AKADEMIA SZTABU GENERALNEGO
im. gen. broni K. Świerczewskiego

KURS BADAŃ OPERACYJNYCH

Egz. Nr 10

[redacted]

WYBRANE ZAGADNIENIA Z KOMBINATORYKI

Prof. dr Aleksander WERYHA

REMBERTÓW PAŹDZIERNIK 1965

Druk ASG–O-XV-2778

AKADEMIA SZTABU GENERALNEGO
im. gen. broni K. Świerczewskiego

KURS BADAŃ OPERACYJNYCH

Egz. Nr 10

[redacted]

WYBRANE ZAGADNIENIA Z KOMBINATORYKI

Prof. dr Aleksander WERYHA

REMBERTÓW PAŹDZIERNIK 1965

Druk ASG–O-XV-2778

AKADEMIA SZTABU GENERALNEGO
im. gen. broni K. Świerczewskiego

KURS BADAŃ OPERACYJNYCH

Prof. dr Aleksander Weryha

Wybrane zagadnienia z kombinatoryki

Rembertów październik 1965 r.

SPIS TREŚCI:

WSTĘP

W matematyce i jej zastosowaniach /zwłaszcza w teorii prawdopodobieństwa, statystyce matematycznej i fizyce statystycznej/ zachodzi czasem potrzeba tworzenia z zadanych n elementów pewnych ich połączeń, budowanych według określonych zasad i powstaje konieczność wyznaczania liczby różnych połączeń określonego rodzaju /zawierających każde po m elementów/ jakie można zbudować posługując się zadanymi elementami.

Zadany zbiór elementów będziemy oznaczali następującymi symbolami:

$$\overbrace{\{a, b, c \; \dots\dots\dots \; x, y, z\}}^{n} \qquad (1)$$

$$\text{albo} \quad \{1, 2, 3, \; \dots\dots\dots \; n\}$$

$$\text{albo} \quad \{a_1, a_2, a_3 \; \dots\dots \; a_n\}$$

Litera n oznacza liczbę zadanych elementów, a literą m będziemy oznaczali liczbę elementów w każdym z rozważanych połączeń.

Przyroda elementów jest dla nas obojętna. Mogą to być litery, liczby, osoby, określone przedmioty, figury geometryczne itp. Istotne natomiast jest ustalenie jakie połączenia zawierające po m elementów będziemy traktowali jako różne i uwzględniali przy wyznaczaniu ich liczby. Kryteriami będą różnica w uporządkowaniu /kolejności/ elementów lub różnica w składzie elementów.

Najpierw rozważymy tzw. połączenia bez powtórzeń budowane przy założeniu, że żaden element zbioru /1/ nie może w nich występować więcej anizeli jeden raz.

Przykład I. Z elementów zbioru

$$\{a, b, c\}$$

dla którego n = 3, możemy zbudować następujące połączenia, zawierające po 3 elementy /m = n = 3/

$\{a,b,c\} \longrightarrow$ cab   cba
acb   bca
abc   bac

Różnią się one pomiędzy sobą jedynie kolejnością elementów, ale posiadają jednakowy skład. Ich liczba równa się 6.
Tego rodzaju połączenia /m = n/ nazywamy permutacjami.

<u>Przykład II.</u> Z elementów zbioru

$$\{ a, b, c, d \}$$

dla którego $n = 3$, możemy zbudować następujące połączenia zawierające po 2 elementy $/m = 2/$

$$\{a,b,c,d\} \longrightarrow \begin{matrix} ab, & ac, & ad, & bc, & bd, & cd \\ ba, & ca, & da, & cb, & db, & dc \end{matrix}$$

Różnią się one pomiędzy sobą <u>albo kolejnością</u> /w kolumnach/, <u>albo składem</u> /w wierszach/. Ich liczba równa się 12.

Tego rodzaju połączenia nazywamy <u>wariacjami</u> /lub <u>rozmieszczeniami</u>/.

<u>Przykład III.</u> Gdybyśmy w poprzednim przykładzie odrzucili kryterium różnicy w kolejności elementów, to liczba połączeń zmalałaby do 6.

$$\{a,b,c,d\} \longrightarrow ab, \quad ac, \quad ad, \quad bc, \quad bd, \quad cd$$

Tego rodzaju połączenia, różniące się pomiędzy sobą <u>jedynie składem elementów</u>, nazywamy <u>kombinacjami.</u>

W rozdziałach IV - VI rozważymy połączenia z powtórzeniami.

I. <u>Permutacje bez powtórzeń.</u>

Są to połączenia, z których każde zawiera wszystkie elementy zbioru podstawowego $/m = n/$ i które wobec tego różnią się pomiędzy sobą jedynie kolejnością elementów. Liczbę permutacji bez powtórzeń, jakie można utworzyć z danych n elementów oznaczamy symbolem P_n /od francuskiego wyrazu "permutation"/.

