AKADEMIA SZTABU GENERALNEGO
im. gen. broni K. Świerczewskiego

ZESPÓŁ CYBERNETYKI WOJSKOWEJ

płk dr Jerzy SKIBIŃSKI

MODEL LINIOWY PODZIAŁU EFEKTÓW NIEJEDNORODNYCH

(w przestrzeni trójwymiarowej)

WARSZAWA MAJ 1968

AKADEMIA SZTABU GENERALNEGO
im. gen. broni K. Świerczewskiego

ZESPÓŁ CYBERNETYKI WOJSKOWEJ

płk dr Jerzy SKIBIŃSKI

MODEL LINIOWY PODZIAŁU EFEKTÓW NIEJEDNORODNYCH
(w przestrzeni trójwymiarowej)

WARSZAWA MAJ 1968

A K A D E M I A   S Z T A B U   G E N E R A L N E G O
im.gen. broni Karola Świerczewskiego

ZESPÓŁ CYBERNETYKI WOJSKOWEJ

Płk dr Jerzy SKIBIŃSKI

MODEL LINIOWY PODZIAŁU EFEKTÓW NIEJEDNO-RODNYCH

/ w przestrzeni trojwymiarowej/

REMBERTÓW   M A J   1968

SPIS TREŚCI

1. Sformułowanie problemu

Istnieje m układów działających czynnych /sterujących/, z których każdy M_i /$i = 1,2,\ldots,m$/ stosuje r rodzajów technologii Q_k /$k = 1,2,\ldots,r$/. Ogólna wydajność układu M_i wynosi p_i jednostek. Niech p_{ik} oznacza maksymalną wydajność i-tego układu w zakresie k-tej technologii. Przyjmuje się, że suma poszczególnych wydajności p_{ik} powinna być conajmniej równa p_i jednostek, czyli:

$$\sum_{k=1}^{r} p_{ik} \geqslant p_i \,, \qquad i = 1,2,\ldots,m \qquad \ldots \quad 1$$

Istnieje n układów działających biernych /sterowanych/ z których każdy N_j ($j = 1,2,\ldots,n$) może korzystać z efektów Q_k tej technologii w ilości z_{kj} jednostek uprzednio zgłoszonej /zapotrzebowanej/. Efekt technologii Q_k, układu M_i na korzyść N_j, wynosi x_{ikj} jednostek. Zatem, ogólna liczba jednostek efektów technologii Q_k wydzielonych przez układy M_i na korzyść układu N_j wyniesie:

$$\sum_{i=1}^{m} x_{ikj} = z_{kj} \,, \qquad \begin{array}{l} j = 1,2,\ldots,n, \\ k = 1,2,\ldots,r \end{array} \qquad 2$$

Liczba jednostek efektów technologii Q_k układu M_i na korzyść układu N_j nie powinna przekroczyć ogólnej wydajności układu M_i w zakresie k-tej technologii, czyli:

$$\sum_{j=1}^{n} x_{ikj} \leqslant p_{ik} \,, \qquad \begin{array}{l} i = 1,2,\ldots,m, \\ k = 1,2,\ldots,r. \end{array} \qquad \ldots \quad 3$$

Ogólna liczba efektów wszystkich technologii układu M_i, stosowanych na korzyść układu N_j, powinna być równa ogólnej wydajności M_i, czyli:

$$\sum_{k=1}^{r} \sum_{j=1}^{n} x_{ik_j} = p_i \quad , \qquad i = 1,2,\ldots,m, \ldots /4/$$

Powyższy warunek (4) wyklucza możliwości występowania rezerw efektów technologii w układach M_i.

Warunki graniczne:

$$p_i \ , \quad p_{ik_i} \ , \quad z_{k_j} \geqslant 0 \quad \left.\begin{matrix} i = 1,2,\ldots,m, \\ j = 1,2,\ldots,n, \\ k = 1,2,\ldots,r. \end{matrix}\right\} \ldots /5/$$

$$x_{ik_j} \geqslant 0 \quad \ldots\ldots\ldots\ldots /6/$$

Koszt realizacji jednostki efektu technologii Q_k przez układ M_i na korzyść układu N_j wynosi c_{ikj}.

