowa w powietrzu - jest to fala zagęszczenia /wywołana szybkim ruchem ciała, wybuchem itp/, na której występuje gwałtowny wzrost gęstości, ciśnienia i temperatury.

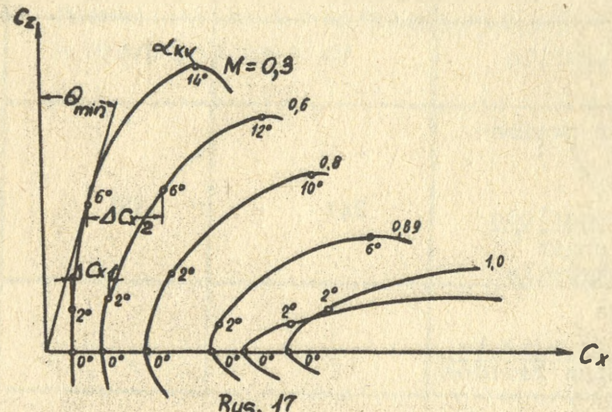
- Fala uderzeniowa prosta - jest prostopadła do kierunku strumienia powietrza. Przechodząc przez taką falę prędkość strumienia powietrza naddźwiękowa wyhamowywana jest do prędkości poddźwiękowej:

$$a^2 = V_1 \cdot V_2$$

- gdzie: V_1 - prędkość przed falą
V_2 - " za falą

- Skośna fala uderzeniowa usytuowana jest pod kątem ostrym do kierunku strumienia.
  Przechodząc przez tę falę strumień powietrza zmienia swój kierunek i zmniejsza prędkość, ale może pozostać naddźwiękowym.

<u>Biegunowa skrzydła przy różnych liczbach M</u>



Rys. 17
Biegunowe skrzydła przy różnych liczbach M

Nachylenie kolejnych biegunowych w prawo oznacza zwiększenie kąta Θ min. a więc doskonałość skrzydła przy wzroście liczby M maleje, jak rów - nież wynika z tego, że przyrost współczynnika oporu wskutek wpływu ściśliwości na dużych kątach natarcia jest większy niż na małych,

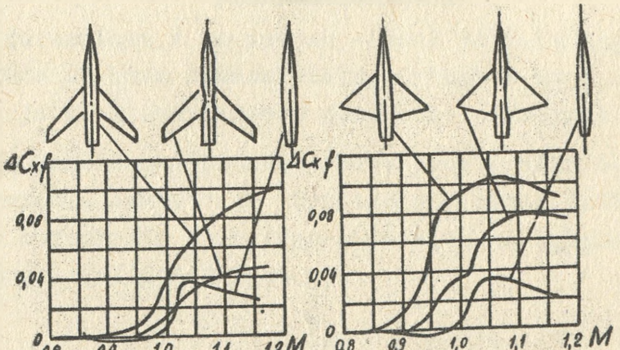
$$|\Delta C_x|_2 > |\Delta C_x|_1$$

Podstawowe charakterystyki poddźwiękowego i naddźwiękowego myśliwca na podstawie danych statystycznych.

Charakterystyki	Myśliwce poddźwiękowe	Myśliwce naddźwiękowe
Wydłużenie skrzydła $/ \lambda = \frac{l^2}{S} /$	6	2,4
Względna grubość profilu $\bar{c}$ /%/	10	4
Obciążenie na metr kwadratowy skrzydła $/\frac{kG}{m^2}/$ $\bar{p} = \frac{Q}{S} = \frac{\text{ciężar samolotu}}{\text{powierzchnia skrzydła}}$	244	400
Wydłużenie kadłuba $\lambda_k = \frac{l_k}{D_k} = \frac{\text{długość kadłuba}}{\text{średnica kadłuba}}$	8	13

Reguła pól

Minimalny opór aparatu latającego będzie miał miejsce przy zachowaniu zasady rozłożenia poprzecznych przekrojów aparatu wzdłuż jego osi podłużnej zgodnie z analogicznym rozłożeniem przekrojów poprzecznych ciała obrotowego.



Rys 18

Przyrost Cxf przy różnych połączeniach skrzydła z kadłubem w porównaniu z kadłubem izolowanym

WYKORZYSTANA LITERATURA:

1. **"Aeromiechanika"** D.M. Prickier i W.A. Turjan Oborongiz - 1960 r.
2. "Awiacionnyj sprawocznik" Wojennoje izdiatielstwo Ministierstwa Oborony SSSR - 1964 r.
3. "Aerodinamika i konstrukcja samolieta" S.J. Zonszajn - Oborongiz 1955 r.

Podstawowe wzory i definicje z mechaniki lotu

Przyjęte oznaczenia

A - wielkość określająca współczynnik oporu indukowanego, zależna przy przepływie poddźwiękowym od obrysu skrzydła a przy naddźwiękowym od liczby M

a/ $\frac{m}{sek}$, $\frac{km}{godz.}$/ - prędkość dźwięku

a_H /$\frac{m}{sek}$; $\frac{km}{godz.}$/ - prędkość dźwięku na danej wysokości H

C_R - współczynnik całkowitej /wypadkowej/ siły aerodynamicznej;

C_x - współczynnik oporu

C_{xf} - współczynnik oporu falowego

$C_{x_{min}}$ - minimalna wartość współczynnika oporu

$C_{x\ ścis}$ -współczynnik oporu z uwzględnieniem ściśliwości powietrza

C_z - współczynnik siły nośnej

$C_{z\ bezp}$ - bezpieczna wartość współczynnika siły nośnej /ze względu na przeciągnięcie/

$C_{z\ max}$ - maksymalna wartość współczynnika siły nośnej

$C_{z\ oder}$ - wartości współczynnika siły nośnej w momencie oderwania samolotu od ziemi

$C_{z\ opt}$ - wartość współczynnika siły nośnej przy optymalnym kącie natarcia

$C_{z\ post}$ - wartość współczynnika siły nośnej przy postojowym kącie natarcia

D - doskonałość aerodynamiczna samolotu

D_{max} - maksymalna wartość doskonałości

$D_{ściś}$ - doskonałość aerodynamiczna z uwzględnieniem ściśliwości powietrza

$D_{śr}$ - średnia wartość doskonałości

F /kG/ - suma geometryczna /wypadkowa/ wszystkich sił zewnętrznych, przyłożonych do aparatu latającego

F_n/kG/ - składowa siły F, prostopadła do toru lotu

F_t/kG/ - składowa siły F, styczna do toru lotu

f	- współczynnik tarcia
G_{sek}	- wydatek sekundowy produktów spalania
$g/\frac{m}{sek^2}/$	- przyspieszenie siły ciężkości
$H/m;km/$	- wysokość lotu
$J_{śr}/\frac{m}{sek^2}/$	- średnie przyspieszenie
j_t "	- przyspieszenie styczne
j_x "	- przyspieszenie działające wzdłuż osi X,
$j_{x\ śr}$	- średnie przyspieszenie działające wzdłuż osi X
k	- współczynnik uwzględniający wpływ strumienia zaśmigłowego
$L_{dob}/m/$	- długość dobiegu
L_{rozb} "	- długość rozbiegu
L_{szyb} "	- zasięg lotu szybowego
$L_{szyb\ max}/m/$	- maksymalny zasięg lotu szybowego
$L_{powietrz.}$	- odcinek długości startu i lądowania przebywany przez samolot w powietrzu.
l /m/	- odległość dodatkowego ciężaru od środka ciężkości aparatu latającego
M	- liczba Macha
M_{dop}	- dopuszczalna liczba Macha
$M_x/kGm/$	- moment względem osi X
M_y "	- moment względem osi Y
M_z "	- " " " Z
$m = \frac{Q}{g}$	- masa
$m_{sek}/\frac{kG}{g \times sek}/$	- masa sekundowa produktów spalania
N /KM/	- moc zespołu napędowego
N_e "	- moc efektywna zespołu napędowego
N_p "	- moc potrzebna
N_{po} "	- moc potrzebna do lotu na H = 0
N_{pH} "	- moc potrzebna do lotu na wysokości H
$N_{pl.poz}/KM/$	- moc potrzebna do lotu poziomego
$N_{p\ wznosz}/KM/$	- moc potrzebna do wznoszenia
N_r /KM/	- moc rozporządzalna

N_{reak} /KM/ - moc uzyskiwana dodatkowo w silniku turbośmigłowym dzięki sile odrzutu gazów

N_w " - moc na wale silnika

n - przeciężenie /stosunek przyspieszenia działającego do przyspieszenia siły ciężkości/

n_{max} - maksymalne obroty silnika

n_{nom} - nominalne obroty "

n_x - przeciążenie działające wzdłuż osi X

n_y - " " " " Y

n_z - " " " " Z

n_{zgr} - " graniczne wzdłuż osi Z

n_{zr} - " rozporządzalne wzdłuż osi Z

n_{zsp} - " . wzdłuż osi Z w czasie wykonywania spirali

$n_{zśr}$ - średnie przeciążenie wzdłuż osi Z

P /kG/ - siła ciągu

P_{max}/kG/ - maksymalna siła ciągu

P_{nom} " - nominalna siła ciągu

$P_{dośr.}$/kG/ - siła dośrodkowa

P_p - ciąg potrzebny

$P_{p\ min}$ " - minimalna wartość ciągu potrzebnego

P_{po} " - ciąg potrzebny do lotu na H = 0

P_{pH} " - ciąg potrzebny do lotu na wys. H

P_r " - " rozporządzalny

$P_{reak.}$ " - siła odrzutu gazów w silniku turbośmigłowym

P_{st} " - ciąg statyczny

P_x " - siła oporu

P_y " - siła boczna

P_z/kG/ " - siła nośna

P_{zo} " - siła nośna w locie poziomym przy danym kącie natarcia

P_{zs} " - składowa pionowa siły ciągu w momencie oderwania

p /$\frac{kG}{m^2}$, mm Hg/ - ciśnienie powietrza lub obciążenie jednostkowe skrzydła

p_a /$\frac{kG}{m^2}$/ - ciśnienie gazów w przekroju wylotowym dyszy

p_c - stosunek siły ciągu silnika do ciężaru samolotu

p_{gr} /$\frac{kG}{m^2}$;mm Hg/ - ciśnienie powietrza na granicznej wysokości ustalonego lotu poziomego z daną liczbą M

p_H /$\frac{kG}{m^2}$;mm Hg/ - ciśnienie powietrza na wysokości H

Q /kG/ - ciężar

q_{dop} /$\frac{kG}{m^2}$/ - dopuszczalne ciśnienie dynamiczne

R /kG/ - całkowita /wypadkowa/ siła aerodynamiczna

r /m/ - promień

r_{min} /m/ - promień minimalny

$r_{śr}$ /m/ - promień średni

S /m^2/ - powierzchnia skrzydła

S_a /m^2/ - powierzchnia przekroju wylotowego dyszy silnika

T /^oK/ - temperatura bezwzględna

t /sek/ - czas

t_{SCA} /m/ - średnia cięciwa aerodynamiczna

t_z /sek/ - czas wykonywania zakrętu

U /$\frac{m}{sek}$/ - prędkość wiatru

V /$\frac{m}{sek}$;$\frac{km}{godz.}$/ - prędkość lotu /strumienia/

V_{max} /$\frac{m}{sek.}$;$\frac{km}{godz.}$/ - prędkość maksymalna

$V_{max\ dop}$ /$\frac{m}{sek.}$:$\frac{km}{godz.}$/ - dopuszczalna prędkość maksymalna

V_{ek} /$\frac{m}{sek}$: $\frac{km}{godz}$/ - prędkość ekonomiczna

V_H /$\frac{m}{sek.}$; $\frac{km}{godz.}$/ - prędkość lotu na wysokości H

$V_{końc}$ /$\frac{m}{sek}$;$\frac{km}{godz.}$/ - prędkość końcowa

V_{min} /$\frac{m}{sek.}$; $\frac{km}{godz.}$/ - prędkość minimalna

V_{nurk} /$\frac{m}{sek.}$; $\frac{km}{godz.}$/ - prędkość nurkowania

V_o /$\frac{m}{sek}$; $\frac{km}{godz}$/ - prędkość lotu na wysokości H = 0

$V_{ląd}$ /$\frac{m}{sek}$; $\frac{km}{godz}$/ - prędkość lądowania

V_{oder}/$\frac{m}{sek}$; $\frac{km}{godz}$/ - prędkość oderwania

$V_{opt.}$/$\frac{m}{sek}$; $\frac{km}{godz}$/ - prędkość optymalna

$V_{śr}$ /$\frac{m}{sek}$; $\frac{km}{godz}$/ - prędkość średnia

V_{pocz}/$\frac{m}{sek}$; $\frac{km}{godz}$/ - prędkość początkowa

V_{szyb}/$\frac{m}{sek}$; $\frac{km}{godz}$/ - prędkość szybowania

V_{wzn}/$\frac{m}{sek}$; $\frac{km}{godz}$/ - prędkość po torze wznoszenia

V_z /$\frac{m}{sek}$/ - pionowa prędkość wznoszenia

$V_{z\ prost}$/$\frac{m}{sek}$/ - pionowa prędkość wznoszenia po torze prostoliniowym

$V_{z\ sp}$/$\frac{m}{sek}$/ - pionowa prędkość wznoszenia po torze spiralnym

$V_{z\ śr}$ /$\frac{m}{sek}$/ - średnia wartość pionowej prędkości wznoszenia

W /$\frac{m}{sek}$/ - prędkość wypływu produktów spalania

X /kG/ - siły działające na aparat latający wzdłuż osi OX

X_o/m/ - odległość środka ciężkości aparatu latającego od początku średniej cięciwy aerodynamicznej