Rozważając kolejne zbiory /1/ o wzrastającej liczbie elementów $n = 1,2,3...$ i wpisując w kolejnych wierszach tworzone z ich elementów permutacje:

$$\{a\} \longrightarrow .a. \qquad P_1 = 1$$

$$\{a,b\} \longrightarrow a.b., \; b.a. \qquad P_2 = 1 \cdot 2 = 2$$

$$\{a,b,c\} \longrightarrow \begin{pmatrix} c.a.b., & .c.b.a. \\ a.c.b., & .b.c.a. \\ a.b.c., & b.a.c. \end{pmatrix} \qquad P_3 = 1 \cdot 2 \cdot 3 = 6$$

widzimy pewną prawidłowość. Permutacje w każdym wierszu powstają przez ustawianie przybywającego dalszego elementu do permutacji poprzedniego wiersza w miejscach oznaczonych kropkami.

Łatwo widzieć, że P_4 otrzymamy mnożąc P_3 przez 4 itd.

Stąd wzór:

$$P_n = 1 \cdot 2 \cdot 3 \dots n \qquad /2/$$

Dowód metodą indukcji matematycznej pomijamy.

Iloczyn pierwszych n liczb naturalnych we wzorze /2/ oznacza się w matematyce symbolem:

$$P_n = 1.2.3 \dots n = n! \qquad /„n \text{ silnia}"/$$

<u>Zadanie.</u> Czcionki liter słowa "teoria" zostały rozdzielone i wrzucone do pudełka. Jakie jest prawdopodobieństwo zdarzenia, że wylosowując je na chybi-trafi i układając w rząd odtworzymy słowo "teoria" ?

Liczba możliwych przypadków uszeregowania się wylosowanych czcionek wynosi:

$$P_6 = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 6 = 720$$

Spośród nich tylko jeden sprzyja zdarzeniu.

Szukane prawdopodobieństwo $= \frac{1}{720}$

II. <u>Wariacje /rozmieszczenia/ bez powtórzeń.</u>

Są to połączenia utworzone z elementów zbioru podstawowego, które zawierają po m elementów /m $<$ n/ i różnią się pomiędzy sobą albo składem elementów, albo ich kolejnością. Na przykład n=4; m = 2

$$\{a,b,c,d\} \longrightarrow \left\{\begin{matrix} ab, & ac, & ad, & bc, & bd, & cd \\ ba, & ca, & da, & cb, & db, & dc \end{matrix}\right\}$$

Liczbę wariacji bez powtórzeń, jakie można utworzyć z n elementów po m elementów w każdej, oznacza się najczęściej symbolem A_n^m /od francuskiego wyrażenia /"arrangement"/.

Celem wykrycia prawidłowości, która doprowadzi nas do wzoru na wyznaczanie A_n^m, zacznijmy kolejno wyznaczać

$$A_n^1, \; A_n^2, \; A_n^3 \; \dots\dots$$

Wariacjami po 1 elemencie /m = 1/, jakie można utworzyć z elementów zbioru /1/ będą:

$$a,\ b,\ c\ .\ .\ .\ .\ .\ .\ .\ x,\ y,\ z \qquad /3/$$

ich liczba $A_n^1 = n$.

Wypisujemy wariacje /3/ w pierwszej kolumnie tabl. 1

$A_n^1 = n$ (wiersze); $n-1$ (kolumny)

a	ab	ac	ad	. . .	az
b	ba	bc	bd	. . .	bz
c					
.					
.					
.					
z	za	zb	zc	. . .	zy

Tabl. 1.

Do wariacji a dopisujemy w następnych kolumnach elementy b,c,d . . . . z. Elementu a nie dopisujemy, ponieważ otrzymalibyśmy połączenie aa z powtórzeniem, które wykluczamy. W drugim wierszu do wariacji b dopisujemy elementy, a,b,d .... z /z wyjątkiem elementu b/.

Postępując w podobny sposób w następnych wierszach otrzymamy tabelę wszystkich możliwych wariacji z m elementów po 2 elementy w każdej. Ich liczba będzie równa liczbie wierszy pomnożonej przez liczbę kolumn

$$A_n^2 = n\,/n - 1/ \qquad /4/$$

Wpisujemy do kolumny pierwszej tabl. 2 wszystkie wariacje po 3 elementy. W następnych kolumnach dopisujemy do nich elementy zbioru /1/ z wyłączeniem występujących w pierwszej kolumnie /żeby uniknąć powtórzeń/ i otrzymujemy tabelę wariacji z n elementów po 3.

$n-2$

$A^2_n = n/n-1/$

ab	abc	abd	abe	• • •	abz
ac	acb	acd	ace	• • •	acz
ad	adb	adc	ade	• • •	adz
•	•	•	•		•
•	•	•	•		•
•	•	•	•		•
zy	zya	zyb	zyc		zyx

Tabl. 2.

Mnożąc liczbę wierszy przez liczbę kolumn otrzymamy:

$$A^3_n = n/n-1/\ /n-2/ \qquad /5/$$

Szukana prawidłowość staje się widoczna. Prowadzi ona do wzoru:

$$A^m_n = n/n-1/\ /n-2/\ /n-3/ \ldots \left[n - /m-1/\right] =$$

$$= n/n-1/\ /n-2/ \ldots /n-m+1/ \qquad /6/$$

Dowód metodą indukcji matematycznej pomijamy.