Problem sprowadza się do wyznaczenia optymalnego planu działania zbioru układów M na korzyść zbioru układów N, tj. w oparciu o warunki od /1/ do /6/ należy wyznaczyć taki zbiór x_{ikj} aby:

$$\sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} \sum_{k=1}^{r} c_{ijk_j} \ x_{ijk_j} = \text{minimum} \ \ldots\ldots /7/$$

Zależności od /1/ do /7/ stanowią model zagadnienia podziału jednostek efektów niejednorodnych technologii

/elementów/ x_{ikj} /k=1,...,r/ podzbiorów M_1, M_2,...,M_m (i = 1,2,...,m) na korzyść podzbiorów N_1, N_2,..., N_n /j = 1,2,...,n/ przy kryterium minimalizacji wartości globalnej kosztów tych technologii. Powyższy model można jednak sprowadzić do zagadnienia rozwiązywanego w przestrzeni trójwymiarowej, jeśli zależności (1) i (3) doprowadzimy do postaci równań.

Model przyjmie postać określoną przez następujące warunki:

1. Liczba jednostek efektów technologii Q_k układu M_i na korzyść układu N_j powinna być równa wydajności układu M_i w zakresie efektów k-tej technologii, czyli /por. (3)/ otrzymamy:

$$\sum_{j=1}^{\hat{n}} x_{ikj} = E_{ik}, \qquad \text{/8/}$$

$$i = 1,2,\ldots,\hat{m}; \quad k = 1,2,\ldots,\hat{r}$$

przyczym przez $\hat{n}$ oznaczymy liczbę układów sterowanych, które przejmą całkowicie maksymalną wydajność układu M_i w zakresie k-tej technologii; $\hat{r}$ - maksymalna liczba rodzajów technologii, realizowanych przez układ M_i; $\hat{m}$ - maksymalna liczba układów M_i, niezbędna dla pokrycia całkowitego zapotrzebowania zgłoszonego przez $\hat{n}$ układów sterowanych.

2. Wydajność każdego z $\hat{m}$ układów sterujących w zakresie $\hat{r}$ rodzajów technologii powinna być równa potrzebom zgłoszonym przez każdy z $\hat{n}$ układów sterowanych, czyli:

$$\sum_{k=1}^{\hat{r}} x_{ijk} = F_{ij}, \quad \ldots \ldots \quad /9/$$

$$i = 1,2, \ldots, \hat{m}; \quad j = 1,2, \ldots, \hat{n}.$$

3. Ogólna liczba jednostek efektów technologii Q_k $(k=1,2,\ldots\hat{r})$ wydzielonych przez układy M_i na korzyść układu N_j wyniesie:

$$\sum_{i=1}^{\hat{m}} x_{ijk} = G_{jk}, \quad \ldots \ldots \quad /10/$$

$$j = 1,2, \ldots, \hat{n}; \quad k = 1,2, \ldots, \hat{r}.$$

4. Warunki graniczne: $E_{ik}, F_{ij}, G_{jk} \geq 0 \quad \ldots \ldots \quad /11/$

$$\left. \begin{aligned} & x_{ijk} \geq 0; \\ & i = 1,2, \ldots, \hat{m}, \quad j = 1,2, \ldots, \hat{n}, \quad k = 1,2, \ldots \hat{r}. \end{aligned} \right\} \quad /11a/$$

5. Funkcja kryterium przyjmie postać:

$$\sum_{i=1}^{\hat{m}} \sum_{j=1}^{\hat{n}} \sum_{k=1}^{\hat{r}} c_{ik_j} x_{ik_j} = \text{minimum} \quad \ldots \ldots \quad /12/$$

Na podstawie warunków od /8/ do /12/ można sformułować następujące zależności:

z /8/ i /10/ wynika, że:

$$\sum_{i=1}^{\hat{m}} E_{ik} = \sum_{j=1}^{\hat{n}} G_{jk} ; \quad k = 1, 2, \ldots, \hat{r} ; \ldots \quad /13/$$

z /8/ i /9/:

$$\sum_{j=1}^{\hat{n}} F_{ij} = \sum_{k=1}^{\hat{r}} E_{ik} ; \quad i = 1, 2, \ldots, \hat{m} ; \ldots \quad /14/$$

stąd:

$$\sum_{i=1}^{\hat{m}} F_{ij} = \sum_{k=1}^{\hat{r}} G_{jk} ; \quad j = 1, 2, \ldots, \hat{n} ; \ldots \quad /15/$$

zatem:

$$\sum_{j=1}^{\hat{n}} \sum_{k=1}^{\hat{r}} G_{jk} = \sum_{i=1}^{\hat{m}} \sum_{k=1}^{\hat{r}} E_{ik} = \sum_{i=1}^{\hat{m}} \sum_{j=1}^{\hat{n}} F_{ij} \ldots \quad /16/$$