$\overline{X}_o$/%/ - położenie środka ciężkości w procentach t_{SCA}

Y /kG/ - siły działające na aparat latający wzdłuż osi Oy

Z /kG/ - siły działające na aparat latający wzdłuż osi Oz

α° - kąt natarcia

α°_{ek} - ekonomiczny kąt natarcia

α°_{opt} - optymalny kąt natarcia

β° - kąt ślizgu

γ° - kąt przechyłu

γ_b° - graniczny kąt przechyłu na pułapie bojowym

Δ - gęstość względna powietrza

ΔH/m, km/ - przyrost wysokości lotu

ΔL/m, km/ - przyrost drogi przy rozpędzaniu /hamowaniu/

ΔN/KM/ - nadmiar mocy

ΔP/kG/ - nadmiar ciągu

Δt/sek/ - przyrost czasu

ΔV /$\frac{m}{sek}$; $\frac{km}{godz}$/ - przyrost prędkości

$\overline{\Delta x}_0$ /%/ - przemieszczenie środka ciężkości aparatu latającego wzdłuż osi x

$\eta_{ś}$ - współczynnik sprawności śmigła

θ^o - kąt wznoszenia /zniżania/

$\theta^o_{śr}$ - średnia wartość kąta wznoszenia /zniżania/

μ - współczynnik uwzględniający wpływ ziemi

ϱ /$\frac{kG\ sek^2}{m^4}$/ - gęstość powietrza

ϱ_H/$\frac{kG\ sek^2}{m^4}$/ - gęstość powietrza na wysokości H

ϱ_0/$\frac{kG\ sek^2}{m^4}$/ - gęstość powietrza na wysokości H = 0

φ° - kąt zakrętu

ω /$\frac{rad}{sek}$; $\frac{stop}{sek}$/ - prędkość kątowa

PODSTAWOWE WZORY I DEFINICJE Z MECHANIKI LOTU

Charakterystyki zespołów napędowych

Silnik tłokowy

- Moc silnika po uwzględnieniu wszystkich strat, a więc moc na wale korbowym zużywana na napęd śmigła nazywa się mocą efektywną Ne.
- Dla współczesnych silników Ne = 3000 KM i więcej.
- Moc zużywana przez śmigło do wytworzenia siły ciągu przy maksymalnym zakresie pracy silnika, po uwzględnieniu współczynnika sprawności śmigła, nazywana jest mocą rozporządzalną Nr

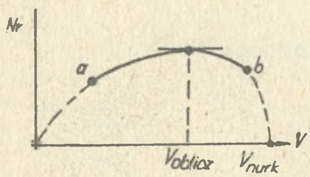
$$Nr = Ne \cdot \eta_ś$$

- gdzie: $\eta_ś$ - współczynnik sprawności śmigła

P r z y k ł a d :

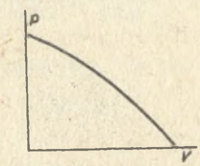
Ne = 2000 KM

$\eta_ś$ = 0,8 Nr = 2000 . 0,8 = 1600 KM

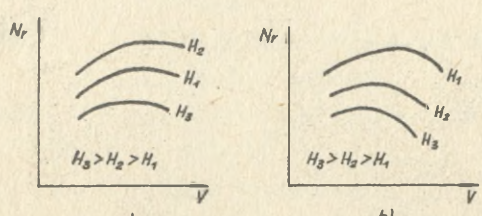


Rys. 1. Charakterystyka prędkościowa zespołu śmigło-silnikowego.

- Istotne znaczenie ma tutaj odcinek a-b krzywej odpowiadający rozwijanym prędkościom lotu.



Rys. 2. Charakterystyka P=f(V) zespołu śmigło-silnikowego



Rys. 3. Charakterystyki wysokościowe zespołu śmigło-silnikowego
a) silnik wysokościowy
b) - " - niewysokościowy.

Silnik odrzutowy

Ciąg rozwijany przez zespół napędowy nazywany jest ciągiem rozporządzalnym - Pr.

- Dla silnika rakietowego:

$$Pr = m_{sek} \cdot w + /p_a - p_H/S_a = \frac{G_{sek}}{g} \cdot w + /p_a - p_H/ \cdot S_a$$

gdzie: p_a - ciśnienie gazów w przekroju wylotowym dyszy

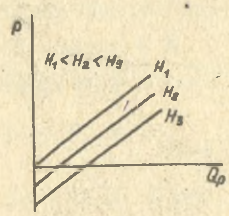
p_H - ciśnienie atmosferyczne na danej wysokości

G_{sek} - wydatek sekundowy produktów spalania

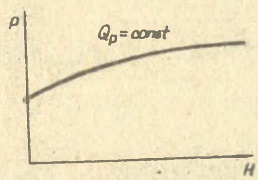
g - przyspieszenie siły ciężkości

w - prędkość wypływu produktów spalania

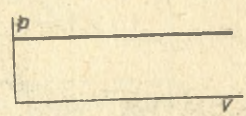
S_a - powierzchnia przekroju wylotowego dyszy



Rys.4 Charakterystyka dławiona silnika rakietowego



Rys.5 Charakterystyka wysokościowa silnika rakietowego.



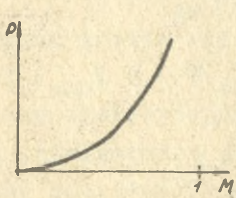
Rys.6 Charakterystyka $P=f(V)$ silnika rakietowego na paliwo ciekłe.

Dla silnika strumieniowego

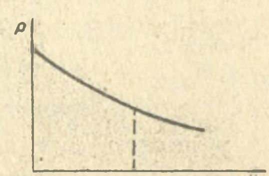
$$P_r = \frac{G_{sek}}{g} \cdot /W - V/ + /p_a - p_H/ \cdot S_a \qquad /KG/$$

- gdzie:

V - prędkość napływu powietrza do silnika - prędkość lotu.



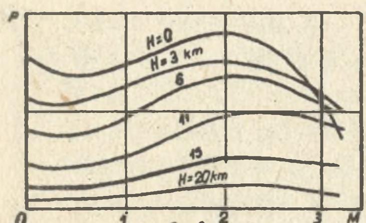
Rys.7 Charakterystyka prędkościowa silnika strumieniowego.



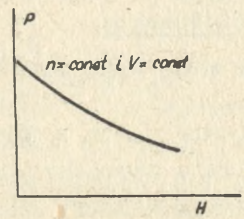
Rys.8 Charakterystyka wysokościowa silnika strumieniowego.

Dla silnika turboodrzutowego.

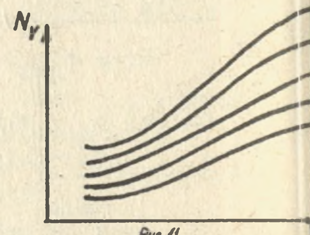
$$P_r = \frac{G_{sek}}{g} /W - V/ + /p_a - p_H/S_a \quad /kG/$$



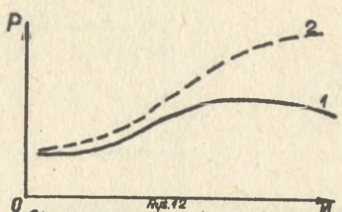
Rys.9
Typowa charakterystyka silnika turboodrzutowego.



Rys.10. Charakterystyka wysokościowa silnika turboodrzutowego.



Rys.11
Moc rozporządzalna silnika turboodrzutowego.



Rys.12
Charakterystyka silnika turboodrzutowego z dopalaniem

- gdzie: - 1 - praca silnika bez dopalania
2 - praca silnika z dopalaniem.

Podstawowe zakresy pracy silnika turboodrzutowego:

- Maksymalny - charakteryzujący się maksymalnymi obrotami turbiny - n_{max} i maksymalną siłą ciągu - P_{max}. Na tym zakresie silnik może pracować bez przerwy nie więcej niż 5 ÷ 10 min. i wykorzystywany jest w czasie startu, wznoszenia oraz krótkotrwałego zwiększania prędkości lotu.
- Nominalny - któremu odpowiadają nominalne obroty turbiny $n_{nom} < n_{max}$ i nominalna siła ciągu $P_{nom} \cong 0,9\ P_{max}$. Ten zakres wykorzystywany jest w czasie długotrwałego wznoszenia i w czasie lotu z prędkością bliską maksymalnej, przy tym czas pracy silnika na tym zakresie ograniczony jest do 30 min.
- Przelotowy - przy którym obroty turbiny odpowiadają sile ciągu $P = 0,75 - 0,8\ P_{max}$. Na tym zakresie silnik może

pracować nieprzerwanie w czasie całego ustalonego dlań okresu pracy. Wykorzystywany jest zazwyczaj przy długotrwałych lotach.

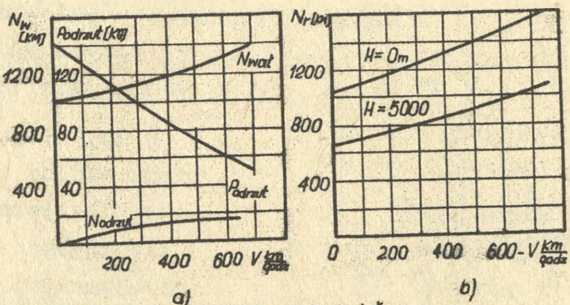
- Małego gazu - odpowiadający najmniejszej ilości obrotów turbiny, przy których silnik pracuje statecznie, rozwijając przy tym siłę ciągu $P = 0{,}05$ do $0{,}07\ P_{max}$.

Podstawowe charakterystyki

- Charakterystyką prędkościową silnika turboodrzutowego nazywa się zależność siły ciągu P od prędkości lotu V na określonej wysokości H i przy stałej ilości obrotów turbiny.
- Charakterystyką wysokościową silnika turboodrzutowego nazywa się zależność siły ciągu P od wysokości H przy stałej liczbie obrotów turbiny i stałej prędkości lotu.
- Dla silnika turbośmigłowego.

$$N = N_w + N_{reak} = N_w + \frac{P_{reak} \cdot V}{75} \quad /KM/$$

- gdzie: N - moc silnika
  - N_w - moc na wale silnika
  - N_{reak} - moc uzyskiwana dodatkowo dzięki sile odrzutu gazów
  - P_{reak} - siła odrzutu



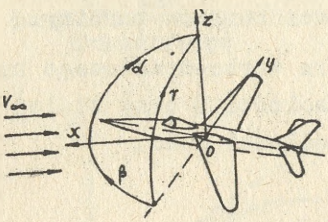
Rys. 13. N=f(V) silnika turbośmigłowego.
a) - moc na wale, ciąg i moc odrzutu
b) - sumaryczna moc silnika.

PROSTOLINIOWY LOT SAMOLOTU

Układy współrzędnych

W aerodynamice stosuje się zazwyczaj dwa układy współrzędnych: prędkościowy i związany. W obu układach za początek współrzędnych przyjmuje się środek ciężkości samolotu.

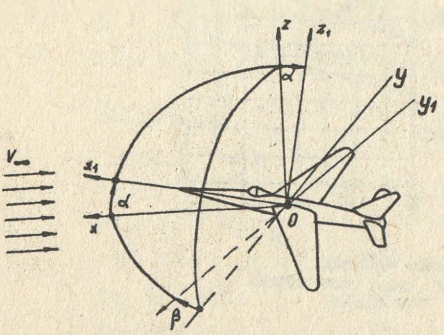
W układzie prędkościowym osie są skierowane:



Rys.14. Prędkościowy układ współrzędnych.

- oś Ox /prędkości/ skierowana jest równolegle do napływającego strumienia w kierunku prędkości lotu,
- oś Oy /boczna/ skierowana jest w stronę płata skrzydła i prostopadła do płaszczyzny xOz,
- oś Oz /siły nośnej/ leży w płaszczyźnie symetrii samolotu i jest prostopadła do osi Ox,
- układ ten jest wykorzystywany przy rozpatrywaniu rodzaju ruchów samolotu.

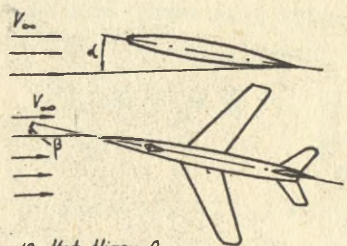
W układzie związanym:



Rys.15 Związany układ współrzędnych.

- Oś Ox_1 /podłużna/ skierowana do przodu pokrywa się z podłużną osią kadłuba samolotu.
- Oś Oy_1 /poprzeczna/ skierowana wzdłuż rozpiętości skrzydła prostopadła do płaszczyzny x_1Oy_1 /płaszczyzny symetrii samolotu/.
- Oś OZ_1 /pionowa albo normalna/ leżąca w płaszczyźnie symetrii samolotu i prostopadła do osi Ox_1.

Ten układ współrzędnych wykorzystywany jest przy rozpatrywaniu stateczności i sterowności oraz przy obliczeniach wytrzymałościowych samolotu.
Działające na samolot siły aerodynamiczne zależą od usytuowania samolotu w strumieniu powietrznym. Położenie samolotu w strumieniu określa się przy pomocy kąta ślizgu β i kąta natarcia α.


Rys.16 Kąt ślizgu β i kąt natarcia skrzydła α

- Kątem ślizgu β nazywa się kąt między wektorem prędkości napływającego strumienia i osią podłużną samolotu.

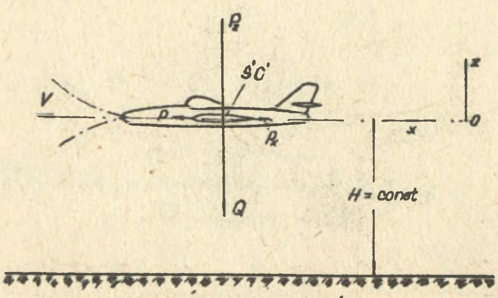
- Kątem natarcia α nazywamy kąt między podłużną osią samolotu i rzutem wektora prędkości napływającego strumienia na płaszczyznę symetrii samolotu.

Przy skrzydle bez zwichrzenia geometrycznego i aerodynamicznego, przy kącie ślizgu równym zeru, kątem natarcia nazywa się kąt między cięciwą profilu i wektorem prędkości napływającego strumienia.

LOT POZIOMY

Równania ruchu

W locie poziomym na samolot działają: siła nośna P_z, siła oporu P_x, siła ciężaru Q i siła ciągu P.



Rys.17 Lot poziomy, układ sił.

