AKADEMIA SZTABU GENERALNEGO
im. generała broni K. Świerczewskiego

JAWNE

[redacted]

Egz. Nr 1

mjr dypl. mgr Cz. GOZDECKI

PROBLEM OPTYMALNEGO UGRUPOWANIA NAZIEMNYCH ŚRODKÓW OPL W SYSTEMIE OBRONY PUNKTOWEJ I STREFOWEJ W ŚWIETLE BADAŃ OPERACYJNYCH

Część I

REMBERTÓW MAJ 1965

AKADEMIA SZTABU GENERALNEGO
im. generała broni K. Świerczewskiego

[redacted]

Egz. Nr 1

mjr dypl. mgr Cz. GOZDECKI

PROBLEM OPTYMALNEGO UGRUPOWANIA NAZIEMNYCH ŚRODKÓW OPL W SYSTEMIE OBRONY PUNKTOWEJ I STREFOWEJ W ŚWIETLE BADAŃ OPERACYJNYCH

Część I

REMBERTÓW MAJ 1965

A K A D E M I A   S Z T A B U   G E N E R A L N E G O
im. gen. broni K.Świerczewskiego

Przekl. prot. 12357.

[redacted]
Egz.nr. 1

mjr dypl. mgr Cz. GOZDECKI

PROBLEM OPTYMALNEGO UGRUPOWANIA NAZIEMNYCH ŚRODKÓW OPL W SYSTEMIE OBRONY PUNKTOWEJ I STREFOWEJ W ŚWIETLE BADAŃ OPERACYJNYCH.

C z ę ś ć I

Rembertów   Marzec   1 9 6 5 r.

S P I S T R E Ś C I

/ Część I /

WSTĘP

Praca niniejsza naświetla od strony ilościowej problem wyboru optymalnego ugrupowania naziemnych środków OPL w osłonie środków OPL w osłonie obiektów i omawia metodę rozwiązania tego problemu w oparciu o rachunek prawdopodobieństwa, teorię gier i programowanie liniowe.

Zasadniczym celem pracy jest próba opracowania ogólnej metody umożliwiającej wybór optymalnego ugrupowania w sposób możliwie ścisły. Praca ujmuje więc materiał traktujący o tym "jak robić" i "dlaczego celowym jest robić właśnie tak, a nie inaczej".

Główny akcent w pracy zostaje położony na możliwość praktycznego jej wykorzystania w wojskach OPL i OPK oraz w procesie szkolenia w ASG.

Powodem, który skłonił autora do podjęcia tematu jest to, że zagadnienie wyboru optymalnego ugrupowania naziemnych środków OPL w osłonie obiektów, stanowi bardzo istotny problem występujący na szczeblach taktycznych wojsk OPL, a dotychczas nie było ono przedmiotem odrębnych i bardziej gruntownych studiów, szczególnie w zakresie użycia rakiet przeciwlotniczych. Wyznaczenie ugrupowania bojowego na podstawie ogólnych zasad obrony przeciwlotniczej obiektów oraz intuicyjnego sposobu uwzględniania czynników warunkujących ugrupowanie nie stanowi już dziś metody, która by zapewniała efektywne wykorzystanie sił i środków OPL. Wynika to stąd, że szereg czynników, które należy uwzględniać w ugrupowaniu bojowym warunkuje się wzajemnie, tworząc w ten sposób ścisłe zależności. Ustalenie tych zależności na drodze intuicji oraz uwzględnienie ich w ugrupowaniu bojowym, jest rzeczą trudną i prowadzi zwykle do nieścisłości. Zachodzi więc potrzeba opracowania ogólnej metody, która by umożliwiała bardziej ścisłe uwzględnianie wpływu poszczególnych czynników, a przez to dokonanie wyboru możliwie najkorzystniejszego wariantu ugrupowania. Metoda taka oparta na wykorzystaniu nowoczesnych działów matematyki: teorii gier, programowania liniowego i rachunku prawdopodobieństwa przedstawiona jest w niniejszej pracy.

W pracy dana jest również odpowiedź na następujące ważne zagadnienia:

a/ Czy w każdym przypadku istnieje jeden najbardziej korzystny /w świetle przyjętego kryterium efektywności/ wariant ugrupowania bojowego ?

b/ W jakim stopniu manewr oraz maskowanie ugrupowania bojowego wpływają na efektywność osłony obiektu:

Studia nad powyższymi zagadnieniami doprowadziły autora do wniosku, że mogą wystąpić sytuacje, w których optymalne rozwiązanie obejmuje nie jeden lecz kilka korzystnych wariantów ugrupowania bojowego. Stosowanie tych wariantów z określonymi częstościami /stosowanie manewru/ w większości przypadków może wpłynąć na zwiększenie efektywności osłony obiektu, w granicach nawet do kilkunastu procent. Ustalenie tych prawidłowości stało się możliwe dzięki zbudowaniu modelu matematycznego, w którym problem obrony przeciwlotniczej obiektu sprowadzany został do gry.

Całość pracy składa się z dwóch części. Część I zawiera dwa rozdziały i dotyczy głównie obrony punktowej,[x/] chociaż wiele zagadnień da się również przenieść na obronę strefową. W rozdziale I przedstawiono model, który przy pewnych założeniach dotyczących posiadanego stopnia informacji o przeciwniku i własnych siłach i środkach, służy do naświetlenia zagadnienia ugrupowania rakiet i artylerii przeciwlotniczej, w systemie obrony punktowej.

Opracowany model należy do grupy modeli strategicznych i sprowadza problem obrony obiektu do gry dwuosobowej o sumie zero ze skończoną ilością strategii.

Możliwość sprowadzenia problemu obrony obiektu do tej klasy gier wynika wprost z celów i zadań, jakie stawia sobie przeciwnik i strona organizująca system obrony przeciwlotniczej obiektu. Wiadomo bowiem że przeciwnik stara się zniszczyć /obezwładnić/ obiekt, a jednocześnie chce ponieść minimalne straty od obrony przeciwlotniczej.

---

x/ Stosowany jest również termin "obrona lokalna".

Cel ten przeciwnik osiągnie wówczas, gdy samoloty z ładunkiem bombowym względnie pociski przenikną przez system OPL i wykonują atak /bombardowanie/ z dostateczną dokładnością. Natomiast założonego celu przeciwnik nie osiągnie, gdy środki biorące udział w nalocie zostaną zniszczone lub działalność ich zostanie utrudniona na tyle, że atak okaże się nieskuteczny.

Celem zaś strony organizującej obronę przeciwlotniczą jest niedopuszczenie do zniszczenia obiektu poprzez zadanie maksymalnych strat atakującym siłom przeciwnika, względnie utrudnienie im w wykonaniu ataku /bombardowania/ np. przez zakłócenie radiolokacyjne celowników bombowych, maskowanie obiektu itp.

Występuje tu wyraźnie sytuacja konfliktowa, w której cele obu stron są przeciwstawne, zaś to prowadzi do gry. W grze tej za funkcję kryterium, stanowiącą miarę efektywności systemu OPL, przyjęto prawdopodobieństwo obrony obiektu. Kryterium to w sposób właściwy odzwierciedla cele obu stron, a jednocześnie ma tę zaletę, że można je praktycznie określić oraz pozwala na uwolnienie się od założenia, iż naloty na broniony obiekt są ze wszystkich kierunków jednakowo prawdopodobne.

W końcowej części rozdziału I omówione są metody rozwiązywania ogólnego modelu matematycznego oraz podane przypadki, w których proces znajdowania rozwiązania optymalnego znacznie się upraszcza.

W rozdziale II przedstawiony jest model pozwalający wyznaczyć optymalne rozmieszczenie dywizjonów technicznych /składów amunicyjnych/ i jednocześnie najlepszy sposób zaopatrywania pododdziałów ogniowych w rakiety przeciwlotnicze /amunicję artyleryjską/ w systemie obrony punktowej. Model ten da się przenieść w zupełności na obronę strefową.

W części II omówiony zostanie problem wyboru optymalnego ugrupowania rakiet przeciwlotniczych w systemie obrony strefowej oraz przedstawiony będzie ogólny model matematyczny dla tego przypadku. Podane zostaną także algorytmy wyznaczania optymalnego rozwiązania dla modeli przedstawionych w obu częściach pracy oraz przykłady ilustrujące metodę postępowania. W zakończeniu zebrane zostaną wnioski uogólniające.

PROBLEM WYBORU OPTYMALNEGO UGRUPOWANIA ŚRODKÓW OPL W SYSTEMIE OBRONY PUNKTOWEJ

1. Postawienie problemu

Podczas planowania obrony przeciwlotniczej na szczeblach operacyjnych /np. na szczeblu Frontu lub armii/ i operacyjno-taktycznych/ np. w korpusie OPK / typową sytuacją jest zwykle taka, że mamy do dyspozycji pewną liczbę oddziałów /związków/ OPL o określonym składzie i wyposażeniu technicznym oraz pewną ilość obiektów. Należy zdecydować, które z tych obiektów powinny być bronione oraz ile i jakie siły i środki trzeba wydzielić do ich osłony. Możemy nawet z obrony niektórych obiektów zrezygnować całkowicie lub na przebieg określonego czasu, jeśli przy braku dostatecznej ilości środków, potrafimy uznać, że nie odgrywają one zasadniczego znaczenia z punktu widzenia operacyjnego.

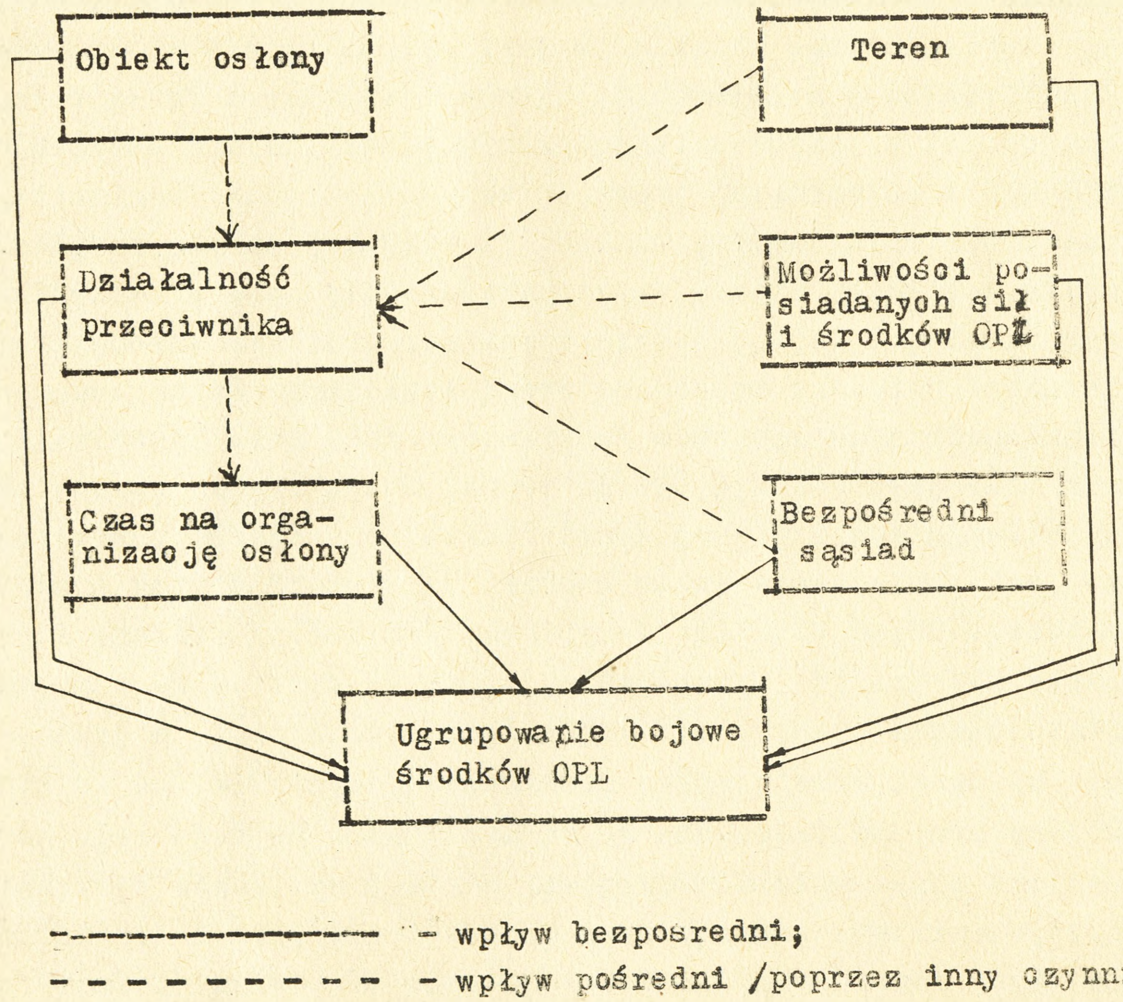
Punktem wyjścia przy rozwiązywaniu powyższego zagadnienia jest wnikliwa ocena możliwych sposobów /wariantów/ działania przeciwnika oraz ocena samych obiektów, głównie w świetle ich charakteru i znaczenia. Po konfrontacji z własnymi możliwościami można następnie dokonać podziału sił i środków OPL.

Właściwy podział sił i środków OPL jest zasadniczym elementem decyzji podejmowanej na szczeblu operacyjnym i stanowi podstawę do precyzowania zadań oraz szczegółowego planowania obrony przeciwlotniczej poszczególnych obiektów.

Szczegółowe planowanie obrony przeciwlotniczej obiektu odbywa się w sztabie związku taktycznego lub oddziału.

Podstawowym problemem występującym podczas planowania na tym szczeblu jest wypracowanie możliwie najkorzystniejszego ugrupowania bojowego. Chodzi tu o określenie wariantu, który by odpowiadał postawionemu zadaniu, stwarzał możliwie najkorzystniejsze warunki walki ze środkami napadu powietrznego przeciwnika, a ponadto zapewniał dobre warunki dowodzenia, zaopatrywania, maskowania oraz obrony przed bronią masowego rażenia.

Należy podkreślić, że powyższy problem jest trudny do rozwiązania, a to z uwagi na złożone warunki taktyczne. Wchodzi tu bowiem w grę szereg czynników takich, jak: prawdopodobny zamiar działania przeciwnika, charakter i znaczenie osłanianego obiektu, warunki terenowe, możliwości posiadanych sił i środków, stopień oddziaływania środków OPL bezpośredniego sąsiada oraz czas na organizację osłony. Czynniki te są ze sobą ściśle powiązane, co obrazuje rys. 1. Wpływ ich na ugrupowanie jest różny: najbardziej zdecydowany wpływ ma prawdopodobna działalność przeciwnika, teren, możliwości posiadanych sił i środków OPL oraz bezpośredni sąsiad.



Rys. 1. Czynniki warunkujące ugrupowanie bojowe środków OPL.