2. Analiza problemu w ujęciu trójwymiarowym.

Niech x_{ikj} /i = 1, ...,m; j = 1, ...,n; k = 1,...r/ wyznacza rozwiązanie modelu określonego w przestrzeni trójwymiarowej przez warunki od /1/ do /6/. Na podstawie warunków /2/ i /10/ można przyjąć, że:

$$\sum_{i=1}^{m} x_{ijk} = G_{jk} , \qquad j = 1,2, \ldots , n \quad .. /17/$$

$$G_{jk} = z_{jk} > 0 \qquad k = 1,2, \ldots , r \ldots \quad /18/$$

Wprowadźmy do rozważań zmienną sztuczną, określającą różnicę między maksymalną wydajnością układu M_i w zakresie k-tej technologii a zapotrzebowaniem na tę technologię przez wszystkie układy sterowane . Oznaczmy tę zmienną sztuczną przez $x_{i;\,k;\,n+1} \geqslant 0$,/i =1,..., m; k=1,...,r/ przyjmując że ilość tę przejmie fikcyjny układ sterowany N_{n+1}. Zatem, na podstawie zależności /3/ i /8/ otrzymamy :

$$\sum_{j=1}^{n} x_{ikj} + x_{i;\,k;\,n+1} = E_{ik} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad /19/$$

oraz przy uwzględnieniu /8/:

$$E_{ik} = p_{ik} \geq 0 \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad /20/$$

$$i = 1, \ldots, m \,;\; k = 1, \ldots, r \,.$$

Sumując względem i wyznaczymy ogólną ilość "nadwyżek" k-tej czynności, jaką wchłonie układ fikcyjny, czyli:

$$\sum_{i=1}^{m} x_{i,k;\,n+1} = \sum_{i=1}^{m} p_{ik} - \sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1} x_{ik_j}$$

Z zależności /2/, po zsumowaniu względem j, wynika, że :

$$\sum_{j=1}^{n} \sum_{i=1}^{m} x_{ik_j} = \sum_{j=1}^{n} z_{k_j} \;;$$

a stąd:

$$\sum_{i=1}^{m} x_{i;\,k,\,n+1} = \sum_{i=1}^{m} p_{ik} - \sum_{j=z}^{n} z_{k_j}$$

przy założeniu, że

$$x_{1;\,k;\,n+1} \geq 0 \qquad /21/$$

Uwzględniając zależność /10/, otrzymamy:

$$G_{k,n+1} = \sum_{i=1}^{m} p_{ik} - \sum_{j=1}^{n} z_{kj} > 0 \qquad /22/$$

$$k = 1, \ldots, r$$

czyli:

$$G_{k;\,n+1} = \sum_{i=1}^{m} x_{i,k,n+1} \quad \ldots \quad /23/$$

$$k = 1, \ldots, r$$

Jak wynika z /22/ $G_{k;\,n+1}$ określa różnicę między największym efektem technologii Q_k układu M_i i rzeczywistym zapotrzebowaniem zgłoszonym przez układ N_j.

Ponieważ, jak wynika z /2/ i /6/ : $x_{ikj} \leqslant z_{kj}$, to sumując względem k, otrzymamy:

$$\sum_{k=1}^{r} x_{ikj} \leqslant \sum_{k=1}^{r} z_{kj} ,$$

czyli

$$F_{ij} = \sum_{k=1}^{r} x_{ijk} + x_{i,j,r+1} , \quad i = 1, \ldots, m; \; j = 1, \ldots, n; \quad /24/$$

$$F_{ij} = \sum_{k=1}^{r} z_{kj} > 0 ; \quad i = 1, \ldots, m; \; j = 1, \ldots, n; \ldots /25/$$

F_{ij} określa ogólne zapotrzebowanie zgłoszone przez układ N_j uwzględniające również tę ilość efektów r + 1 technologii, których nie uzyska z układu M_i; efekty te wyraża zmienna sztuczna w /24/, tj. $x_{i,\ r+1,\ j} \geq 0$ /i = 1,2,...m/ j = 1,2,...n/.