Przykład. Wyznaczyć liczbę wariacji $n = 5$ elementów po $m = 3$.

$$A^3_5 = 5 \cdot 4 \cdot 3 = 60$$

Łatwo widzieć, że permutacje można traktować jako szczególny przypadek wariacji gdy $m = n$.

$$A^n_n = n/n-1/\ /n-2/ \cdots /n-n+1/ = n! = P_n$$

III. Kombinacje bez powtórzeń.

Są to połączenia utworzone z elementów zbioru podstawowego, które zawierają po m elementów $/m < n/$ i różnią się pomiędzy sobą jedynie składem elementów. Na przykład $n = 4$; $m = 2$

$\{a,b,c,d\} \longrightarrow$ ab, ac, ad, bc, bd, cd

Połączeń ba, ca, da, cb, db, dc, które występowały u nas jako osobne wariacje teraz nie liczmy. Interesuje nas jedynie skład elementów a nie ich kolejność.

Liczbę kombinacji bez powtórzeń, jakie można utworzyć z n elementów po n elementów w każdej oznacza się albo symbolem C^m_n

/z francuskiego wyrażenia "combinaison"/, albo symbolem $\binom{n}{m}$.

Wzór na liczbę kombinacji ma postać:

$$C_n^m = \binom{n}{m} = \frac{n(n-1)(n-2)\cdots(n-m+1)}{1\cdot 2\cdot 3\cdots m} = \frac{A_n^m}{P_m} \qquad (7)$$

Słuszność tego wzoru łatwo sobie uprzytomnić na gruncie następującego rozumowania.
Każdą z C_n^m kombinacji otrzymanych ze zbioru podstawowego /1/ możemy potraktować jako osobny zbiór podstawowy zawierający m elementów i utworzyć dla niego P_m permutacji, które będą się różniły kolejnością elementów ale będą posiadały ten sam skład.

Otrzymamy w ten sposób $C_n^m \cdot P_m$ połączeń, które będą wariacjami jakie można utworzyć z m elementów zbioru podstawowego /1/ po m elementów w każdej.

Stąd $C_n^m \cdot P_m = A_n^m$

$$C_n^m = \cancel{\binom{n}{m}} = \frac{A_n^m}{P_m} = \frac{n(n-1)(n-2)\cdots(n-m+1)}{1\cdot 2\cdot 3\cdots m} \qquad (8)$$

Przykład:

$$C_{10}^4 = \binom{10}{4} = \frac{10\cdot 9\cdot 8\cdot 7}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4} = 210$$

Mnożąc we wzorze /8/ licznik i mianownik przez iloczyn

$$(n-m)! = (n-m)(n-m-1)(n-m-2)\cdots 3\cdot 2\cdot 1$$

możemy temu wzorowi nadać postać

$$C_n^m = \frac{n(n-1)\cdots(n-m+1)(n-m)(n-m-1)\cdots 3\cdot 2\cdot 1}{1\cdot 2\cdot 3\cdots m\cdot (n-m)(n-m+1)\cdots 3\cdot 2\cdot 1} = \frac{n!}{m!(n-m)!} \qquad (8a)$$

Stosując wzór /8a/ do obliczenia C_n^m i C_n^{n-m} otrzymamy

$$C_n^m = \frac{n!}{m!(n-m)!}$$

Wynika stąd wzór $C_n^{n-m} = \dfrac{n!}{(n-m)![n-(n-m)]!} = \dfrac{n!}{(n-m)!\,m!}$

$$C_n^m = C_n^{n-m} \qquad (9)$$

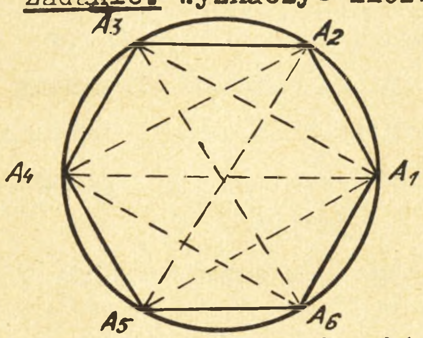
Przykład:

$$C_{20}^{17} = C_{20}^{20-17} = C_{20}^{3} = \frac{20 \cdot 19 \cdot 18}{1 \cdot 2 \cdot 3} = 1140$$

Uwaga: Stosując wzór /9/ do przypadku m = n przyjmujemy formalnie, że $C_n^0 = 1$, ponieważ

$$C_n^n = C_n^{n-n} = C_n^0 \text{ a ponieważ } C_n^n = 1$$

Zadanie. Wyznaczyć liczbę przekątnych w sześciokącie.



