AKADEMIA SZTABU GENERALNEGO
im. Generała Broni Karola Świerczewskiego

3

płk doc. dr Jerzy SKIBIŃSKI

OPTYMALIZACJA ALOKACJI ZASOBÓW W PRZYPADKU NIELINIOWEJ FUNKCJI CELU

WARSZAWA GRUDZIEŃ 1971

AKADEMIA SZTABU GENERALNEGO
im. Generała Broni Karola Świerczewskiego

3

płk doc. dr Jerzy SKIBIŃSKI

OPTYMALIZACJA ALOKACJI ZASOBÓW W PRZYPADKU NIELINIOWEJ FUNKCJI CELU

WARSZAWA GRUDZIEŃ 1971

3

A K A D E M I A   S Z T A B U   G E N E R A L N E G O

im. Gen. Broni K. Świerczewskiego

Płk doc. dr Jerzy SKIBIŃSKI

OPTYMALIZACJA ALOKACJI ZASOBÓW W PRZYPADKACH NIELINIOWEJ FUNKCJI CELU

WARSZAWA   GRUDZIEŃ   1971 r.

SPIS TREŚCI

0. WPROWADZENIE

Modele alokacji zasobów, rozpatrywane w [1] i [2], doprowadzały do uzyskiwania w toku realizacji planu przedsięwzięcia bądź minimalnych odchyleń intensywności zaangażowania zasobów, (od wielkości średniej), bądź pozwalały określać taką alokację, która minimalizuje górną granicę ich intensywności i w ten sposób łagodzi "skoki" w zaangażowaniu zasobów w kolejnych jednostkach czasu. Zauważmy przy tym, że w tej klasie zadań alokacji występuje czas realizacji przedsięwzięcia w postaci dyrektywnego terminu końcowego. Oczywiście, termin ten może wynikać z akceptacji terminu najkrótszego, uzyskanego w wyniku obliczenia sieci (np. metodą CPM lub PERT), na podstawie założonych a priori czasów przeznaczonych na wykonanie poszczególnych czynności.

Należy ponadto zauważyć, że sformułowane powyżej zagadnienie alokacji zawiera dość istotne ograniczenie w stosunku do angażowanych zasobów, wynikające z założenia o równomiernej intensywności ich zużywania, bez wprowadzania przerw z chwilą rozpoczęcia czynności w której biorą udział. Założenie to, występujące w modelach alokacji sformułowanych w [1] [2], ma istotne znaczenie w przypadkach przedsięwzięcia dla wykonania których można wyróżnić zasób podstawowy (spośród wszystkich ich rodzajów), który występuje we wszystkich lub przynajmniej w większości czynności składających się na dane przedsięwzięcie. A zatem, przyjęta norma intensywności zużycia zasobu podstawowego określa miejsce czynności w granicach terminów najwcześniejszego jej rozpoczęcia i najpóźniejszego zakończenia, a tym samym ustala również nieprzekraczalne terminy wykorzystania pozostałych rodzajów zasobów. Do uznania technologa pozostawia się natomiast kolejność ich zaangażowania w czasie t_{ij}.

W praktyce realizacji przedsięwzięć, w których nie można ustalić jednoznacznie priorytetu dla jednego rodzaju zasobu, jako podstawowego w stosunku do pozostałych, przyjmuje się jednakową ważność dla każdego z nich, występującego z zadaną intensywnością przy wykonywaniu odpowiednich czynności.

---

[1] Model alokacji zasobów.
[2] Optymalizacja alokacji zasobów w ujęciu heurystycznym.

W pierwszym przypadku można dokonać alokacji dla każdego rodzaju zasobu, a następnie, zgodnie z przyjętym kryterium, wybrać najkorzystniejszą i do niej dostosować pozostałe, uwzględniając technologicznie uzasadnioną ich kolejność. Oczywiście, może się zdarzyć, że uzyskane na tej drodze rozwiązanie będzie gorsze od tego, gdyby jako alokację bazową wybrać inną, mniej korzystną i do niej dostosować pozostałe. W ten sposób dochodzimy do zagadnienia wyboru alokacji bazowej, a tym samym do ustalenia podstawowego rodzaju zasobu.

Jeśli więc wiadomo, że dla wykonania każdej czynności, występującej w danym przedsięwzięciu, należy zaangażować z różnymi intensywnościami szereg rodzajów zasobów (ze skończonego ich zbioru) o jednakowych stopniach ważności, wtedy procedurę poszukiwania zasobu podstawowego należy zastosować dla każdej czynności oddzielnie. Zauważmy przy tym, że w ten sposób wyróżnimy pewien podzbiór zasobów podstawowych dla całego przedsięwzięcia.

Poniżej przedstawimy metodykę wyznaczania zasobów podstawowych dla jednej czynności, inaczej - zasobów krytycznych, stanowiących o jakości jej wykonania.

Zagadnienie to można rozpatrywać w oparciu o jedno z dwóch kryteriów :

1. jako zagadnienie minimalizacji czasu wykonanie czynności przy zadanych ilościach każdego rodzaju zasobu oraz
2. jako zagadnienie minimalizacji ilości zużycia każdego rodzaju zasobu w procesie wykonywania czynności w czasie zadanym i technologicznie uzadadnionym.

Wynik rozwiązania każdego z obu typów zadań zależy od przyjętego, technologicznie uzasadnionego dla każdego rodzaju zasobu, przedziału wielkości jakie może przyjmować intensywność wydatkowania zasobu ; można np. przyjąć, że granice przedziału wyznaczą intensywności minimalne niezbędne i maksymalnie możliwe dla wykonania kadej czynności. Stąd, każde w obu wymienionych typach zadań powinny występować ograniczenia określające charakter zmienności funkcji intensywności zużycia zasobu.

1. ZAŁOŻENIA PODSTAWOWE

Przyjmiemy, że plan zamierzonego przedsięwzięcia został przedstawiony w postaci sieci (CPM, PERT) jako grafu skierowanego bez konturów, składającego się z n wierzchołków - zdarzeń $i=0,1...,n-1$ prac zbioru C łuków - czynności $(i,j) \in C$ $j > i$, z których każda może być wykonywana :

a) co najwyżej w ciągu t_{ij}^{N} jednostek czasu (normalnego) tj. przy przeciętnych nakładach (kosztów) K_{ij}^{N} związanych ze stosowaniem średnich norm technologicznych w normalnych warunkach;

b) co najmniej w ciągu t_{ij}^{Min} jednostek czasu, tj. przy maksymalnie dopuszczalnych normach technologicznych, których stosowanie pociąga za sobą odpowiedni wzrost nakładów (kosztów) do wysokości K_{ij}^{Mx}.

W przedsięwzięciu należy zaangażować s rodzajów zasobów $i=1,...,s$, przy czym wykonanie każdej czynności wymaga odpowiedniego dla niej podzbioru rodzajów zasobów $r_{ij} \subset S$ z ogólnego ich zbioru S. Podzbiór r_{ij} nie może być zbiorem pustym.

Wprowadzamy następujące założenie podstawowe.

1. Dla wszystkich rodzajów zasobów istnieje wspólna jednostka miary stanu zaawansowania (korzyści), wynikających z ich zaangażowania w poszczególnych czynnościach. Funkcja kryterium oceny stanu zaawansowania (korzyści) każdej czynności jest funkcją rosnącą i addytywną w stosunku do ilości angażowanych każdego rodzaju zasobów w tej czynności w kolejnych przedziałach czasu, aż do chwili jej zakończenia.