Sumując wyrażenia /24/ i /25/ względem i, otrzymamy

$$\sum_{i=1}^{m} \sum_{k=1}^{r} x_{ijk} + \sum_{i=1}^{m} x_{i,r+1,j} = m \sum_{k=1}^{r} z_{kj} \quad \ldots\ldots \quad /26/$$

Z zależności /2/, przez sumowanie względem k, mamy

$$\sum_{k=1}^{r} \sum_{i=1}^{m} x_{ijk} = \sum_{k=1}^{r} z_{kj} \qquad /27/$$

lub

$$\sum_{i=1}^{m} x_{i,\ r+1} = G_{r+1,j}\ ; \quad j = 1,2,\ldots,n, \quad \ldots /28/$$

gdzie

$$G_{r+1,j} = (\hat{m}-1) \sum_{k=1}^{r} z_{kj} \geq 0; \quad j = 1,2,\ldots,n \quad \ldots . /29/$$

Następnie, sumując wyrażenia /24/ i /25/ względem j, otrzymamy:

$$\sum_{j=1}^{n} \sum_{k=1}^{r} x_{ijk} + \sum_{j=1}^{n} x_{i,r+1,j} = \sum_{j=1}^{n} \sum_{k=1}^{r} z_{k,j}, \quad \ldots \quad /30/$$

a uwzględniając wyrażenie /4/

$$\sum_{j=1}^{n} x_{i,r+1,j} = \sum_{j=1}^{n} \sum_{k=1}^{r} z_{kj} - p_i, \quad \ldots \ldots \quad /31/$$

lub

$$\sum_{j=1}^{n} x_{i,r+1,j} + x_{i,r+1,n+1} = E_{i,r+1}\ ; \quad i = 1,2,\ldots,m, \quad /32/$$

gdzie

$$E_{i,r+1} = \sum_{j=1}^{n} \sum_{k=1}^{r} z_{kj} - p_i \geqslant 0\ ; \quad i = 1,2,\ldots,m. \quad /33/$$

Zmienna sztuczna $x_{i,\, r+1,\, n+1} \geqslant 0$ $/i=1,2,\ldots,m/$, wprowadzona w sposób formalny do wyrażenia /32/, musi być równa zeru. Stąd, zgodnie z określeniem $x_{i,\, r+1,\, j} \geqslant 0$, z wyrażenia /32/ wynika również, że $E_{i,\, r+1} \geqslant 0$. Wyrażenie /32/ określa więc liczbę efektów technologii mieszczącą się w ogólnym zapotrzebowaniu zgłoszonym przez układ N_j , której nie otrzyma z układu M_i.

Z wyrażeń /19/ i /20/, w wyniku sumowania względem k, wynika

$$\sum_{k=1}^{r} \sum_{j=1}^{n} x_{ikj} + \sum_{k=1}^{r} x_{i,k,n+1} = \sum_{k=1}^{r} p_{ik} \quad , \quad \ldots\ldots \quad /34/$$

a z zależności /4/

$$\sum_{k=1}^{r} x_{i,k,n+1} = \sum_{k=1}^{r} p_{ik} - p_i \quad \ldots\ldots \quad /35/$$

lub

$$\sum_{k=1}^{r} x_{i,n+1,k} + x_{i,n+1,k+1} = F_{i,n+1} \quad \ldots\ldots \quad /36/$$

$$i = 1,2,\ldots,m ,$$

gdzie

$$F_{i,m+1} = \sum_{k=1}^{r} p_{ik} - p_i \geq 0 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad /37/$$

$$i = 1,2, \ldots, m$$

przy czym $x_{i,\, k+1,\, n+1} = 0$ występuje w /32/ jako zmienna sztuczna.

Z zależności /1/ wiadomo, że $F_{i,\, n+1} \geqslant 0$.