W ruchu ustalonym warunek równowagi sił, działających na samolot jako swobodne ciało wg zasad mechaniki określa się sześcioma równaniami:

- sumą rzutów wszystkich sił na osie współrzędnych/trzy równania/i sumą momentu wszystkich sił względem tych osi /trzy równania/,

- rozpatrując równowagę w prędkościowym układzie współrzędnych:

$$\Sigma X = 0 \quad \Sigma Y = 0 \quad \Sigma Z = 0$$

$$\Sigma M_x = 0 \quad \Sigma M_y = 0 \quad \Sigma M_z = 0$$

Uwzględniając, że rozpatrywany jest ruch środka ciężkości w płaszczyźnie pionowej to równania:

$$\Sigma Y = 0; \ \Sigma M_x = 0 : \ \Sigma M_y = 0; \ \Sigma M_z = 0$$

odpadają i pozostają tylko:

$$\Sigma X = 0 \qquad \Sigma Z = 0$$

$$P - P_x = 0 \qquad P_z - Q = 0$$

$$P = P_x \qquad P_z = Q$$

/Warunek V=const/ /Warunek H = const/

Wychodząc z:

$$P_z = Q = c_z \frac{\varrho V^2}{2} S$$

- prędkość lotu poziomego:

$$V = \sqrt{\frac{2Q}{c_z \varrho S}} \ /\frac{m}{sek}/ = 3,6 \sqrt{\frac{2Q}{c_z \varrho S}} \ /\frac{km}{godz.}/$$

stosując jednostkowe obciążenie skrzydła:

$$p = \frac{Q}{S} / \frac{kG}{m^2}/$$

$$V = \sqrt{\frac{2p}{c_z \varrho}}$$

Przykład:

$c_z = 1,0$

$p = 325 \ \frac{kG}{m^2}$

$\varrho_H = 0,0317 \ \frac{kGsek^2}{m^4}$ $\qquad V = 3,6 \sqrt{\frac{2 \cdot 325}{1,0 \cdot 0,0317}} = 520 \ \frac{km}{godz.}$

/H = 12000 m/

Prędkość minimalna lotu poziomego:

$$V_{min} = \sqrt{\frac{2Q}{c_{z\ max} \cdot \varrho \cdot S}} = \sqrt{\frac{2p}{c_{z\ max} \cdot \varrho}}$$

Jest to prędkość lotu przy krytycznym kącie natarcia.

Zależność prędkości potrzebnej do lotu poziomego przy danym kącie natarcia od wysokości:

$$\frac{V_H}{V} = \frac{\sqrt{\frac{2Q}{c_z \cdot S \cdot \varrho_H}}}{\sqrt{\frac{2Q}{c_z \cdot S \cdot \varrho_0}}} = \sqrt{\frac{\varrho_0}{\varrho_H}}$$

$$V_H = V_0\sqrt{\frac{\varrho_0}{\varrho_H}} = V_0\sqrt{\frac{1}{\Delta}} = \frac{V_0}{\sqrt{\Delta}}$$

gdzie: V_H - prędkość na danej wysokości

V_0 - prędkość na H = 0

Δ - stosunek ciśnień $\frac{\varrho_H}{\varrho_0}$

Dla współczesnych samolotów odrzutowych $V_{min} = 250 \div 300 \frac{km}{godz.}$

Przykład:

$V_0 = 300 \frac{km}{godz.}$

$\sqrt{\frac{\varrho_0}{\varrho_H}} = 1,4$ $\qquad V_H = 300 \cdot 1,4 = 420 \frac{km}{godz.}$

/H = 6,5 km/

Prędkość najwygodniejsza /optymalna/

Prędkość lotu poziomego, przy której ciąg potrzebny ma minimalną wartość:

$$V_{opt} = \sqrt{\frac{2Q}{c_{z\ opt} \cdot \varrho \cdot S}}$$

Ciąg potrzebny do lotu poziomego

$$P_p = c_x\ \varrho\frac{V^2}{2} \cdot S = \frac{Q}{D}$$

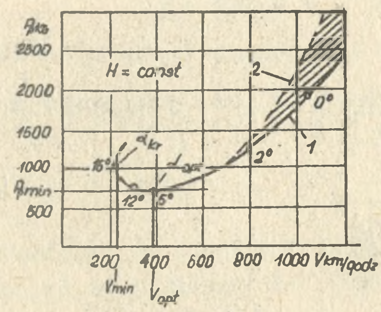
Gdzie: P_p - ciąg potrzebny

D - doskonałość samolotu

Przykład:

Q = 2000 kG

D = 10 $\qquad P_p = \frac{2000}{10} = 200$ kG



Rys.18. Zależność $P_p = f(V)$

Minimalna wartość ciągu potrzebnego do lotu poziomego:

$$P_{p\ min} = \frac{Q}{D_{max}}$$

Gdzie: D_{max} - maksymalna doskonałość samolotu

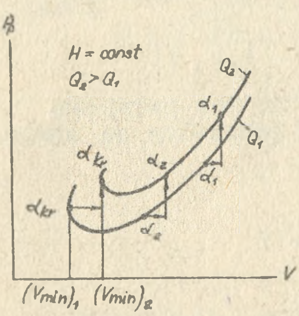
1 - Ciąg potrzebny bez uwzględnienia ściśliwości

2 - Ciąg potrzebny z uwzględnieniem ściśliwości.

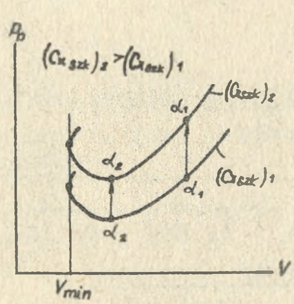
$$D_{ściś} = \frac{c_z}{c_{x\ ściś}}$$

Gdzie: $D_{ściś}$ - doskonałość samolotu z uwzględnieniem ściśliwości

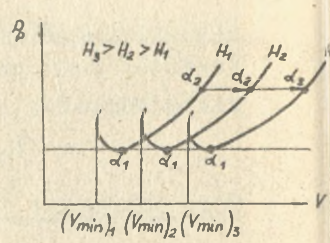
$$c_{x\ ściś} = c_x + c_{xf}$$



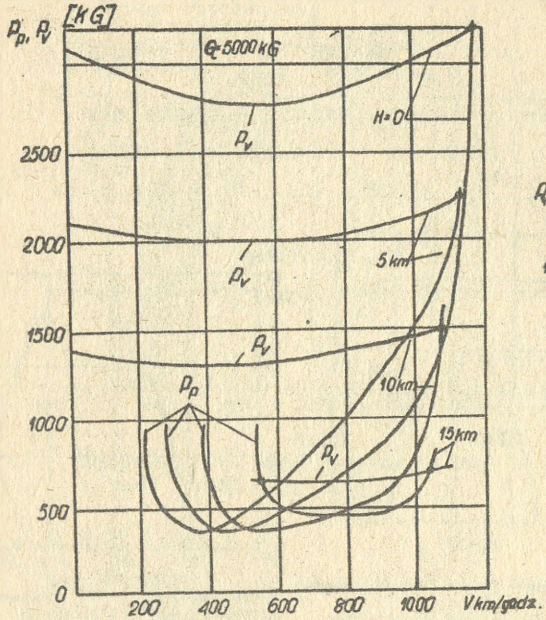
Rys.19. Zależność $P_p = f(V)$ przy różnych ciężarach samolotu



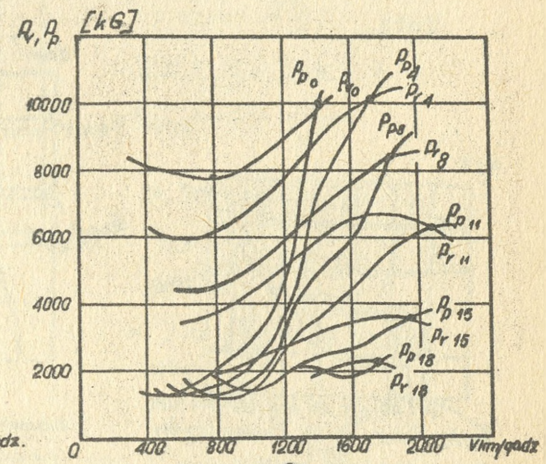
Rys.20 Zależność $P_p = f(V)$ przy różnych współczynnikach oporu szkodliwego samolotu.



Rys.21. Zależność $P_p = f(V)$ na różnych wysokościach lotu.



Rys. 22.
Krzywe ciągu potrzebnego i rozporządzalnego turboodrzutowego samolotu poddźwiękowego.

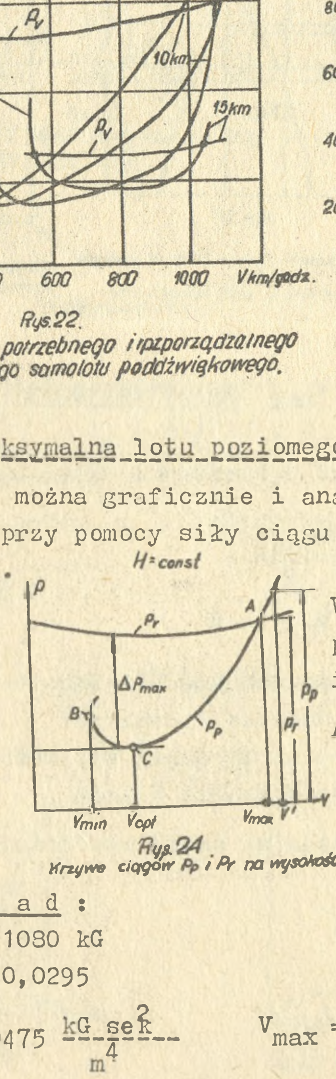


Rys. 23
Krzywe ciągu potrzebnego i rozporządzalnego turboodrzutowego samolotu naddźwiękowego.

Prędkość maksymalna lotu poziomego.

Określić ją można graficznie i analitycznie.

Graficznie przy pomocy siły ciągu potrzebnego P_p i rozporządzalnego P_r.



Rys. 24
Krzywe ciągów P_p i P_r na wysokości H.

V_{max} odpowiada punktowi A przecięcia krzywych $P_p = f/V/$ i $P_r = f_1/V/$

Analitycznie wg wzoru:

$$V_{max} = \sqrt{\frac{2P_r}{c_{x\,min} \cdot S \cdot \varrho}}$$

Przykład:

$P_r = 1080$ kG

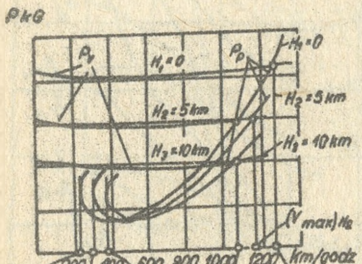
$c_x = 0{,}0295$

$\varrho_H = 0{,}0475 \ \frac{kG\ sek^2}{m^4}$

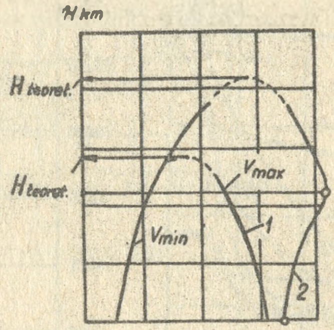
$$V_{max} = 3{,}6\sqrt{\frac{2 \cdot 1080}{0{,}0295 \cdot 0{,}0475}} = 895 \ \frac{km}{godz.}$$

/H = 9 km/
S = 25 m^2

Znając minimalne i maksymalne prędkości samolotu można określić zakres prędkości lotu poziomego w funkcji wysokości lotu.

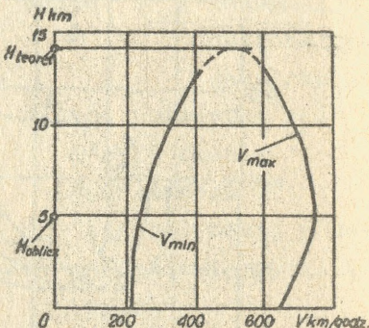


Rys. 25.
Krzywe Pr i Pp dla różnych wysokości



Rys. 26

Zależność Vmin i Vmax od wysokości lotu
1 samolotu około dźwiękowego
1 " naddźwiękowego.



Rys. 27
Zależność Vmax i Vmin od wysokości, samolotu z silnikiem tłokowym.

Wysokość, na której $V_{min} = V_{max}$ jest pułapem teoretycznym samolotu.

Prędkość maksymalna może być ograniczona ciśnieniem dynamicznym i liczbą M.

$$V_{max\ dop} = \sqrt{\frac{2q_{dop}}{\varrho}}$$

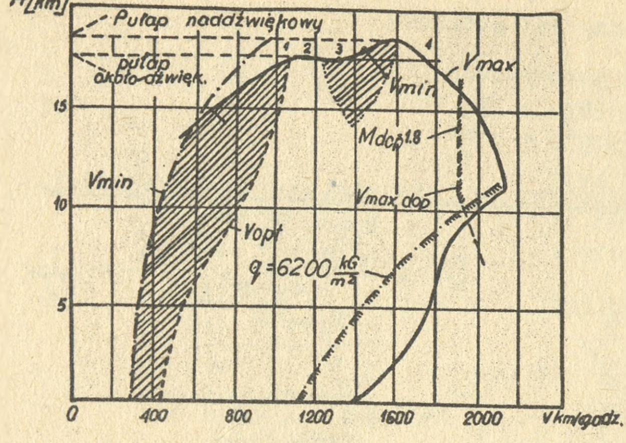
$$V_{max\ dop} = M_{dop} \cdot a$$

Gdzie: q_{dop} - największe dopuszczalne dla danego aparatu latającego ciśnienie dynamiczne

ϱ - gęstość powietrza na danej wysokości

M_{dop} - największa dopuszczalna M lotu

a - prędkość dźwięku na danej wysokości.



Rys.28.
Charakterystyka prędkościowa samolotu naddźwiękowego

Typowa zależność prędkości lotu poziomego przedstawiona jest na rysunku .28.