Różny jest także, zakres posiadanych informacji o tych czynnikach. Z reguły o przeciwniku posiadamy tylko pewną ilość wiadomości; im wiadomości te będą bardziej kompletne i pewne, tym łatwiej i lepiej będzie można obmyśleć i zorganizować obronę przeciwlotniczą obiektu. Najczęściej jednak nie posiadamy danych o tym w jakim czasie, jakimi siłami i w jaki sposób przeciwnik wykona uderzenie na osłaniany obiekt. Nie wiemy również pewnie z którego kierunku zostanie wykonany nalot. Danych tych nie możemy znać, ponieważ nie znamy zadania, jakie przeciwnik ma wykonać, nie znamy również wszystkich czynników, jakie bierze on pod uwagę przy obmyślaniu planu działania, nie wiemy także jakie ma o nas wiadomości. W tych warunkach trudno jest twierdzić pewnie w jaki sposób przeciwnik b ę d z i e działał. Staramy się wobec tego określić w jaki sposób m o ż e on działać. Gruntowne studium znanych nam czynników i faktycznych wiadomości o przeciwniku,powinno doprowadzić nas do ustalenia kilku najbardziej prawdopodobnych sposobów /wariantów/ działania na osłaniany obiekt. Im bardziej da się zawęzić zbiór możliwych sposobów /wariantów/ działania przeciwnika, tym łatwiej i lepiej będzie można zorganizować obronę przeciwlotniczą obiektu. Dochodząc drogą logicznego wnioskowania do prawdopodobnych sposobów /wariantów/ działania przeciwnika winniśmy jednocześnie być ostrożni. Dużym błędem byłoby chyba wyrobienie sobie pewnej myśli upartej o zamiarze przeciwnika, to jest powiedzenie sobie z góry, że postąpi on tak a nie inaczej. Mając ustalone te sposoby /warianty/ staramy się następnie przyjąć ugrupowanie, które by było dobre w wypadku zastosowania przez przeciwnika dowolnego z nich, a jednocześnie by uwzględniało wpływ pozostałych czynników, co do których możemy przyjąć założenie że są nam znane. Do tego celu konieczna jest pewna metoda. Jeśli się postawi wymaganie by problem ugrupowania był rozwiązany w sposób ścisły, to do czynników dających się wyrazić ilościowo metoda ta powinna polegać na wykorzystaniu odpowiedniego aparatu matematycznego, jako narzędzia ułatwiającego w dużym stopniu ustalenie zakresu wpływu poszczególnych czynników na ugrupowanie bojowe.

W wyniku zastosowania aparatu matematycznego powinniśmy otrzymać zwięzłą analizę ugrupowania w świetle czynników dających się wyrazić ilościowo.

Analiza ta łącznie z oceną czynników, których wpływu nie da się wyrazić ilościowo, powinna stanowić wystarczający materiał dla dowódcy do podjęcia decyzji.

Materiał opracowany przy użyciu aparatu matematycznego powinien przede wszystkim dawać obraz możliwości ogniowych przy różnych wariantach ugrupowania bojowego i różnych sposobach /wariantach/ działania przeciwnika oraz wskazywać dla jakiego wariantu możliwości te są maksymalne.

Jeśli uwzględnimy efektywność poszczególnych sposobów bombardowania i ataku przeciwnika, to powinniśmy otrzymać w zestawieniu z własnymi możliwościami ogniowymi, odpowiedź na zasadnicze pytanie: Jakie jest prawdopodobieństwo że obiekt nie zostanie zniszczony w świetle możliwych sposobów /wariantów/ działania przeciwnika ?

Wariant ugrupowania bojowego dla którego prawdopodobieństwo niezniszczenia obiektu przyjmuje wartość maksymalną oraz spełniający podstawowe wymogi taktyczne możemy uznać za optymalny.

Do wielkości /parametrów/, które wyznaczają ugrupowanie bojowe należą:

a/ ilość rubieży i ich oddalenie od środka obiektu;

b/ ilość i rodzaj pododdziałów, które należy rozmieścić na wybranych rubieżach;

c/ wzajemne położenie pododdziałów na poszczególnych rubieżach, z uwzględnieniem prawdopodobnych sposobów /wariantów/ działania przeciwnika oraz wymogów taktycznych.

Zatem wybór optymalnego wariantu ugrupowania polega na odpowiednim doborze wyżej wymienionych wielkości, aby prawdopodobieństwo obrony obiektu osiągało wartość możliwie największą. Stanowi to główną treść postawionego w pracy zagadnienia.

Chcąc rozwiązać to zagadnienie musimy przede wszystkim sprecyzować dokładnie warunki naszego zadania, tzn.ustalić jakie wielkości możemy uważać za znane, co należy dodatkowo określić oraz co chcemy wyznaczyć.

W odniesieniu do przeciwnika można założyć, że będą znane:

a/ dane taktyczno-techniczne i uzbrojenie środków napadu powietrznego;

b/ prawdopodobne sposoby /warianty/ działania;[x/]

c/ ogólna ilość i bazowanie środków napadu powietrznego oraz kierunki operacyjne nalotów.

W odniesieniu do nas, tzn. strony organizującej obronę przeciwlotniczą obiektu możemy przyjąć za znane:

a/ rodzaj i ilość sił i środków OPL wydzielonych do osłony obiektu, stopień wyszkolenia obsług oraz ogólnie ich stan fizyczny i psychiczny;

b/ możliwości ogniowe i manewrowe sprzętu;

c/ obiekt osłony, zwłaszcza jego wielkość, kształt, odporność na uderzenia oraz znaczenie i położenie;

d/ teren w rejonie obiektu oraz przewidywane warunki meteorologiczne;

e/ ugrupowanie środków OPL bezpośredniego sąsiada oraz jego ogólne możliwości ogniowe;

f/ czas na organizację obrony przeciwlotniczej obiektu.

Tak więc rozwiązania postawionego problemu należy szukać w oparciu o powyższy zakres informacji. Dalsze zwiększenie ilości danych jest nierealne, gdyż w przeciętnych warunkach taktycznych bardziej wyczerpujących wiadomości, dotyczących przeciwnika i własnych wojsk z reguły mieć nie będziemy.

Mając powyższe dane nie możemy jeszcze przystąpić do rozwiązania postawionego problemu, ponieważ nie mamy określonego kryterium efektywności, w świetle którego można by było porównać z sobą różne warianty ugrupowania bojowego i dokonać odpowiedniego wyboru.
Zatem przejdźmy do określenia kryterium stanowiącego miarę efektywności systemu obrony przeciwlotniczej obiektu przy różnych wariantach ugrupowania bojowego.

---

x/ Na określenie każdego ze sposobów /wariantów/ działania składają się: rodzaj i ilość środków przenoszenia i środków rażenia, jaką przeciwnik może użyć do zniszczenia /obezwładnienia/ obiektu, prędkość, wysokość i kierunek zajścia na obiekt, sposób bombardowania /ataku/ danego obiektu.

2. Kryterium efektywności

Przeciwnikowi planującemu uderzenie na osłaniany obiekt określoną ilością sił i środków zależy zawsze na wyborze takiego sposobu /wariantu/ działania, przy którym prawdopodobieństwo wykonania zadania jest możliwie największe.

Chcąc podać formułę, jaką wyraża się to prawdopodobieństwo, należy przedtem zauważyć, że zadanie zniszczenia /obezwładnienia/ obiektu będzie wykonane wówczas, gdy zaistnieją dwa sprzyjające dla przeciwnika zdarzenia, a mianowicie:

1°że siły i środki biorące udział w nalocie przenikną przez system OPL i osiągną nakazany obiekt;

2°że część sił i środków, której udało się przeniknąć przez system OPL zniszczy /obezwładni/ obiekt.

Jeśli przez Q_1 i Q_2 oznaczymy prawdopodobieństwo wystąpienia odpowiednio pierwszego i drugiego zdarzenia, a przez Q - prawdopodobieństwo wykonania zadania przez przeciwnika, to możemy przyjąć, że:

$$Q = Q_1 \cdot Q_2. \qquad /1/$$

gdzie prawdopodobieństwo wystąpienia drugiego zdarzenia /Q_2/ oblicza się przy założeniu, że zdarzenie pierwsze zaszło.

Łatwo jest zauważyć, że każde zdarzenie w równym stopniu wpływa na ostateczny wynik. Np. gdy Q_1 i Q_2 równe są 0,9, to prawdopodobieństwo wykonania zadania wynosi nie 0,9, ale 0,81. Jeśli natomiast prawdopodobieństwa Q_1 i Q_2 są różne, to prawdopodobieństwo wykonania zadania /Q/ nie przekracza nigdy mniejszej z dwóch liczb, czyli, że

$$Q \leq \min /Q_1, Q_2/ \qquad /2/$$

W ten sposób można zilustrować znaczenie dokładania starań przez przeciwnika, aby prawdopodobieństwo pojedynczych zdarzeń było odpowiednio duże. Oznacza to, że przeciwnikowi będzie zawsze zależało na wyborze takiego sposobu /wariantu/ działania, przy którym prawdopodobieństwo zadania strat przez system obrony przeciwlotniczej będzie możliwie małe, a jednocześnie prawdopodobieństwo zniszczenia /obezwładnienia/ celu będzie posiadało wartość możliwie największą.

Spójrzmy teraz na to zagadnienie od naszej strony, tzn. strony organizującej system obrony przeciwlotniczej obiektu.

Możemy powiedzieć, że w ostatecznym rachunku interesuje nas następujące zagadnienie: Jak jest prawdopodobieństwo tego, że obiekt nie zostanie zniszczony w świetle możliwych sposobów /wariantów/ działania przeciwnika ?

Zauważmy, że zdarzenie nie zniszczenia obiektu jest dokładnie przeciwne zdarzeniu, że obiekt zostanie zniszczony /obezwładniony/ i składa się z dwóch zdarzeń, a mianowicie:

1° że siły i środki biorące udział w nalocie nie przenikną przez system obrony przeciwlotniczej obiektu;

2° że część sił i środków, której udało się przeniknąć przez system obrony wykona atak /bombardowanie/ z tak małą skutecznością, że obiekt nie zostanie zniszczony /obezwładniony/.

Jeśli przez P_1 i P_2 oznaczymy prawdopodobieństwo wystąpienia odpowiednio pierwszego i drugiego zdarzenia, a przez P prawdopodobieństwo tego, że obiekt nie zostanie zniszczony, to otrzymamy wyrażenie:

$$\boxed{P} = 1 - Q = 1 - Q_1 \cdot Q_2 = 1 - /1 - P_1/ \ /1 - P_2/ . \qquad /3/$$

Naszym dążeniem jest sprowadzenie obu wielkości Q_1 i Q_2 do minimum lub w myśl nierówności /2/ przynajmniej jednej z nich, np. Q_1.

Sprowadzenie wielkości Q_1 i Q_2 do minimum może być dokonane przez:

a/ zadanie przeciwnikowi maksymalnych strat siłami lotnictwa myśliwskiego, rakiet przeciwlotniczych i artylerii przeciwlotniczej;

b/ utrudnienie przeciwnikowi wykonania zadania, np. przez zakłócenie radiolokacyjnych celowników bombowych, maskowanie obiektu, itp.

Ponieważ problem do rozwiązania w pracy jest ugrupowanie naziemnych środków OPL, a ściślej mówiąc, ugrupowanie rakiet i artylerii przeciwlotniczej, przeto należy wyjść z pierwszego zadania i zbadać w jaki sposób można zadać przeciwnikowi maksymum strat przy danej ilości sił i środków OPL, tzn. tej ilości, jaka została wydzielona do osłony obiektu.

Możemy przyjąć, że określony wariant ugrupowania bojowego stwarza warunki do zadania przeciwnikowi maksymum strat wówczas, gdy nadzieja matematyczna ilości rażonych środków napadu powietrznego /samolotów, samolotów - pocisków, pocisków/ osiąga wartość możliwie największą.

Obliczenie nadziei matematycznej /wartości oczekiwanej/ ilości rażonych środków napadu powietrznego można przeprowadzić następująco:

Załóżmy, że prowadzimy ogień jednym pododdziałem /dywizjonem ogniowym lub baterią/ do celu grupowego składającego się z u samolotów / samolotów - pocisków, pocisków/. Niech p_i będzie prawdopodobieństwem rażenia i-tego samolotu /samolotu - pocisku, pocisku/ a x - liczbą rażonych środków napadu powietrznego. Liczbę x przedstawmy w postaci sumy

$$x = x_1 + x_2 + \ldots + x_u = \sum_{i=1}^{u} x_i$$

gdzie wielkość przypadkowa x_i przyjmuje jedność, jeśli i-ty samolot /samolot - pocisk, pocisk/ jest rażony i zero, gdy nie jest rażony. Odpowiadające tej wartości prawdopodobieństwa są równe:

x_i	0	1
$p/x_i/$	q_i	p_i

gdzie $q_i = 1 - p_i$

Zatem nadzieja matematyczna ilości rażonym samolotów /samolotów - pocisków, pocisków/ przez jeden pododdział ogniowy będzie równa

$$M_{/x/} = \sum_{i=1}^{u} /0 \cdot q_i + 1 \cdot p_i/ = P_i . \qquad /4/$$

Gdy do celu pojedyńczego prowadzi ogień nie jeden, lecz kilka pododdziałów, wówczas prawdopodobieństwo rażenia tego celu będzie równe

$$P_{in} = 1 - \prod_{c=1}^{n} /1 - p_{ic}/, \qquad /5/$$

gdzie:

n - ilość pododdziałów ogniowych prowadzących ogień do celu;

c - numer pododdziału.

Zaś nadzieja matematyczna ilości rażonych samolotów /samolotów - pocisków, pocisków/ biorących udział w nalocie wyrazi się wzorem

$$M = \sum_{i=1}^{u} P_{in}. \qquad /6/$$

Warto zwrócić uwagę na to, że gdy ilość środków biorących udział w nalocie /u/ równa jest jedności, to nadzieja matematyczna wyrażona wzorami /4/ i /6/ pokrywa się z prawdopodobieństwem rażenia celu pojedyńczego /jednego samolotu, samolotu - pocisku, pocisku/.

Załóżmy teraz, że dany obiekt jest atakowany z powietrza przez kilka celów /pojedyńczych lub grupowych/ i oznaczmy przez $M_{nł}$ wartość nadziei matematycznej przy strzelaniu ilości n pododdziałów do ł-tego celu, przy czym wielkość $M_{nł}$ równa się zero, jeśli cel nie jest ostrzeliwany i jest większa od zera, w wypadku, gdy do celu prowadzony jest ogień.

Nadzieja matematyczna ilości rażonych celów przez wszystkie pododdziały, które wezmą udział w odparciu nalotu na dany obiekt będzie w tym przypadku równa:

$$M_G = \sum_{ł=1}^{G} M_{nł} , \qquad /7/$$

gdzie: G - liczba atakujących celów /pojedyńczych lub grupowych/;

ł - numer celu.

Stąd średnia wartość prawdopodobieństwa odparcia ataku z powietrza wyrazi się wzorem

$$P_1 = \frac{M_G}{Ł}, \qquad /8/$$

gdzie: Ł - ogólna ilość samolotów biorących udział w ataku.

W ten sposób otrzymaliśmy wartość P_1 występującą we wzorze /3/.

Z powyższego widać, że zagadnienie obliczenia średniego prawdopodobieństwa odparcia danego ataku /P_1/ jest dość skomplikowane i żmudne. Nie wymaga ono jednak dużej wiedzy matematycznej lecz raczej umiejętności starannego rachowania. Cała trudność w tym zagadnieniu polega na obliczeniu nadziei matematycznej ilości rażonych samolotów, która zależy od ilości strzelających pododdziałów, skuteczności strzelania każdego pododdziału, ilości celów, ich składu i ugrupowania.

Nie czyni to jednak zbyt wielkich przeszkód w rozwiązaniu problemu ugrupowania bojowego, ponieważ jest to zagadnienie tego typu, że z powodzeniem może być zaprogramowane na maszynę matematyczną i z tabelaryzowane /dla danego rodzaju sprzętu/, bądź też można je obliczyć, stosując metody uproszczone.