2. Pełny stan zaawansowania czynności (i,j) ze względu na właściwy jej podzbiór $r_{ij} \subset S$ zasobów wyniesie :

$$P_{ij} \geq \sum_{l \in r_{ij}} \int_{t_i^{(l)}}^{t_i^{(l)} + t_{ij}^{(l)}} q_{ij}^{(l)}(t)dt \quad . \quad . \quad . \quad (1)$$

gdzie $q_{ij}^{(l)}$ oznacza intensywność zaangażowania l-tego rodzaju zasobu przy wykonaniu czynności (i,j). Przyjmujemy, że planowana ilość l-tego zasobu dla czynności $(i,j) \in C$ wynosi :

$$p_{ij}^{(l)} = \int_{t_i}^{t_i^{(l)}+t_{ij}^{(l)}} q_{ij}^{(l)}(t)dt \quad , \quad . \quad . \quad . \quad (2)$$

a ogólna ilość l-tego zasobu planowana dla całego przedsięwzięcia :

$$P^{(l)} \geqslant \sum_{(i,j)\in C} p_{ij}^{(l)} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (3)$$

3. Niech $z_{ij}^{(l)}(t)$ oznacza wartość stanu zaawansowania czynności $(i,j)\in C$ w chwili t

$$t_i^{(l)} \leqslant t \leqslant t_i^{(l)} + t_{ij}^{(l)}$$

ze względu na l-ty rodzaj zasobu ; wtedy ogólna wartość stanu zaawansowania czynności $(i,j)\in C$, ze względu na właściwy jej podzbiór $r_{ij} \subset S$ zasobów wyniesie :

$$z_{ij}(t) = \sum_{l\in r_{ij}} \int_{t_i^{(l)}}^{t_i^{(l)}+t_{ij}^{(l)}} z_{ij}^{(l)}(t)dt \quad . \quad . \quad . \quad (4)$$

Zatem, proces kształtowania się stanów zaawansowania czynności $(i,j)\in C$ można przedstawić następująco :

$$\frac{dz_{ij}}{dt} = \varphi_{ij}(z_{ij}(t);\ q_{ij}^{1}(t),\ldots,q_{ij}^{m}(t)),$$

$$l_{ij}=1,\ldots,m_{ij};\ l_{ij}\in r_{ij} \quad , \qquad . \quad . \quad . \quad (5)$$

$$t_i \leqslant t \leqslant t_i + t_{ij} \quad ,$$

przy istnieniu warunków :

$$z_{ij}(t_i) = 0 \quad , \quad z_{ij}(t_i + t_{ij}) = k_{ij} \quad . \quad . \quad . \quad (6)$$

$$(i,j) \in C$$

4. Intensywność wydatkowania każdego rodzaju zasobu przy wykonaniu czynności $(i,j) \in C$ może zmieniać się w granicach :

$$0 \leq u_{ij}^{(l)}(z_{ij}) \leq q_{ij}^{(l)} \leq v_{ij}^{(l)}(z_{ij}) \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (7)$$

gdzie $u_{ij}^{(l)}(z_{ij})$ i $v_{ij}^{(l)}(z_{ij})$ oznaczają odpowiednio dolną i górną granicę wartości funkcji odcinkami ciągłych dla $0 \leq z \leq k$ zaangażowania l-tego rodzaju zasobu $z_{ij}(t)$, przy wykonywaniu czynności (i,j) do chwili t , zgodnie z warunkami ograniczającymi od (1) do (7) .

5. Postęp w wykonaniu każdej czynności w dowolnej chwili $t_i \leq t \leq t_i + t_{ij}$ zależy od wydatkowania ilości $p_{ij}^{(l)}$, $l \in r_{ij}$ każdego rodzaju niezbędnego dla niej zasobu do chwili t oraz od intensywności ich użycia $q_{ij}^{(l)}$ $l \in r_{ij}$ w chwili t .

2. SFORMUŁOWANIE ZAGADNIENIA WSTĘPNEGO

2.1. Wariant A.

Powyższe założenia pozwalają sformułować dwie podstawowe grupy zadań alokacji zasobów, rozpatrywanych w ramach planu opracowywanego metodą analizy sieciowej (CPM, PERT).

Do pierwszej grupy zalicza się zwykle zadania dotyczące realizacji przedsięwzięcia w najkrótszym czasie w warunkach dysponowania ustaloną ilości każdego rodzaju zasobu, natomiast do drugiej grupy - zadania związane z wyznaczaniem minimalnych ilości każdego rodzaju zasobu, aby zrealizować przedsięwzięcie w ustalonym czasie.

Należy zauważyć, że zadanie zaliczane do pierwszej grupy można sformułować w postaci modelu liniowego, a w wyniku zastosowania programowania liniowego do jego rozwiązania ujawnią się rodzaje zasobów krytycznych i kolejnych - podkrytycznych. Zadaniom zaliczonym do drugiej grupy odpowiadają z reguły modele nieliniowe, a dla ich rozwiązania istnieje szereg metod programowania nieliowego, lecz o znacznym stopniu złożoności i pracochłonności. Dlatego też, nadal poszukuje się metod możliwie prostych i doprowadzających do uzyskania wyników z wymaganą dokładnością.

Jako zagadnienie wstępne dla obu powyższych typów zadań rozpatrzymy najkorzystniejszą alokację zadanej ilości każdego rodzaju zasobu dla wykonania jednej czynności (w ramach ustalonej sieci - planu) w najkrótszym czasie. Inaczej mówiąc, sprowadzamy zadanie do zbadania zależności $t_{ij} = (t_{ij}(p_{ij}^{(1)},\ldots,p_{ij}^{(m)}))$ w procesie opisanym wzorami (5), (6) i (7) oraz wynikającym z (1) ;

$$p_{ij}^{(1)} \geqslant \int_{t_i^{(1)}}^{t_i^{(1)}+t_{ij}^{(1)}} q_{ij}^{(1)}(t)dt \quad , \qquad . \quad . \quad . \quad (8)$$

$$1 = 1,\ldots,m \; ; \; 1 \in r_{ij}$$

aby dla wszelkich $r_{ij} \subset S$ uzyskać minimalny czas wykonania czynności (i,j). Zrozumiałe jest również, że rozpatrzeniu podlegają tylko alkacje w których :

1°. funkcja intensywności zużycia każdego zasobu z podzbioru $r_{ij} \subset S$ rodzajów zasobów niezbędnych dla wykonania czynności (i,j) :

$$\psi(z,q_{ij}^{1},\ldots,q_{ij}^{m}) \geqslant 0 \; ; \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (9)$$

2°. zależności (5), (6) i (8) przyjmą postać :

$$\int_0^{k_{ij}} \frac{1}{\psi(z,q_{ij}^{1},\ldots,q_{ij}^{m})} dz \leqslant t_{ij} \quad . \quad . \quad . \quad (10)$$

oraz

$$\int_0^{k_{ij}} \frac{q_{ij}^{(l)}(z)}{f(z,q_{ij}^1,\ldots,q_{ij}^m)}\,dz \leq p_{ij}^{(l)} \quad . \quad . \quad . (11)$$

$$l \in r_{ij} \ , \quad r_{ij} \subset S$$

przy czym funkcje $q_{ij}^{(l)}(z)$ spełnia warunek (7).

Wypada zauważyć, że jeśli alokację zasobów $p_{ij}^{(l)}$, $l=1,\ldots,m$ dla czynności $(i,j)\in C$ określa zbiór wartości $\{t_{ij}, p_{ij}^1,\ldots,p_{ij}^m\}$, spełniających warunki (10) i (11) przy ograniczeniach (7) i (9), to zbiór $\{q_{ij}^{(1)}(z),\ldots,q_{ij}^m(z)\}$ jest zbiorem wypukłym, domkniętym. Dowód powyższego twierdzenia przytoczono w "Dodatku" nr.1 do niniejszego rozdziału.