Przykład :

$$q_{dop}=6250\ \frac{kG}{m^2}$$

$$\rho=0{,}125\ \frac{kG\,sek^2}{m^4}$$

$$V_{max}dop=\sqrt{\frac{2\cdot 6250}{0{,}125}}=$$

$$=316\ \frac{m}{sek}=1140\frac{km}{godz.}$$

Przykład :

$M_{dop}=2{,}0$

$a_H=295\ \frac{m}{sek}$ $\quad V_{max\ dop}=2{,}0\cdot 295=590\ \frac{m}{sek}=2125\ \frac{km}{godz.}$

/H = 11 km/

Moc potrzebna do lotu poziomego

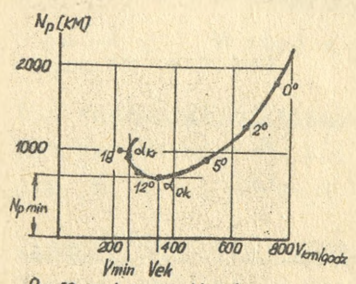
$$N_p=\frac{P_p\cdot V}{75}\ /KM/=\frac{c_x\cdot\frac{\rho V^2}{2}S\cdot V}{75}=\frac{1}{150}\ c_x\cdot\rho\cdot SV^3$$

Gdzie: N_p - moc potrzebna w koniach mechanicznych.

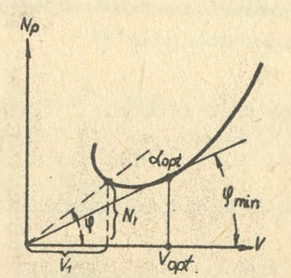
Przykład :

$P_p=250$ kG

$V=100\ \frac{m}{sek}$ $\quad N_p=\frac{250\cdot 100}{75}=333$ KM



Rys.29 zależność $N_p=f(V)$



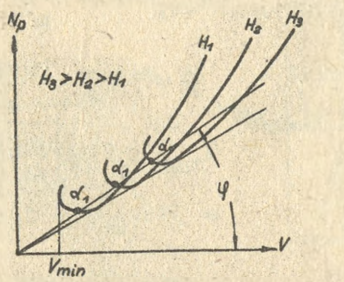
Rys.30. Określenie α_{opt} i V_{opt}

α_{ek} - ekonomiczny kąt natarcia

V_{ek} - prędkość ekonomiczna

$$tg\,\varphi = \frac{N_p}{V} = \frac{P_p}{75}$$

Zależność mocy potrzebnej do lotu poziomego od wysokości.



Rys.31. Zależność $N_p = f(v)$ na różnych wysokościach lotu.

$$\frac{N_{pH}}{N_{po}} = \frac{\frac{P_{pH} \cdot V_H}{75}}{\frac{P_{po} \cdot V_o}{75}} = \frac{V_H}{V_o} = \frac{1}{\sqrt{\Delta}}$$

$$N_{pH} = \frac{N_{po}}{\sqrt{\Delta}}$$

Przykład:

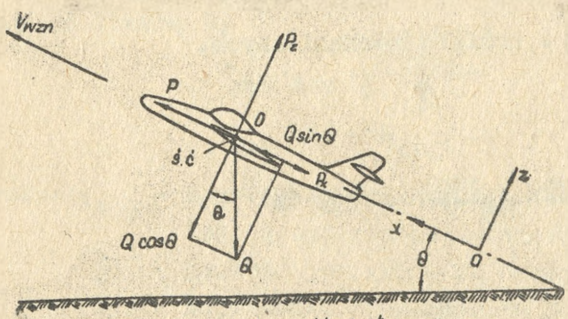
$N_{po} = 600$ KM

$\frac{1}{\sqrt{\Delta}} = 0{,}655 \quad N_{pH} = \frac{600}{0{,}665} = 917$ KM

/H = 8 km/

WZNOSZENIE SAMOLOTU

Wznoszeniem nazywa się ruch samolotu po prostej, ze stałą prędkością i pod stałym kątem względem linii horyzontu.



Rys.32. Wznoszenie samolotu, układ sił.

Równania ruchu.

$\Sigma X = 0$

$P - P_x - Q\sin\theta = 0$

$P = P_x + Q\sin\theta$

$\Sigma Z = 0$

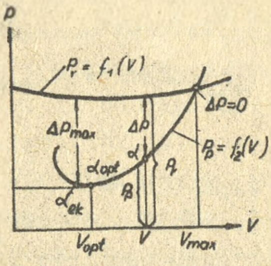
$P_z - Q\cos\theta = 0$

$P_z = Q\cos\theta$

A więc do wznoszenia potrzebny jest nadmiar ciągu:

$$\Delta P = Q\sin\theta = P_r - P_p$$

Gdzie: θ - kąt wznoszenia.



Rys.33. Zależności $P_r = f_1(V)$ i $P_p = f_2(V)$ dla samolotu turboodrzutowego

P_r - ciąg rozporządzalny-maksymalna wartość ciągu jaką daje zespół napędowy przy danej prędkości i wysokości lotu.

Kąt wznoszenia

$$\sin \theta = \frac{P_r - P_p}{Q} = \frac{\Delta P}{Q}$$

Przykład:

$P_r = 900$ kG
$P_p = 535$ kG
$Q = 7300$ kG

$$\sin \theta = \frac{900-535}{7300} = 0{,}05$$

$$\theta = 2^{\circ}52'$$

Maksymalny kąt wznoszenia odpowiada w przybliżeniu ekonomicznemu kątowi natarcia αek, przy którym wartość ΔP jest maksymalna.

Prędkość lotu po torze wznoszenia.

$$V_{wzn} = \sqrt{\frac{2Q\cos\theta}{c_z \varrho S}} = V \cdot \sqrt{\cos\theta}$$

Gdzie: - V_{wzn} - prędkość po torze
V - prędkość lotu poziomego przy tym samym kącie natarcia.

Przykład:

$V = 200 \frac{km}{godz.}$

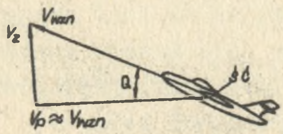
$\theta = 10^{\circ}$ $\quad V_{wzn} = 200 \cdot 0{,}992 = 198{,}4 \frac{km}{godz.}$

$\sqrt{\cos 10^{\circ}} = 0{,}992$

Dla samolotów o średniej wartości nadmiaru ciągu, przy którym kąt wznoszenia θ nie przekracza 25-35°, można przyjmować $\cos \theta = 1$ i wówczas $V_{wzn} = V_{lotu\ poz.}$

Pionowa prędkość wznoszenia

Pionową prędkością wznoszenia V_z nazywa się odcinek pionowy przebywany przez samolot w ciągu jednej sekundy



Rys.34. Określenie pionowej prędkości wznoszenia.

- zgodnie z poprzednim założeniem $V_{wzn} = V_{lotu\ poz.}$

$$V_z = V_{wzn} \sin\Theta = V_{lotu\ poz.} \cdot \sin\Theta$$

- przy czym $\sin\Theta$ nie może być przyrównany do zera.

Wykorzystując równanie ruchu na wznoszeniu

$$V_z = \frac{/P_r - P_p/V}{Q} = \frac{\Delta P \cdot V}{Q} = V \cdot n_x \quad /\frac{m}{sek}/$$

<u>P r z y k ł a d</u> :

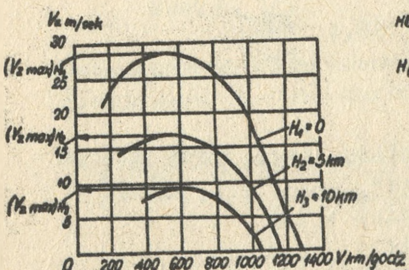
$\Delta P = 816$ kG

$V = 92 \frac{m}{sek}$ $\qquad V_z = \frac{816 \cdot 92}{7500} \cong 10 \frac{m}{sek}$

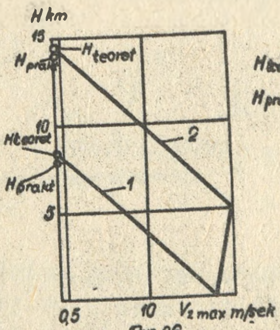
$Q = 7500$ kG

Maksymalna prędkość pionowa wznoszenia ma miejsce przy maksymalnej wartości iloczynu $/\Delta P \cdot V/$, przy kącie natarcia nieco większym od α ek.

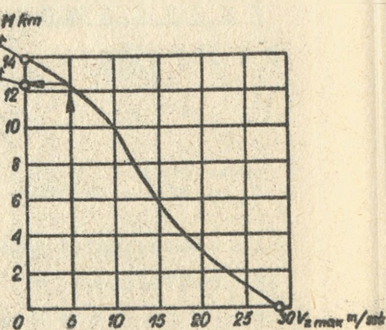
Zazwyczaj sporządza się wykresy $V_z = \varphi/V/$ i $V_{z\ max} = \varphi_1/H/$



Rys.35
Krzywe zależności V_z od prędkości lotu na różnych wysokościach.



Rys.36
Zależność $V_{z\,max} = \varphi(H)$
1. Samolot z silnikiem tłokowym niewysokościowym.
2. Samolot z silnikiem tłokowym wysokościowym.



Rys. 37
Krzywa zależności $V_{z\,max}$ samolotu turboodrzutowego od wysokości lotu.

Pułap samolotu

Wysokość, na której pionowa prędkość wznoszenia równa się zeru jest pułapem teoretycznym samolotu.
Wysokość ta w warunkach normalnego wznoszenia jest nieosiągalna, bowiem do osiągnięcia jej potrzebny jest nieskończenie długi czas lotu ze względu na zmniejszenie się V_z.
Pułapem praktycznym nazywa się wysokość, na której pionowa prędkość wznoszenia wynosi 5 $\frac{m}{sek}$ dla samolotu odrzutowego i 0,5 $\frac{m}{sek}$ samolotu tłokowego. Wysokość tę obecnie nazywa się również pułapem statycznym w odróżnieniu od dynamicznego.
Współczesne samoloty naddźwiękowe są w stanie osiągać wysokości znacznie większe od pułapu praktycznego i teoretycznego wykorzystując w tym celu energię kinetyczną jaką dysponują w związku z dużymi prędkościami lotu. Tak powstało pojęcie pułapu dynamicznego samolotu.
Przyrost wysokości jaką można osiągnąć kosztem jego energii kinetycznej można określić ze wzoru:

$$\Delta H = \frac{V^2 pocz - V^2 końc}{20} \quad /m/$$

Gdzie: V_{pocz} i $V_{końc}$ - prędkości: początkowa i końcowa lotu samolotu w m/sek.
Największa wysokość dynamiczna, w momencie wzniesienia się na którą prędkość aparatu latającego jest równa minimalnej, nazywa się pułapem dynamicznym.
W celu wzniesienia się na pułap dynamiczny należy wykonać górkę z zakresu V_{max} na wysokości, leżącej poniżej statycznego pułapu naddźwiękowego o kilka tysięcy metrów.
Lot poziomy i zakręty w płaszczyźnie poziomej na wysokościach dynamicznych można wykonywać tylko ze stałym zmniejszeniem prędkości.

Przykład:

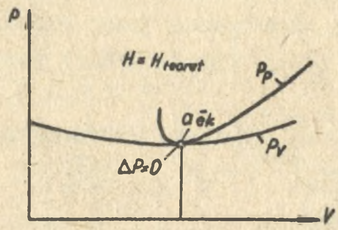
$V_{pocz} = 1800 \frac{km}{godz.} = 500 \frac{m}{sek.}$

$V_{końc} = 720 \frac{km}{godz.} = 200 \frac{m}{sek.}$

$$\Delta H = \frac{500^2 - 200^2}{20} = 10500 \text{ m}$$

Bojowy pułap samolotu, jest to największa wysokość, na której można wykonywać zakręty ustalone z przechyłem nie mniejszym niż określony kąt przechyłu γ_b. Pułap bojowy jest mniejszy od statycznego o wielkość ΔH, która może być określona dla samolotu z silnikami przelotowymi-odrzutowymi przy pomocy tablicy:

γ_b°	15	20	30	45	60
ΔH /m/	200	400	900	2200	4400



Rys. 38
Usytuowanie krzywych P_v i P_p na pułapie teoretycznym.

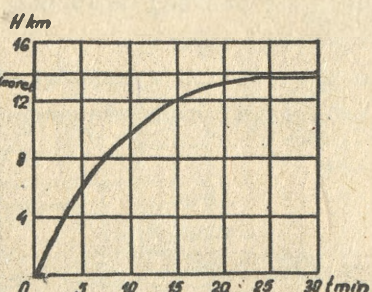
Czas osiągnięcia przez samolot dowolnej wysokości lotu określić można przy pomocy wykresu zwanego barogramem wznoszenia $H = f\,/t/$.

Ponieważ prędkość pionowego wznoszenia zmienia się z wysokością należy dzielić wysokości wznoszenia na elementarne odcinki, na których prędkość wznoszenia może być założona jako stała. Wówczas:

$$dt = \frac{dH}{V_{z\ śr}} = \frac{1}{V_{z\ śr}} \cdot dH$$

Gdzie: $V_{z\ śr}$ - średnia wartość prędkości pionowego wznoszenia na danym elementarnym odcinku wysokości.

$$t = \int_0^H \frac{1}{V_{z\ śr}} \cdot dH$$



Rys. 39
Barogram wznoszenia

Zazwyczaj całkowanie tego wyrażenia przeprowadza się metodą graficzną.

Przy mniejszej dokładności obliczeń można korzystać ze wzoru:

$$\Delta t = \frac{\Delta H}{V_{z\ śr}}$$

Moc potrzebna do wznoszenia

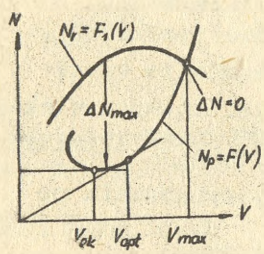
$$N_{p\ wznosz} = \frac{P_{wznosz} \cdot V_{wzn}}{75} = N_{pl.\ poz.} + \frac{Q \cdot V_z}{75}$$

a nadmiar mocy:

$$\Delta N = N_{p\ wzn} - N_{p\ l.poz.} = \frac{Q \cdot V_z}{75}$$

Stąd prędkość pionowego wznoszenia:

$$V_z = \frac{75 \cdot \Delta N}{Q} \quad /\frac{m}{sek}/$$



Rys. 40. Zależność N_p i N_r od prędkości lotu.