W przypadku, gdy chodzi o rozwiązanie problemu ugrupowania artylerii przeciwlotniczej, to średnią wartość prawdopodobieństwa P_1 można obliczyć, korzystając ze wzoru

$$P_1 = 1 - \sum_{r=0}^{s} \frac{e^{-mp} (mp)^r}{r!} \qquad /9/$$

gdzie: m - ilość strzałów przypadająca na jeden cel;
p - prawdopodobieństwo trafienia przy jednym strzale;
s - liczba trafień przy m strzałach.

Wzór /9/ wyraża /w funkcji mp/ prawdopodobieństwo, że liczba trafień przy m oddanych strzałach będzie większa od danej wartości s.

Pod znakiem sumy występuje funkcja rozkładu prawdopodobieństwa wg prawa Poissona.

Wartości prawdopodobieństw P_1 wyrażonych wzorem /9/ podano w tabeli nr 1.

Tabela nr 1

S	mp						
	0,2	0,5	1,0	2,0	3,0	4,0	5,0
1	2	3	4	5	6	7	8
1.	0,0175	0,0904	0,2642	0,5940	0,8008	0,9084	0,9595
2.	0,011	0,0146	0,0803	0,3233	0,5768	0,7619	0,8753
3.	0,001	0,019	0,0189	0,1429	0,3527	0,5665	0,7349
4.		0,004	0,0037	0,0526	0,1847	0,3711	0,5595
5.		0,002	0,0006	0,0166	0,0838	0,2148	0,3839
6.			0,0001	0,0045	0,0335	0,1106	0,2378
7.				0,0011	0,0119	0,0511	0,1333
8.				0,0002	0,0038	0,0213	0,0680
9.					0,0011	0,0081	0,0317
10.					0,0003	0,0028	0,0136

Gdy ilość oddanych strzałów jest duża, a prawdopodo-podobieństwo rażenia przy jednym strzale jest małe, wówczas prawdopodobieństwo P_1 możemy obliczyć wprost ze wzoru

$$P_1 = \frac{N}{G} \cdot p, \qquad /10/$$

gdzie: N - ogólna ilość strzałów jaką może oddać dane ugrupowanie w czasie odpierania ataku;

$\frac{N}{G}$ = m - ilość strzałów przypadająca na jeden cel;

p - średnie prawdopodobieństwo trafienia celu przy jednym strzale.

Zwróćmy uwagę, że iloczyn N . p jest po prostu nadzieją matematyczną ilości rażonych samolotów, która występuje w rozkładach Poissona i dwumianowym.

Należy zastrzec, iż obliczenie prawdopodobieństwa odparcia ataku /P_1/ przy wykorzystaniu wzoru /10/ może mieć miejsce w przypadku, gdy ilość oddanych strzałów jest duża, a prawdopodobieństwo rażenia przy jednym strzale jest tak małe, że iloczyn N . p jest niewielki. Oczywiście pojęcia "duże", "małe" są względne i zależą od ważności zagadnienia. Przyjmuje się w zasadzie, że ten sposób obliczenia nadziei matematycznej /wartości średniej/ można stosować wówczas, gdy $N \cdot p \leq 5$, oraz $N \cdot p \leq G$[x/]. Wielkość popełnionego błędu będzie się wówczas zawierała w granicach tysięcznych części całości. W odniesieniu do ugrupowania małokalibrowej artylerii przeciwlotniczej warunki powyższe prawie zawsze będą spełnione, gdyż choć ilość strzałów jaką może oddać dane ugrupowanie jest stosunkowo duża, to prawdopodobieństwo rażenia przy jednym strzale jest bardzo małe, bo zawiera się w granicach tysięcznych części całości.

Mnożąc wyrażenie /10/ przez 100, otrzymamy procent rażonych celów, czyli procent strat, a więc

$$P_1 = \frac{100 \cdot N \cdot p}{G} \qquad /11/$$

Podany wyżej sposób obliczenia wartości P_1 jest bardzo prosty i może być w praktyce stosowany. Uzyskano to dzięki założeniu, że prawdopodobieństwo rażenia przy jednym strzale jest stałe. W rzeczywistości w czasie strzelania p ulega zmianie.

Jednak ze względów praktycznych można przyjąć pewną średnią wartość p /dla danej wysokości, średniego parametru i przyjętego sposobu strzelania/.

Chcąc posłużyć się wzorem /10/ lub /11/ należy znać:

a/ ilość strzałów jaką może oddać dane ugrupowanie w czasie odpierania ataku z powietrza /N/;

b/ prawdopodobieństwo rażenia przy jednym strzale.

---

x/ Zagadnienie to jest szczegółowo naświetlone w pracach: Grayson Merrill - "Studia Operacyjne" - tłum. "Przegląd Techniki Rakietowej" Zeszyt 45, 1962r. Wyd. Politechniki Warszawskiej i T. Gerstenkorn i T. Śródka - "Ćwiczenia z kombinatoryki i rachunku prawdopodobieństwa", - Łódź Wyd. 1961r.

Pierwszą wielkość, mianowicie N, można dla każdego wariantu ugrupowania praktycznie określić, posługując się odpowiednimi wykresami x/ 1.

Drugi parametr nietrudno znaleźć w odpowiednich podręcznikach xx/ z zakresu teorii strzelania lub obliczyć, opierająo się na znanym wzorze.

$$p_m = 1 - /1 - p/^m, \qquad /12/$$

gdzie p_m jest prawdopodobieństwem rażenia celu przy m strzałach. Aby wyznaczyć wartość p musimy znać p_m. Oczywiste jest, że wartość p_m powinna odpowiadać średnim warunkom strzelania jakie mogą wystąpić podczas osłony obiektu, np. wysokość lotu celu od 200 - 1000 m, prędkość lotu celu w granicach 200 - 300 m/sek, średni parametr ok. 1000 m.

Podany wyżej sposób określania wielkości p i m wskazuje na to, że w praktyce nie napotkamy większych trudności przy obliczaniu prawdopodobieństwa P_1 wyrażonego wzorem /10/.

Zdajemy sobie jednocześnie sprawę z tego, że jest to średnia wartość prawdopodobieństwa, gdyż występujące w tych wzorach prawdopodobieństwo rażenia przy jednym strzale jest średnie.

Jeśli we wzorach /10/ lub /11/ podstawimy za p najmniejszą lub największą wartość prawdopodobieństwa rażenia przy jednym strzale, to otrzymamy odpowiednio dolną lub górną wartość P_1.

Zwróćmy jeszcze uwagę na to, że jedyną wartością zmienną występującą we wzorach /10/ lub /11/ dla danego sposobu /wariantu/ działania przeciwnika, jest m. Zatem zwiększenie prawdopodobieństwa odparcia ataku przeciwnika jest w tych warunkach możliwe na drodze maksymalizacji wielkości m.

- -

x/ Szczegółowy opis wykresów oraz sposób posługiwania się nimi ujmują: Skrypt n.t. "obrona powietrzna obiektów przez naziemne środki OPL". Wyd. ASG z 1962r. oraz praca doktorska mjr dypl. M. HAWRYSZCZAK.

xx/Patrz "Zasady strzelania artylerii przeciwlotniczej małego kalibru"- Wyd. MON 1961r.

Rozpatrzmy wobec powyższego co wpływa na ilość oddanych strzałów i czy możemy zwiększyć m przez odpowiedni dobór parametrów wyznaczających ugrupowanie bojowe.

W pierwszym rzędzie ilość oddanych strzałów zależy od parametrów charakteryzujących określony sposób /wariant/ działania przeciwnika takich jak: prędkość, wysokość, czas przebywania na kursie bojowym, kąty nurkowania lub wznoszenia itp.

Prócz tego ilość oddanych strzałów zależy od: ilości pododdziałów, szybkostrzelności sprzętu, wielkości stref ostrzału /w płaszczyźnie poziomej i pionowej/, możliwości wykrycia i uchwycenia celu na czas przez każdy pododdział, stref martwych dział i przyrządów.

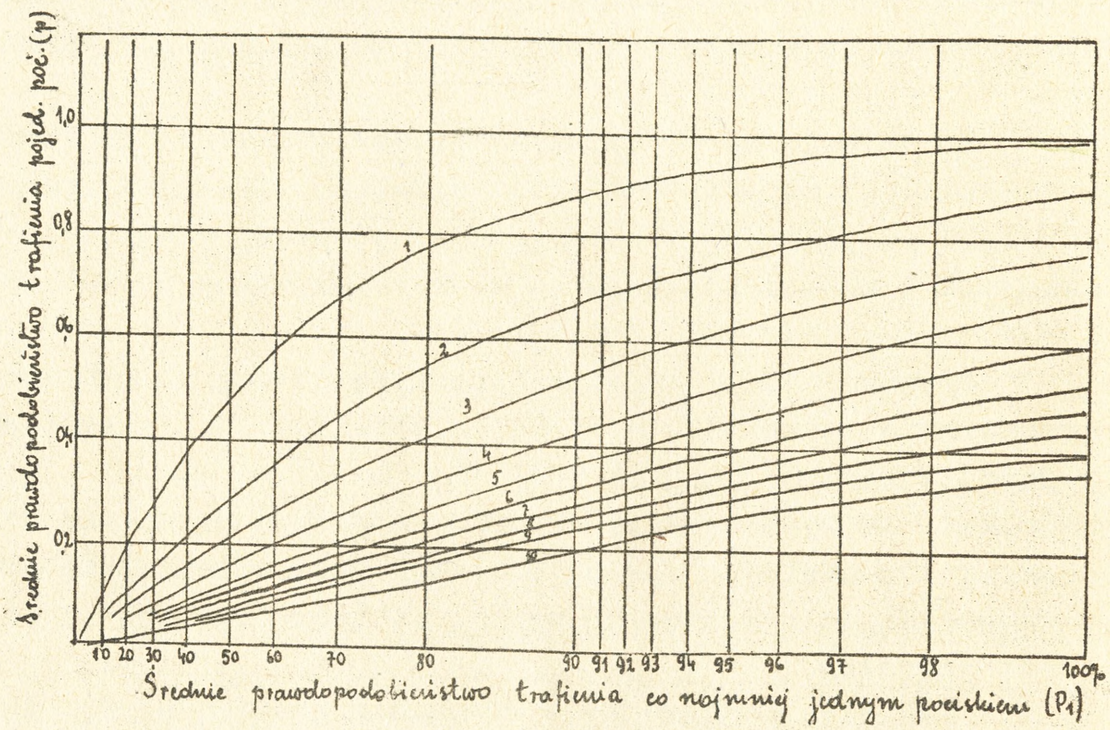
Wreszcie ilość oddanych strzałów zależy od promienia ugrupowania pododdziałów względem obiektu i odległości między pododdziałami.
Zależność ta wynika stąd, że wraz ze zmianą promienia ugrupowania i odległości między pododdziałami zmienia się czas przebywania celu w strefie ognia, co bezpośrednio wpływa na ilość strzałów.

Tak więc dobierając odpowiednio promień ugrupowania pododdziałów i odległości między nimi możemy zwiększyć ilość strzałów. Sposób doboru zarówno promienia ugrupowania, jak i odległości między pododdziałami omówiony zostanie w następnych punktach niniejszego rozdziału.

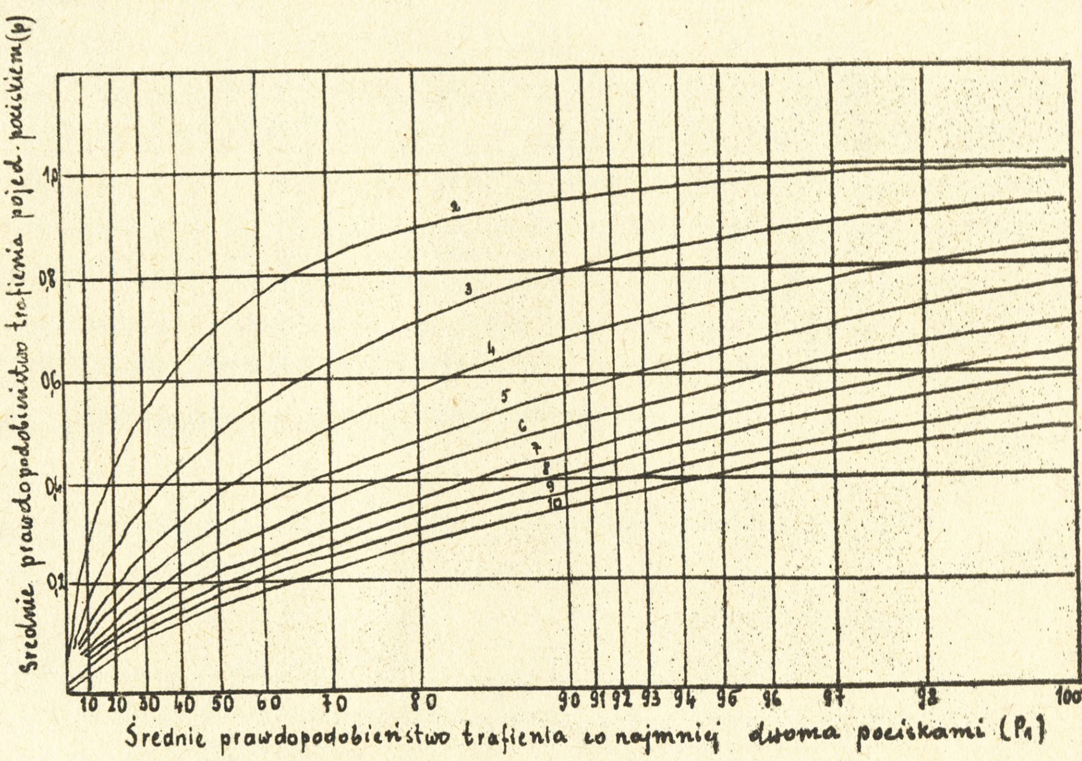
Dotychczas omówiony został sposób określania prawdopodobieństwa P_1 w przypadku rozwiązywania problemu ugrupowania środków OPL charakteryzujących się stosunkowo dużą szybkostrzelnością i małym prawdopodobieństwem rażenia celu przy jednym strzale, co może odnosić się szczególnie do artylerii przeciwlotniczej małego kalibru.

Przejdźmy teraz do omówienia sposobu określania wartości P_1 w przypadku, gdy w grę wchodzi mała ilość strzałów i stosunkowo duże prawdopodobieństwo rażenia przy jednym strzale, co ma miejsce przy rozwiązywaniu problemu ugrupowania rakiet przeciwlotniczych.