Ponieważ $x_{i,\, k+1,\, n+1} = 0$ $/i = 1,2,\ldots, m/$, to stąd również

$$\sum_{i=1}^{m} x_{i,\, k+1,\, n+1} = G_{k+1,\, n+1} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad /38/$$

gdzie

$$G_{k+1,\, n+1} = 0 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad /39/$$

Zgodnie z wyrażeniem /6/ i na podstawie wprowadzonej zmiennej sztucznej, mamy

$$x_{ijk} \geqslant 0, \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad /40/$$

$$i = 1,2, \ldots, m; \quad j = 1,2, \ldots, n; \quad k = 1,2, \ldots r.$$

Z wyrażeń /18/ i /22/ wynika

$$\sum_{j=1}^{n+1} G_{jk} = \sum_{j=1}^{n} z_{jk} + \sum_{i=1}^{m} p_{ik} - \sum_{j=1}^{n} = \sum_{i=1}^{m} p_{ik} \quad \ldots\ldots /41/$$

a z /29/ i /33/

$$\sum_{j=1}^{n+1} G_{j,r+1} = (m-1)\sum_{j=1}^{n}\sum_{k=1}^{r} z_{jk} + 0 = (m-1)\sum_{j=1}^{n}\sum_{k=1}^{r} z_{jk} \quad /42/$$

Z wyrażenia /20/ mamy

$$\sum_{i=1}^{m} E_{ik} = \sum_{i=1}^{m} p_{ik}\,, \qquad k = 1,2,\ldots,r \quad \ldots\ldots /43/$$

a z /33/

$$\sum_{i=1}^{m} E_{i,r+1} = m\sum_{j=1}^{n}\sum_{k=1}^{r} z_{jk} - \sum_{i=1}^{m} p_i = (m-1)\sum_{j=1}^{n}\sum_{k=1}^{r} z_{jk} \ldots /44/$$

gdyż z wyrażeń /2/ i /4/, przez zsumowanie względem j,k lub i oraz przyrównanie, otrzymuje się

$$\sum_{j=1}^{n} \sum_{k=1}^{r} Z_{jk} = \sum_{i=1}^{m} p_i \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad /45/$$

Z równań /41/,/42/,/43/ i /44/ łącznie, wynika

$$\sum_{j=1}^{n+1} G_{jk} = \sum_{i=1}^{m} E_{ik} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad /46/$$

$$k = 1, 2, \ldots, r+1$$

Z /20/ i /33/ mamy:

$$\sum_{k=1}^{r+1} E_{ik} = \sum_{k=1}^{r} p_{ik} + \sum_{j=1}^{n} \sum_{k=1}^{r} Z_{jk} - p_i \quad . \quad . \quad . \quad . \quad /47/$$

$$i = 1, 2, \ldots, m$$

Z /25/ i /37/:

$$\sum_{j=1}^{n+1} F_{ij} = \sum_{j=1}^{n} \sum_{k=1}^{r} Z_{jk} + \sum_{k=1}^{r} p_{ik} - p_i \quad . \quad . \quad . \quad . \quad /48/$$

$$i = 1, 2, \ldots, m.$$

Z /47/ i /48/:

$$\sum_{k=1}^{r+1} E_{ik} = \sum_{j=1}^{n+1} F_{ij}, \quad i = 1, 2, \ldots, m \quad . \quad . \quad . \quad . \quad /49/$$

z /25/:

$$\sum_{i=1}^{m} F_{ij} = m \sum_{k=1}^{r} Z_{jk}, \quad j = 1,2,\ldots,n, \quad . \quad . \quad /50/$$

Ponadto z /37/:

$$\sum_{i=1}^{m} F_{i,n+1} = \sum_{i=1}^{m} \sum_{k=1}^{r} p_{ik} - \sum_{i=1}^{m} p_i \quad . \quad . \quad /51/$$

z /18/ i /29/:

$$\sum_{k=1}^{r+1} G_{jk} = \sum_{k=1}^{r} Z_{jk} + (m-1) \sum_{k=1}^{r} Z_{jk} = m \sum_{k=1}^{r} Z_{jk}, \quad . \quad . \quad /52/$$

$$j = 1,2,\ldots,n.$$

ponadto, z /22/ i /39/:

$$\sum_{k=1}^{r+1} G_{n+1,k} = \sum_{k=1}^{r} \sum_{i=1}^{m} p_{ik} - \sum_{k=1}^{r} \sum_{j=1}^{n} Z_{jk} + 0 =$$

$$= \sum_{k=1}^{r} \sum_{i=1}^{m} p_{ik} - \sum_{i=1}^{m} p_i \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad /53/$$

gdyż z /2/ i /4/ wynika, że:

$$\sum_{k=1}^{r} \sum_{j=1}^{n} Z_{jk} = \sum_{i=1}^{m} p_i$$

Z równań /50/, /51/, /52/ i /53/ łącznie, otrzymamy:

$$\sum_{i=1}^{m} F_{ij} = \sum_{k=1}^{r+1} G_{jk} , \quad j = 1, 2, \ldots, n+1 \quad \ldots\ldots \quad /54/$$

Następnie, z /46/:

$$\sum_{j=1}^{n+1} \sum_{k=1}^{r+1} G_{jk} = \sum_{i=1}^{m} \sum_{k=1}^{r+1} E_{ik} \quad \ldots\ldots\ldots \quad /55/$$

a z wyrażenia /49/:

$$\sum_{i=1}^{m} \sum_{k=1}^{r+1} E_{ik} = \sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n+1} F_{ij} \quad \ldots\ldots\ldots \quad /56/$$

Stąd, równania /55/ i /56/ łącznie, dają:

$$\sum_{j=1}^{n+1} \sum_{k=1}^{r+1} G_{jk} = \sum_{i=1}^{m} \sum_{k=1}^{r+1} E_{ik} = \sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n+1} F_{ij} \quad \ldots\ldots \quad /57/$$

A więc, dla każdego rozwiązania $/x_{ijk}/$ $/i=1,2,\ldots,m;$ $j = 1,2,\ldots, n;$ $k = 1,2,\ldots r/$ równań od /1/ do /6/ istnieją rozwiązania $/x_{ijk}/$ $/i = 1,2,\ldots, m;$ $j = 1,2,\ldots, n + 1$; $k = 1,2,\ldots, r + 1/$ równań od /17/ do /57/.

Z wyrażenia /37/ wynika bezpośrednio równanie /1/, a z /17/ i /18/ - równanie /2/. Ponadto, z /19/ /20/ i /40/ otrzymuje się /3/.

Z /36/ i /37/ mamy:

$$\sum_{k=1}^{r} p_{ik} - \sum_{k=1} x_{i,k,n+1} - x_{i,n+1,r+1} = p_i \qquad /58/$$

$$i = 1,2,\ldots, m.$$

Z /19/ i /20/ przez sumowanie względem k, wynika:

$$\sum_{k=1}^{r} x_{i,k,n+1} = \sum_{k=1}^{r} p_{ik} - \sum_{k=1}^{r} \sum_{j=1}^{n} x_{ijk} \qquad /59/$$

$$i = 1,2,\ldots, m$$

Po podstawieniu wartości dla $\sum^{r} x_{i,k,n+1}$ z /59/ do /58/, otrzymamy:

$$\sum_{k=1}^{r} p_{ik} - \sum_{k=1}^{r} p_{ik} + \sum_{k=1}^{r} \sum_{j=1}^{n} x_{ijk} - x_{i,n+1,r+1} = p_i \qquad /60/$$

$$i = 1,2,\ldots, m.$$

Ponieważ na podstawie /38/, /39/ i /40/ $x_{i,n+1,r+1} = 0$ to wynika stąd, że

$$\sum_{j=1}^{n} \sum_{k=1}^{r} x_{ijk} = p_i, \quad i = 1,2,\ldots, m \qquad /61/$$

czyli, innymi słowy, zachodzi zależność /4/.

Następnie z wyrażenia /40/ wynika, że $p_i \geqslant 0$. /i = 1,2,...,m/ Pozostałe wielkości występujące w /5/ wyznaczają wyrażenia /18/ i /20/. Wreszcie, z /40/ wynika ponadto wyrażenie /6/.

Stąd, również dla każdego rozwiązania $/x_{ijk}/$ /i = 1,2,..., m; j = 1,2,..., n + 1; k = 1,2,..., r + 1/ występującego w równaniach od /17/ do /57/ istnieje rozwiązanie $/x_{ijk}/$ /i = 1,2,...,m; j = 1,2,...,n; k = 1,2,...,r/ równań od /1/ do /6/.