Przykład:

$\Delta N = 1085$ KM

$Q = 6500$ kG

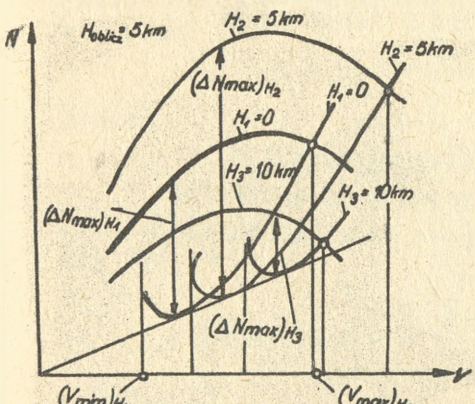
$$V_z = \frac{75 \cdot 1085}{6500} = 12{,}5\ \frac{m}{sek}$$

Uwzględniając, że:

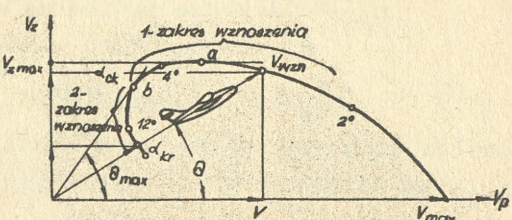
$$V_z = \frac{\Delta P \cdot V}{Q} = \frac{75 \cdot \Delta N}{Q}$$

Nadmiar mocy można określić:

$$\Delta N = \frac{\Delta P \cdot V}{75} \quad /KM/$$



Rys. 41 Krzywe N_r i N_p samolotu z silnikiem tłokowym wysokościowym.



Rys. 42 Biegunowa prędkość wznoszenia.

Ustalone wznoszenie po torze spiralnym

W tym wypadku prędkość wznoszenia jest mniejsza niż przy wznoszeniu ze stałym kursem, ponieważ w tym wypadku potrzebne jest większe przeciążenie n_z, a więc będzie odpowiednio mniejsze przeciążenie n_x. Prędkość wznoszenia można tu określić wg wzoru:

$$V_{z\ sp} = V_{z\ prost} \frac{n^2_{z\ gr} - n^2_{z\ sp}}{n^2_{z\ gr} - 1}$$

albo:

$$V_{z\ sp} = V_{z\ prost} - \frac{A \cdot \frac{Q}{S} - a}{0{,}7 \cdot p \cdot M} /n^2_{z\ sp} - 1/$$

Gdzie: $V_{z\ sp}$, $V_{z\ prost}$ - odpowiednio pionowe prędkości ustalonego wznoszenia po torze spiralnym i prostoliniowym na zakresie maksymalnym pracy silnika

$n_{z\ sp}$ - przeciążenie przy wznoszeniu po torze spiralnym

A - wykładnik indukcyjności

a - prędkość dźwięku

$n_{z\ gr}$ - przeciążenie graniczne w danych warunkach lotu. Jego wielkość można określić z zależności:

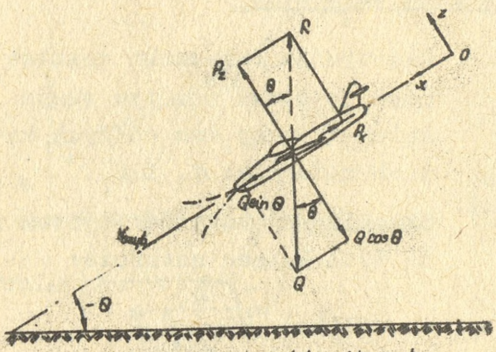
$$n_{z\ gr} = \frac{p}{p_{gr}}$$

Gdzie: p - ciśnienie powietrza na danej wysokości

p_{gr} - ciśnienie powietrza na granicznej wysokości ustalonego lotu poziomego z daną liczbą M.

Lot szybowy

Szybowaniem nazywa się ruch samolotu ze stałą prędkością i kątem zniżania Θ , przy ciągu równym zeru.



Ryc. 43. Szybowanie samolotu, układ sił.

Równania ruchu

$\Sigma X = 0$

$Q \sin\Theta - P_x = 0$

$P_x = Q \sin\Theta$

$\Sigma Z = 0$

$P_z - Q \cos\Theta = 0$

$P_z = Q \cos\Theta$

Prędkość szybowania

$$V_{szyb} = V_{l.poz} \sqrt{\cos\Theta}$$

Ponieważ kąt szybowania może być znacznie większy od kąta wznoszenia, przy szybowaniu $\cos\Theta$ nie można przyrównywać do jedności. Prędkość lotu szybowego można również określić ze wzoru:

$$Q = c_R \, \varrho \frac{V_{szyb}^2}{2} S$$

Stąd:

$$V_{szyb} = \sqrt{\frac{2Q}{c_R \varrho S}} \quad / \frac{m}{sek} /$$

P r z y k ł a d :

$Q = 890$ kG

$c_R = 0,8$

$\varrho_o = 0,125 \frac{kGsek^2}{m^4}$

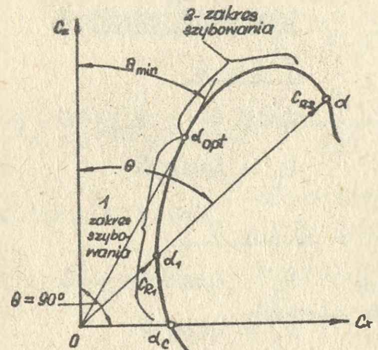
$S = 33 \; m^2$

$$V_{szyb} = \sqrt{\frac{2 \cdot 890}{0,8 \cdot 0,125 \cdot 33}} = 23 \frac{m}{sek} = 83 \frac{km}{godz}.$$

Z układu sił działających na samolot wynika:

$$\mathrm{ctg}\,\Theta = \frac{Q \cos\Theta}{Q \sin\Theta} = \frac{P_z}{P_x} = D$$

Dwa zakresy lotu szybowego



Rys.44.
Dwa zakresy szybowania

Jak wynika z rysunku samolot może szybować pod tym samym kątem θ przy dwu różnych kątach natarcia: α_1 i α_2.
Określając prędkość szybowania na tych kątach natarcia:

$$V_{szyb\ 1} = \sqrt{\frac{2Q}{c_{R1}\ \varrho\ S}}$$

$$V_{szyb\ 2} = \sqrt{\frac{2Q}{c_{R2}\ \varrho\ S}}$$

Ponieważ:

$$c_{R\ 2} > c_{R\ 1}$$

to:

$$V_{szyb\ 2} < V_{szyb\ 1}$$

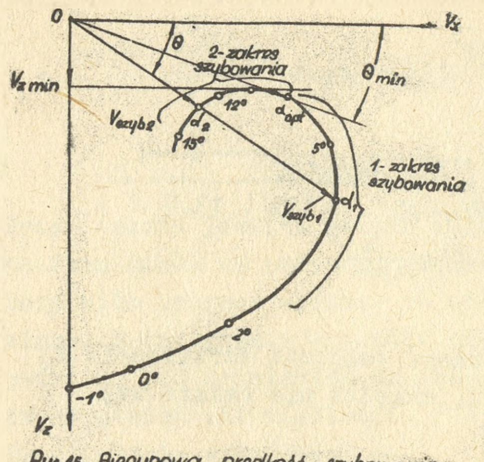
1-szy zakres szybowania - na małych kątach natarcia z dużymi prędkościami. Na tym zakresie samolot jest stateczny i sterowany.

2-gi zakres szybowania - na dużych kątach natarcia z małymi prędkościami. Na tym zakresie samolot jest mało stateczny i sterowny.

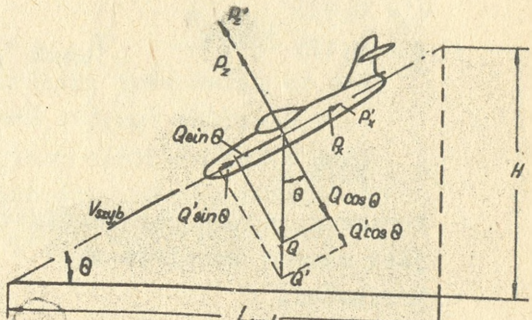
Zasięg lotu szybowego

Zasięgiem szybowania L_{szyb} nazywa się odległość mierzoną w płaszczyźnie poziomej, będącą rzutem drogi szybowania:

$$L_{szyb} = H \cdot \text{ctg}\,\theta$$



Rys.45 Biegunowa prędkość szybowania.



Rys.46. Określenie zasięgu szybowania.

Ponieważ: $\operatorname{ctg}\theta = D$

$$L_{szyb} = H \cdot D$$

a zasięg maksymalny:

$$L_{szyb_{max}} = H \cdot D_{max}$$

P r z y k ł a d :

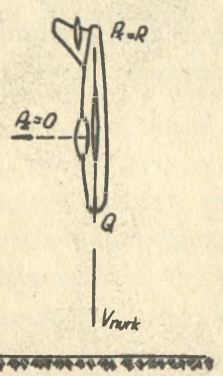
$H = 1000$ m

$D_{max} = 12$

$$L_{szyb\ max} = 1000 \cdot 12 = 12000 \text{ m}$$

Lot nurkowy

Nurkowaniem nazywa się szczególny przypadek szybowania, a mianowicie szybowanie z kątami $\theta = 60\text{-}90^{o}$.



Rys.47. Nurkowanie pionowe.

Ponieważ P_z a więc i $c_z = 0$, do określenia prędkości lotu nurkowego wykorzystuje się zależność: /przy kącie nurkowania równym 90^{o}/

$$P_x = c_x \frac{\rho V^2_{nurk}}{2} S \text{ - stąd:}$$

$$V_{nurk} = \sqrt{\frac{2Q}{c_x \cdot \rho S}}$$

Przykład:

$Q = 800$ kG

$c_x = 0{,}035$

$\varsigma = 0{,}125 \ \frac{kGsek^2}{m^4}$ $\qquad V_{nurk} = \sqrt{\frac{2 \cdot 800}{0{,}035 \cdot 0{,}125 \cdot 13{,}5}} =$

$= 164 \ \frac{m}{sek.}$

$S = 13{,}5 \ m^2$

Ponieważ jednak dla współczesnego samolotu odrzutowego P_x jest zawsze mniejsza od $P + Q$, samolot nie osiąga tej prędkości.

PODSTAWOWE WIADOMOŚCI Z DYNAMIKI LOTU

Charakter ruchu aparatu latającego zależy od wielkości i kierunku siły wypadkowej F, będącej sumą geometryczną wszystkich sił zewnętrznych przyłożonych do aparatu latającego: siły ciężaru, ciągu, sił aerodynamicznych.
Siłę F rozłożyć można na dwie składowe prostopadłe względem siebie: styczną do toru lotu F_t i prostopadłą F_n.

Przyspieszenie styczne będzie:

$$j_t = j_x = g \frac{F_t}{Q}$$

Dodatnie wówczas kiedy F_t skierowana jest zgodnie z kierunkiem lotu, /rozpędzanie/ i ujemne kiedy hamuje ruch.

Pod działaniem siły poprzecznej F_n zachodzi zakrzywienie toru lotu aparatu latającego. Promień krzywizny określa się wg wzoru:

$$r = \frac{V^2}{g \frac{F_n}{Q}}$$

Przy $F_t = 0$ ruch jest jednostajny
przy $F_n = 0$ ruch jest prostoliniowy

Prędkość kątowa promienia wodzącego, określającego tor lotu może być obliczona ze wzoru:

$$\omega = \frac{g \frac{F_n}{Q}}{V} \ /rad/sek/ = \frac{560 \frac{F_n}{Q}}{V} \ /stop/sek/$$

Przeciążenie

Przeciążenie jest to wektor skierowany przeciwnie do siły nacisku ciała na podporę, wielkość którego wskazuje ile razy siła ta jest większa od ciężaru własnego ciała przy ziemi. Przeciążenie w środku ciężkości aparatu latającego powstaje pod działaniem sił zewnętrznych przyłożonych doń, za wyjątkiem sił ciężkości.

Przeciążenia składowe:

n_x - styczne do toru lotu

n_y - prostopadłe do płaszczyzny symetrii aparatu latającego

n_z - prostopadłe do toru lotu aparatu latającego, a leżące w jego płaszczyźnie symetrii.

$$n_x = \frac{P - P_x}{Q} \qquad n_y = \frac{P_y}{Q} \qquad n_z = \frac{P_z}{Q}$$

Gdzie:

P - siła ciągu

P_x - siła oporu

P_y - siła boczna

P_z - siła nośna

Q - ciężar aparatu latającego

Jeśli jednocześnie n_x, n_y i n_z = 0 wówczas ma miejsce "stan nieważkości".

Największe przeciążenie n_z jakie można spowodować w locie z daną prędkością na danej wysokości, odpowiada maksymalnemu wychyleniu steru wysokości /jeśli przy tym nie przekroczony został krytyczny kąt natarcia i nie naruszona została stateczność aparatu latającego/ i nazywa się przeciążeniem rozporządzalnym /$n_{z\ r}$/.

Przeciążenie n_z, przy którym $P_x = P_r$ nazywa się przeciążeniem granicznym /$n_{z\ gr}$/. Przekroczenie $n_{z\ gr}$ prowadzi do zmniejszenia prędkości bądź wysokości /energii mechanicznej aparatu latającego/ i jest niedopuszczalne przy długotrwałych manewrach.

Przy określonej liczbie M wielkość $n_{z\,r}$ jest wprost proporcjonalna do ciśnienia powietrza.
Na wszystkich wysokościach i prędkościach lotu n_{zr} i $n_{z\,gr}$ są odwrotnie proporcjonalne do ciężaru aparatu latającego.