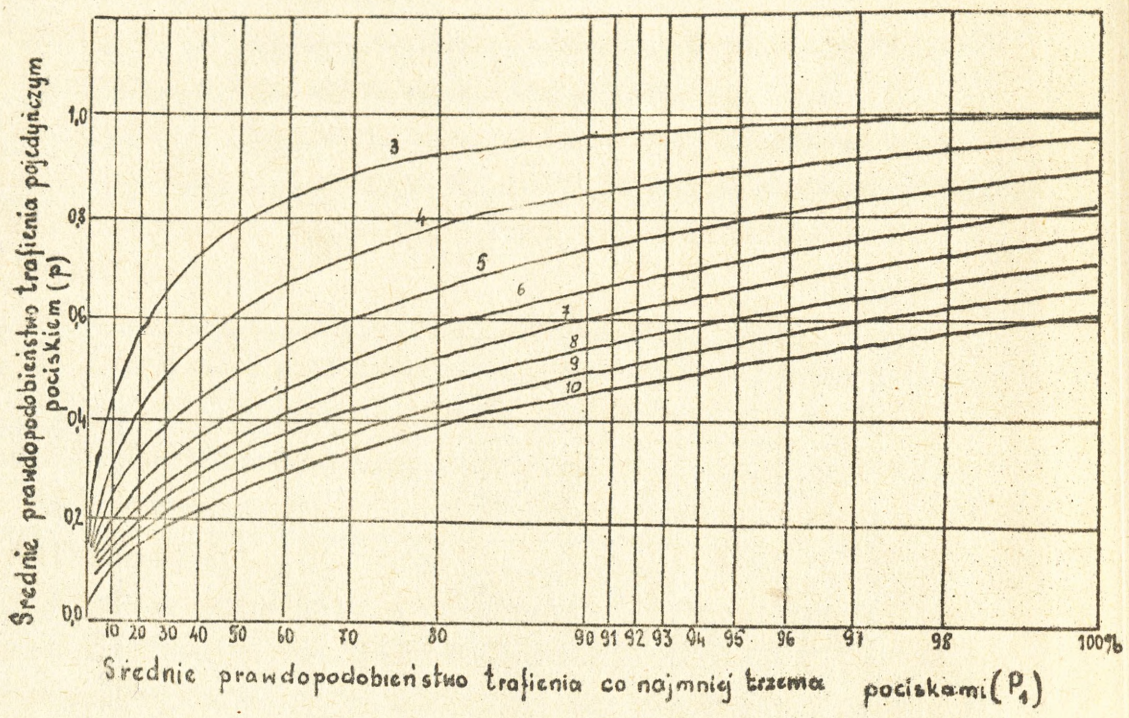
Przy założeniu, że znana jest średnia wartość prawdopodobieństwa rażenia jednym pociskiem, interesujące nas prawdopodobieństwo P_1 możemy określić, posługując się niżej podanymi wykresami /rys. 2,3, 4 i 5/, które sporządzono w oparciu o wzór /12/, wykorzystując skale kologarytmiczną.



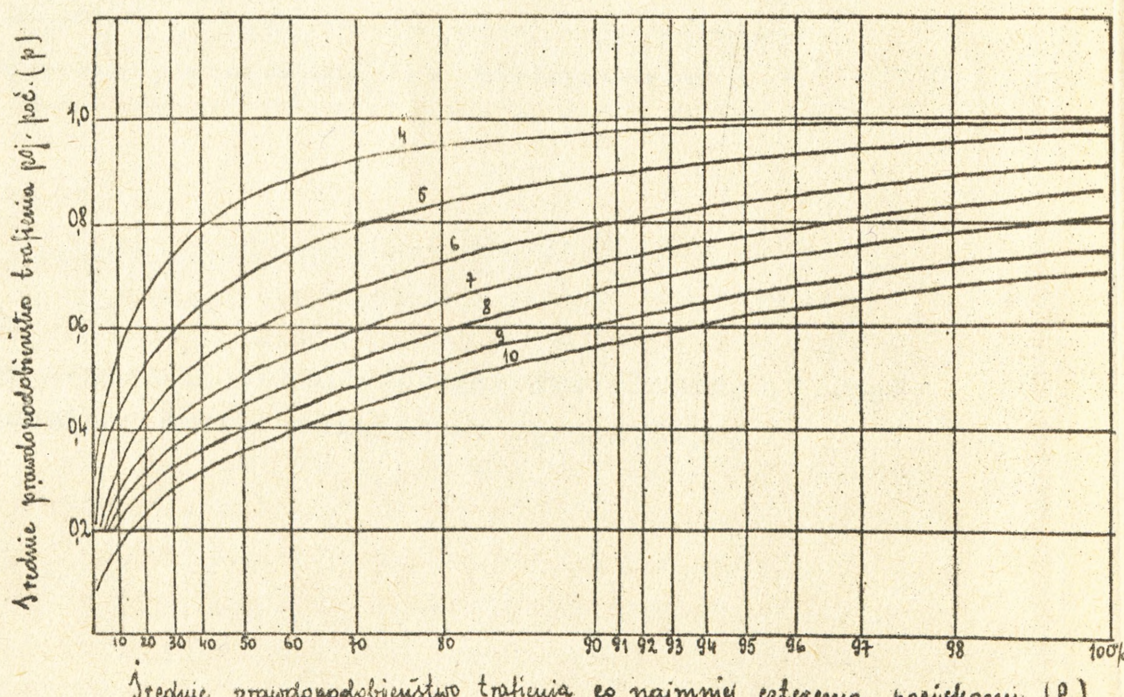
Rys. 2. Srednie prawdopodobieństwo trafienia celu pojedynczego co najmniej jednym pociskiem.



Rys. 3. Średnie prawdopodobieństwo trafienia celu pojedynczego co najmniej dwoma pociskami.



Rys. 4. Średnie prawdopodobieństwo trafienia celu pojedynczego co najmniej trzema pociskami.



Rys. 5. Średnie prawdopodobieństwo trafienia celu pojedynczego co najmniej czterema pociskami.

Na wykresie 2 podane są wartości prawdopodobieństw trafienia celu pojedynczego co najmniej jednym pociskiem. Krzywe wykreślone zostały dla liczby pocisków od jednego do dziesięciu. W razie potrzeby można sporządzić wykres dla większej liczby pocisków. Korzystając z tego wykresu, należy pamiętać, że prawdopodobieństwo trafienia celu jednym pociskiem jest stałe. Jeśli w czasie prowadzenia ognia p ulega zmianie, to krzywe mogą podawać tylko prawdopodobieństwo odpowiadające górnej i dolnej wartości p.

Na wykresach 3, 4 i 5 podane są wartości prawdopodobieństw trafienia celu pojedynczego co najmniej dwoma, trzema i czterema pociskami. Z tych samych wykresów możemy określić prawdopodobieństwo trafienia dwóch, trzech i czterech celów pojedynczych co najmniej jednym pociskiem.

Chcąc posłużyć się powyższymi wykresami musimy uprzednio określić liczbę rakiet, jaką może oddać dane ugrupowanie w czasie odpierania ataku z powietrza. Przy określaniu ilości rakiet należy uwzględnić parametry charakteryzujące sposób /wariant/ działania przeciwnika oraz parametry charakteryzujące możliwości sprzętu takie, jak: strefa ognia, ilość kanałów naprowadzania rakiet, odstęp strzelania, czas przeniesienia ognia na cel następny itd.

Analizując możliwości ogniowe danego wariantu ugrupowania zwykle interesuje nas zniszczenie celu, a nie liczba trafień, która to wywołuje. Liczba trafień, która prowadzi do zniszczenia określonego celu, jest funkcją zdolności rażącej pocisku i podatności celu na uszkodzenia. Pamiętając o tym, można wykorzystać powyższe wykresy do obliczenia prawdopodobieństwa zniszczenia celu, albo prawdopodobieństwa trafienia.

Przedstawione wyżej rozważania na temat możliwości ogniowych pozwalają stwierdzić, że dla każdego sposobu /wariantu/ działania przeciwnika i dowolnego wariantu ugrupowania środków OPL jesteśmy w stanie określić wartość prawdopodobieństwa P_1 występującą we wzorze /3/.

Aby wyrażenie /3/ stanowiło kryterium efektywności musimy ponadto znać występującą w nim wartość P_2, gdzie $P_2 = 1 - Q_2$.

Chcąc tę wartość określić należy znać stopień skuteczności poszczególnych sposobów /wariantów/ działania przeciwnika, który jest funkcją ilości i rodzaju środków napadu powietrznego przeciwnika, dokładności celowania, skuteczności środków rażenia i charakterystyk obiektu jako celu.

Należy jednak podkreślić, że nie zawsze dane te będą znane. Dotyczy to głównie sposobów ataku przy użyciu nowych środków rażenia. W takich przypadkach musimy się zadowolić jedynie przybliżonymi danymi, które można uzyskać np. przez porównanie sposobów bombardowania /ataku/ przeciwnika z odpowiednimi sposobami stosowanymi przez własne lotnictwo przy użyciu podobnych środków rażenia. Jeśli porównań takich przeprowadzić się nie da, to z konieczności za funkcję kryterium należy przyjąć tylko wartość P_1. Oznacza to, że na skutek braku danych, zmuszeni jesteśmy założyć, iż poszczególne sposoby /warianty/ działania przeciwnika są jednakowo skuteczne. Z założeniem tym można się zgodzić, jeśli w grę wchodzi obiekt, który stanowi cel dla broni atomowej, jak np. ważny i duży obiekt przemysłowy. Jeśli natomiast wziąć pod uwagę obiekt punktowy, jak np. przeprawę, to może on być obezwładniony przez lotnictwo bądź środkami klasycznymi, bądź też bronią atomową. W obu przypadkach sposoby /warianty/ działania przeciwnika będą z reguły różne i uznanie ich za jednakowo skuteczne nie będzie poprawne.

W takich przypadkach należy dążyć do uzyskania niezbędnych danych do określenia wartości P_2 dla każdego z prawdopodobnych sposobów /wariantów/ działania przeciwnika. Umożliwia to ustalenie ugrupowania bojowego, przy którym prawdopodobieństwo P_1 jest proporcjonalne do skuteczności danego ataku, co charakteryzuje wartość Q_2, gdzie $Q_2 = 1 - P_2$.

Proporcja ta orzeka, że w stosunku do ataku najbardziej skutecznego, możliwości ogniowe powinny być największe, a w stosunku do ataku mniej skutecznego, który w mniejszym stopniu zagraża obiektowi - odpowiednio mniejsze. W świetle wzoru /1/ oznacza to, że przez odpowiedni dobór wielkości Q_1 możemy doprowadzić prawdopodobieństwo wykonania zadania przez przeciwnika /Q/ do wartości możliwie najmniejszej, lub co na jedno wychodzi, prawdopodobieństwo obrony obiektu /P/ do wartości możliwie największej.

Tak więc wyrażenie

$$Q_1 = 1 - P_1$$

spełnia tu rolę jak gdyby regulatora, który nie pozwala przeciwnikowi na osiągnięcie wyraźnych szans zniszczenia obiektu, mimo zastosowania nawet skutecznych sposobów ataku /bombardowania/.

W tym miejscu warto jeszcze raz podkreślić tę właściwość, że prawdopodobieństwo wykonania zadania /Q/ nie przekracza nigdy mniejszej z dwóch liczb Q_1 i Q_2, tzn.

$$Q < \min /Q_1, Q_2/.$$

Jeśli np. prawdopodobieństwo przeniknięcia przez system obrony przeciwlotniczej przy danym sposobie /wariancie/ działania /Q_1/ wynosi 0,5, a prawdopodobieństwo /Q_2/ równe jest 0,9, to prawdopodobieństwo wykonania zadania /Q/ wynosi tylko 0,45, a więc spełnia warunek /2/, bo

$$0,45 < \min /0,5, 0,9/.$$

Należy jednak mieć na uwadze, że ze względu na ograniczoną ilość środków wydzielonych do obrony przeciwlotniczej obiektu oraz ograniczone możliwości sprzętu, wartość $P_1 = 1 - Q_1$ możemy zmienić jedynie w pewnych granicach, określonych nierównością

$$0 \leq P_1 \leq \max P_1, \qquad /13/$$

gdzie $\max P_1$ oznacza wartość prawdopodobieństwa, jaką można uzyskać przy zaangażowaniu do odparcia ataku z powietrza maksymum sił wydzielonych do osłony obiektu.

To samo odnosi się do przeciwnika, tzn. może on przez stosowanie odpowiednich sposobów bombardowania /ataku/ zmieniać wartość Q_2 jedynie w pewnych granicach.

Należy się jednak liczyć z tym, że nigdy nie zmieni on wartości Q_2 w kierunku niekorzystnym dla siebie, czyli korzystnym dla nas, lecz będzie się starał wybrać ten sposób /wariant/ działania, który gwarantuje mu osiągnięcie możliwie największych wartości Q_1 i Q_2. Zdaje on sobie jednocześnie sprawę z tego, że strona broniąca się usiłuje zawsze sprowadzić wartość Q_1, a przez to i Q do minimum.

Występuje tu wyraźnie sytuacja konfliktowa, w której cele obu stron są przeciwstawne. To zaś prowadzi do gry. W grze tej jako kryterium efektywności można przyjąć wyrażenie /1/ lub /3/, gdyż w dostatecznym stopniu odzwierciadlają one zainteresowania obu stron.

Mając ustalone kryterium efektywności można już przystąpić do rozwiązania postawionego problemu, tzn. do wyboru ugrupowania bojowego, przy którym prawdopodobieństwo obrony obiektu /P/ w świetle prawdopodobnych sposobów /wariantów/ działania przeciwnika osiągnie wartość możliwie największą.

3. Ogólny model matematyczny

Przystępująo do rozwiązania postawionego problemu należy przede wszystkim zbudować model matematyczny, który umożliwi przeprowadzenie zwięzłej analizy i dokonania wyboru optymalnego ugrupowania, w świetle przyjętego kryterium efektywności. Z uwagi na zakres posiadanych informacji o przeciwniku, model ten powinien być modelem strategicznym.x/ W celu zbudowania jego wprowadźmy następująoe oznaczenia:

S_l - ogólna ilość pododdziałów l-tego rodzaju wydzielona do obrony przeciwlotniczej obiektu, gdzie $l = 1,2,3 \ldots L$,

S_{l_i} - ilość pododdziałów l-tego rodzaju rozmieszczona na i-tej rubieży, gdzie $i = 1,2,3,\ldots,I$;

r_{i_l} - promień i-tej rubieży ugrupowania pododdziałów l-tego rodzaju mierzony od środka obiektu;

φ_e - wycinek /sektor/ wielkości φ i o numerze e, gdzie $e = 1,2,3\ldots, f$;

d_{i_e} - odległości pomiędzy pododdziałami na i-tej rubieży w sektorze o numerze e;

j - indeks oznaczający sposób /wariant/ działania przeciwnika, gdzie $j = 1,2,3,\ldots w$;

k - indeks oznaczający wariant ugrupowania środków OPL wydzielonych do obrony obiektu /zależny od S_{l_i}, r_{il}, d_{ie}/ gdzie $k = 1,2,3,\ldots,u$;

P_k^j - prawdopodobieństwo obrony obiektu przy j-tym sposobie /wariancie/ działania przeciwnika i k-tym wariancie ugrupowania środków OPL;

$Q_k^j = 1 - P_k^j$ - prawdopodobieństwo wykonania zadania przy j-tym sposobie /wariancie/ działania przeciwnika i k-tym wariancie ugrupowania środków OPL wydzielonych do obrony obiektu;

---

x/ Model, w którym choćby o jednym parametrze wiemy tylko tyle, że przyjmuje on jedną z wielu możliwych wartości, przy czym zbiór tych wartości jest nam na ogół znany - nazywamy modelem strategicznym. W naszym przypadku takimi parametrami są parametry charakteryzujące możliwe sposoby /warianty/ działania przeciwnika.

$Q^j_{2k} = 1 - P^j_{2k}$ – prawdopodobieństwo zniszczenia /obezwładnienie/obiektu przy j-tym sposobie działania przeciwnika i k-tym wariancie ugrupowania.

Wyrażenie P^j_k jest wielkością, którą przeciwnik stara się minimalizować przez wybór odpowiedniego sposobu /wariantu/ działania na osłaniany obiekt.