A więc, niezależnie od zagadnienia podziału wyrażonego zależnościami od /1/ do /7/ występuje zagadnienie

$$\sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n+1} \sum_{k=1}^{r+1} c_{ijk} x_{ijk} = \min \qquad /62/$$

$/c_{ijk}$ jak w /7/ dla i = 1,2,...,m,
j = 1,2,...,n,
k = 1,2,...,r.

ponadto $c_{ijk} = 0/$

przy warunkach uzupełniających od /17/ do /57/.

Powstaje zatem jednoznaczna współzależność między rozwiązaniami równań od /1/ do /6/ i od /17/ do /57/, przy czym odpowiednie wartości funkcji celu /12/, względnie /62/ są sobie równe. Zagadnienie opisane równaniami od /1/ do /7/ oraz od /17/ do /62/ są wzajemnie równoważne. Zagadnienie od /17/ do /62/ posiada jednak postać trójwymiarowego zagadnienia transportowego opisanego równaniami od /7/ do /16/, z wyjątkiem /12/.

3. Zestawienie zależności między odpowiednimi wyrażeniami /numery wzorów wpisano z lewej strony/

$$(7)\quad \sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n}\sum_{k=1}^{r} c_{ijk}\,x_{ijk} = \min \;\longrightarrow\; (62)\quad \sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n+1}\sum_{k=1}^{r+1} c_{ijk}\,x_{ijk} = \min$$

$$\downarrow$$

$$(10)\quad \sum_{i=1}^{\hat{m}} x_{ijk} = G_{jk}$$

$$(10) \longrightarrow (17)\quad \sum_{i=1}^{m} x_{ijk} = G_{jk}$$

$$(10) \longrightarrow (23)\quad G_{k\,j\,n+1} = \sum_{i=1}^{m} x_{i,k,m+1}$$

$$(10) \longrightarrow (28)\quad G_{r+1,j} = \sum_{i=1}^{m} x_{i,r+1,j}$$

$$(10) \longrightarrow (38)\quad G_{k+1,n+1} = \sum_{i=1}^{m} x_{i,k+1,m+1}$$

$$\downarrow$$

$$(8)\quad \sum_{j=1}^{\hat{n}} x_{ikj} = E_{ik}$$

$$(8) \longrightarrow (19)\quad \sum_{j=1}^{n} x_{ikj} + x_{i,k,n+1} = E_{ik}$$

$$(8) \longrightarrow (32)\quad \sum_{j=1}^{n} x_{i,r+1,j} + x_{i,r+1,n+1} = E_{i,r+1}$$

$$\downarrow$$

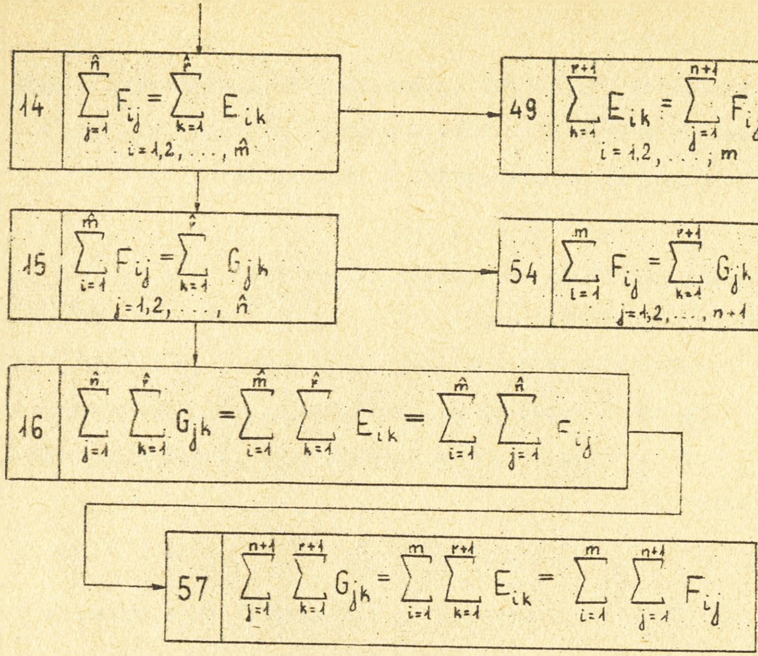
$$(9)\quad \sum_{k=1}^{\hat{r}} x_{ijk} = F_{ij}$$