W świetle powyższego twierdzenia można przyjąć, że dla najmniejszej wartości t_{ij}, odpowiadającej ustalonemu zbiorowi wartości $(p_{ij}^1,\ldots,p_{ij}^m)$, wyrażenie $t_{ij} = t_{ij}(p_{ij}^1,\ldots,p_{ij}^m)$ będzie funkcją wypukłą, a obszar jej wartości wyznaczy pewien zbiór wypukły, który może być też zbiorem niedomkniętym. Jeśli więc wyrażenie (9) jest funkcją nieujemną rosnącą według argumentów $q_{ij}^1,\ldots,q_{ij}^m$, to obszar jej wartości określającej ilość l-tego rodzaju zasobu można wyznaczyć w przedziale, którego wielkość zależy od granic ustalonych według (7) dla intensywności użycia zasobu. Inaczej mówiąc, jeśli wprowadzimy oznaczenia :

$$U_{ij}^{(l)} = \int_0^{k_{ij}} f_l(z,\ u^1(z),\ldots,u^m(z))dz \quad . \quad . \quad . \quad (12)$$

$$V_{ij}^{(l)} = \int_0^{k_{ij}} f_l(z,v^1(z),\ldots,v^m(z))dz \quad . \quad . \quad . \quad (13)$$

to wspomniany wyżej obszar wartości dla funkcji (9) określą nierówności :

$$U_{ij}^{(l)} \leq p_{ij}^{(l)} \leq V_{ij}^{(l)} \quad \text{lub} \quad U_{ij}^{(l)} < p_{ij}^{(l)} \leq V_{ij}^{(l)} \qquad \ldots(14)$$

$$l = 1,\ldots,m \, .$$

Ponieważ wartości funkcji $t_{ij}(p_{ij}^{1},\ldots,p_{ij}^{m})$ nie rosną wraz ze wzrostem argumentów, to jej wartość minimalną można wyznaczyć z warunku (VIII) - (por "Dodatek" nr.1) czyli

$$\sum_{l=o}^{m} g_l f_l(z_{ij},\tilde{q}^1(z),\ldots,\tilde{q}^m(z)) =$$

$$= \min_{q^1,\ldots,q^m} \sum_{l=o}^{m} g_l f_l(z_{ij},q^1,\ldots,q^m) \quad . \quad . \quad . \quad (15)$$

Oczywiście, wartość tę otrzymamy bądź w postaci parametrycznej (zależnie od g^o, $g^1,\ldots,g^m$), bądź nawet w postaci jawnej.

PRZYKŁAD 1.

Dla wykonania czynności (i,j) trzeba użyć jednego rodzaju zasobu (l=1) z intensywnością q_{ij}, przy czym funkcja $f(z_{ij},q_{ij})$ nie zależy od $q_{ij} \geqslant 0$.

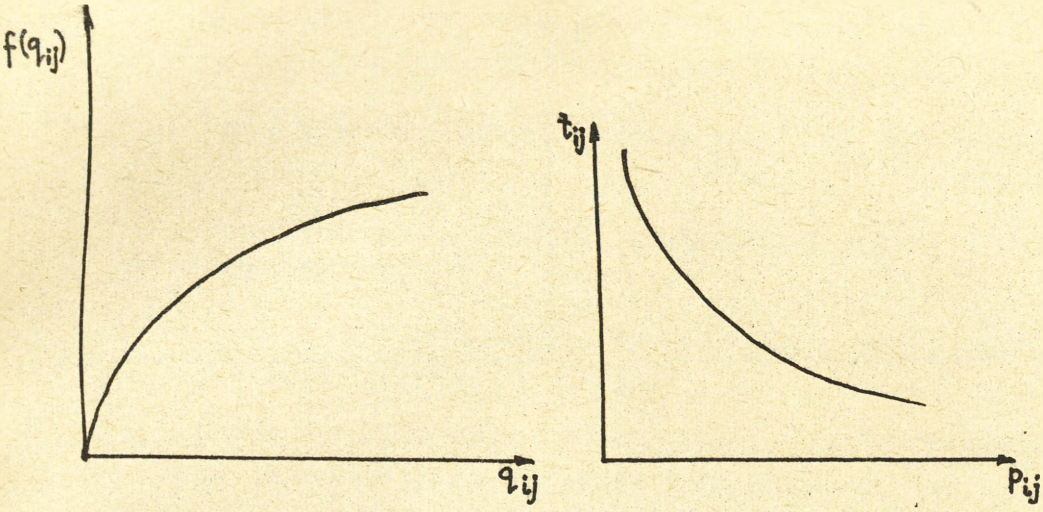
Niech $f(q_{ij}) = \sqrt{\alpha q_{ij}}$. Z (15) wyznaczymy $q_{ij} = \frac{g^o}{g^1}$,

a następnie : $t_{ij} = \frac{k_{ij}}{\alpha}\sqrt{\frac{g^o}{g^1}}$ oraz $p_{ij} = \frac{k_{ij}}{\alpha}\sqrt{\frac{g^1}{g^o}}$.

Stąd, jeśli

$$U = \left(\frac{k_{ij}}{\alpha}\right)^2 , \quad \text{wtedy} \quad t_{ij} = \frac{U}{p_{ij}} \quad . \quad . \quad . \quad (16)$$

Oczywiście, funkcja $f(z_{ij}, q_{ij})$ należy do klasy funkcji przedstawionych na rys. 1 .



Rysunek 1.

PRZYKŁAD 2. Założenia podstawowe - jak w przykładzie 1. Ponadto, niech $f(q_{ij}) = \alpha q_{ij} + \beta$, $(0 \leq q_{ij} \leq v)$.

Przyjmując $\frac{g^0}{g^1} < \frac{\beta}{\alpha}$ z wyrażenia(15) otrzymamy $q_{ij}=0$, natomast jeśli $\frac{g^0}{g^1} > \frac{\beta}{\alpha}$ wtedy $q_{ij} = v$. Wreszcie, gdy $\frac{g^0}{g^1} = \frac{\beta}{\alpha}$ wówczas z warunku (15) nie można wyznaczyć wartości q_{ij} , lecz wtedy mając na względzie liniowość funkcji $f(q_{ij})$, por - rys 2, otrzymamy :

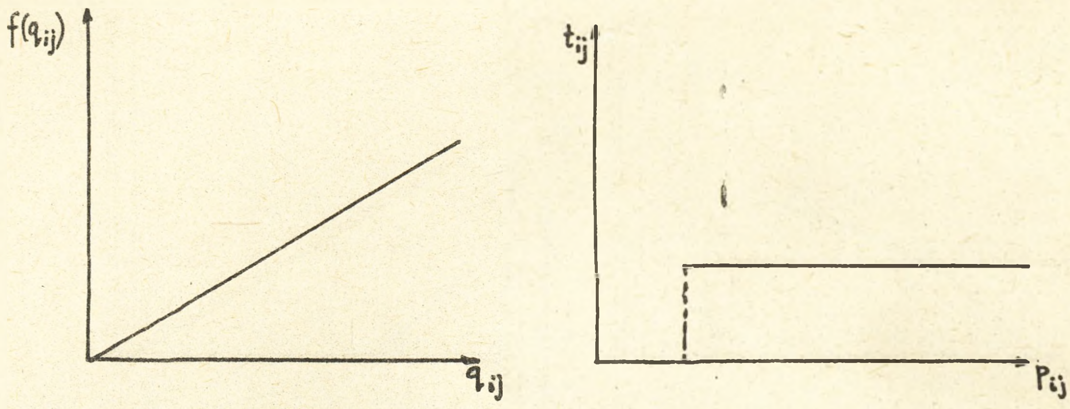
$$g^0 t_{ij} + g^1 p_{ij} = \frac{g^1 k_{ij}}{\alpha} .$$

Stąd, czas wykonania czynności będzie :

$$t_{ij} = \begin{cases} -\frac{\alpha}{\beta} \cdot p_{ij} + \frac{k_{ij}}{\beta} & \text{przy } 0 \leq p_{ij} \leq \frac{k_{ij} v}{\alpha v + \beta} , \\ \frac{k_{ij}}{\alpha v + \beta} & \text{przy } p_{ij} \geq \frac{k_{ij} v}{\alpha v + \beta} . \end{cases} \quad . . . (17)$$

W przypadku gdy $\beta = 0$, czas wykonaniaczynności wyniesie :

$$t_{ij} = \frac{k_{ij}}{\alpha v} = \text{const} , \quad . \quad . \quad . \quad . \ (18)$$



Rysunek 2 .