Wyboru takiego przeciwnik tym trafniej może dokonać, im dane o celu i systemie obrony powietrznej obiektu będą bardziej dokładne i aktualne. Dążność przeciwnika do minimalizowania wielkości P^j_k lub, co na jedno wychodzi, maksymalizowania wielkości Q^j_k możemy wyrazić matematycznie następująco

$$\min_j P^j_k = \min_j /1 - Q^j_k/, \qquad /14/$$

$$\text{lub} \quad \max_j Q^j_k = \max_j /1 - P^j_k/. \qquad /15/$$

Ponieważ w myśl wzorów /1/ i /3/

$Q^j_k = Q^j_{1_k} \cdot Q^j_{2_k} = /1 - P^j_{1_k}/ \; /1 - P^j_k/$, stąd

wyrażenie /14/ przejmie postać

$$\min_j P^j_k = \min_j /1 - Q^j_{1_k} \cdot Q^j_{2_k}/ = \min_j \left[1 - /1 - P^j_{1_k}/ \; /1 - P^j_{2_k}/\right]$$

W przypadku /15/ będzie

$$\max_j Q^j_k = \max_j \left[/1 - P^j_{1_k}/ \; /1 - P^j_{2_k}/\right]$$

Wyrażenie /14/ przedstawia najmniejszą wartość prawdopodobieństwa obrony obiektu ze względu na możliwe sposoby działania przeciwnika, przy wariancie ugrupowania środków OPL o indeksie k, a wyrażenie /15/ największą wartość prawdopodobieństwa wykonania zadania przez przeciwnika.

Strona organizująca system obrony przeciwlotniczej obiektu znając prawdopodobne sposoby działania przeciwnika, własne możliwości, warunki terenowe i meteorologiczne oraz ugrupowanie i możliwości środków OPL bezpośredniego sąsiada, winna wybrać spośród wszystkich możliwych wariantów $k/1 \leq k \leq u/$ ten, dla którego wyrażenie /14/ przyjmie wartość największą, czyli /15/ najmniejszą, co w zapisie matematycznym wyrazi się

$$\max_k \min_j P_k^j = \max_k \min_j /1 - Q_k^j /, \qquad /14'/$$

czyli

$$\min_k \max_j Q_k^j = \min_k \max_j /1 - P_k^j /. \qquad /15'/$$

Oznaczmy przez V_1 wartość prawdopodobieństwa /14'/, a przez k' wariant ugrupowania środków OPL, przy którym wartość ta zostaje osiągnięta. Po uwzględnieniu powyższych oznaczeń wyrażenie /14'/ zapiszemy[x/]

$$V_1 = \max_k \min_j P_k^j = \min_j P_{k'}^j, \qquad /14''/$$

Z równania /14''/ wynika, że dla wszystkich możliwych sposobów /wariantów/ działania przeciwnika /j/ będzie

$$V_1 \leq P_{k'}^j, \qquad /16/$$

Oznacza to, że przyjmując wariant ugrupowania K', gwarantujemy sobie uzyskanie prawdopodobieństwa obrony obiektu równego co najmniej

$$V_1 = \min_j P_{k'}^j,$$

bez względu na sposób /wariant/ działania przeciwnika, ponieważ wartość prawdopodobieństwa V_1 odnosi się do wariantu działania najbardziej niekorzystnego dla nas.

---

x/ Przy wprowadzonych oznaczeniach wartość wyrażenia /15'/ będzie równa: $1 - V_1 = \min_k \max_j Q_k^j = \max_k /1-P_k^j/$

Interesuje nas jednak przede wszystkim wartość /14'/ i /14''/.

W odniesieniu do innych sposobów /wariantów/ działania przeciwnika prawdopodobieństwo to będzie odpowiednio większe, co wynika z nierówności /16/.

Ale przyjmując wariant ugrupowania k′/zależy od S_{1_1}, r_{1_1}, d_{1_e} /, bierzemy pod uwagę tę okoliczność, że że przeciwnik może prawidłowo ocenić wszystkie czynniki składające się na jego decyzję i wybrać ten sposób działania, który zapewnia mu wykorzystanie słabych stron systemu obrony powietrznej obiektu, a jednocześnie daje możliwie dużą pewność zniszczenia /obezwładnienia/ obiektu. Można też powiedzieć, że strona broniąca się wybierając wariant ugrupowania k′ zakłada, że przeciwnik będzie działał w sposób przemyślany i dlatego zachowuje dużą ostrożność, tzn. liczy się z możliwością zastosowania przez przeciwnika najbardziej niekorzystnego dla niej sposobu /wariantu/ działania.

Należy zaznaczyć, że jeśli przeciwnik posiada informacje /dane/ dotyczące ilości i rodzaju sił i środków wydzielonych do obrony powietrznej obiektu oraz zna zasady ich wykorzystania, to może zastosować taki sposób działania, przy którym prawdopodobieństwo obrony obiektu będzie równe co najwyżej

$$V_2 = \min_j \max_k P_k^j . \qquad /17/$$

Po uwzględnieniu wzorów /1/ i /3/ będzie

$$V_2 = \min_j \max_k /1 - Q^j_{1_k} Q^j_{2_k} / =$$

$$= \min_j \max_k \left[1 - /1 - P^j_{1_k} / /1 - P^j_{2_k} / \right] .$$

Wyrażenie /17/ stanowi górną wartość prawdopodobieństwa obrony obiektu, a wyrażenie /14′ / jest wartością dolną tego prawdopodobieństwa.x/

- -

x/ Wartości prawdopodobieństw wyrażone wzorami /14′/ i /17/ zgodnie z terminologią stosowaną w teorii gier nazywają się odpowiednio d o l n ą i g ó r n ą w a r t o ś c i ą g r y.

Ze znaczenia obu tych wartości wynika oczywista nierówność

$$\max_{k} \min_{j} P_k^j \leq \min_{j} \max_{k} P_k^j, \qquad /18/$$

czyli

$$V_1 \leq V_2 \qquad /19/$$

Podczas rozwiązywania problemu ugrupowania naziemnych środków OPL może się zdarzyć, że $V_1 = V_2$ lub $V_1 \quad V_2$. Rozróżnienie tych dwóch przypadków jest bardzo ważne. W pierwszym przypadku, gdy $V_1 = V_2$ sytuacja jest prosta, bowiem strona broniąca się wybierając wariant ugrupowania k' zapewnia sobie uzyskanie prawdopodobieństwa obrony obiektu równego co najmniej wspólnej wartości V_1 i V_2, zdając sobie jednocześnie sprawę z tego, że przeciwnik może zapobiec temu, aby nie osiągnąć większego prawdopodobieństwa obrony obiektu, niż $V_1 = V_2$, przez zastosowanie najbardziej niekorzystnego dla nas sposobu /wariantu/ działania, który oznaczymy przez j' .

Ta wspólna wartość

$$V_1 = V_2 \qquad /20/$$

jest kompromisową wartością prawdopodobieństwa obrony obiektu i zgodnie z terminologią stosowaną w teorii gier nazywa się w a r t o ś c i ą g r y. Tak więc, jeśli $V_1 = V_2$, to strona broniąca się posiada optymalny wariant ugrupowania k', a przeciwnik - optymalny sposób /wariant/ działania /j'/.

W teorii gier dowodzi się między innymi, że warunkiem koniecznym i wystarczającym na to, aby zachodziła równość /20/ jest istnienie punktu siodłowego macierzy

$$A = \left[P_k^j \right], \qquad /21/$$

mającej u wierszy i w kolumn, tzn. istnienie pary rozwiązań /k', j'/, dla których $P_{k'}^{j'}$, jest jednocześnie minimalną wartością swego wiersza i maksymalną wartością kolumny.

Przy założeniu, że przeciwnik zna ilość i rodzaj sił i środków wydzielonych do obrony obiektu oraz potrafi ustalić ich położenie x/, możemy wyraźnie /21/ łącznie z /20/ uważać za ogólny model gry.

W celu wyznaczenia optymalnego wariantu ugrupowania /k'/ oraz optymalnego sposobu /wariantu/ działania przeciwnika /j'/ należy w tym przypadku zbudować macierz /21/, która po rozpisaniu przyjmie postać

Tablica 2

Możliwe warianty ugrupowania /k/	Prawdopodobne sposoby działania przeciwnika /j/							$\min\limits_{j} P^j_k$
	1	2	3	...	j	...	w	
1	P^1_1	P^2_1	P^3_1	...	P^j_1	...	P^w_1	$\min\limits_{j} P^j_1$
2	P^1_2	P^2_2	P^3_2	...	P^j_2	...	P^w_2	$\min\limits_{j} P^j_2$
3	P^1_3	P^2_3	P^3_3	...	P^j_3	...	P^w_3	$\min\limits_{j} P^j_3$
...	...	...	...	...	...	...	...	...
k	P^1_k	P^2_k	P^3_k	...	P^j_k	...	P^w_k	$\min\limits_{j} P^j_k$
...	...	...	...	...	...	...	...	...
u	P^1_u	P^2_u	P^3_u	...	P^j_u	...	P^w_u	$\min\limits_{j} P^j_u$
$\max\limits_{k} P^j_k$	$\max\limits_{k} P^j_k$	$\max\limits_{k} P^j_k$	$\max\limits_{k} P^j_k$	...	$\max\limits_{k} P^j_k$	...	$\max\limits_{k} P^j_k$	

/21'/

---

x/ Przy takim założeniu możemy przyjąć, że jest to gra o pełnej informacji. Gdy do obrony obiektu zostaną wydzielone środki typu stacjonarnego, którymi manewr może być wykonywany jedynie w sporadycznych wypadkach, to założenie o znajomości przez przeciwnika ugrupowania można przyjąć za realne.

Mając tak zbudowaną macierz możemy z łatwością określić zarówno maksymalną wartość prawdopodobieństwa P^j_k stojącą w ostatniej kolumnie, a więc

$$V_1 = \max_k \min_j P^j_k \qquad /22/$$

jak i minimalną wartość tego prawdopodobieństwa, stojącą w ostatnim wierszu, tzn.

$$V_2 = \min_j \max_k P^j_k \qquad /23/$$

Wariant ugrupowania k, zawarty w macierzy /21'/ i spełniający warunek /22/, możemy w danym przypadku uważać, za optymalny. Niekiedy wariantów takich może być kilka np. dwa lub trzy.

W takim przypadku spośród równoważnych sobie wariantów z punktu widzenia prawdopodobieństwa obrony obiektu /P^j_k /, wybieramy ten, który zapewnia lepsze warunki dowodzenia, maskowania, przegrupowania, zaopatrywania , obrony przed bronią masowego rażenia itp. Należy dodać, że warianty, które nie odpowiadają w sposób wyraźny przytoczonym wymogom nie powinny być umieszczane w tablicy 2. Warianty te w dalszej części pracy będziemy zaliczali do wyraźnie niekorzystnych z punktu widzenia warunków taktycznych.

Dla przeciwnika optymalnym sposobem /wariantem/ działania /j'/ jest ten, który odpowiada warunkowi /22/.

Rozpatrzmy teraz drugi przypadek, wynikający z nierówności /19/, tzn. gdy

$$V_1 < V_2, \qquad /19'/$$

zakładając jednocześnie, że środki wydzielone do obrony przeciwlotniczej obiektu pozwalają na zmianę co pewien czas ugrupowania bojowego /zmianę stanowisk ogniowych pododdziałów/, a więc posiadają możliwości manewrowe. Przypadek ten dotyczy szczególnie małokalibrowej artylerii przeciwlotniczej.

---

x/ Jest to zgodne z zasadniczym twierdzeniem teorii gier nieskooperowanych, które mówi, że strona broniąca się może zwiększyć swoją wygraną stosując tzw. strategię mieszaną. Stosowanie kilku wariantów ugrupowania z określonymi częstościami stanowi właśnie strategię mieszaną.

W tym przypadku strona organizująca obronę przeciwlotniczą obiektu może z reguły uzyskać większą wartość prawdopodobieństwa P^j_k niż

$$V_1 = \max_k \min_j P^j_k ,$$

jeśli będzie stosować nie jeden lecz kilka wariantów ugrupowania. Wynika to stąd, że przez stosowanie co pewien czas manewru /przejście pododdziałów na zapasowe SO/ oraz maskowania stworzymy przeciwnikowi znaczne trudności w uzyskaniu aktualnych danych o systemie obrony przeciwlotniczej obiektu.

Posiadanie przez przeciwnika tylko częściowych danych lub zupełny ich brak, jest czynnikiem, który zawsze ujemnie wpływa na wybór przez niego optymalnego sposobu działania i prowadzi najczęściej do błędów, co jest korzystne dla nas.

W niektórych jednak przypadkach przeciwnik może prawidłowo ocenić skuteczność systemu obrony przeciwlotniczej obiektu, mimo posiadania niepełnych danych. Jednak szanse bezbłędnej oceny są niewielkie.

Ale nawet w tym udanym przypadku prawdopodobieństwo wykonania zadania przez przeciwnika o wiele się nie zmieni w porównaniu z prawdopodobieństwem, które co najwyżej może on osiągnąć w przypadku niestosowania przez nas manewru.

Jeżeli ponadto uwzględnić fakt, że przez wykonanie w odpowiednim czasie manewru możemy uniknąć uderzeń mających na celu obezwładnienie sił i środków OPL, to stosowanie z określoną częstością kilku korzystnych wariantów ugrupowania, jest celowe.

W celu określenia prawdopodobieństwa obrony obiektu, jakie strona broniąca się może osiągnąć w przypadku stosowania manewru, wprowadźmy dodatkowo następujące oznaczenia.

x_k - częstość, z jaką strona broniąca się powinna stosować wariant ugrupowania o indeksie k $/1 \leq k \leq u/$;

y_j - częstość, z jaką przeciwnik powinien stosować sposób działania j, gdzie $1 \leq j \leq w$.

W odniesieniu do wyraźnie niekorzystnych wariantów ugrupowania i sposobów działania przeciwnika częstości te będą równe zero.

Sumy wszystkich częstości x_k i y_j są równe

$$\sum_{k=1}^{u} x_k = 1 \quad \text{i} \quad \sum_{j=1}^{w} y_j = 1 \qquad /24/$$

Wartość prawdopodobieństwa obrony obiektu, z uwzględnieniem możliwych wariantów ugrupowania i prawdopodobnych sposobów działania przeciwnika, będzie w tym przypadku równa

$$P/x_k \; y_j/ = \sum_{k=1}^{u} \sum_{j=1}^{w} x_k \; y_j \; P_k^j . \qquad /25/$$

Dolną i górną wartość gry oraz częstości optymalne: $x_k = x_k$ i $y_j = y_j$ obliczamy z wyrażeń

$$V_1' = \max_x \min_y \sum_{k=1}^{u} \sum_{j=1}^{w} x_k \; y_j \; P_k^j \qquad /26/$$

$$V_2' = \min_y \max_x \sum_{k=1}^{u} \sum_{j=1}^{w} x_k \; y_k \; P_k^j , \qquad /27/$$

które określają odpowiednio dolną $/V_1'/$ i górną $/V_2'/$ wartość prawdopodobieństwa obrony obiektu w przypadku stosowania manewru.

Zaznaczyć należy, iż wartości V_1' i V_2' zawsze istnieją i są sobie równe, jeśli tylko ilość możliwych wariantów ugrupowania /k/ i sposobów działania przeciwnika /j/ jest skończona[x/]. A więc

$$V_1 = \max_x \min_y \sum_{k=1}^{u} \sum_{j=1}^{w} x_k y_j P_k^j =$$

$$= \min_y \max_x \sum_{k=1}^{u} \sum_{j=1}^{w} x_k y_j P_k^j = V'_2. \qquad /28/$$

Należy podkreślić, że wspólna wartość $V'_1 = V'_2 = V'$ jest oszacowaniem kompromisu odnoszącego się do przypadku $V_1 < V_2$, którego nie dałoby się ustanowić stosując jeden wariant ugrupowania i przewidując tylko jeden sposób działania przeciwnika.