Manewrowość

Manewrowością nazywamy zdolność aparatu latającego do zmiany kierunku, prędkości i wysokości lotu. Manewrowość może być oceniana szeregiem parametrów /czasowych i przestrzennych/ różnych manewrów, jak np. zakrętów, rozpędzania, hamowania itp. Najogólniejszymi parametrami manewrowości są największe rozporządzalne wartości przeciążeń n_z i n_x.

Rozpędzanie i hamowanie w locie

Przyspieszenie rozpędzania /hamowania/

$$j_x = g\,/n_x \pm \sin\Theta\,/$$

gdzie:

n_x - przeciążenie styczne
Θ - kąt wznoszenia /znak "-"/ bądź zniżania /znak "+"/.
W locie poziomym $\Theta = 0$

Przykład:

$\Delta P = 1400$ kG
$Q = 3200$ kG
$\Theta = 0$

$$j_x = g \cdot n_x = g \frac{\Delta P}{Q} = 9{,}81 \frac{1400}{3200} = 4{,}3 \frac{m}{sek^2}$$

Długotrwałość rozpędzania /hamowania/:

$$\Delta t = \frac{\Delta V}{j_{x\,śr}}$$

Droga przy rozpędzaniu /hamowaniu/:

$$\Delta L = V_{śr} \cdot \Delta t$$

gdzie: ΔV - zmiana /przyrost bądź zmniejszenie/ prędkości
$j_{x\,śr}$ - średnie przyspieszenie

Jeśli przyspieszenia na początku i przy końcu manewru różnią się więcej niż 1,5-krotnie, wówczas w obliczeniach manewr należy rozdzielić na dwa lub więcej kolejnych odcinków.

Przykład:

$\Delta P_1 = 1500$ kG

$\Delta P_2 = 1000$ kG

$V_1 = 200 \frac{m}{sek}$

$V_2 = 300 \frac{m}{sek}$

$Q = 5000$ kG

$$j_{x\,1} = 9{,}81 \frac{1500}{5000} = 2{,}94 \frac{m}{sek^2}$$

$$j_{x\,2} = 9{,}81 \frac{1000}{5000} = 1{,}93 \frac{m}{sek^2}$$

$$j_{x\,śr} = \frac{2{,}94 + 1{,}93}{2} = \frac{4{,}97}{2} = 2{,}48 \frac{m}{sek^2}$$

$$\Delta V = 300 - 200 = 100 \frac{m}{sek}$$

$$\Delta t = \frac{100}{2{,}48} \cong 40 \text{ sek}$$

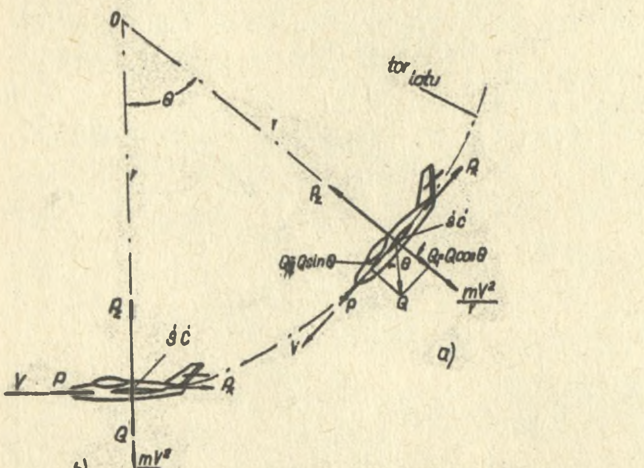
$$V_{śr} = \frac{200 + 300}{2} = 250 \frac{m}{sek}$$

$$\Delta L = 250 \cdot 40 = 10000 \text{ m} = 10 \text{ km}$$

Krzywoliniowy lot samolotu

Zalicza się tutaj takie rodzaje ruchu samolotu jak zakręt, pętla, wprowadzenie i wyprowadzenie z lotu nurkowego itp.
Z mechaniki wiadomo, że rozwiązując dowolne zadania dynamiki można je sprowadzić do zadań statyki po uwzględnieniu sił bezwładności.
Biorąc za przykład wyprowadzenie samolotu z lotu nurkowego, siłami działającymi na samolot będą:

- siła ciężaru samolotu Q
- siła ciągu P
- siła nośna P_z
- siła oporu P_x
- odśrodkowa siła bezwładności $\frac{mV^2}{r}$
- gdzie: m-masa samolotu V-prędkość po torze r-promień krzywizny toru lotu.



Rys.40. Układ sił przy ruchu samolotu po torze krzywoliniowym w płaszczyźnie pionowej.
a) siły działające na samolot na torze krzywoliniowym.
b) siły przy wyprowadzeniu samolotu z lotu krzywoliniowego.

Ażeby zachować stałą wartość promienia krzywizny toru lotu musi zachodzić równość dla położenia "a" samolotu:

$$P_z = Q\cos\Theta + \frac{QV^2}{gr} = Q\left(\cos\Theta + \frac{V^2}{gr}\right)$$

A więc w locie krzywoliniowym przy tym samym kącie natarcia, siła nośna winna być $\left(\cos\Theta + \frac{V^2}{gr}\right)$ razy większa niż w locie poziomym.

W położeniu "b" korzystając z powyższej zależności, ponieważ cos O = 1, będzie:

$$P_z = Q\left(1 + \frac{V^2}{gr}\right)$$

A więc tu siła nośna ma wartość największą.

Przeciążeniem w tym wypadku n_z nazywa się stosunek siły nośnej P_z w locie krzywoliniowym do ciężaru samolotu Q:

$$n_z = \frac{P_z}{Q} = 1 + \frac{V^2}{gr} \quad \text{w punkcie "b"}$$

Ogólnie przyjmując, że $Q = P_{z\,o}$ /siła nośna w locie poziomym przy danym kącie natarcia/ będzie:

$$n_z = \frac{P_z}{P_{z\,o}}$$

W locie poziomym $n_z = 1$.

Praktycznie przeciążenie nie powinno przekroczyć 14 i to bardzo krótkotrwale /ułamek sekundy/ ze względu zarówno na odporność fizjologiczną załogi, jak i wytrzymałość konstrukcji samolotu.

Przeciążenie dodatnie ma miejsce wówczas kiedy siła nośna skierowana jest ku górze /pilot przyciskany jest do fotela siłą odśrodkową/ a ujemne wtedy kiedy siła nośna skierowana jest ku dołowi /względem samolotu/.

Wprowadzenie i wyprowadzenie z lotu nurkowego

Przy wprowadzeniu równania ruchu mają postać:

$$P - Q\sin\Theta = P_x$$

$$Q\cos\Theta - P_z = \frac{mV^2}{2} = P_{dośrod}$$

a promień krzywizny toru wprowadzenia:

$$r = \frac{mV^2}{Q\cos\Theta - P_z} = \frac{V^2}{g/\cos\Theta - n_z/}$$

Przy wyprowadzeniu równania ruchu będą:

$$P - Q\sin\Theta = P_x$$

$$P_z - Q\cos\Theta = \frac{mV^2}{2} = \text{Pdośrod}$$

a promień krzywizny:

$$r = \frac{mV^2}{P_z - Q\cos\Theta} = \frac{V^2}{g/n_z - \cos\Theta/}$$

W czasie ruchu samolotu promien krzywizny ciągle się zmienia. W celu uproszczenia rozwiązania często przyjmuje się, że samolot porusza się po łuku okręgu o $r_{śr} = const$

$$r_{śr} = \frac{V^2_{śr}}{g/n_z - \cos\Theta\ /_{śr}}$$

Jest to jednocześnie ogólny wzór na promień krzywizny toru dowolnego manewru w płaszczyźnie pionowej.
Prędkość kątowa w tym wypadku:

$$\omega = \frac{g/n_z - \cos\Theta/}{V} \quad /\frac{rad}{sek}/$$

Gdzie Θ - kąt nachylenia toru w danym punkcie względem linii horyzontu.
Jeśli samolot znajduje się w położeniu "do góry kołami", znak przed cos Θ należy zamienić na "+".
Jeśli według wzoru ogólnego r i ω uzyskujemy ujemne, oznacza to, że środek krzywizny toru znajduje się od strony dolnej powierzchni skrzydła /na przykład wyjście z górki itp/.
Do obliczenia średnich wartości r i ω, podstawia się średnie wartości V, n_z i cos Θ na rozpatrywanym odcinku manewru, przy czym tor traktuje się jako łuk okręgu, a zmianę wysokości określa się ze wzoru:

$$\Delta H = r_{śr}\ /\cos\Theta_1 - \cos\Theta_2/$$

Gdzie: Θ_1 i Θ_2 - odpowiednio kąty nachylenia toru na początku i przy końcu odcinka.
Tu również znaki przed cos Θ należy zamieniać na odwrotne jeśli w danym punkcie samolot znajduje się w położeniu "do góry kołami".

P r z y k ł a d :

Wprowadzenie samolotu do nurkowania.

$V_1 = 260 \frac{km}{godz.}$

$V_2 = 300 \frac{km}{godz.}$

$\Theta_1 = 0^o$

$\Theta_2 = 40^o$

$n_{z\,1} = 0,4$

$n_{z\,2} = 0$

$$V_{śr} = \frac{260+300}{2} = 280 \frac{km}{godz.}$$

$$\Theta_{śr} = \frac{0+40}{2}\ 20^o / \cos 20^o = 0,94/$$

$$n_{z\,śr} = \frac{0,4+0}{2} = 0,2$$

$$r_{śr} = \frac{280^2}{3,6^2 \cdot 9,81/0,94-0,2/} = 540\ m$$

$$\Delta H = 540/\cos 0^o - \cos 40^o/ = 540\ /1-0,766/ = 126\ m$$

$$\omega = \frac{3,6 \cdot 9,81/0,94-0,2/}{280} = 0,116\ \frac{rad}{sek}$$

Zakręt samolotu

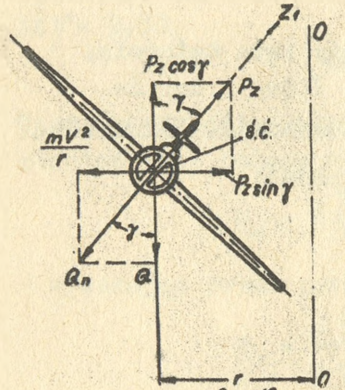
Zakrętem nazywa się ruch samolotu po torze krzywoliniowym w płaszczyźnie poziomej.

Jeżeli w czasie wykonywania zakrętu prędkość samolotu, kąt natarcia i kąt przechyłu nie ulegają zmianie, zakręt taki nazywany jest ustalonym.

W wypadku zmiany tych parametrów w czasie wykonywania zakrętu nazywa się go nieustalonym.

Kąt przechyłu γ jest to kąt zawarty między płaszczyzną symetrii samolotu i płaszczyzną pionową przechodzącą przez oś podłużną samolotu $O_{x\,1}$.

Zakrętem prawidłowym nazywa się zakręt bez ślizgu, przy stałej wysokości, kącie przechyłu γ, promieniu krzywizny r i prędkości po torze V.



Rys. 49
Układ sił przy wykonywaniu zakrętu prawidłowego.

Z rysunku wynika, że w celu zachowania stałej wysokości lotu w zakręcie winna zachodzić równość:

$$Q = P_z \cos \gamma$$

W celu uzyskania stałego promienia zakrętu należy zachować równość:

$$P_z \sin \gamma = \frac{mV^2}{r}$$

Gdzie: $\frac{mV^2}{r}$ - siła odśrodkowa utrzymująca samolot na torze krzywoliniowym o danym promieniu krzywizny.

$P_z \sin \gamma$ - siła dośrodkowa zakrzywiająca tor lotu

Warunkiem stałej prędkości w zakręcie jest równość:

$$P = P_x$$

Wychodząc ze wzoru:

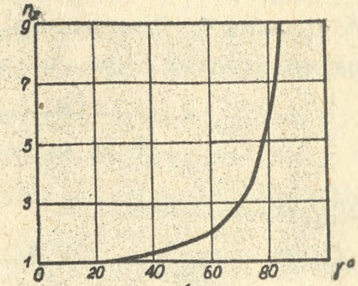
$Q = P_z \cos \gamma$

będzie

$$\frac{Q}{P_z} = \cos \gamma$$

a przeciążenie

$$n_z = \frac{P_z}{Q} = \frac{1}{\cos \gamma}$$



Rys 50 zależność $n_z = f(\gamma)$ w zakręcie prawidłowym.

Przykład:

$\gamma_1 = 30^\circ$ $\quad n_{z\,1} = \frac{1}{\cos 30^\circ} = 1{,}2$

$\gamma_2 = 45^\circ$ $\quad n_{z\,2} = \frac{1}{\cos 45^\circ} = 1{,}4$

$\gamma_3 = 60^\circ$ $\quad n_{z\,3} = \frac{1}{\cos 60^\circ} = 2{,}0$

Dla współczesnych samolotów o dużych prędkościach lotu graniczny kąt przechyłu zakrętu prawidłowego wynosi: $\gamma = 75 \div 80^\circ$ z odpowiadającymi mu przeciążeniami $n_z = 4 \div 6$.

Ograniczenie to wynika z konieczności uzyskiwania dużej wartości siły nośnej P_z w celu zrównoważenia ciężaru samolotu przy dużym przechyle.
Osiągnąć to można albo przez zwiększenie kąta natarcia, albo przez zwiększenie prędkości lotu. Jedno i drugie pociąga jednak za sobą konieczność zwiększania siły ciągu.