Przekątne i boki wielokąta będące odcinkami prostych łączą - cych każdą parę wierzchołków, możemy traktować jako kombinacje z 6 elementów /wierzchołków/ po 2 elementy w każdej. Odejmując od ich łącznej liczby C_6^2 liczbę boków otrzymamy liczbę przekątnych:

$$C_6^2 - 6 = \frac{6 \cdot 5}{1 \cdot 2} - 6 = 9$$

Wzór ogólny na liczbę przekątnych w wielokącie o n bokach będzie miał postać

$$C_n^2 - n = \frac{n(n-1)}{2} - n = \frac{n(n-3)}{2} \qquad (10)$$

IV. Wariacje /rozmieszczenia/ z powtórzeniami.

Niech dane będzie n elementów

$$\{\overbrace{a\ b\ c\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ z}^{n}\}$$

oraz m okienek

Nr. okienka →	a	a	a	b									
	1	2	3	4									m

(1

Liczba okienek m jest dowolna i w przeciwieństwie do połą - czeń bez powtórzeń może być $m > n$.

Wariacje z powtórzeniami budujemy w sposób następujący:

Do okienka nr 1 wpisujemy któryś spośród n zadanych elementów. Do okienka nr 2 wpisujemy również któryś z elementów /11/ nie opuszczając elementu już wpisanego do okienka poprzedniego.

W podobny sposób dokonujemy wpisów do pozostałych okienek. W budowanych w ten sposób różnych połączeniach /po m elementów/ każdy element może albo w ogóle nie wystąpić, albo wystąpić w 1.2.3... lub m okienkach.

Kojarząc z każdym spośród n możliwych wpisów a,b,c, ...z w pierwszym okienku możliwe n wpisów do drugiego okienka otrzymamy n^2 rozmieszczeń/ z powtórzeniami/, zawierających po 2 elementy. Skojarzenie ich z n możliwymi wpisami w trzecim okienku da nam n^3 rozmieszczeń /z powtórzeniami/ po m = 3 elementów w każdym itd.

Stąd wzór na liczbę wariacji /rozmieszczeń/ z powtórzeniami z n elementów po m elementów w każdej

$$A_n^m = n^m \qquad (12)$$

Zadanie. Ile sześciocyfrowych liczb można ułożyć posługując się cyframi

0,1,2 • • • 9 n = 10

m = 6

$$A_{10}^6 = 10^6$$

Będą to liczby

000 000, 000001 . . . 999999

V. Permutacje z powtórzeniami.

Niech dane będą N elementów:

$$\{\overbrace{a_1, a_2, \ldots a_\alpha, b_1, b_2 \ldots b_\beta, \ldots \ldots z_1, z_2 \ldots z_\mu}^{N}\}$$

$$\text{gdzie} \quad \alpha + \beta + \cdots + \mu = N \qquad (13)$$

Z tych N elementów /uwzględniając obok oznaczeń literowych wyróżnienie numerkami/ możemy ułożyć N! permutacyj.

Jeżeli w tych permutacjach opuścimy numerki przy literze a, to okaże się, że wśród nich będzie $\alpha!$ permutacji jednakowych.

Wobec tego liczba permutacji różniących się pomiędzy sobą zmaleje do $\frac{N!}{\alpha!}$

Opuszczając numerki przy pozostałych literach otrzymamy wzór na liczbę permutacji z powtórzeniami:

$$P_N = \frac{N!}{\alpha!\,\beta!\cdots\gamma!} = \frac{(\alpha+\beta+\ldots+\gamma)!}{\alpha!\,\beta!\ldots\gamma!} \qquad (14)$$

Jest to liczba permutacji z powtórzeniami rzędu N o składzie następującym

$$\left\{\overbrace{\underbrace{a\,a\ldots a}_{\alpha},\ \underbrace{b\,b\ldots b}_{\beta},\ldots\ \underbrace{z\,z\ldots z}_{\gamma}}^{N}\right\} \qquad (15)$$

gdzie składniki sumy $\alpha+\beta+\cdots+\gamma = N$ są zadanymi liczbami stałymi. W każdej permutacji a powtarza się α razy, b powtarza się β razy itd.

Zadanie 1. Czcionki liter dużego artykułu w gazecie, składającego się z N liter, zostały rozdzielone i wrzucone do pudełka. Jakie jest prawdopodobieństwo zdarzenia, że wylosowując je na chybi-trafi odtworzymy tekst artykułu ?

W dużym artykule litery będą się powtarzały. Niech $n_a, n_b \ldots n_z$ oznaczają liczebności poszczególnych liter.

$$n_a + n_b + \ldots + n_z = N$$

Wśród N! możliwych przypadków będzie już nie jeden sprzyjający zdarzeniu, lecz

$$n_a!\, n_b! \ldots n_z!$$

Stąd szukane prawdopodobieństwo będzie równe

$$\frac{n_a!\, n_b! \ldots n_z!}{N!}$$

Zadanie 2. Mamy $\alpha+\beta+\gamma=N$ różnych przedmiotów. Na ile różnych sposobów można podzielić te przedmioty na trzy grupy tak, żeby pierwsza grupa zawierała α przedmiotów, druga β i trzeba γ przedmiotów.