Tak więc strona broniąca się stosując kilka wariantów ugrupowania np. dwa lub trzy z częstościami x_k może być pewna, że prawdopodobieństwo obrony obiektu osiągnie wartość równą V'.

W teorii gier dowodzi się, że zawsze zachodzi nierówność

$$V_1 \leq V' \quad , \qquad /29/$$

co łącznie z możliwością uniknięcia skutków uderzeń z powietrza /uderzeń na SO pododdziałów ogniowych/ przemawia za celowością stosowania manewru.

Macierz /21'/ oraz równania /26/ i /27/ stanowią ogólny model matematyczny, w przypadku stosowania manewru.

W modelu tym wzięto pod uwagę tę okoliczność, iż na skutek stosowania manewru i maskowania, przeciwnik nie zawsze jest w stanie określić w momencie podejmowania decyzji, położenia sił i środków OPL wydzielonych do obrony obiektu. Dlatego też wybrany przez niego sposób działania może nie być optymalny.

---

x/ Jest to zgodne z zasadniczym twierdzeniem gier macierzowych, które mówi, że dla każdej gry macierzowej wartości $\max \min E /X,Y/$ oraz $\min_x \max E /X,Y/$, gdzie $X = X_1, X_2, \ldots, X_m/$ i $Y = /Y_1, Y_2, \ldots, Y_n/$ istnieją i są równe. To znaczy, że każda gra macierzowa ma rozwiązanie.

To zaś stwarza możliwość uzyskania większego prawdopodobieństwa obrony obiektu niż V_1.
Przejdźmy teraz do naświetlenia zagadnienia uwzględniania w modelu kierunków zajścia przeciwnika na obiekt /kierunków nalotu/ oraz stopnia oddziaływania środków OPL bezpośredniego sąsiada.

Przy równomiernym rozkładzie pododdziałów na poszczególnych rubieżach prawdopodobieństwo zadania przeciwnikowi strat /do rubieży rozpoczęcia ataku/ w j-tym sposobie /wariancie/ działania /$P^j_{l_k}$ / jest na wszystkich kierunkach jednakowe. To zaś nie można uznać za optymalne rozwiązanie, gdyż w rzeczywistości naloty z poszczególnych kierunków nie są jednakowo prawdopodobne. Uwarunkowane jest to szeregiem czynników, które przeciwnik uwzględnia przy wyborze kierunku nalotu na obiekt /cel/. Do czynników tych możemy zaliczyć:

a/ położenie obiektu w stosunku do rejonu swego bazowania;

b/ stopień oddziaływania środków OPL na podejściach do obiektu ataku;

c/ charakterystyczne punkty terenowe, umożliwiające orientację i wyjście w rejon obiektu;

d/ kształt obiektu, od którego między innymi zależy prawdopodobieństwo jego zniszczenia /obezwładnienia/;

e/ położenie celów zapasowych;x/

f/ pora doby i warunki meteorologiczne.

Chcąc ustalić prawdopodobne kierunki nalotu przeciwnika na dany obiekt, trzeba dokładnie ocenić wyżej wymienione czynniki i określić w jakim stopniu każdy z nich wpływa na ich wybór. Na ogół nie da się pewnie ustalić kierunków, z których przeciwnik będzie atakował, a przez to trudno jest wykluczyć zupełnie jakieś kierunki. Wynika stąd potrzeba tworzenia obrony okrężnej. Jednak prawdopodobieństwo zadania strat przeciwnikowi na każdym z kierunków nie musi być jednakowe, ponieważ prawdopodobieństwo wykonania zadania przez przeciwnika z reguły nie posiada tej własności. Zatem nasuwa się potrzeba zróżnicowania na poszczególnych kierunkach

x/ W instrukcji zaleca się wybierać kierunek zajścia na cel zasadniczy, w ten sposób, aby w każdej chwili można było wykonać uderzenie na cel zapasowy, nie wykonując przy tym skomplikowanych manewrów.

prawdopodobieństwa P_1, proporcjonalnie do Q.

Gdyby prawdopodobieństwo wykonania zadania przez przeciwnika /Q/ było jednakowe przy nalocie z dowolnego kierunku, sytuacja byłaby prosta: równomierny rozkład pododdziałów byłby najbardziej korzystny. Jednak z reguły prawdopodobieństwo Q jest różne na różnych kierunkach. Wynika to stąd, że Q jest iloczynem prawdopodobieństw Q_1 i Q_2, z których każde zależy od szeregu czynników załamujących się nieco inaczej na poszczególnych kierunkach. Na wartość prawdopodobieństwa Q_1 wpływają takie czynniki, jak: trasa i profil lotu do rejonu celu, prędkość, skład i ugrupowanie środków wydzielonych do zniszczenia /obezwładnienia/ obiektu, sposób ataku /bombardowania/ oraz stopień oddziaływania środków OPL na trasie lotu do obiektu ataku. Ten ostatni czynnik będzie się kształtował nieco inaczej na każdym z kierunków, gdyż możliwości oddziaływania środków OPL będą różne dla różnych tras lotu środków napadu powietrznego przeciwnika. Możliwości te zależą głównie od ilości, rodzaju i ugrupowania środków OPL, co dla każdego kierunku jest najczęściej różne.

Z powyższego wynika, że łączne prawdopodobieństwo przeniknięcia przez system OPL na głębokość do obiektu ataku jest ogólnie rzecz biorąc funkcją odległości i kierunku podejścia do tego obiektu. Proces obliczania łącznego prawdopodobieństwa Q_1 dla każdego z możliwych kierunków podejścia do obiektu, jest zagadnieniem stosunkowo trudnym. Wymaga on przede wszystkim przyjęcia konkretnego położenia środków OPL i założenia wariantów nalotu, aby na tej podstawie można było określić liczbę i rodzaj środków OPL włączanych kolejno do akcji oraz możliwości obniżenia przez nich prawdopodobieństwa Q_1. Zagadnienie jeszcze bardziej się komplikuje, gdy uwzględnić ten fakt, że przeciwnik w czasie lotu do obiektu ataku może wykonać różne manewry /zmiana kursu, wysokości i prędkości/.

Ponadto sam kierunek ataku /bombardowania/ nie koniecznie musi się pokrywać z kierunkiem podejścia do obiektu.

Również prawdopodobieństwo Q_2 nie wykazuje cech stałości. Zależy ono od rodzaju i ilości środków jakie przerwą się przez system OPL, sposobu ich wyjścia w rejon obiektu /chodzi tu głównie o prędkość i wysokość, co warunkuje możliwości wykrycia celu/ i sposobu ataku /bombardowania/ oraz od charakterystyk obiektu jako celu i skuteczności środków rażenia.

Elementem ułatwiającym rozwiązanie postawionego zagadnienia jest to, że nie ma potrzeby obliczania prawdopodobieństwa przeniknięcia przez system OPL, licząc od wejścia przeciwnika w nasz system radiolokacyjnego wykrywania do rubieży rozpoczęcia ataku, gdyż na ugrupowanie środków OPL w osłonie obiektu ma wpływ właściwie bezpośredni sąsiad, z którym istnieje łączność ogniową lub odległość do niego jest tak mała, że przeciwnik chcąc zaatakować obiekt z tego kierunku, musi najpierw przelatywać przez strefę ognia sąsiada. Za sąsiada można również uważać własne lotnictwo myśliwskie działające w strefie ognia lub w pobliżu tej strefy.

Chodzi o to, że przeciwnik dla zapewnienia sobie lepszych warunków wykonania zadania, dolot do obiektu może wykonywać z innego kierunku niż kierunek ataku /bombardowania/, ale w tym przypadku jest on bardziej narażony na ataki własnego lotnictwa myśliwskiego, gdyż prawdopodobieństwo przechwycenia celu przez lotnictwo jest między innymi funkcją drogi. W tym znaczeniu można mówić o bezpośrednim wpływie działalności własnego lotnictwa myśliwskiego na ugrupowanie bojowe.

Jeśli mimo zwiększenia prawdopodobieństwa oddziaływania własnego lotnictwa /na skutek wydłużenia drogi/, prawdopodobieństwo wykonania zadania przez przeciwnika zwiększy się dzięki dodatniemu wpływowi innych czynników, to manewr, którego celem jest wybranie odpowiedniego kierunku ataku /bombardowania/ można uznać za korzystny dla przeciwnika.

Kierunek dolotu do rejonu celu z reguły nie będzie się pokrywał z kierunkiem ataku /bombardowania/, w przypadku gdy przeciwnik:

a/ zastosuje manewr przeciwrakietowy. W manewrze tym samoloty z chwilą przekroczenia prawdopodobnej rubieży postawienia zadań pododdziałom ogniowym mogą zmienić kurs, w granicach 30^{o} - 60^{o}, omijając całkowicie strefy ognia tych pododdziałów, z których mogą być naprowadzane na nie rakiety. Wyjście na cel dokonywane jest z innego kierunku i przez wykonanie energicznego skrętu, w stronę strefy ognia. W wyniku tego manewru przeciwnik polepsza sobie możliwości przeniknięcia przez strefę ognia rakiet, a tym samym zwiększa prawdopodobieństwo wykonania zadania;

b/ wykona manewr dla obejścia strefy ognia bezpośredniego sąsiada, którego środki OPL są ugrupowane na kierunku lotu do rejonu celu lub też dla zaatakowania obiektu z tych kierunków, na których nasycenie środków osłaniających obiekt jest małe. W instrukcjach zaleca się np. wybieranie trasy lotu w ten sposób, by lot do rejonu celu był wykonywany nad rejonami słabo nasyconymi środkami OPL. Do rejonów tych zalicza się między innymi tereny lesiste i bagniste, rejony nie zajęte przez wojska, oraz rejony, które były uprzednio obiektami uderzeń atomowych;

c/ będzie się starał uzyskać zaskoczenie przez wykonanie ataku /bombardowania/ od tyłu lub od zaciemnionej strony horyzontu, względnie od strony słońca / w warunkach dobrej pogody/ przy równoczesnym wykorzystaniu ukształtowania terenu dla maskowania lotu. Tego rodzaju taktykę stosują głównie samoloty myśliwsko-bombowe;

d/ wykona dodatkowy manewr, w celu wybrania kierunku ataku /bombardowania/, przy którym prawdopodobieństwo zniszczenia /obezwładnienia/ obiektu jest możliwie największe. W instrukcji, np. podkreśla się, że atak na cele wąskie i długie /mosty, przeprawy, stacje kolejowe itp./ najcelowiej wykonywać pod kątem w granicach 15 - 20^{o}.

Przy atakowaniu celów o małych wymiarach, szczególnie z małych wysokości wybór kierunku uzależniony jest możliwościami jego wykrycia z możliwie największej odległości.
Dla ułatwienia wyjścia na mały i dobrze zamaskowany obiekt, kierunek nalotu zaleca się wybierać w ten sposób, by wyjście na cel było wykonywane od strony dobrze widocznego obiektu orientacyjnego.

Podkreśla się jednocześnie, że przy atakowaniu celów powierzchniowych, prawdopodobieństwo ich rażenia praktycznie nie zależy od kierunku nalotu. W tym wypadku kierunek ataku /bombardowania/ jest uzależniony tylko od rozmieszczenia środków OPL;

e/ będzie stosował manewr przez zmianę kursu i wysokości przed wejściem w strefę ognia, aby jak najbardziej utrudnić myśliwcom wykonanie ataku.

Z powyższego wynika, że jest wiele sytuacji gdzie przeciwnik może zaatakować obiekt nie bezpośrednio z trasy, lecz po wykonaniu dodatkowego manewru przed wejściem w strefę ognia. Główny cel tego manewru polega na stworzeniu sobie lepszych warunków przeniknięcia przez system obrony powietrznej obiektu i skuteczniejszym wykonaniu ataku /bombardowania/, co w rezultacie zwiększa wartość Q.

Należy jednak mieć na uwadze to, że dopóki przeciwnik wykonuje manewry, dopóty odwleka on termin wykonania podstawowego zadania bojowego, narażając się jednocześnie przez dłuższy czas na oddziaływanie środków OPL, szczególnie lotnictwa myśliwskiego. Dlatego na celowość stosowania manewru muszą w warunkach konkretnej sytuacji taktycznej wpłynąć czynniki zwiększające w ostatecznym rachunku prawdopodobieństwo wykonania zadania /Q/.

Organizując system obrony powietrznej obiektu, powinniśmy dążyć do ustalenia tych czynników oraz oszacowania wartości prawdopodobieństw Q_k^j przy atakach z poszczególnych kierunków.

W celu podania ogólnego sposobu określania prawdopodo- podobieństwa wykonania zadania przez przeciwnika, z uwzględnieniem kierunków nalotu i stopnia oddziaływania środków OPL bezpośredniego sąsiada, wprowadźmy dodatkowo następujące oznaczenia:

$Q^{j}_{kg}/\alpha/$ - prawdopodobieństwo wykonania zadania przez przeciwnika przy działaniu z kierunku α, k-tym wariancie ugrupowania środków OPL wydzielonych do osłony obiektu i wariancie ugrupowania g środków OPL bezpośredniego sąsiada;

$Q^{j}_{1_{kg}}/\alpha/$ - prawdopodobieństwo przeniknięcia przez system obrony przeciwlotniczej przy działaniu z kierunku α, k-tym wariancie ugrupowania i wariancie g rozmieszczenia środków OPL bezpośredniego sąsiada;

$Q^{j}_{2}/\alpha/$ - prawdopodobieństwo zniszczenia /obezwładnienia/ obiektu przy działaniu z kierunku α;

S^{e}_{1} - ilość pododdziałów 1-tego rodzaju rozmieszczona na wszystkich rubieżach w e-tym sektorze.

Przy powyższych oznaczeniach $Q^{j}_{kg}/\alpha/$ wyrazi się wzorem:

$$Q^{j}_{kg}/\alpha/ = Q^{j}_{1_{kg}}/\alpha/ \cdot Q^{j}_{2}/\alpha/ \qquad /30/$$

Pierwszy czynnik po prawej stronie wzoru /30/ równy jest iloczynowi dwóch prawdopodobieństw, a mianowicie:

a/ prawdopodobieństwa przeniknięcia przez strefę ognia bezpośredniego sąsiada /$Q^{j}_{1_g}/\alpha/$;

b/ prawdopodobieństwa przeniknięcia przez strefę ognia środków OPL wydzielonych do obrony przeciwlotniczej obiektu /$Q^{j}_{1_k}/\alpha/$.

Dla równomiernego rozkładu pododdziałów prawdopodobieństwo $Q^{j}_{1_k}/\alpha/$ będzie w przybliżeniu jednakowe we wszystkich sektorach.

Tak więc wartość $Q^{j}_{l_k}/\alpha/$ wyrazi się wzorem

$$Q^{j}_{l_{kg}}/\alpha/ = Q^{j}_{l_g}/\alpha/ \cdot Q^{j}_{l_k}/\alpha/, \qquad /31/$$

gdzie prawdopodobieństwo $Q^{j}_{l_k}/\alpha/$ oblicza się przy założeniu, że siły i środki biorące udział w nalocie przenikną przez system OPL bezpośredniego sąsiada.

Do obliczenia pierwszego czynnika występującego po prawej stronie wzoru /31/ konieczna jest znajomość położenia i możliwości środków OPL sąsiada. Na podstawie tych danych można już łatwo obliczyć $Q^{j}_{l_g}/\alpha/$. W przypadku rakiet i artylerii przeciwlotniczej obliczenia można wykonać sposobami podanymi w zagadnieniu 2 niniejszego rozdziału.