$$(9) \longrightarrow (24)\quad \sum_{k=1}^{r} x_{ijk} + x_{i,j,r+1} = F_{ij}$$

$$(9) \longrightarrow (36)\quad \sum_{k=1}^{r} x_{i,n+1,k} + x_{i,n+1,k+1} = F_{i,n+1}$$

$$\downarrow$$

11 $E_{ik}, F_{ij}, G_{jk} \geqslant 0$	18 $G_{jk} = z_{jk} \geqslant 0$ $k = 1,2,\dots,r$
	22 $G_{k,n+1} = \sum_{i=1}^{m} p_{ik} - \sum_{j=1}^{n} z_{jk} \geqslant 0$
	29 $G_{r+1,j} = (\hat{m}-1)\sum^{r} z_{kj} \geqslant 0$ $j = 1,2,\dots,n$
	39 $G_{k+1,\; n+1} = 0$
	20 $E_{jk} = P_{ik} \geqslant 0$ $i = 1,2,\dots,m;\ k = 1,2,\dots,r$
	33 $E_{i,r+1} = \sum_{j=1}^{n} \sum_{k=1}^{r} z_{kj} - p_i \geqslant 0$
	25 $F_{ij} = \sum_{k=1}^{r} z_{kj} \geqslant 0$ $i = 1,2,\dots m;\ j = 1,2,\dots n$
	37 $F_{i,n+1} = \sum_{k=1}^{r} P_{ik} - P_i \geqslant 0$ $i = 1,2,\dots,m.$
11a $x_{ijk} \geqslant 0$ $i = 1,2,\dots,\hat{m};$ $j = 1,2,\dots,\hat{n};$ $k = 1,2,\dots,\hat{r}.$	40 $x_{ijk} \geqslant 0$ $i = 1,2,\dots,m;$ $j = 1,2,\dots,n;$ $k = 1,2,\dots,r.$
13 $\sum_{i=1}^{\hat{m}} E_{ik} = \sum_{j=1}^{\hat{n}} G_{jk}$ $k = 1,2,\dots,\hat{r}$	46 $\sum_{j=1}^{n+1} G_{jk} = \sum_{i=1}^{m} E_{ik}$ $k = 1,2,\dots,r+1$



4. Uwagi końcowe

Zastosowanie metody Simplex do rozwiązania zagadnienia podziału, wyrażonego przy pomocy wzorów /1/ do /7/, wymaga przeprowadzenia obliczeń przy zastosowaniu macierzy posiadającej:

$$(m-1)\,(nr-1)\,(m + mr + nr - 1)$$

elementów. Na przykład, w układzie posiadającym $m = 3$ układy czynne z których każdy dysponuje $r = 3$ technologiami na korzyść $n = 5$ układów biernych, ilość elementów macierzy wyniesie 728. Ponieważ rozwiązywanie zagadnienia podziału w ujęciu trójwymiarowym, opisanego tą macierzą jest bardzo pracochłonne /nawet przy zastosowaniu EMC/, zależności od /1/ do /7/ sprowadzamy do zagadnienia w ujęciu dwuwymiarowym dla którego macierz posiada już znacznie mniejszą ilość elementów, a mianowicie

mr /m + nr/,

co w odniesieniu do powyższego układu /m=3, n = 5, r = 3 / odpowiada 162 elementom.

Wreszcie, tak przekształcone zagadnienie od /1/ do /7/, daje się z powrotem sprowadzić do ujęcia trójwymiarowego, uzyskuje się przy tym zmniejszenie ilości elementów macierzy do

m /r + 1/ /n + 1/

/co odpowiada 72 elementom/, a tym samym bardzo poważnie zmniejsza wysiłek przy pracach obliczeniowych.

__Wykonano w 100 egz.__
Egz.nr 1-100 Bibl.Szkol.dział jawny
Wyk.: płk Skibiński
Druk: G.B.
Nr ks. 1327/WW.