Rozwiązanie:

Ustawmy dane przedmioty w jakiejkolwiek określonej kolejności

$$A_1,\ A_2,\ A_3,\ A_4,\ \ldots\ A_{\alpha+\beta+\gamma} \qquad (16)$$

$$2 \quad 1 \quad 2 \quad 3 \quad \ldots \quad 1 \qquad (17)$$

Dzieląc przedmioty na grupy, będziemy pod oznaczeniem każdego z nich /16/ pisali numer grupy, do której trafia. Dopiski /17/ oznaczają przykładowo, że pierwszy przedmiot dostał się do grupy drugiej, drugi do grupy pierwszej, trzeci do grupy drugiej itd., ostatni do grupy pierwszej.

Każdy ciąg typu /17/ zawiera α - jedynek, β -dwójek i γ -trójek.

Każdemu więc podziałowi przedmiotów na grupy będzie odpowiadała w sposób jednoznaczny permutacja z liczb 1,2 i 3, w której 1 powtarza się α razy, 2 - β razy i 3 γ razy. Tak więc liczba możliwych sposobów podziału wyniesie

$$P_N = \frac{(\alpha+\beta+\gamma)}{\alpha!\,\beta!\,\gamma!}$$

VI. Kombinacje z powtórzeniami.

Niech dane będą n elementów, które oznaczymy symbolami

$$a_i \quad /i = 1,2, \ldots n/$$

$$\{a_1, a_2, a_3, \ldots a_{n-1}, a_n\} \qquad /18/$$

W zapisie tym pomiędzy każdą parą sąsiednich elementów stawiamy przecinek. Liczba tych przecinków równa się $n - 1$.

Kombinacjami z powtórzeniami z n elementów /po m elementów w każdej/ nazywamy połączenia zawierające ω_1, elementów a_1, ω_2 elementów $a_2, \ldots, \omega_n$ elementów a_n, w których liczby $\omega_1, \omega_2 \ldots \omega_n$ /oczywiście całkowite/ są różne w różnych połączeniach, ale spełniają warunki:

$$\begin{cases} 0 \le \omega_i \le m & (i = 1,2,3 \ldots n) \\ \omega_1 + \omega_2 + \omega_3 + \cdots + \omega_n = m \end{cases}$$

W podanym dalej przykładzie 1 będziemy mieli: dla kombinacji

dla kombinacji 111 $\omega_1 = 3, \omega_2 = 0, \omega_3 = 0, \omega_4 = 0$

- " - 244 $\omega_1 = 0, \omega_2 = 1, \omega_3 = 0, \omega_4 = 2$

- " - 444 $\omega_1 = 0, \omega_2 = 0, \omega_3 = 0, \omega_4 = 3$

Ponieważ w kombinacjach kolejność elementów nie odgrywa roli możemy występujące w nich elementy zapisywać w kolejności ustalonej w /18/ , wstawiając przecinki pomiędzy sąsiadującymi grupami jednakowych elementów:

$$\underbrace{a_1\ a_1 \ldots a_1}_{\omega_1},\ \underbrace{a_2\ a_2 \ldots a_2}_{\omega_2},\ \ldots,\ \underbrace{a_n\ a_n \ldots a_n}_{\omega_n} \qquad (19)$$

Jeżeli w danej kombinacji jakaś grupa elementów nie występuje, zachowujemy odpowiednie przecinki, nie wpisując pomiędzy nimi żadnych wyrazów x/. Dzięki temu liczba przecinków w zapisie każdego połączenia będzie zawsze równa n-1.

Zastępując w zapisie /19/ każdy element jedynką i każdy przecinek zerem możemy nadać mu postać zapisu zero-jedynkowego

$$\underbrace{11\ldots1}_{\omega_1}0\underbrace{11\ldots1}_{\omega_2}0 \ldots 0\underbrace{11\ldots1}_{\omega_n} \qquad (20)$$

(xx)

która pozwala w jednoznaczny sposób odtworzyć skład danej kombinacji.

W każdym takim zapisie liczba jedynek równa się m, a liczba zer równa się n-1.

Zapisy /20/ można interpretować jako zapisy permutacji z powtórzeniami, utworzonych z m jedynek i n-1 zer /tj. po m+n-1 elementów w każdej/.

Ich liczba równa się zgodnie ze wzorem /14/

$$\frac{[m+(n-1)]!}{m!\,(n-1)!} = C^m_{m+n-1} \qquad (21)$$

Tak więc liczba kombinacji z powtórzeniami z n elementów po m równa się

$$C^m_n = C^m_{m+n-1} = \frac{(n+m-1)!}{m!\,(n-1)!} \qquad (22)$$

Dalsze trzy przykłady ilustrują przechodzenie od kombinacji do jej zapisu zero-jedynkowego i odwrotnie. W przykładzie 1 podane są wszystkie kombinacje z powtórzeniami dla n = 4 i m = 3. Ich liczba równa się 20. Warto zauważyć, że tutaj liczba m nie koniecznie musi być mniejsza od liczby n /vide przykład 3/.