Chcąc ponadto uwzględnić prawdopodobieństwo zadania przeciwnikowi strat przez własne lotnictwo myśliwskie za czas dodatkowego manewru w celu zaatakowania obiektu z innego kierunku niż kierunek wyznaczający najkrótszą trasę lotu, należy najpierw określić drogę, jaką przeciwnik musi dodatkowo przebyć w czasie tego manewru oraz prawdopodobieństwo jego przechwycenia na tej drodze. Mając powyższe dane oraz zakładając ilość samolotów myśliwskich, jaka może wziąć udział w zwalczaniu środków biorących udział w j-tym sposobie /wariancie/ działania, można w przybliżeniu określić szukaną wartość prawdopodobieństwa.

Jest rzeczą oczywistą, że obliczenia te mają sens tylko dla znacznych odcinków drogi oraz dla wysokości, na których własne lotnictwo myśliwskie może skutecznie zwalczać cele powietrzne.

Praktycznie oznacza to, iż przy wyznaczaniu ugrupowania małokalibrowej artylerii przeciwlotniczej w osłonie obiektów, na które ataki będą wykonywane głównie na małych wysokościach /do 1000 m/, zagadnienie to można pominąć.
Przy określaniu ugrupowania rakiet przeciwlotniczych należałoby je uwzględniać.

Drugi czynnik występujący we wzorze /30/, mianowicie $Q_2^j/\alpha/$ jest również iloczynem dwóch prawdopodobieństw:

a/ prawdopodobieństwa wyjścia celu na dany obiekt lub punkt orientacyjny $/Q^j_{2\gamma}/\alpha//$;

b/ prawdopodobieństwa zniszczenia /obezwładnienia/ obiektu ilością sił i środków, które dotrą do obiektu $/Q^j_{2\beta}/\alpha//$.

Zatem $Q_2^{j\alpha}$ wyrazi się wzorem

$$Q^j_2/\alpha/ = Q^j_{2\gamma}/\alpha/ \cdot Q^j_{2\beta}/\alpha/ \qquad /32/$$

Pierwszy z czynników tego iloczynu zależy przede wszystkim od: prędkości i wysokości lotu samolotów, charakteru obiektu lub punktu orientacyjnego, terenu, urządzeń optycznych i radiolokacyjnych znajdujących się na samolotach oraz od stopnia wyszkolenia obsługi. Dla współczesnych samolotów wartość $Q^j_{2\gamma}/\alpha/$ może się wahać w granicach od 0,6 do 0,9.

Drugi czynnik występujący we wzorze /32/, mianowicie $Q^j_{2\beta}/\alpha/$, w odniesieniu do dużych obiektów lub obiektów zbliżonych swym kształtem do koła, można przyjąć na stały, tzn. dla tego rodzaju obiektów prawdopodobieństwo rażenia praktycznie nie zależy od kierunku ataku /bombardowania/.
W odniesieniu do obiektów wąskich a długich /np. mosty,stacje kolejowe/ prawdopodobieństwo rażenia zmienia się wraz ze zmianą kierunku ataku /bombardowania/.

Rozważania powyższe pozwalają stwierdzić, że zagadnienie obliczenia prawdopodobieństwa wykonania zadania $/Q^j_{k_g}/\alpha//$ jest dość złożone. Z pewnością w wielu przypadkach przyjdzie się z konieczności zadowolić jedynie przybliżonymi danymi. Dla rozpatrywanego w tej pracy problemu istotnym jest to, że można je obliczyć /choć często być może niezbyt dokładnie/.

Zastanówmy się teraz w jaki sposób uwzględnić w modelu kierunki ataku /bombardowania/ oraz stopień oddziaływania środków OPL bezpośredniego sąsiada ?

W ogólnym przypadku zagadnienie to sprowadza się do zbudowania, a następnie rozwiązania macierzy /21'/, w której ilość wierszy będzie równa ilości wszystkich możliwych wariantów ugrupowania k zależnych od S_{l_i}, r_{i_l}, d_{i_e}, zaś ilość kolumn wyniesie j . h, gdzie h - ilość możliwych kierunków ataku /bombardowania/. Elementami tej macierzy będą wartości prawdopodobieństw $Q^j_{k_g}$ /α/, albo ich uzupełnienia do jedności. Po uwzględnieniu kierunku ataku /bombardowania/ i stopnia oddziaływania środków OPL bezpośredniego sąsiada, macierz /21'/ przyjmie postać

$k \backslash j/\alpha/$	$j = 1$			$j = 2$			...	$j = w$			$\min\limits_j P_{k_g}^{j/\alpha/}$
	$\alpha = 1$	...	$\alpha = h$	$\alpha = 1$	...	$= h$		$\alpha = 1$	...	$\alpha = h$	
$k = 1$	$P_{1_g}^{11}$	...	$P_{1_g}^{1h}$	$P_{1_g}^{21}$	...	$P_{1_g}^{2h}$	...	$P_{1_g}^{w1}$	...	$P_{1_g}^{wh}$	$\min\limits_j P_{I_g}^{j/\alpha/}$
$k = 2$	$P_{2_g}^{11}$	...	$P_{2_g}^{1h}$	$P_{2_g}^{21}$	...	$P_{2_g}^{2h}$	...	$P_{2_g}^{w1}$	...	$P_{2_g}^{wh}$	$\min\limits_j P_{2_g}^{j/\alpha/}$
...	,,.	...	...	...	...	...	...	...	...	...	...
$k = u$	$P_{u_g}^{11}$	...	$P_{u_g}^{1h}$	$P_{u_g}^{21}$	...	$P_{u_g}^{2h}$	...	$P_{u_g}^{w1}$	...	$P_{u_g}^{wh}$	$\min\limits_j P_{u_g}^{j/\alpha/}$
$\max\limits_k P_{k_g}^{j/\alpha/}$	$\max\limits_k P_{k_g}^{11}$	...	$\max\limits_k P_{k_g}^{1h}$	$\max\limits_k P_{k_g}^{21}$	...	$\max\limits_k P_{k_g}^{2h}$	...	$\max\limits_k P_{k_g}^{w1}$	...	$\max\limits_k P_{k_g}^{wh}$	-

/21 /

Mimo wprowadzenia do modelu dodatkowych parametrów / i g / istota jego pozostała taka sama. Poszerzona została jedynie macierz /21´/ i zmienione wartości prawdopodobieństw występujące w tej macierzy, co oczywiście nie naruszyło podstaw samego modelu matematycznego.

W niektórych przypadkach proces znajdowania optymalnego rozwiązania da się uprościć.

Zachodzi to wówczas, gdy macierz /21´/, sporządzona dla równomiernego rozkładu pododdziałów na poszczególnych rubieżach x/, posiada punkt siodłowy lub jeśli z macierzy tej wynika, że przeciwnik ma jeden najbardziej korzystny sposób /wariant/ działania /j´/, niezależnie od przyjętego przez nas wariantu ugrupowania.
W tym przypadku obliczamy średnie dla wszystkich sektorów prawdopodobieństwo wykonania przez przeciwnika zadania, wg wzoru

$$Q^{j'}_{s_{kq}} = \frac{Q^{j'/1/}_{kq} + Q^{j'/2/}_{kq} + \ldots + Q^{j'/h/}_{kq}}{h}$$

Następnie z równania

$$Q^{j'}_{s_{kq}} = Q^{j'/\alpha/}_{1_{kq}} \cdot Q^{j'/\alpha/}_{2} ,$$

w którym $Q^{j'}_{s_{kq}}$ i $Q^{j'}_{2}$ są dane,

wyznaczamy $Q^{j'/\alpha/}_{1_{kq}}$, czyli

$$Q^{j'/\alpha/}_{1_{kq}} = \frac{Q^{j'}_{s_{kq}}}{Q^{j'/\alpha/}_{2}}$$

---

x/ Zakłada się w tym przypadku, że prawdopodobieństwo nalotów na osłaniany obiekt ze wszystkich kierunków jest w przybliżeniu jednakowe.

Dla każdego sektora wartość $Q^{j/\alpha/}_{1_{kg}}$ może być różna, gdyż występujące w mianowniku prawdopodobieństwo $Q^{j\,/\alpha/}_{2}$ zależy od α.

Otrzymamy więc ciąg wartości

$$Q^{j'/1/}_{1_{kg}},\ Q^{j'/2/}_{1_{kg}},\ \ldots,\ Q^{j'/h/}_{1_{kg}},$$

a po uzupełnieniu każdego z wyrazów tego ciągu do jedności, otrzymamy nowy ciąg postaci

$$P^{j'/1/}_{1_{kg}},\ P^{j'/2/}_{1_{kg}},\ \ldots,\ P^{j'/h/}_{1_{kg}}.$$

Wyrazy tego ciągu wskazują jakie powinno być prawdopodobieństwo zadania przeciwnikowi strat na kierunku α /α = 1,2,3,..., h/. Na tej podstawie określamy ilość pododdziałów S^e_1, jaką należy rozmieścić na rubieżach w sektorze e.

Z powyższych rozważań można wyciągnąć następujące wnioski:

a/ W przypadku, gdy macierz /21'/ ma punkt siodłowy, tzn. istnieje para rozwiązań /k', j'/, dla której $P^{j'}_{k'}$, jest jednocześnie minimalną wartością swego wiersza i maksymalną wartością kolumny, wtedy prawdopodobieństwo obrony obiektu określone wzorem /14''/ stanowi największą wartość, co do której możemy być pewni, że uda nam się osiągnąć. Żaden inny wariant tej pewności nam nie da.
Zatem wariant ugrupowania k' jest w danym przypadku jedynym najbardziej korzystnym wariantem. Stosowanie manewru nie wpłynie już na zwiększenie prawdopodobieństwa obrony obiektu, a raczej na jego zmniejszenie.

b/ Gdy macierz /21'/ nie ma punktu siodłowego, to w myśl nierówności /29/ można z reguły osiągnąć nieco większą wartość prawdopodobieństwa obrony obiektu niż V_1, jeśli zostanie zastosowany manewr oraz przestrzegane będą zasady maskowania.

Jeżeli w tym przypadku manewru nie planujemy, tzn. decydujemy się tylko na jeden wariant ugrupowania, to najcelowiej stosować jest wariant spełniający warunek /14'/.

c/ Jeśli różnica $V_2 - V_1$ /zwana rozwartością gry/ jest bardzo mała/ np. mniejsza od 0,01/, to nie jest celowe stosowanie manewru dla podwyższenia prawdopodobieństwa obrony obiektu P_k^j. Wariant ugrupowania odpowiadający równaniu /14'/ oraz spełniający podstawowe wymogi taktyczne możemy uznać za optymalny.

4. Rozwiązanie modelu

Pierwszym i najważniejszym krokiem przy rozwiązywaniu modelu, a tym samym wyznaczaniu optymalnego rozwiązania, jest zbudowanie macierzy postaci /21''/.

Mając tak zbudowaną macierz możemy bezpośrednio z niej określić dolną wartość prawdopodobieństwa obrony obiektu /dolną wartość gry/, czyli

$$V_1 = \max_k \min_j P_k^j$$

oraz górną wartość tego prawdopodobieństwa /górną wartość gry/, tzn.

$$V_2 = \min_j \max_k P_k^j$$

Jeżeli $V_1 = V_2 = V$ - sytuacja jest prosta, bowiem wariant ugrupowania odpowiadający tej wspólnej wartości V oraz spełniający podstawowe wymogi taktyczne, takie jak: dobre warunki dowodzenia, maskowania, przegrupowania, zaopatrywania, obrony przed bronią masowego rażenia itp. można uznać jako optymalny.

Jeżeli natomiast $V_1 < V_2$, to rozwiązanie modelu nie jest proste i wymaga zastosowania pewnych metod matematycznych.

Mówiąc o rozwiązaniu modelu mamy oczywiście na myśli wyznaczenie częstości x_k i y_j, z jakimi należy stosować poszczególne warianty ugrupowania, dla uzyskania prawdopo- dobieństwa obrony obiektu równego

$$V' = V_1' = V_2'.$$

Jedną z metod, która w odniesieniu do rozpatrywanego problemu wydaje się być najbardziej odpowiednia, sprowadza się do wykonania kilku operacji na macierzy /21/ oznaczonej literą A.

Wstępną operacją jest odrzucenie wariantów ugrupowania wyraźnie niekorzystnych.

W taki sposób postępujemy ze sposobami działania przeciwnika, tzn. wyraźnie niekorzystne sposoby działania mamy prawo pominąć, gdyż częstości stosowania ich /y_j/ będą równe zeru.

Zatem dowolny wariant ugrupowania k^* spełniający nierówność

$$P^j_{k^*} \leq P^j_k \qquad /30/$$

dla $k = /k^*$ i dla każdego j /j = 1,2,3,...., w/ może być wyłączony ze zbioru wariantów korzystnych, gdyż częstość, z jaką będzie on stosowany jest równa zeru.

Analogicznie dowolny sposób działania przeciwnika j' spełniający nierówność

$$P^j_k \leq P^{j^*}_k \qquad /31/$$

dla $j = /j^*$ i dla każdego k /k = 1,2,3,..., u/ możemy uznać za wyraźnie niekorzystny dla przeciwnika.

Po tej operacji macierz /21/ zredukuje się do u' wierszy i w' kolumn, gdzie u' - liczba korzystnych wariantów ugrupowania, a w' - liczba korzystnych /niepodporządkowanych/ sposobów działania przeciwnika.

Wartość gry w tych warunkach będzie równa

$$V_1' = \max_x \min_y \sum_{k=1}^{u} \sum_{j=1}^{w} x_k y_j P^j_k = \min_y \max_x$$

$$\sum_{k=1}^{u} \sum_{j=1}^{w} x_k y_j P^j_k = V_2' .$$

Następnie rozpatrujemy kolejno wszystkie podmacierze kwadratowe stopnia

$$b = \min /u', w' / \qquad /33/$$

macierzy A i dla każdej z nich obliczamy x_k, y_j i V' korzystając ze wzorów x/

$$V' = \frac{B}{I_b /\mathrm{adj}\ B/ J'_B} \qquad /34/$$

$$x_k = \frac{I_b\ \mathrm{adj}\ B}{I_b\ /\mathrm{adj}\ B/ I'_b} \qquad /35/$$

$$y_j = \frac{I_b\ /\mathrm{adj}\ B/'}{I_b\ /\mathrm{adj}\ B/ I''_b} \qquad /36/$$

przy założeniu, że $I_b\ /\mathrm{adj}\ B/\ I'_b \neq 0$.