2.2. Wariant B .

Jak można było zauważyć, w wariancie A zasoby były wyróżnione tylko ze względu na ich rodzaj, postać fizyczną, a nie - rolę funkcjonalną, określoną przez technologię procesu czy procesów zachodzących w danej czynności. W wariancie B wprowadzimy ponadto podział zasobów ze względu na charakter ich udziału przy wykonaniu danej czynności. Dla podkreślenia metody podejścia do rozwiązywania zadań alokacji wystarczy jeśli wyróżnimy dwa zbiory zasobów (co nie oznacza, że nie może ich być więcej), z których jeden dotyczy wszelkich środków o charakterze <u>środków trwałych</u> (np.mogą nimi być maszyny, narzędzia, broń, transport, łączność, drożnia itp.), natomiast drugi obejmuje wszelkie środki materialne podlegające przetwarzaniu (np.surowce, półfabrykaty, amunicja, woda, energia itp.).

W związku z tym podziałem wprowadzimy dodatkowe oznaczenia :

$l_{ij(1)} = (1,2,\ldots,m_{ij(1)})$ - numer zasobu pierwszej kategorii (środki trwałe) wchodzące do podzbioru $r_{ij(1)} \in S_1$ (zbioru zasobów pierwszej kategorii) niezbędnego dla wykonania czynności (i,j) ;

$l_{ij(2)} = (1,2,\ldots,m_{ij(2)}$ - numer zasobu drugiej kategorii środki przetwarzania), wchodzącego do podzbioru $r_{ij(2)} \in S_2$ (zbioru zasobów drugiej kategorii) niezbędnego dla wykonania czynności (i,j) ;

Q_{ij} - pełny stan zaawansowania czynności (i,j), odpowiadający np. ogólnej masie wykonanych prac ;

$p_{l_{ij}}(1)$ - ilość środków trwałych przeznaczonych do wykonania czynności (i,j) ;

$q_{l_{ij}}(1)$ - norma wydajności środków trwałych przy wykonywaniu czynności (i,j) ;

$\varrho_{l_{ij}}(2)$ - intensywność zużycia środka drugiej kategorii przy realizacji czynności (i,j) ;

$k_{l_{ij}}(2)$ - norma zużycia l-tego rodzaju zasobu drugiej kategorii na jednostkę środka pierwszej kategorii w ciągu jednostki czasu.

Ilość środków pierwszej kategorii jest funkcją czasu t w granicach najwcześniejszego terminu rozpoczęcia czynności t^w_{ij} i najpóźniejszego terminu jej zakończenia t^p_{ij}, czyli

$$\bar{p}_{l_{ij}(1)}(7) = \begin{cases} p_{l_{ij}}(1) & \text{dla} \quad t^w_{ij} \leq t \leq t^p_{ij} \\ 0 & \text{dla pozostałych } t \end{cases} \quad \ldots\ldots(19)$$

Z punktu widzenia ilości środków pierwszej kategorii, wydzielonych do wykonania czyności (i,j), czas ich zaangażowania wyniesie :

$$t_{ij} = \frac{Q_{ij}}{\sum\limits_{ij(1)=1}^{m_{ij(1)}} q_{l_{ij}}(1) \cdot p_{l_{ij}}(1)} \quad , \quad \ldots \quad (20)$$

a intensywność zużycia środków drugiej kategorii :

$$\varrho_{l_{ij}}(2) = \sum_{l_{ij}(1)}^{m_{ij}(1)} k_{l_{ij}}(2) \cdot p_{l_{ij}}(1) \quad \ldots \quad (21)$$

Przyjmując, że t^w_{ij} zostało ustalone, wtedy na podstawie (20) otrzymamy :

$$t^p_{ij} = t^w_{ij} + t_{ij} \quad ,$$

z czego wynika, że $\bar{p}_{l_{ij}(1)}(t)$, według (19), jest określone, a tym samym określony jest wektor

$$\tilde{p}_{l_{ij}}(1) = (p_{1_{ij}}(1), p_{2_{ij}}(1), \ldots, p_{m_{ij}}(1)) ,$$

oraz funkcja

$$\check{p}_{l_{ij}}(1) = \bar{p}_{l_{ij}}(1)(t, t^{w}_{ij}, \tilde{p}_{l_{ij}}(1)) = \bar{p}_{l_{ij}(1)}(t) . \qquad (22)$$

Ponieważ istotnym jest sprzężenie zasobów obu kategorii, dokonamy tego przez wprowadzenie czynnika dla nich wspólnego, w celu wyznaczania globalnego "kosztu" wykonania poszczególnych czynności, a tym samym - całego przedsięwzięcia, a ponadto (co wydaje się nie mniej ważne), aby wyznaczyć sumatyczną wielkość nakładów "zamrożonych" w procesie realizacji przedsięwzięcia.

Jeśli jako uzupełniające kryterium optymalności zagadnienia alokacji przyjmiemy minimalizację z a m r o ż o n y c h nakładów wydatkowanych na zasoby obu kategorii, wtedy zagadnienie alokacji optymalnej, można sprowadzić do wyznaczenia takiego harmonogramu wykonywania czynności, w którym ciągi

- terminów rozpoczęcia poszczególnych czynności :

$$t^{(r)} = \langle t_1^{(r)}, t_2^{(r)}, \ldots, t_{n-1}^{(r)} \rangle$$

- terminów zakończenia poszczególnych czynności :

$$t^{(z)} = \langle t_2^{(z)}, \ldots, t_n^{(z)} \rangle$$

stworzą harmonogram optymalny według przyjętego kryterium.

W pewnych przypadkach rolę czynnika sprzęgającego zasoby obu kategorii może spełniać jednostka pieniężna, w innych - jednostka siły roboczej, niezbędnej do obsługi jednostki zasobu pierwszej kategorii, przy czym w ostatnim przypadku można wprowadzić heurystycznie dobrane wagi stanowiące o jej ważności (wartości) ze względu na specjalizację.

Oznaczmy symbolem $c_{l_{ij}(1)}$ koszt zaangażowania jednostki l-tego środka pierwszej kategorii $(l_{ij}=1,\ldots,m_{ij})$ w ciągu jednostki czasu wykonywania czynności (i,j) oraz niech $d_{(1)}$ wyraża stopę procentową dla nakładów niezbędnych do wykonania każdej czynności. Wtedy, koszt zaangażowania środków pierwszej kategorii przy wykonywaniu czynności (i,j) wyniesie :

$$c_{ij(1)} = d_{(1)} \sum_{l_{ij(1)}}^{m_{ij(1)}} c_{l_{ij}(1)} \cdot p_{l_{ij}(1)} \quad , \quad . \quad . \quad . \quad (23)$$

a wielkość zamrożonych nakładów :

$$c'_{ij(1)} = c_{ij(1)} (\lambda - t_j^{(2)}) , \quad . \quad . \quad . \quad (24)$$

$$(i = 1,2,\ldots,n-1)$$
$$(j = 2,3,\ldots,n)$$
$$(i \neq j)$$

gdzie λ jest końcowym terminem wykonania całego przedsięwzięcia.