---

x/ Dwa przecinki znajdą się obok siebie.

xx/ Prawa strona wynika ze wzoru /8/

Przykład 1.

$$\{1,2,3,4\}\ ;\ n=4\ ;\ m=3$$

$\{1,2,3,4\} \to$ 111 112 113 114 122 123 124 133 134 144
222 223 224 233 234 244 333 334 344 444

$$C_n^m = C_{n+m-1}^m = \frac{(n+m-1)}{m!(n-1)!} = \frac{6!}{3!3!} = 20$$

Przykłady kombinacji: 111 ↓ 111,,,   244 ↓ ,2,,44   444 ↓ ,,,444

ich zapisy zero-jedynkowe: 111000   010011   000111

Przykład 2. $\{a,b,c,d\}$ $n = 4;$ $m = 6$

Przykłady kombinacji:

aaa aaa ↓ aaaaaa,,,   abbccd ↓ a,bb,cc,d   aabbbd ↓ aa,bbb,d

ich zapisy zero-jedynkowe: 111111000   101101101   11011101

$$C_n^m = C_{n+m-1}^m = \frac{(n+m-1)!}{m!(n-1)!} = \frac{9!}{6!3!}$$

Przykład 3.

Odtworzyć kombinację na podstawie zapisu zero-jedynkowego:

0111001011
,bbb,,'d,ee
bbb dee

wobec 4 zer $n = 5$ elementów

wobec 6 jedynek $m = 6$

oznaczymy te 5 elementów przez

$\{a\ b\ c\ d\ e\}$

Dwa zera /przecinki/ obok siebie oznaczają nieobecność w danej kombinacji elementu o numerze równym numerowi prawego zera /przecinka/. Rozważanemu zapisowi odpowiada kombinacja nie zawierająca elementów pierwszego i trzeciego /tj. elementów a i c/.

Zadanie. Na ile różnych sposobów można podzielić m jednakowych przedmiotów pomiędzy p osobami.

Rozwiazanie: Oznaczmy przez ω_i liczbę przedmiotów otrzymanyc-h przez i-tą osobę. Musi więc być spełniona równość

$$\omega_1 + \omega_2 + \ldots + \omega_p = m$$

gdzie:

$$0 \leq \omega_i \leq m \qquad (i = 1,2,3 \ldots p)$$

Ponieważ wszystkie przedmioty są jednakowe i ich kolejność w podziale jest obojętna można każdy podział zapisać w postaci /20/:

$$\underbrace{111\ldots11}_{\omega_1},0\,\underbrace{11\ldots1}_{\omega_2},0\,\underbrace{11\ldots1}_{\omega_3},00\,\underbrace{111\ldots1}_{\omega_p} \qquad (23)$$

gdzie liczba jedynek = m
" zer = p-1 x/

Zapis ten odpowiada zapisom permutacji z powtórzeniem utworzonych z m jedynek i p-1 zer /tj. po m + p-1 elementów w każdej/.
Ich liczba, wobec wzoru /14/, równa się:

$$\frac{(m+p-1)!}{m!\,(p-1)!}$$

VII. Dwumian Newtona

Wypiszmy następujący ciąg iloczynów Q_n wraz z ich rozwinięciami w postaci wielomianów uszeregowanych według malejących potęg x:

---

x/ Gdyby było $\omega_2 = 0$, to zapis /23/ miałby postać:

$$\underbrace{11\ldots1}_{\omega_1},00\,\underbrace{11\ldots1}_{\omega_3}\ldots 0\,\underbrace{11\ldots1}_{\omega_p}$$

gdyby było $\omega_2 = 0$ i $\omega_3 = 0$, to zapis (23) miałby postać:

$$\underbrace{111\ldots1}_{\omega_1},000\,\underbrace{111\ldots1}_{\omega_4},0\,\underbrace{111\ldots1}_{\omega_5},0\ldots0\,\underbrace{111\ldots1}_{\omega_p}$$

$$Q_1 = (x+b_1) = x+b_1$$

$$Q_2 = (x+b_1)(x+b_2) = x^2+(b_1+b_2)x+b_1b_2$$

$$Q_3 = (x+b_1)(x+b_2)(x+b_3) = x^3+(b_1+b_2+b_3)x^2+(b_1b_2+b_1b_3+b_2b_3)x+b_1b_2b_3$$

$$Q_4 = (x+b_1)(x+b_2)(x+b_3)(x+b_4) = x^4+(b_1+b_2+b_3+b_4)x^3+(b_1b_2+b_1b_3+b_1b_4+b_2b_3+$$
$$+b_2b_4+b_3b_4)x^2+(b_1b_2b_3+b_1b_2b_4+b_1b_3b_4+b_2b_3b_4)x+b_1b_2b_3b_4$$

. . . .

$$Q_n = (x+b_1)(x+b_2)\cdots(x+b_n) = x^n+(b_1+b_2+\cdots+b_n)x^{n-1}+\cdots+b_1b_2\cdots b_n$$