Promień zakrętu obliczyć można z zależności:

$$r = \frac{mV^2}{P_z \sin\gamma}$$

- wyrażając przez przeciążenie:

$$r = \frac{V^2}{g\sqrt{n_z^2 - 1}}$$

- wyrażając przez tangens kąta przechyłu;

$$r = \frac{V^2}{g \operatorname{tg}\gamma}$$

- a wyrażając przez obciążenie jednostkowe skrzydła $p = \frac{Q}{S}$ i tzw. c_z bezpieczne równe 0,85 - 0,95 $c_{z\ max}$, minimalny promień zakrętu będzie:

$$r_{min} = \frac{2p}{g\, c_{z\ bezp} \sin\gamma}$$

Prędkość kątowa w zakręcie

$$\omega = \frac{g \operatorname{tg}\gamma}{V} \ /\frac{rad}{sek}/ = \frac{560 \operatorname{tg}\gamma}{V} \ /\frac{stop}{sek}/$$

bądź:

$$= \frac{g\sqrt{n_z^2 - 1}}{V} \ /\frac{rad}{sek}/ = \frac{560\sqrt{n_z^2 - 1}}{V} \ /\frac{stop}{sek}/$$

W zakręcie ustalonym wykonywanym z przeciążeniem granicznym n_{gr} wykorzystywana jest maksymalna siła ciągu.
Czas zakrętu na określony kąt φ, określić można według wzoru:

$$t = \frac{\varphi}{\omega}$$

P r z y k ł a d :

$V = 216 \frac{km}{godz.} = 60 \frac{m}{sek.}$

$\gamma = 28^{\circ}$
$tg\gamma = 0{,}53$

$$r = \frac{60^2}{9{,}81 \cdot 0{,}53} = 692{,}3 \text{ m}$$

$$\omega = \frac{560 \cdot 0{,}53}{60} = 4{,}94^{\circ}/\text{sek}$$

Czas wykonywania pełnego zakrętu /o 360°/ można określić również przy pomocy wyrażenia:

$$t_z = \frac{2\pi r}{V} = 0{,}64 \frac{V}{tg\gamma}$$

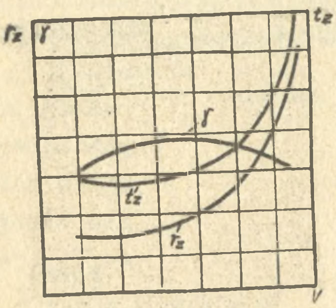
- wyrażając przez przeciążenie

$$t_z = \frac{2\pi V}{g\sqrt{n_z^2-1}}$$

- a w wypadku zakrętu o dowolny kąt φ :

$$t_{z\varphi} = \frac{V \cdot \varphi}{g\sqrt{n_z^2-1}}$$

gdzie: kąt φ bierze się w radianach.
Ze wzrostem wysokości lotu pogarszają się znacznie charakterystyki zakrętu. Na podstawie obliczeń można stwierdzić, że przejście od H = 0 do H = 4000 m powoduje zwiększenie r_{min} w przybliżeniu o 50 ÷ 55% a przy wzroście wysokości do H = 11000 m r_{min} jest w przybliżeniu 3,5 raza większy niż przy ziemi.



Rys. 61. Zależności $r_z = f_1(V)$, $t_z = f_2(V)$ i $\gamma = f_3(V)$

P r z y k ł a d :
r = 6370 m
$V = 900 \frac{km}{godz.} = 250 \frac{m}{sek.}$

$$t_{z\,360^{\circ}} = \frac{2\pi \cdot 6370}{250} = 160 \text{ sek.}$$

S p i r a l a

Przy wykonywaniu spirali w górę /lub w dół/ z kątem przechyłu γ i kątem wznoszenia /zniżania/ θ korzystać można ze wzorów:

$$n_z = \frac{\cos\theta}{\cos\gamma}$$

$$V_z = V\sin\vartheta$$

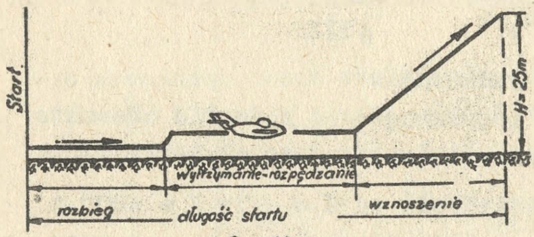
$$r = \frac{V^2\cos\vartheta}{g\,tg\,\gamma}$$

$$\omega = \frac{g\,tg\,\gamma}{V}$$

Gdzie: r - promień rzutu toru lotu na płaszczyznę poziomą
ω - kątowa prędkość obrotu wokół osi pionowej /zmiany kursu/

Start samolotu

Długością startu nazywa się odległość mierzoną na powierzchni ziemi od punktu początku rozbiegu do punktu, w którym samolot po oderwaniu od ziemi osiąga wysokość H = 25 m.



Rys. 52
Start klasyczny

Składa się nań rozbieg, oderwanie, rozpędzanie i wznoszenie.

Prędkość oderwania określić można z zależności:

$$V_{oder} = 4\sqrt{\frac{Q}{c_{zpost} \cdot S \cdot k}} \; /\frac{m}{sek}/$$

gdzie: c_{zpost} - współczynnik siły nośnej przy postojowym kącie natarcia skrzydła /$c_{zpost} \cong 0,9\, c_{zmaks}$/

Rys. 53
Samolot na postoju

K - współczynnik uwzględniający wpływ strumienia zaśmigłowego.

/Dla samolotu tłokowego k = 1,5, dla odrzutowego k = 1,0/.

Przykład:

Q = 5000 kG

S = 25 m^2

k = 1,0

$c_{z\ post} = 0{,}9$

$$V_{oder} = 4\sqrt{\frac{5000}{0{,}9 \cdot 25 \cdot 1}} = 60 \frac{m}{sek} = 216 \frac{km}{godz.}$$

Prędkość oderwana jest zazwyczaj o 10-15% większa od prędkości minimalnej lotu poziomego samolotu.

Długość rozbięgu samolotu w przybliżeniu można określić:

a/ tłokowego:

$$L_{rozb} = 0{,}6 \frac{p}{p_c - f} \ /m/$$

b/ odrzutowego:

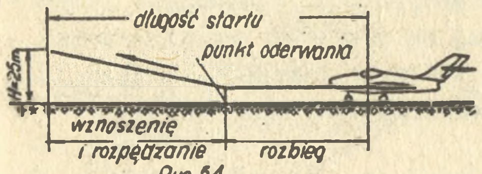
$$L_{rozb} = 0{,}9 \frac{p}{p_c - f} \ /m/$$

Gdzie:

$p = \frac{Q}{S}$ - obciążenie jednostkowe skrzydła/$\frac{kG}{m^2}$/

$p_c = \frac{P}{Q}$ stosunek siły ciągu silnika do ciężaru samolotu /dla samolotów tłokowych/ $P = 1{,}2 - 1{,}4\ N_{start}$

f - współczynnik siły tarcia kół o nawierzchnię /średnio f = 0,05/.



Rys 54.
Start samolotu odrzutowego.

Przykład:

Dla samolotu tłokowego:

Q = 5000 kG

S = 25 m^2

P = 2500 kG

f = 0,05

$$p = \frac{5000}{25} = 200 \frac{kG}{m^2}$$

$$p_c = \frac{2500}{5000} = 0{,}5 \frac{kG \text{ siły ciągu}}{kG \text{ ciężaru}}$$

$$L_{rozb} = 0{,}6 \frac{200}{0{,}5 - 0{,}05} = 266 \text{ m}$$

P r z y k ł a d :

Dla samolotu odrzutowego:

$Q = 5000$ kG $\quad p = \frac{5000}{25} = 200 \frac{kG}{m^2}$

$S = 25\ m^2$

$P = 2500$ kG $\quad p_c = \frac{2500}{5000} = 0,5 \frac{\text{kG siły ciągu}}{\text{kG ciężaru}}$

$f = 0,05$

$$L_{rozb} = 0,9 \frac{200}{0,5 - 0,05} = 400 \text{ m}$$

Inny charakter startu samolotu odrzutowego w porównaniu z samolotem tłokowym wynika z większego stosunku siły ciągu do ciężaru samolotu odrzutowego, co umożliwia rozpędzanie samolotu w czasie wznoszenia.

Po osiągnięciu wysokości H = 25 m samolot odrzutowy osiąga prędkość o około 30% przewyższającą prędkość oderwania.

Podane wyżej zależności można przedstawić i w innej postaci:

- prędkość oderwania:

$$V_{oder} = \sqrt{\frac{2Q}{c_{z\ oder} \cdot S \varrho} / 1 - \frac{P_{zs}}{Q} /}$$

gdzie: Q - ciężar startowy

$c_{z oder}$ - współczynnik siły nośnej w momencie oderwania. Zazwyczaj ze względów bezpieczeństwa $c_{z\ oder}$ jest znacznie mniejszy od $c_{z\ max}$ /z uwzględnieniem wpływu mechanizacji skrzydła/.

P_{zs} - składowa pionowa siły ciągu w momencie oderwania, zależna od siły ciągu i jej nachylenia względem poziomu

- długość rozbiegu:

$$L_r = \frac{/V_{oder} \pm U/^2}{2\ j_{śr}}$$

Gdzie: U - prędkość wiatru /ze znakiem "+" przy wietrze zgodnym z kierunkiem startu, ze znakiem "-" przy wietrze przeciwnym/;

$j_{śr}$ -średnie przyspieszenie w czasie rozbiegu.

Do przybliżonych obliczeń $j_{śr}$ można wykorzystać wzór /przy starcie z nawierzchni betonowej bądź twardej nawierzchni gruntowej/:

$$j_{śr} = g/0,95 \frac{P_{st}}{Q} = 0,06/$$

Gdzie: P_{st} - ciąg statyczny z uwzględnieniem strat na wlocie i wylocie z silnika, które mogą dochodzić do 5-15% ciągu silnika na stanowisku badawczym /próbnym/.

P r z y k ł a d :

$P_{st} = 2500$ kG $\quad J_{śr} = 9{,}81/0{,}95 \frac{2500}{5000} - 0{,}06/ = 4{,}12 \frac{m}{sek^2}$

$Q = 5000$ kG

$V_{oder} = 60 \frac{m}{sek} \qquad L_r = \frac{60^2}{2 \cdot 4{,}12} = 437$ m

Długość powietrznego odcinka w czasie startu /orientacyjnie/.

$$L_{powietrz} = \frac{25 + \frac{V_{śr} \Delta V}{g}}{0{,}85 \frac{P_{st}}{Q} - 0{,}15}$$

Gdzie:

ΔV - przyrost prędkości na powietrznym odcinku

$$V_{śr} = V_{oder} + 0{,}5 \, \Delta V$$

P r z y k ł a d :

$P_{st} = 2500$ kG

$Q = 5000$ kG

$V_{oder} = 60 \frac{m}{sek}$

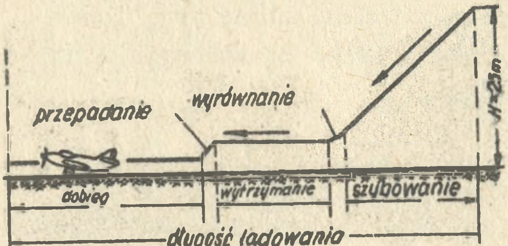
$\Delta V = 30 \frac{m}{sek}$

$$V_{śr} = 60 + 0{,}5 \cdot 30 = 75 \frac{m}{sek}$$

$$L_{powietrz} = \frac{25 + \frac{75 \cdot 30}{9{,}81}}{0{,}85 \frac{2500}{5000} - 0{,}15} = \frac{25 + 230}{0{,}425 - 0{,}15} = 930 \text{ m}$$

Lądowanie samolotu

Na długość lądowania samolotu tłokowego składa się szybowanie z H = 25 m, wyrównanie, wytrzymanie i dobieg aż do zatrzymania się.

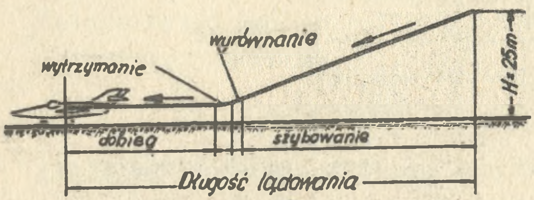


Rys. 55
Lądowanie samolotu tłokowego

Szybowanie kończy się zazwyczaj na H = 7 ÷ 8 m. Prędkość przyziemienia /albo lądowania/ określić można według wzoru:

$$V_{ląd} = \mu \sqrt{\frac{2Q}{c_{z\ max} \cdot \varrho \cdot S}} \ /\frac{m}{sek}/$$

Gdzie: μ - współczynnik, uwzględniający wpływ bliskości ziemi na aerodynamiczne charakterystyki skrzydła samolotu. Zazwyczaj μ = 0,94 ÷ 0,96.



Rys. 56
Lądowanie samolotu odrzutowego.

P r z y k ł a d :

Q = 5000 kG

μ = 0,95

$\varrho = 0,125 \ \frac{kG\ sek^2}{m^4}$

$S = 25\ m^2$

$c_{z\ max} = 1,1$

$$V_{ląd} = 0,95 \sqrt{\frac{5000}{1,1 \cdot 0,125 \cdot 25}} = 38 \ \frac{m}{sek} = 137 \ \frac{km}{godz}.$$

Lądowanie samolotu odrzutowego różni się nieco od tłokowego. Szybowanie kończy się na H = 6 ÷ 8 m i po wyrównaniu na H ≅ 1m samolot jest wytrzymywany na torze lekko nachylonym.
Prędkość lądowania samolotu odrzutowego jest większa od $V_{ląd}$ samolotu tłokowego ze względu na większe obciążenie jednostkowe skrzydła i mniejszy współczynnik siły nośnej odpowiadający prędkości lądowania - dla tłokowego $c_{z\ ląd} \cong 1,5$, dla odrzutowego ze skrzydłem skośnym $c_{z\ ląd} \cong 1,1$.

- Długość dobiegu określić można ze wzoru:

$$L_{dob} = \frac{/V_{ląd} \pm U/^2}{2/j_{śr}/}$$

Gdzie: U - prędkość wiatru /ze znakiem "-" przy wietrze przeciwnym/,

$/j_{śr}/$ - średnia wartość absolutna ujemnego przyspieszenia przy dobiegu.

Przyspieszenie $j_{śr}$ zależy od efektywności hamowania kół oraz zastosowania innych urządzeń hamujących jak np. spadochronów, rewersu ciągu itp.