Utrzymując analogiczne oznaczenia dla zasobów drugiej kategorii, koszt ich zaangażowania i wielkość zamrożonych nakładów na zasoby tej kategorii przy wykonywaniu czynności (i,j), odpowiednio wyniosą :

$$c_{ij(2)} = d_{(2)} \sum_{l_{ij(2)}}^{m_{ij(2)}} c_{l_{ij}(2)} \cdot p_{l_{ij}(2)} \quad , \quad . \quad . \quad . \quad (25)$$

$$c'_{ij(2)} = c_{ij(2)} (\lambda - t_{ij}^{(z)}) \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (26)$$

Stąd ogólny koszt wykonania czynności (i,j) :

$$\mathbb{C}_{ij} = c_{ij(1)} + c_{ij(2)} , \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (27)$$

a ogólna wielkość zamrożonych nakładów :

$$\mathbb{C}'_{ij} = c'_{ij(1)} + c'_{ij(2)} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (28)$$

Dla czynności (i,j) wykonywanej w przedziale $\langle t_{ij}^{(r)}, t_{ij}^{(z)} \rangle$ optymalny koszt wyniesie :

$$\mathbb{C}_{ij}^{o}(t) = \begin{cases} \mathbb{C}_{ij} & \text{przy} \quad t_{ij}^{(r)} \leq t_{ij}^{(z)} \\ 0 & \text{dla pozostałych} \quad t \end{cases} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (29)$$

Ponieważ $\bar{p}_{l_{ij}(1)}(t)$ oznacza ilość zasobów pierwszej kategorii użytych w chwili t przy wykonywaniu czynności (i,j), zatem ogólna ilość tego zasobu, niezbędna dla tej czynności, wyniesie :

$$W_{l_{ij}(1)} = \int_{-\infty}^{+\infty} \bar{p}_{l_{ij}(1)}(t)dt = p_{l_{ij}(1)}\, t_{ij} , \quad . \quad . \quad . \quad (30)$$

która powinna odpowiadać zużyciu zasobu drugiej kategorii ze względu na intensywność, czyli :

$$U_{l_{ij}(2)} = \int_{-\infty}^{+\infty} \bar{\varrho}_{l_{ij}(2)}(t)dt = \varrho_{l_{ij}(2)} \cdot t_{ij} \quad . \quad . \quad . \quad (31)$$

Stąd, koszt wykonania czynności (i,j) wyniesie :

$$\mathfrak{C}_{ij} = \int_{-\infty}^{+\infty} \bar{c}_{ij}(t)dt = c_{ij} \cdot t_{ij} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (32)$$

W ten sposób, otrzymamy :

a) czas wykonania czynności (i,j) :

$$t_{ij} = \frac{1}{\sum\limits_{l_{ij}(1)} q_{l_{ij}(1)} \cdot p_{l_{ij}(1)}} Q_{ij} \quad ; \quad . \quad . \quad . \quad (33)$$

b) ogólną ilość zasobu drugiej kategorii :

$$\varrho_{ij(2)} = \sum_{l_{ij}(1)} k_{l_{ij}(1,2)} \cdot p_{l_{ij}(1)} \quad ; \quad . \quad . \quad . \quad (34)$$

c) ogólny koszt wykonania czynności :

$$\mathfrak{C}_{ij} = \sum_{l_{ij}(2)=1}^{m_{ij}(2)} c_{ij(2)} \sum_{l_{ij}(1)=1}^{m_{ij}(1)} k_{l_{ij}(1,2)}\, p_{l_{ij}(1)} +$$

$$+ d \sum_{l_{ij}(1)=1}^{m_{ij}(1)} c_{l_{ij}(1)=1} \cdot p_{l_{ij}(1)} \quad ; \quad . \quad . \quad . \quad (35)$$

d) ogólna ilość zasobu pierwszej kategorii :

$$W_{l_{ij}(1)} = Q_{ij} \frac{p_{l_{ij}(1)}}{\sum\limits_{l_{ij}(1)} k_{l_{ij}(1)} \cdot p_{l_{ij}(1)}} \quad ; \ldots \quad . \quad (36)$$

e) ogólna ilość zasobu drugiej kategorii :

$$U_{l_{ij}(2)} = Q_{ij} \frac{\sum_{L_{ij}(1)} k_{lij}(1,2) \cdot p_{lij}(1)}{\sum_{L_{ij}(1)} q_{lij}(1) \cdot p_{lij}(1)} \quad . \quad . \quad . \quad (37)$$

3. ZAGADNIENIE MINIMALIZACJI CZASU WYKONANIA PRZEDSIEWZIECIA

3.1. Przypadek słabej wypukłości zbioru t_{ij}.

Zagadnienie pierwotne alokacji zasobów sprowadza się do wyznaczenia takich terminów zdarzeń t_j $(i < j,\ i=0,1,2,\dots,n-1)$, które spełniają zależność rekurencyjną :

$$t_o = 0$$

$$t_j = \max_{(i,j) \in C} \left[t_i + t_{ij}(p^1_{ij},\dots,p^s_{ij}) \right] \quad . \quad . \quad . \quad (38)$$

gdzie C jest zbiorem czynności, składających się na przedsięwzięcie w którym należy zaangażować s rodzajów zasobów $(l=1,2,\dots,s)$. Jak wynika z twierdzenia w rozdz. 2, czas wykonania przedsięwzięcia określa funkcja wypukła zmiennych p^l_{ij} $(i,j) \in C$, $(l=1,\dots,s)$ tworzących zbiór wypukły. W przypadkach, gdy funkcję t_{ij} można sformułować explicite, to rozwiązanie zadania ogólnego uzyska się przy pomocy dowolnej metody minimalizującej wielkość λ, tj. termin zakończenia przedsięwzięcia. Ograniczoność zastosowań takiego podejścia do minimalizacji funkcji wypukłych skłania do skorzystania dualnej metody programowania nieliniowego, wypukłego, jako bardziej efektywnej, a co ważniejsze - ogólniejszej.

Zastosowanie tej metody, w celu uzyskania optymalnej alokacji zasobów, można sprowadzić do następującego wywodu.

Żądamy, aby minimalny czas realizacji przedsięwzięcia (λ=min), spełniał następujące warunki :

$$1^o . \quad t_i - t_j + t_{ij}(p^1_{ij},\dots,p^s_{ij}) \le 0 \ ; \quad . \quad . \quad . \quad (39)$$

$$2^o . \quad \sum_{(i,j)\in C} p_{lij} \leq P^{(l)} , \quad (l=1,\ldots,s) \quad . \quad . \quad . \quad (40)$$

Stosując metodę mnożników Lagrange'a można sformułować następującą funkcję :

$$L = \lambda + \sum_{(i,j)\in C} \mu_{ij}\left[t_i - t_j + t_{ij}(p^1_{ij},\ldots,p^s_{ij})\right] +$$

$$+\sum_{l=1}^{s} \eta_l \left[\sum_{(i,j)\in C} p^l_{ij} - P^{(l)}\right] , \quad . \quad . \quad (41)$$

gdzie μ_{ij} $(i,j)\in C$ i η_l $(l=1,\ldots,s)$ są mnożnikami Lagrenge'a.

Zagadnienie optymalizacji sprowadzi się do znalezienia takich nieujemnych liczb μ_{ij} $(i,j)\in C$ i η_l $(l=1,\ldots,s)$ dla których t_i $(i=0,1,\ldots,n-1)$ i p_{lij} $(i,j)\in C,\ l=1,\ldots,s)$, będą minimalne. Inaczej mówiąc, rozwiązanie polega na znalezieniu punktu środkowego funkcji (41), który maksymalizuje wartości zmiennych μ_{ij} i η_l i minimalizuje wartości zmiennych t_i i p_{lij} .

Wprowadzając dodatkowo numer σ zdarzenia pośredniego, wyrażenie (41) przyjmie postać :

$$L = \sum_{\sigma=1}^{n-1}\left[\sum_{(\sigma,j)\in C} \mu_{\sigma j} - \sum_{(i,\sigma)\in C} \mu_{i\sigma}\right] t_\sigma +$$

$$+\left[1 - \sum_{(i,n)\in C} \mu_{in}\right]\lambda + \sum_{(i,j)\in C}\left[\mu_{ij}\, t_{ij}(p^1_{ij},\ldots,p^s_{ij}) +\right.$$

$$\left. + \sum_{l=1}^{s} \eta_l\, p_{lij}\right] - \sum_{l=1}^{s} \eta_l P^{(l)} \quad . \quad . \quad . \quad (42)$$

Dla minimalizacji wartości t_i i p_{lij} warunkiem koniecznym i dostatecznym jest istnienie takiego zbioru liczb nieujemnych μ_{ij} i η_l , który w stosunku do poszukiwanego, najktótszego terminu zakończenia przedsięwzięcia, spełnia następujące warunki.