Podstawiając $x = a$ oraz $b_1 = b_2 = \ldots = b_n = b$ otrzymamy następujący ciąg:

$$Q_1 = a+b = a+b$$

$$Q_2 = (a+b)^2 = a^2+2b+b^2$$

$$Q_3 = (a+b)^3 = a^3+3a^2b+3ab^2+b^3$$

$$Q_4 = (a+b)^4 = a^4+4a^3b+6a^2b^2+4ab^3+b^4$$

. . . .

$$Q_n = (a+b)^n = a^n+na^{n-1}b+\cdots+b^n$$

Nasuwa się przypuszczenie, że występują tutaj pewne prawidłowości, które pozwolą uzyskać ogólny wzór na rozwinięcie wyrażenia

$$/a + b/^n$$

Z rozwinięć dla $n = 1,2,3$ i 4 widać, że:

1/ liczba składników w nich równa się $n + 1$;

2/ w kolejnych składnikach występują iloczyny potęg w postaci $a^{n-k}b^k$, w których litera <u>k</u> przebiega wartości $0,1,2,3,\ldots,n$. Wykładniki przy <u>a</u> kolejno maleją od n do zera, a wykładniki przy b kolejno rosną od zera do <u>n</u>. W każdym składniku suma obydwu wykładników równa się <u>n</u>.

Nieco trudniejsze jest wykrycie prawidłowości w kształtowaniu się współczynników liczbowych w kolejnych składnikach rozwinięcia.

Zbadajmy kolejne składniki rozwinięcia dla n = 4

$$Q_4 = (a+b)^4 = a^4 + 4a^3b + 6a^2b^2 + 4ab^3 + b^4$$

W pierwszym składniku rozwinięcia współczynnik liczbowy równa się jedności.

W drugim składniku rozwinięcia współczynnik 4 jest, jak widzieliśmy, liczbą wyrazów w sumie

$$b_1 + b_2 + b_3 + b_4$$

które możemy traktować jako kombinacje utworzone z czterech elementów $\{b_1, b_2, b_3, b_4\}$ po jednym elemencie w każdej. Ich liczba równa się

$$C_4^1 = \frac{4}{1} = 4$$

W trzecim składniku rozwinięcia współczynnik liczbowy równa się liczbie wyrazów w sumie

$$b_1b_2 + b_1b_3 + b_1b_4 + b_2b_3 + b_2b_4 + b_3b_4$$

które są kombinacjami z tychże 4 elementów po 2.

Ich liczba

$$C_4^2 = \frac{4\cdot 3}{1\cdot 2} = 6$$

W czwartym składniku rozwinięcia współczynnik liczbowy równa się liczbie wyrazów w sumie

$$b_1b_2b_3 + b_1b_2b_4 + b_1b_3b_4 + b_4 + b_2b_3b_4$$

które są kombinacjami z 4 elementów po 3.

Ich liczba $$C_4^3 = \frac{4\cdot 3\cdot 2}{1\cdot 2\cdot 3} = 4$$

W ostatnim składniku rozwinięcia współczynnik liczbowy równa się jedności.

Możemy więc naszemu rozwinięciu nadać postać

$$(a+b)^4 = a^4 + C_4^1 a^3b + C_4^2 a^2b^2 + C_4^3 ab^3 + b^4$$

Łatwo sprawdzić słuszność analogicznych wzorów dla n = 1, 2 i 3.

$$(a+b)^1 = a+b$$
$$(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$$
$$(a+b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$$

Nasuwa się hipoteza, że wzór ogólny będzie miał postać:

$$(a+b)^n = a^n + C_n^1 a^{n-1} b + C_n^2 a^{n-2} b^2 + \cdots + C_n^m a^{n-m} b^m + C_n^{m+1} a^{n-m-1} b^{m+1} + \cdots + b^n \tag{24}$$

Udowodnimy słuszność tego wzoru metodą indukcji matematycznej.

Stwierdziliśmy, że wzór /24/ jest słuszny dla n = 1. Musimy jeszcze okazać, że z założenia słuszności wzoru /24/ dla dowolnego n wynika słuszność wzoru otrzymanego z /24/ poza zastąpienie w nim n przez n + 1, czyli wzoru:

$$(a+b)^{n+1} = a^{n+1} + C_{n+1}^1 a^n b + C_{n+1}^2 a^{n-1} b^2 + \cdots + C_{n+1}^{m+1} a^{n-m} b^{m+1} + \cdots + b^{n+1} \tag{25}$$

Dowód polega na okazaniu, że mnożąc obydwie strony wzoru /24/przez /a + b/ otrzymamy wzór /25/.