- Długość odcinka powietrznego w czasie lądowania:

$$L_{pow} = D_{śr} /25 + \frac{V_{śr} \cdot \Delta V}{g}/$$

Gdzie: $D_{śr}$ - średnia wartość doskonałości aerodynamicznej samolotu /z uwzględnieniem wpływu mechanizacji i wypuszczonego podwozia/.

ΔV - różnica między prędkością szybowania i lądowania.

$$V_{śr} = \frac{V_{szyb} + V_{ląd}}{2}$$

Przykład:

$V_{szyb} = 70 \frac{m}{sek}$ $\qquad V_{śr} = \frac{70 + 40}{2} = 55 \frac{m}{sek}$

$V_{ląd} = 40 \frac{m}{sek}$ $\qquad \Delta V = 70 - 40 = 30 \frac{m}{sek}$

$D_{śr} = 6$ $\qquad L_{pow} = 6 /25 + \frac{55 \cdot 30}{9,81}/= 1160$ m

Zależność lotno-taktycznych charakterystyk samolotu z silnikiem turboodrzutowym od czynników eksploatacyjnych zamieszczona jest w poniższej tabeli:
/znak "+" oznacza wzrost a znak "-" zmniejszenie wielkości charakterystycznych i czynników eksploatacyjnych/.

Na przykład:

a/ wzrost ciężaru samolotu o 1% powoduje wzrost prędkości minimalnej i optymalnej o 0,5%, zmniejszenie pułapu o $\sim$ 64 m, zmniejszenie $V_{z\ max}$ o więcej niż 1% oraz zmniejszenie n_{zr} i n_{zgr} o 1% i odwrotnie;

b/ zmniejszenie wysokości lotu o 1000 m /powyżej 11 km/ powoduje zmniejszenie V_{min} i V_{opt} o powyżej 8,5%, zwiększenie Vz_{max} oraz zwiększenie n_{zr} i n_{zgr} o 17% /i odwrotnie/.

CHARAKTERYSTYKI LOTNE

Wielkości charakterystyczne / Czynniki	V_{min} V_{opt}		Pułap		$V_{z\ max}$		n_{zr} przy M = const		n_{zgr} przy M = const		U w a g i
1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
Ciężar Q /± 1%/	±	0,5%	∓	64 m	∓	> 1%	∓	1%	∓	1%	
Temperatura T/± 1%/	±	0,5%	∓	110÷130 m	∓	> 3%	nie ma wpływu		∓		
Wys.lotu H/± 1000m/	±	≥ 5%					∓	≥10%			Małe wysokości
Wys.lotu/H ± 1000m/	±	≥8,5%			∓		∓	17%	∓	17%	H > 11 km

CHARAKTERYSTYKI STARTU I LĄDOWANIA

Charakterystyczne wielkości / Czynniki	V_{oder} $V_{ląd}$		Długość rozbiegu		Długość dobiegu	
Ciężar Q /± 1%/	±	0,5%	±	> 2%	±	1%
Temperatura T/± 1%/	±	0,5%	±	> 3%	±	1%
Ciśnienie p/± 1%/	∓	0,5%	∓	> 2%	∓	1%
Wysokość H/± 1000m/	±	> 5%	±	>15%	±	9%

RÒWNOWAGA, STATECZNOŚĆ I STEROWNOŚĆ APARATÒW LATAJĄCYCH Z PŁATAMI NOŚNYMI

Równowaga momentów

W celu zachowania charakteru lotu, który może cechować się tak całkowitą, jak i częściową równowagą sił działających na aparat latający, konieczna jest również równowaga momentów względem osi współrzędnych przechodzących przez środek ciężkości.

$\sum M_x = 0$ /równowaga poprzeczna/
$\sum M_y = 0$ /równowaga podłużna/
$\sum M_z = 0$ /równowaga kierunkowa/

- do równoważenia momentów służą stery aparatu latającego.

Wyważenie

Charakteryzuje ono położenie środka ciężkości aparatu latającego

$$\bar{X}_o \% = \frac{X_o}{t_{SCA}} \cdot 100$$

Gdzie: X_o - odległość środka ciężkości od początku średniej cięciwy aerodynamicznej /SCA/, mierzona wzdłuż osi X, równoległej do cięciwy.
t_{SCA} - długość średniej cięciwy aerodynamicznej.

Średnią cięciwą aerodynamiczną nazywa się cięciwę zastępczego skrzydła prostokątnego, które przy tych samych kątach natarcia ma jednakowe położenie i wielkość całkowitej siły aerodynamicznej co dane skrzydło.
Zmianę wyważenia aparatu latającego powoduje doładowanie, zdjęcie bądź przemieszczenie ciężaru /wyposażenie, ładunek użyteczny itp/. Wówczas przemieszczenie środka ciężkości można określić:

$$\Delta \bar{X}_o \% = \frac{Q_1 \cdot 1}{/Q+Q_1/t_{SCA}} \cdot 100$$

Gdzie: Q_1 - ciężar ładunku, umieszczonego w odległości 1 za środkiem ciężkości, w którym przyłożona była siła ciężaru Q,

<u>Przykład</u>:

$Q = 7900$ kG

$Q_1 = 100$ kG

$l = 4$ m

$t_{SCA} = 2,5$ m

$$\Delta \bar{X} \% = \frac{100 \cdot 4}{7900+100 \cdot 2,5} \cdot 100 = 2\%$$

Jeśli ładunek zdejmuje się, to Q_1 w liczniku i mianowniku stawia się ze znakiem "-".
Jeśli z kolei obciążenie zmienia się przed środkiem ciężkości, wówczas l wstawia się ze znakiem "-".
Przy przesunięciu ciężaru Q_1 na odległość l ku tyłowi, przemieszczenie środka ciężkości będzie:

$$\Delta \bar{X}_o \% = \frac{Q_1 \cdot l}{Q \cdot t_{SCA}} \cdot 100$$

<u>Stateczność statyczna</u>

Naruszenie równowagi momentów przejawia się powstawaniem dodatkowych /niezrównoważonych/ momentów. Dodatkowe momenty, wywołane zmianą kątów natarcia i ślizgu bądź prędkości, nazywa się statycznymi.
Moment statyczny, dążący do likwidacji naruszenia równowagi nazywa się momentem stabilizującym /ustateczniającym - np. moment nurkujący, powstający wskutek wzrostu kąta natarcia/.
Właściwość aparatu latającego, polegająca na pojawieniu się momentów stabilizujących przy zakłóceniu równowagi nazywa się statycznością statyczną.
Podłużne momenty stabilizujące mogą powstać wskutek zmiany kąta natarcia przy stałej prędkości /stateczność podłużna pod względem przeciążenia/ i zmiany prędkości przy stałym przeciążeniu n_z /stateczność pod względem prędkości/. Im wyważenie aparatu latającego jest bardziej przednie, tym większa jest jego stateczność podłużna.
W wyniku ślizgu powstają momenty statyczne kierunkowy i poprzeczny. Główną rolę w zapewnieniu stateczności kierunkowej spełnia statecznik pionowy, a poprzecznej - kąt skosu i wznios skrzydła.

Stateczność dynamiczna

Jest to właściwość aparatu latającego polegajaca na powrocie do pierwotnych warunków lotu /po zaprzestaniu działania siły zakłócającej/ - prędkości, wysokości, przeciążenia, kierunku, po upływie pewnego czasu bez ingerencji ze strony pilota.

Sterowność

Jest to zespół właściwości, charakteryzujący powiązanie między działaniem pilota na organy sterowania a rekacją samolotu na to działanie.

Wykorzystana literatura:

1. "Aeromiechanika samolieta" A. Lebiediew, W. Strażewa, G.I. Sacharow - Oborongiz - 1955 r.
2. "Aerodinamika i konstrukcija samolieta" S.I.Zonszajn- - Oborongiz - 1955 r.
3. "Dinamika polieta" B.T. Goroszczenko, - IWWIA - 1958 r.
4. "Aeromiechanika" D.M. Prickier i W.A. Turjan-Oborongiz 1960 r.
5. "Dinamika polieta" I.W. Ostosławskij i W. Strażewa - - Oborongiz - 1963 r.
6. "Awiacionnyj sprawocznik" Wojennoje Izdiatielstwo Ministierstwa Oborony SSSR - 1964 r.

Wyk. w 157 egz.
Egz. nr 1-150-bibl.jawna
Egz. nr 151-153-Insp.Wojsk Lotn.
Egz. nr 154-157-Katedra
Druk JD.dnia 20.8.1965 r.
nr ks. 2369/WW

O-XV-2742

Błędy dostrzeżone w druku

str	Wiersz	Jest	Powinno być
37	punkt "i"	$a^m . n$	$a^{m . n}$
37	"	e i	e + i
38	8 od góry	$\frac{n/n-1//n-2}{1.2.3}\ a^{n-3}b^3+.$	$\frac{n/n-1//n-2/}{1\cdot 2\cdot 3}\ a^{n-3}b^3$
38	punkt "k"	$\sqrt[2n-1]{-a}$	$\sqrt[2n+1]{-a}$
38	2 od dołu	$\log^a_b = X$	$\log_b a = X$
53	6 od góry	$\mathrm{ctg}\,\alpha = \frac{b}{c}$	$\mathrm{ctg}\,\alpha = \frac{b}{a}$
53	2 od dołu	$\mathrm{tg}\,\beta = \frac{b}{c}$	$\mathrm{tg}\,\beta = \frac{b}{a}$
55	1 od dołu	puste okienko	$\sqrt{S/S-a//S-b//S-C/}$
63	8 od dołu	2p/p-n/	2p/y -n/
64	2 od góry 7 od dołu	rys. 16	rys. 25
66	3 od góry	Charakterystyczne	Cechy charakterystyczne
68	8 od dołu 5 od dołu	asymtot	asymptot
78	1 od dołu	$X = C = CX^0$	$y = C = Cx^0$
79	3 od góry	$X \to 0$	$\Delta x \to 0$
79	8 od dołu	$y = \Delta . y = U + \dots$	$y + \Delta y = u \dots\dots$
79	6 od dołu	$X \to 0$ /3 razy/	$\Delta X \to 0$
80	6 od dołu	$\frac{dy}{d_x} = \lim\limits_{\Delta x \to} \frac{V}{x} =$	$\frac{d_y}{d_x} = \lim\limits_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta V}{\Delta X}$
80	2 od dołu	z = /x/	z = f/x/
81	11 od dołu	= y	= y"
81	1 od dołu	$\frac{d_y}{} =$	$\frac{d_y}{d_x}$
82	2 od góry	$\frac{d/ctgx/}{d_x} = \frac{1}{\sin^2 x}$	$\dots\dots\dots = -\frac{1}{\sin^2 x}$
83	14 od dołu	=f/x/+C	=F/x/+C

1	2	3	4
85	12 od góry	- + C	+ C
86	4 od góry	d/uv/=adv=udv +Vdu	d/UV/= udv+ Vdu
86	10 od dołu	stosownych	stosowanych
93	9 i 23 od góry	rys.10	rys.48
94	6 od góry	2. $\sqrt{9000}$	2. $\sqrt{90000}$
94	9 od góry	ter	zer
100	2 od góry	kąta	kąta α
100	11 od dołu	cos = sin/90°- /	cos α =sin/90 - α /
100	9 od dołu	obliczamy	obliczamy α.
102	4 od góry	$g_{fi} = -\frac{hi}{h_i}$	$g_{fi} = \frac{f_i}{h_i}$
103	7 od dołu	równa	równa δ.
103	3 od dołu	$= \sqrt{\frac{\sum ni/xi-\bar{x}/^2}{\sum ni}}$	$\sqrt{\frac{\sum n_i/x_i-\bar{X}/^2}{\sum n_i}}$
107	6 od góry	$+P/A_2/ + \ldots\ldots +P/An/$	$+P/A_2/P[A/B] +\ldots+P/An/$
112	2 od góry	$=X_1 . p/X_1/+X_2 . p/X_2/+$ $+ X_n . p/X_n/^2$	$=[X_1 . p/X_1/+X_2 . p/X_2/+$ $+ X_n P/X_n/]^2$
117	3 i 7 od góry	P /X,Y/CCR =	P[/X,Y/ CR] =
117	4 od góry	$e^{-\frac{/x - m/^2}{2\delta x^2}}$	$e^{-\frac{/x - m_x/^2}{2\delta X^2}}$
136		rys. 25	rys. 22
153	Oznaczenia tabel rubr. 10 i 11	$\frac{m}{sek}$: 10; $\frac{km}{godz.}$: 11	a: $\frac{m}{sek}$: 10; $\frac{km}{godz.}$: 11

1	2	3	4
176	10 od góry	$Re_s = R_{eM} \frac{V_s \cdot L_s}{\nu_s} = \frac{V_M \cdot L_M}{\nu_M}$	$Re_s = Re_M = \frac{V_s \cdot L_s}{\nu_s} = \frac{V_M \cdot L_M}{\nu_M}$
203	6 od góry	$\frac{V_H}{V} = \sqrt{\frac{\dots\dots\dots}{\dots\dots\dots}}$	$\frac{V_H}{V_0} = \sqrt{\frac{\dots\dots\dots\dots}{\dots\dots\dots\dots}}$
205	2 od dołu	$V_{max} = 3,6 \sqrt{\frac{2 \cdot 1080}{0,0295 \cdot 0,0475}}$	$V_{max} = 3,6\sqrt{\frac{2 \cdot 1080}{0,0295 \cdot 0,0475 \cdot 25}}$
225	9 od góry	$P_z \sin \gamma - \frac{mV^2}{r}$	$P_z \cdot \sin \gamma = \frac{mV^2}{r}$
229	Objaśnienie $P_0 = \frac{P}{Q}$	Stosunek siły ciągu silnika do ciężaru samolotu /dla samolotów tłokowych/ P= 1,2 - 1,4 N start	Stosunek siły ciągu silnika do ciężaru samolotu /dla samolotów tłokowych P =1,2 - 1,4 N start/