$$1^{o}.\quad \mu_{ij}=0\,,\quad \text{jeśli}\quad t_i-t_j+t_{ij}(p^1_{ij},\ldots,p^s_{ij})<0\,,\ (i,j)\in C,$$
$$\eta_l=0\,,\quad \text{jeśli}\quad \sum_{(i,j)\in C} p^{(l)}_{ij}<P^{(l)},\ (l=1,\ldots,s)\ ; \qquad (43)$$

$$2^{o}.\quad \sum_{(i,\sigma)\in C}\mu_{i\sigma}-\sum_{(\sigma,j)\in C}\mu_{j\sigma}=0\,,\ (\sigma=1,\ldots,n-1),$$
$$\sum_{(i,n)\in C}\mu_{i,n}=1\ ; \qquad \ldots (44)$$

$$3^{o}.\quad \mu_{i,j}t_{ij}(p^1_{ij},\ldots,p^s_{ij})+\sum_{l=1}^{s}\eta_l\cdot P^{(l)}=$$
$$=\min\left[\mu_{ij}\,t_{ij}(p^1_{ij},\ldots,p^s_{ij})+\sum_{l=1}^{s}\eta_l\,p^{(l)}_{ij}\right] \qquad \ldots (45)$$

Jak można zauważyć, zależności (43) wynikają z wyrażenia (41), natomiast - (44) i (45) z - (42).

Powyższe podejście do optymalizacji (względem λ =min) sprowadza się do dualnego zagadnienia wyznaczenia wartości zmiennych μ_{ij} i η_l. Oczywiście, w przypadku przejęcia liniowej zależności między czasem wykonania czynności i wydatkowanymi zasobami (przy l=1),

$$t_{ij}=-\alpha_{ij}\,p_{ij}+\beta_{ij}\,,\quad U_{ij}\leqslant p_{ij}\leqslant V_{ij}\,,\qquad \ldots (46)$$

co odpowiada zależnościom (17).

Na tej drodze można również uzyskać rozwiązanie przybliżone zagadnienia ogólniejszego, a mianowicie, aproksymując wypukły zbiór wartości t_{ij} względem odcinkami liniowych wartości p_{ij}.

3.2. Przypadek silnej wypukłości zbioru t_{ij}.

Przyjmując istnienie silnej wypukłości czasu t_{ij} względem ilości zużytych zasobów p_{lij}, $(i,j)\in C$, $l=1,\ldots,s$, utrzymujemy w mocy stwierdzenie, zawarte w rozdziale 3, 1, o nieujemności liczb μ_{ij} i η_l, spełniających warunek (44). Przyjmiemy ponadto istnienie warunku określającego zależność w sposób ciągły wartości $p^1_{ij}, \ldots, p^s_{ij}$ (wyznaczanych jednoznacznie z (45)) od μ_{ij} i η_l $(l=1,\ldots,s)$.

Podobnie jak w przypadku słabej wypukłości zbioru wartości t_{ij} , optymalną alokację zasobów $p^1_{ij},\ldots,p^s_{ij}$ względem czasu t_{ij} = min (a tym samym λ = min) wyznaczymy przy pomocy funkcji (42), której wartość należy maksymalizować. Wypada przy tym stwierdzić istnienie charakterystycznej zależności p_{lij} $(i,j)\in C$, $l=1,\ldots,s$, od parametrów μ_{ij} , η_l .

Mianowicie, rozpatrując warunek (VIII), przedstawiony w "Dodatku nr.1" do niniejszego rozdziału, tj.

$$\sum_{l=0}^{m} g_l f_l\,(z_{ij}, \tilde{q}^1(z),\ldots,\tilde{q}^m(z)) =$$

$$= \min_{q^1,\ldots,q^m} \sum_{l=0}^{m} g_l f_l\,(z_{ij}, q^1,\ldots,q^m) \quad . \quad . \quad (VIII)$$

i zastępując symbole g_l i m (wprowadzonym tylko dla przypadku rozpatrywania czynności w oderwaniu (por.rodz.2)) odpowiednio symbolami η_l i s , można stwierdzić, że wyznaczenie optymalnych wartości $p^1_{ij},\ldots,p^s_{ij}$ nie jest uzależnione w stopniu koniecznym od znajomości parametrów μ_{ij} i η_l w postaci jawnej. Istotnie, przekształcając (VIII) w świetle (45), otrzymamy.

$$\min_{p^1,\ldots,p^s} \left[\mu_{ij}\, t_{ij}\,(p^1,\ldots,p^s) + \sum_{l=1}^{s} \eta_l\, p^l\right] =$$

$$= \int_0^{k_{ij}} \min_{q^1,\ldots,q^s} \left[\mu_{ij}\, \bar{f}_{ij}(z,q^1,\ldots,q^s) + \sum_{l=1}^{s} \eta_l\, f^l_{ij}(z,q^1,\ldots,q^s)\right] dz \; . \; (47)$$

Oczywiście, spełniając warunki (44) i (45), otrzymamy :

$$\frac{\partial L}{\partial \mu_{ij}} = t_{ij}(p^1_{ij},\ldots,p^s_{ij}) \;, \quad (i,j)\in C \quad . \quad . \quad . \; (48)$$

$$\frac{\partial L}{\partial \eta_l} = \sum_{(i,j)\in C} p_{lij} - P^l \quad , \quad (l=1,\ldots,s) \quad . \quad . \quad . \quad (49)$$

Wyrażenia te są gradientami funkcji L . Aby zmaksymalizować funkcję L z uwzględnieniem warunku (44) należy obliczyć rzut jej gradientu (48) na liniową rozmaitość, utworzoną przez ograniczenia (44).

Jeśli wprowadzimy oznaczenia uzupełniające dla $c_{ij} \equiv (i,j)\in C$, gdzie w zbiorze czynności N będzie numerem ostatniego elementu, czyli $1 \leqslant c_{ij} \leqslant N$, wtedy współczynniki ograniczeń liniowych (44) można przedstawić w postaci macierzy R o elementach $n \times N$, przyjmujących następujące wartości :

$$R = \begin{cases} 1 , & \text{gdy } c_{ij} \equiv (i,\sigma) \text{ dla dowolnego } i, \\ -1 , & \text{gdy } c_{ij} \equiv (\sigma,j) \text{ dla dowolnego } j, \\ 0 & \text{w pozostałych przypadkach,} \end{cases} \quad . \quad . \quad . \quad (50)$$

$$\sigma = 1,\ldots,n \quad , \quad c_{ij} \equiv 1,\ldots,N \ .$$

Oznaczając przez R^T macierz transponowaną względem macierzy R , a przez D - macierz jednostkową $N \times N$, można przedstawić macierz rzutowaną na liniową rozmaitość (44), czyli :

$$H = D - R^T(R\,R^T)^{-1} R \quad . \quad . \quad . \quad (51)$$

Zauważmy przy tym, że elementy macierzy RR^T mają postać ułatwiającą wyznaczenie macierzy odwrotnej, czyli

$$RR^T = \begin{cases} r_i , & \text{jeśli } i = j , \\ -1 , & \text{jeśli } (i,j)\in C \text{ lub } (j,i)\in C , \\ 0 , & \text{w pozostałych przypadkach} \end{cases} \quad . \quad . \quad (52)$$

gdzie r_i jest liczbą czynności dochodzących do i-tego zdarzenia.