Istotnie

$$\begin{aligned}(a+b)^{n-1} &= (a+b)^n (a+b) = \\ &= a^{n+1} + C_n^1 a^n b + C_n^2 a^{n-1} b^2 + \cdots + C_n^m a^{n-m+1} b^m + C_n^{m+1} a^{n-m} b^{m+1} + \cdots + \\ &+ ab^n + a^n b + C_n^1 a^{n-1} b^2 + \cdots + C_n^{m-1} a^{n-m+1} b^m + C_n^m a^{n-m} b^{m+1} + \cdots + b^{n+1} = \\ &= a^{n+1} + (C_n^1 + 1) a^n b + (C_n^2 + C_n^1) a^{n-1} b^2 + \cdots + (C_n^m + C_n^{m-1}) a^{n-m+1} b^m + \\ &+ (C_n^{m+1} + C_n^m) a^{n-m} b^{m+1} + \cdots + b^{n+1}\end{aligned} \tag{26}$$

Wystarczy udowodnić, że:

$$C_n^{m+1} + C_n^m = C_{n+1}^{m+1} \quad {}^{x)}$$

Istotnie, stosując wzór /8a/ otrzymamy:

---

x/ Podstawiając do tego wzoru m = 0, 1, 2... otrzymamy współczynniki rozwinięcia /25/:

$$C_n^1 + C_n^0 = n+1; \; C_n^2 + C_n^1 = C_{n+1}^2; \; i.t.d.$$

$$C_n^{m+1}+C_n^{m}=\frac{n!}{(m+1)!(n-m-1)!}+\frac{n!}{m!(n-m)!}=$$

$$=\frac{n!(n-m)}{m!(m+1)(n-m)!}+\frac{n!}{m!(n-m)!}=$$

$$=\frac{n!}{m!(n-m)!}\left(\frac{n-m}{m+1}+1\right)=\frac{n!}{m!(n-m)!}\left(\frac{n+1}{m+1}\right)=\frac{(n+1)!}{(m+1)!(n-m)!}=C_{n+1}^{m+1}$$

Wzór /24/ nosi nazwę "dwumian Newtona" . Korzystając ze wzoru/8/ oraz z tego, że $C_n^0=1; C_n^n=1$ można go zapisać w następujących postaciach:

$$(a+b)^n=C_n^0 a^n b^0+C_n^1 a^{n-1}b+C_n^2 a^{n-2}b^2+\ldots+C_n^n a^0 b^n \qquad (I)$$

$$(a+b)^n=a^n+\frac{n}{1}a^{n-1}b+\frac{n(n-1)}{1\cdot 2}a^{n-2}b^2+\frac{n(n-1)(n-2)}{1\cdot 2\cdot 3}a^{n-3}b^3+\ldots+b^n \qquad II$$

$$(a+b)^n=\sum_{i=0}^{i=n}C_n^i a^{n-i}b^i=\sum_{i=0}^{i=n}\binom{n}{i}a^{n-i}b^i \qquad III$$

Przykład 1.

$$(a+b)^5=a^5+\frac{5}{1}a^4b+\frac{5\cdot 4}{1\cdot 2}a^3b^2+\frac{5\cdot 4\cdot 3}{1\cdot 2\cdot 3}a^2b^3+\frac{5\cdot 4\cdot 3\cdot 2}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4}ab^4+b^5=$$

$$=a^5+5a^4b+10a^3b^2+10a^2b^3+5ab^4+b^5$$

Przykład 2.

$$(a+b)^6=a^6+\frac{6}{1}a^5b+\frac{6\cdot 5}{1\cdot 2}a^4b^2+\frac{6\cdot 5\cdot 4}{1\cdot 2\cdot 3}a^3b^3+\frac{6\cdot 5\cdot 4\cdot 3}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4}a^2b^4+$$

$$+\frac{6\cdot 5\cdot 4\cdot 3\cdot 2}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4\cdot 5}ab^5+b^6=$$

$$=a^6+6a^5b+15a^4b^2+20a^3b^3+15a^2b^4+6ab^5+b^6$$

Widzimy, że współczynniki liczbowe w rozwinięciu wg wzoru na dwumian Newtona początkowo rosną a potem maleją, przy czym współczynniki jednakowo odległe od końców rozwinięcia są sobie /symetrycznie/ równe. Dlatego wystarczy doprowadzenie obliczeń do miejsca, w którym one przestają wzrastać.

Współczynniki rozwinięcia można dla kolejnych wartości n otrzymać sukcesywnie, budując tzw. trójkąt Pascala.

1	dla $n = 0$
1 1	1
1 2 1	2
1 3 3 1	3
1 4 6 4 1	4
1 5 10 10 5 1	5
1 6 15 20 15 6 1	6

W schemacie tym pierwszą i ostatnią liczbą w każdym wierszu są jedynki. Pozostałe liczby w każdym wierszu otrzymujemy jako sumy dwóch najbliżej ich stojących liczb wiersza poprzedniego.

Literatura:

S.I. Nowosiełow. Specjalnyj kurs elementarnoj algebry. Moskwa 1951.

A. Mostowski i M.Stark. Algebra wyższa, cz. 1 Warszawa 1953r.

Wykonano w 100 egz.

Egz.nr. 1-100 Bibl. Jawna

Wykonał prof.Werydia

Druk JD dn. 14.09.65r.
Nr.ks. 2347/WW.-.
CW O-XV-2758.