W celu obliczenia wartości mnożników Lagrange'a $\mu_{ij} \equiv \mu_c$ i η_l zastosujemy metodę iteracji, w której kolejne kroki oznaczymy symbolem $\varkappa = 0,1,2,\ldots$ Jeśli przez $h_{c\varkappa}$ oznaczymy elementy macierzy (51), a $\gamma_\varkappa$ będzie wielkością stałą dodatnią, występującą w iteracji o numerze $\varkappa$, wtedy metodę iteracji można przedstawić następująco :

$$\mu_c^{\varkappa+1} = \mu_c^{\varkappa} + \zeta_\varkappa \sum_{c=1}^{N} h_{c\alpha}\, t_{c\alpha}^{\varkappa} \quad , \quad (c=1,\ldots,N), \quad . \quad . \qquad (53)$$

$$\eta_l^{\varkappa+1} = \eta_l^{\varkappa} + \zeta_\varkappa \left[\sum_{c=1}^{N} (p_c^l)^{\varkappa} - P^{(l)} \right] \quad . \quad . \quad . \qquad (54)$$

$$l = 1,\ldots,s \quad ; \quad \varkappa = 0,1,2,\ldots$$

Z powyższej metody można korzystać następująco :

1. Do iteracji 0 wystarczy wprowadzić dowolne z liczb μ_{ij}^{o} i η_l^{o} spełniających warunki (43) i (44).
2. Podstawiając ze znanych $\mu_{ij}^{\varkappa}$, $\eta_l^{\varkappa}$ $(\varkappa=0,1,\ldots)$ obliczyć z zależności (45) i (47) obliczyć $t_{ij}^{\varkappa}$ i $(p_{ij}^{(l)})^{\varkappa}$.
3. Dobrać takie wartości $\zeta_\varkappa$ aby prawe strony wyrażeń (53) i (54) były dodatnie.

Można też stwierdzić, że wybór wielkości $\zeta_\varkappa$ $(\varkappa=0,1,2,\ldots)$ sprowadza się do wyznaczenia pewnej stałej, dostatecznie małej liczby, jeśli tylko zależności $p_{ij}^1,\ldots,p_{ij}^s$ od μ_{ij} i $\eta_1,\ldots,\eta_s$ są ciągłe i gładkie.

Na tej drodze uzyskamy nie tylko monotoniczną zbieżność odpowiednich wartości funkcji Lagrange'a (L) względem minimalnego czasu wykonania przedsięwzięcia (λ_{min}), lecz zapewniamy też zbieżność wartości zmiennych (występujących tak w zagadnieniach prostych jak i dualnych) względem ich granicznych wartości optymalnych.

4. ZAGADNIENIE MINIMALIZACJI ZASOBOW (w warunkach ustalonego czasu przeznaczonego na wykonanie przedsięwzięcia).

Aby wstępnie uprościć rozważania przyjmiemy, że przedsięwzięcie jest wykonywane tylko przy pomocy jednego rodzaju zasobu w ilości p_{ij} dla czynności $(i,j) \in C$, wykonywanej w czasie ustalonym t_{ij} . Niech z kolei ilość tego zasobu niezbędnego do wykonania czynności (i,j) w czasie t_{ij} będzie funkcją $p_{ij}(t_{ij})$ znaną i różniczkowalną w sposób ciągły, czyli

$$\gamma_{ij}(t_{ij}) = \frac{dp_{ij}}{dt_{ij}} \quad , \quad (i,j) \in C \quad . \quad . \quad . \quad (55)$$

Zagadnienie wyznaczenia wielkości P, tj. minimalnej ilości danego zasobu dla całego przedsięwzięcia, które należy wykonać w ustalonym czasie λ , rozwiążemy w sposób odwrotny w stosunku do zastosowanego w rozdz. 3 .

Wiadomo, że rozwiązanie optymalne powinno spełniać warunek :

$$\frac{\partial P}{\partial t} = 0 \quad , \quad (\sigma = 1,2,\ldots,n) \quad , \quad . \quad . \quad (56)$$

przy

$$t_{ij} = t_j - t_i \quad , \quad t_o = 0 \quad , \quad t_n = \lambda ,$$

oraz

$$P = \sum_{(i,j) \in C} p_{ij}(t_j - t_i) \quad . \quad . \quad . \quad (57)$$

Uwzględniając zależność (55) można równanie (56) przedstawić w następującej postaci :

$$\left. \begin{array}{l} \sum\limits_{(i,\sigma) \in C} \gamma_{i\sigma}(t_\sigma - t_i) - \sum\limits_{(i,j) \in C} \gamma_{\sigma j}(t_j - t_\sigma) = 0 \\ (\sigma = 1,\ldots,n) \ . \end{array} \right\} \quad . \quad . \quad (58)$$

stwierdzając przy tym, że wyrażono warunki konieczne (56) i wystarczające (57) dla optymalnej alokacji zasobów, a wynikające z wypukłości p_{ij} względem q_{ij} .

Zauważmy wreszcie interesującą współzależność między warunkami (44) i (45), tworzonymi dla zagadnienia minimalizacji czasu wykonania przedsięwzięcia (w warunkach zadanej ilości zasobów, a warunkiem (58) dla zagadnienia odwrotnego. Nie trudno stwierdzić, że jeśli dla wykonania przedsięwzięcia w zadanym czasie λ należy wydatkować dany rodzaj zasobu w ilości minimalnej równej P , to przy zadanej ilości P tegoż zasobu, minimalny czas λ_{min} wykonania przedsięwzięcia wyznaczą dualne zmienne p_{ij} i q_{ij} z warunków (44) i (45) a mianowicie :

$$\eta = - \frac{1}{\sum_{(\sigma,n)\in C} \gamma_{\sigma n}(t_n - t_\sigma)} \quad . \quad . \quad . \quad (59)$$

$$\mu_{ij} = \eta\left[-\gamma_{ij}\,(t_j - t_l)\right], \quad (i,j)\in C \;, \quad . \quad . \quad (60)$$

gdzie t_σ w (59) (= 1,...,n) oznacza optymalne terminy zdarzeń wynikające z zaangażowania minimalnej ilości zasobów.

Korzystając z proponowanej metody iteracyjnej, wielkość t_σ wyznaczymy z wzoru :

$$t_\sigma^{\varkappa+1} = t_\sigma^{\varkappa} + \gamma_\varkappa\left[\sum_{(\sigma,j)\in C} \gamma_{\sigma j}(t_j^{\varkappa} - t_\sigma^{\varkappa}) - \right.$$

$$\left. - \sum_{(i,\sigma)\in C} \gamma_{i\sigma}(t_\sigma^{\varkappa} - t_i^{\varkappa})\right] , \quad . \quad . \quad . \quad (61)$$

gdzie $\gamma_\varkappa$ [$\varkappa$=o,1,...) jest numerem iteracji] wyraża wielkości dodatnie, spełniające warunek

$$0 < t_\sigma^{\varkappa+1} < \lambda \;, \quad t_i^{\varkappa+1} < t_j^{\varkappa+1} \; (i,j)\in C \;.$$

I

DODATEK nr 1

DOWOD twierdzenia o wypukłości i domknięciu zbioru wartości $(t^1_{ij}, p^1_{ij}, \dots, p^m_{ij})$ dla alokacji zasobów $(q^1_{ij}(z), \dots, q^m_{ij}(z))$ przy spełnieniu warunków (10), (11) i ograniczeń (7), (9).

Oznaczając

$$x^l_{ij} = \int_0^{k_{ij}} f_l(z_{ij}, q^1_{ij}(z), \dots, q^m_{ij}(z))dz \quad . \quad . \quad . \quad (I)$$

$$l = 1, \dots, m \ ; \quad (i,j) \in C$$

można przyjąć, że punkty :

$$\begin{aligned} \tilde{x}_{ij} &= (\tilde{x}^o_{ij}, \tilde{x}^1_{ij}, \dots, \tilde{x}^m_{ij}) \\ \tilde{\tilde{x}}_{ij} &= (\tilde{\tilde{x}}^o_{ij}, \tilde{\tilde{x}}^1_{ij}, \dots, \tilde{\tilde{x}}^m_{ij}) \end{aligned} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (II)$$

odpowiadają dwu różnym lecz dopuszczalnym alokacjom zasobów :

$$\begin{aligned} &(\tilde{q}^1_{ij}(z), \dots, \tilde{q}^m_{ij}(z)) \\ &(\tilde{\tilde{q}}^1_{ij}(z), \dots, \tilde{\tilde{q}}^m_{ij}(z)) \end{aligned} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (III)$$

Z kolei wprowadzimy addytywną funkcję wektorową na zbiorze E z odcinka $[0, k_{ij}]$, a mianowicie :

$$\mathbf{F}(E) = (F_o(E), F_1(E), \dots, F_m(E)) .$$

$$\mathbf{F}_l(E) = \int_E \Big[f_l(z_{ij}, \tilde{\tilde{q}}^1(z), \dots, \tilde{\tilde{q}}^m(z) - f_l(z_{ij}, \tilde{q}^1(z), \dots, \tilde{q}^m(z)) \Big] dz \ , \quad . \quad . \quad (IV)$$

$$(l = 0, 1, \dots, m) .$$

Ponieważ zbiór $\mathbf{F}(E)$ jest wypukły i domknięty, to zbiór $\mathbf{F}(E) + \tilde{x}$ również ma te własności, a stąd (IV) wyznacza zbiór zawierający wszystkie punkty odcinka $(\tilde{x}, \tilde{\tilde{x}})$. Zauważmy jednak, że

II

$$F_l(E) + \tilde{x}^l_{ij} = \int_0^{k_{ij}} f_l(z_{ij}, q^1_E(z), \ldots, q^m_E(z))dz \,, \qquad (V)$$

$$(l = 0,1,\ldots,m) \,,$$

przy czym

$$q^l_E(z) = \begin{cases} \tilde{\tilde{q}}^l_{ij}(z) & \text{jeśli} \quad z_{ij} \in E \,, \\ \tilde{q}^l_{ij}(z) & \text{jeśli} \quad z_{ij} \in [0, k_{ij}] \setminus E \,, \end{cases} \qquad (VI)$$

z czego wynika warunek wypukłości zbioru $(t_{ij}, p^1_{ij}, \ldots, p^m_{ij})$.
Aby ponadto uzasadnić domknięcie tego zbioru, zbudujemy w punkcie $(\tilde{x}^o, \tilde{x}^1, \ldots, \tilde{x}^m)$ hiperpłaszczyznę podpierającą. Otrzymamy więc :

$$g_o\tilde{x}^o + g_1\tilde{x}^1 + \ldots + g_m\tilde{x}^m =$$

$$= \min_{x^o,\ldots,x^m} \left[g_o x^o + g_1 x^1 + \ldots + g_m x^m \right] =$$

$$= \int_0^{k_{ij}} \left[\min_{q^1,\ldots,q^m} \sum_{l=o}^{m} g_l f_l(z_{ij}, q^1, \ldots, q^m) \right] dz \,. \qquad (VII)$$

Ponieważ wymagamy spełnienia warunku

$$\sum_{l=o}^{m} g_l f_l(z_{ij}, \tilde{q}^1(z), \ldots, \tilde{q}^m(z)) =$$

$$= \min_{q^1,\ldots,q^m} \sum_{l=o}^{m} g_l f_l(z_{ij}, q^1, \ldots, q^m) \,. \qquad (VIII)$$

zatem, wyznaczając z niego $\tilde{q}^1_{ij}(z)), \ldots, \tilde{q}^m_{ij}(z)$, otrzymamy alokację zasobów odpowiadającą punktowi $(\tilde{x}^o, \tilde{x}^1, \ldots, \tilde{x}^m)$. Wynika stąd, że zbiór wartości $(t_{ij}, p^1_{ij}, \ldots, p^m_{ij})$ jest zbiorem domkniętym, co należało udowodnić.

O Z N A C Z E N I A

n $(i=0,1,\ldots,n-1)$	-	liczba zdarzeń w sieci - planie przedsięwzięcia;
$(i,j) \in C$ $(j\ i)$	-	czynność c_{ij} jest elementem zbioru C wszystkich czynności występujących w planie ;
t_{ij}^{N}	-	czas wykonania czynności c_{ij} w warunkach normalnych ;
K_{ij}^{N}	-	koszt normalny wykonania czynności ;
t_{ij}^{Min}	-	czas najkrótszy w jakim czynność można wykonać ;
K_{ij}^{Max}	-	koszt maksymalny odpowiadający wykonaniu czynności c_{ij} w czasie najkrótszym ;
s $(l=1,\ldots,s)$	-	liczba rodzajów zasobów dla wykonania przedsięwzięcia ;
$r_{ij} \in S$	-	podzbiór rodzajów zasobów (z ogólnego ich zbioru S) niezbędnych do wykonania czynności c_{ij} ;
$t_{i}^{(l)}$	-	chwila rozpoczęcia zużywania l-tego zasobu przy wykonywaniu czynności (i,j) ;
$t_{j}^{(l)}$	-	chwila zakończenia zużywania l-tego zasobu przy wykonywaniu czynności (i,j) ;
t	-	dowolna chwila w okresie t_{ij} ;
$q_{ij}^{(l)}(t)$	-	intensywność zużycia l-tego zasobu przy wykonywaniu czynności (i,j) w chwili t ;
$p_{ij}^{(l)}$	-	ogólna ilość l-tego zasobu wydatkowana przy wykonaniu czynności (i,j) ;
$P^{(l)}$	-	ogólna ilość l-tego zasobu przeznaczona do wykonania całego przedsięwzięcia ;

$p_{ij}^{(t)}$ - stan zaawansowania czynności (i,j) w chwili t ze względu na podzbiór r_{ij} właściwych jej zasobów;

$z_{ij}^{(t)}$ - ogólna wartość stanu zaawansowania czynności (i,j) w chwili t , ze względu na podzbiór r_{ij} rodzajów zasobów ;

$\varphi(z,q_{ij}^{1},\ldots,q_{ij}^{m})$ - funkcja intensywności zużycia każdego zasobu z podzbioru $r_{ij} \in S$ rodzajów zasobów niezbędnych dla wykonania czynności (i,j) ;

k_{ij} - górna granica stanu zaawansowania czynności (i,j) ;

$u^{(l)}(z_{ij}), v^{(l)}(z_{ij})$ - górna i dolna granica wartości funkcji zaangażowania l-tego zasobu ;

$l_{ij(1)}=(1,2,\ldots,m_{ij(1)})$ - numer zasobu pierwszej kategorii (środki trwałe), wchodzącego do podzbioru $r_{ij} \in S_1$ (zbioru zasobów pierwszej kategorii), niezbędnego dla wykonania czynności (i,j) ;

$l_{ij(2)}=(1,2,\ldots,m_{ij(2)})$ - numer zasobu drugiej kategorii (środki przetwarzania), wchodzącego do podzbioru $r_{ij(2)} \in S_2$ (zbioru zasobów drugiej kategorii niezbędnego dla wykonania czynności (i,j) ;

Q_{ij} - pełny stan zaawansowania czynności (i,j), odpowiadający np. ogólnej masie wykonanych prac ;

$p_{lij(1)}$ - ilość środków trwałych przeznaczonych do wykonania czynności (i,j) ;

$q_{lij(1)}$ - norma wydajności środków trwałych przy wykonywaniu czynności (i,j) ;

$\rho_{lij(2)}$ - intensywność zużycia ~~środków~~ środka drugiej kategorii przy realizacji czynności (i,j) ;

$k_{lij(2)}$ - norma zużycia l-tego rodzaju zasobu drugiej kategorii na jedną jednostkę środka pierwszej kategorii w ciągu jednostki czasu ;

$c_{lij(1)}$ - koszt zaangażowania jednostki l-tego zasobu pierwszej kategorii w ciągu jednostki czasu wykonywania czynności (ij) ;

$d_{(1)}$ -stan oprocentowania nakładów na zasob. pierwszej kategorii ;

μ_{ij}, η_l - mnożniki Lagrenge'a ~~przy~~ funkcji alokacji zasobów ;

σ - numer zdarzenia pośredniego ($\sigma = 1, \ldots n$) ;

c - numer czynności ($c = 1, \ldots, N$) ;

r_i - liczba czynności dochodzących do zdarzenia i ;

R - macierz o elementach $n \times N$;

Wyk. w 30 egz.
Wyk. płk SKIBIŃSKI
Poz. nr 3539/WW
Druk ASG - OKV - 5276
Zam. 101 z dn. 11.01.72 r.
Druk ukończ. 15.01.72 r.