We wzorach /34 - 36/ poszczególne symbole oznaczają:

B - macierz kwadratowa stopnia b, utworzona z macierzy A. Jeżeli A jest macierzą kwadratową, tzn. $u' = w'$ wówczas B = A;

$|B|$ - wyznacznik macierzy B;

adj B - macierz dołączona, która w rozwiniętym zapisie przyjmie postać

---

x/ Dowody wzorów /31 - 33/ można znaleźć np. w książce J.C.C. Mc KINSEY pt. "INTRODUSTION TO THE THEORY OF GAMES". Tłumaczenie w języku ros. "WWIEDIENIJE W TIEORIJU IGR" Wyd. 1960r.

$$\mathrm{adj}\ B = \begin{bmatrix} B_{11} & B_{21} & \cdots & B_{b1} \\ B_{12} & B_{22} & \cdots & B_{b2} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ B_{1b} & B_{2b} & \cdots & B_{bb} \end{bmatrix} \qquad /37/$$

gdzie B_{k_j} – algebraiczne dopełnienie elementu P^j_k macierzy B, a wskaźnik b jest równy min /u′,w′/ ;

I_b – wektor wierszowy, tj. macierz postaci

I_b = /1 1...1/, gdzie ilość kolumn jest równa b;

I'_b – macierz transponowana macierzy I_b, tj.

$$I'_b = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ 1 \end{bmatrix}$$

/adj B/′ – macierz transponowana macierzy dołączonej adj B, tzn.

$$/\mathrm{adj}\ B/' = \begin{bmatrix} B_{11} & B_{12} & \cdots & B_{1b} \\ B_{21} & B_{22} & \cdots & B_{2b} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ B_{b1} & B_{b2} & \cdots & B_{bb} \end{bmatrix} \qquad /38/$$

Po obliczeniu x_k, y_j i V' dla wszystkich podmacierzy B stopnia b utworzonych z macierzy A, wybieramy następnie rozwiązanie spełniające nierówność

$$P/_k\ , y^*_j\ /\ V' \leq P/x^*_k\ , j\ / \qquad /39/$$

gdzie x^*_k i y^*_j są częstościami optymalnymi.

Jest rzeczą zupełnie zrozumiałą, że częstości x^*_k i y^*_j muszą być wartościami nieujemnymi oraz, że

$$\sum_{k=1}^{u'} x^*_k = 1 \quad i \quad \sum_{j=1}^{w'} y^*_j = 1 \qquad /40/$$

Dla szczegółowego objaśnienia podanej metody rozwiążemy następujący przykład liczbowy:

Niech będzie dana macierz A, która po wyeliminowaniu wyraźnie niekorzystnych sposobów działania przeciwnika i wariantów ugrupowania środków OPL, ma postać

Tablica 3

k \ j		Prawdopod. sposoby działania przeciwnika			$\min_j P^j_k$
		j = 1	j = 2	j = 3	
Możliwe warianty ugrupow.	k = 1	0,72	0,61	0,33	0,33
	k = 2	0,51	0,63	0,58	0,51
	k = 3	0,71	0,57	0,71	<u>0,57</u>
$\max_k P^j_k$		0,72	<u>0,63</u>	0,71	-

/41/

Dolna wartość prawdopodobieństwa obrony obiektu /dolna wartość gry/ wynosi $V_1 = 0{,}57$, zaś wartość górna $V_2 = 0{,}63$. Stąd różnica $V_2 - V_1 = 0{,}63-0{,}57=0{,}06$. Częstości x^*_k i y^*_j oraz wartość gry V' obliczamy następująco:

W celu łatwiejszego liczenia mnożymy każdy element macierzy /41/ przez liczbę 100 i odejmujemy od wszystkich elementów liczbę 33 /jest to najmniejszy element danej macierzy/. Po tej operacji macierz /41/ przyjmie postać

k \ j	j = 1	j = 2	j = 3
k = 1	39	28	0
k = 2	18	30	25
k = 3	38	24	38

/42/

Ponieważ ilość wierszy równa jest ilości kolumn, zatem A = B. Obliczamy wyznacznik macierzy B:

$$[B] = \begin{bmatrix} 39 & 28 & 0 \\ 18 & 30 & 25 \\ 38 & 24 & 38 \end{bmatrix} \qquad /43/$$

Korzystając z własności wyznaczników dążymy do uzyskania możliwie dużej ilości zer w wyznaczniku /43/.

W tym celu od pierwszej kolumny odejmujemy kolumnę trzecią:

$$[B] = \begin{bmatrix} 39 & 28 & 0 \\ -7 & 30 & 25 \\ 0 & 24 & 38 \end{bmatrix}$$

Od drugiego wiersza odejmujemy wiersz trzeci:

$$[B] = \begin{bmatrix} 39 & 28 & 0 \\ -7 & 6 & -13 \\ 0 & 24 & 38 \end{bmatrix}$$

Od kolumny drugiej odejmujemy pierwszą:

$$[B] = \begin{bmatrix} 39 & 28 & 0 \\ -7 & 6 & -13 \\ 0 & 24 & 38 \end{bmatrix}$$

Do drugiej kolumny dodajemy trzecią:

$$[B] = \begin{bmatrix} 39 & -11 & 0 \\ -7 & 0 & -13 \\ 0 & 62 & 38 \end{bmatrix} = -62/-13/.39-38/-7//-11/ = $$

$$= 31438 - 2926 = 28508.$$

Następnie obliczamy macierz dołączoną adj B.

W tym celu transponujemy macierz B:

$$[B'] = \begin{bmatrix} 39 & 18 & 38 \\ 28 & 30 & 24 \\ 0 & 25 & 38 \end{bmatrix}$$

oraz tworzymy macierz dopełnień algebraicznych macierzy transponowanej B':

$$\operatorname{adj} B = \begin{bmatrix} /-1/^{1+1}\begin{vmatrix}30 & 24\\ 25 & 38\end{vmatrix} & /-1/^{1+2}\begin{vmatrix}28 & 24\\ 0 & 38\end{vmatrix} & /-1/^{1+3}\begin{vmatrix}28 & 30\\ 0 & 25\end{vmatrix} \\ /-1/^{2+1}\begin{vmatrix}18 & 38\\ 25 & 38\end{vmatrix} & /-1/^{2+2}\begin{vmatrix}39 & 38\\ 0 & 38\end{vmatrix} & /-1/^{2+3}\begin{vmatrix}39 & 18\\ 0 & 25\end{vmatrix} \\ /-1/^{3+1}\begin{vmatrix}18 & 38\\ 30 & 24\end{vmatrix} & /-1/^{3+2}\begin{vmatrix}39 & 38\\ 28 & 24\end{vmatrix} & /-1/^{3+3}\begin{vmatrix}39 & 19\\ 28 & 30\end{vmatrix} \end{bmatrix} =$$

$$= \begin{bmatrix} 540 & -1064 & 700 \\ 266 & 1482 & -975 \\ -708 & 128 & 666 \end{bmatrix}.$$

Mnożymy macierz adj B przez wektor wierszowy $I_3 = \begin{bmatrix}1 & 1 & 1\end{bmatrix}$

$$I_3 \operatorname{adj} B = \begin{bmatrix}1 & 1 & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix} 540 & -1064 & 700 \\ 266 & 1482 & -975 \\ -708 & 128 & 666 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix}98 & 546 & 391\end{bmatrix}.$$

Mnożymy następnie macierz I_3 adj B przez wektor kolumnowy $I_3' = \begin{bmatrix}1\\1\\1\end{bmatrix}$

$$I_3 /\operatorname{adj} B/ I_3' = \begin{bmatrix}98 & 546 & 391\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1\\1\\1\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}98 + 546 + 391\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}1035\end{bmatrix}.$$

Po tych operacjach możemy już przystąpić do obliczenia V' i x_k^*, korzystając ze wzorów /34/ i /35/:

$$V' = \frac{B}{I_3/\operatorname{adj} B/I_3'} = \frac{28508}{1035} = 27{,}64.$$

Po dodaniu liczby 33 / o tę wartość zmniejszono bowiem wszystkie elementy macierzy A/, będzie

$V' = 27,64 + 33 = 60,64\%.$

$$x_k^* = \frac{I_3 \text{adj } B}{I_3/\text{adj } B/I_3'} = \frac{[98\ 545\ 391]}{[1035]} =$$

$$= \begin{bmatrix} \frac{98}{1035} & \frac{546}{1035} & \frac{391}{1035} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0,1 & 0,5 & 0,4 \end{bmatrix}$$

W celu obliczenia częstości y_j^*, transponujemy macierz adj B , a więc

$$/\text{adj } B/' = \begin{bmatrix} 540 & 266 & -708 \\ -1064 & 1482 & 128 \\ 700 & -975 & 666 \end{bmatrix}$$

Macierz /adj B/′ mnożymy następnie przez wektor wierszowy $I_3 = [1\ 1\ 1]$:

$$I_3\ /\text{adj } B/' = [1\ \ 1\ \ 1] \begin{bmatrix} 540 & 266 & -708 \\ -1064 & 1482 & 128 \\ 700 & -975 & 666 \end{bmatrix} =$$

$$= [176\ \ 773\ \ 86] .$$

Korzystając ze wzoru /33/, mamy

$$y_j^* = \frac{I_3/\text{ adj } B/'}{I_3/\text{adj } B/I_3'} = \frac{[176\ \ 773\ \ 86]}{[1035]} =$$

$$= \begin{bmatrix} \frac{176}{1035} & \frac{773}{1035} & \frac{83}{1035} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0,16 & 0,76, & 0,08 \end{bmatrix} .$$

Z powyższych obliczeń wynika, że jeśli nie stosujemy manewru, to najkorzystniejszym wariantem ugrupowania jest wariant k = 3, ponieważ gwarantuje nam prawdopodobieństwo obrony obiektu, równe co najmniej 0,57, niezależnie od wyboru przez przeciwnika sposobu działania /widać to bezpośrednio z tab.2/; żaden inny wariant nie zapewnia nam tak wysokiego prawdopodobieństwa obrony obiektu.
Możemy jednak uzyskać nieco większą wartość prawdopodobieństwa / o 3,64%/, jeśli przyjmiemy koncepcję stosowania manewru. Częstości, z jakimi należy stosować poszczególne warianty ugrupowania, są następujące:

$k = 1$ — 0,1;
$k = 2$ — 0,5;
$k = 3$ — 0,4.

Dla przeciwnika, gdy strona broniąca się nie stosuje manewru, optymalnym sposobem działania jest $j = 2$, a w przypadku manewru, stosowanie wszystkich trzech sposobów z częstościami:

$j = 1$ — 0,16;
$j = 2$ — 0,76;
$j = 3$ — 0,08.

Wówczas prawdopodobieństwo wykonania zadania wyniesie 39,36%.

Opisana wyżej metoda rozwiązywania ogólnego modelu matematycznego, dla przypadku $V_1 < V_2$, może być stosowana wtedy, gdy macierz kwadratowa B stopnia min /u', w'/, utworzona z macierzy A jest nieosobliwa, tzn. gdy jej wyznacznik jest różny od zera.

Jeśli warunek ten nie jest spełniony, wówczas dla znalezienia rozwiązania celowym jest zastosowanie następującej metody:

Proces rozwiązywania modelu wg tej metody dzielimy na dwa etapy. W pierwszym etapie podobnie jak uprzednio redukujemy macierz A przez wyeliminowanie zbędnych wierszy i kolumn /odpowiadających wariantom niekorzystnym/ i przekształcamy ją tak, że jej elementy mają taką postać /np. bez wartości ułamkowych/, którą łatwiej jest operować, wreszcie bada się ją na istnienie punktu siodłowego.

Gdy istnieje punkt siodłowy, nie ma nic więcej do zrobienia; rozwiązanie zostało już znalezione. W przeciwnym razie, czyli zazwyczaj, trzeba przejść do drugiego etapu. Tutaj rzecz polega na uzyskaniu optymalnych częstości x_k^* i y_j^* oraz odpowiadającego tym częstościom prawdopodobieństwa V^*.
W tym celu należy rozwiązać układ nierówności /wypisany na podstawie już zredukowanej macierzy A/ postaci

$$P^1_1 x_1 + P^1_2 x_2 + P^1_3 x_3 + \dots + P^1_k x_k + \dots + P^1_u x_u \geqslant V'$$

$$P^2_1 x_1 + P^2_2 x_2 + P^2_3 x_3 + \dots + P^2_k x_k + \dots + P^2_u x_u \geqslant V'$$

$$P^3_1 x_1 + P^3_2 x_2 + P^3_3 x_3 + \dots + P^3_k x_k + \dots + P^3_u x_u \geqslant V'$$

$$\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \quad /44/$$

$$P^j_1 x_1 + P^j_2 x_2 + P^j_3 x_3 + \dots + P^j_k x_k + \dots + P^j_u x_u \geqslant V'$$

$$- - - - - - - - - - - - - - - - - -$$

$$P^w_1 x_1 + P^w_2 x_2 + P^w_3 x_3 + \dots + P^w_k x_k + \dots + P^w_u x_u \geqslant V'$$

$$P^1_1 y_1 + P^2_1 y_2 + P^3_1 y_3 + \dots + P^j_1 y_j + \dots + P^w_1 y_w \leqslant V'$$

$$P^1_2 y_1 + P^2_2 y_2 + P^3_2 y_3 + \dots + P^j_2 y_j + \dots + P^w_2 y_w \leqslant V'$$

$$P^1_3 y_1 + P^2_3 y_2 + P^3_3 y_3 + \dots + P^j_3 y_j + \dots + P^w_3 y_w \leqslant V'$$

$$\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots$$

$$P^1_k y_1 + P^2_k y_2 + P^3_k y_3 + \dots + P^j_k yk + \dots + P^w_k y_w \leqslant V'$$

$$\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots$$

$$P^1_w y_1 + P^2_u y_2 + P^3_u y_3 + \dots + P^j_u y_j + \dots + P^w_u y_w \leqslant V'$$

$$x_1 + x_2 + x_3 + \dots + x_k + \dots + x_u = 1$$

$$y_1 + y_2 + y_3 + \dots + y_j + \dots + y_w = 1$$

W powyższym układzie nierówności istnieje również to ograniczenie, że żadna wartość x_k i y_j nie może być ujemna, a więc

$$0 \leqslant x_k \leqslant 1 \qquad \text{i} \qquad 0 \leqslant y_j \leqslant 1.$$

Dla $k \leqslant 3$ i $j \leqslant 3$ rozwiązanie układu nierówności jest zadaniem dość prostym: możemy je otrzymać w oparciu nawet o metodę graficzną stosowaną w programowaniu liniowym.

Dla większych k i j uzyskanie rozwiązania jest zadaniem dość trudnym. Wtedy zachodzi potrzeba zastosowania, znanej w programowaniu liniowym metody simpleks, bądź też bardziej uproszczonej metody, którą objaśniamy na przykładzie /dla $k = j = 3$/. Dla większych k i j wystąpi tylko więcej zmiennych i więcej zależności między nimi, natomiast metoda postępowania jest taka sama.

Pierwszym krokiem jest wypisanie na podstawie już zredukowanej macierzy A, układu nierówności:

$$
\begin{aligned}
&P^1_1 x_1 + P^1_2 x_2 + P^1_3 x_3 \geqslant V' \\
&P^2_1 x_2 + P^2_2 x_2 + P^2_3 x_3 \geqslant V' \\
&P^3_1 x_3 + P^3_2 x_3 + P^3_3 x_3 \geqslant V' \qquad\qquad /44/ \\
&x_1 + x_2 + x_3 = 1 \\
&P^1_1 y_1 + P^2_1 y_2 + P^3_1 y_3 \leqslant V' \\
&P^1_2 y_1 + P^2_1 y_2 + P^3_1 y_3 \leqslant V' \\
&P^1_3 y_1 + P^2_3 y_2 + P^3_3 y_3 \leqslant V' \\
&P_1 + y_2 + y_3 = 1.
\end{aligned}
$$

Widzimy, że siedem niewiadomych /x_1, x_2, x_3, y_1, y_2, y_3, V'/ muszą spełniać osiem zależności /warunków/.
Ponadto istnieje to ograniczenie, że żadna wielkość x czy y nie może być ujemna.

Sytuacja jest więc tego rodzaju, że istnieje więcej zależności niż zmiennych i że wśród tych zależności występują głównie nierówności, co komplikuje rozwiązanie.

Istota tej metody polega na przeanalizowaniu całego zbioru zależności /44'/; na tej podstawie rozwiązuje się niektóre z tych zależności jako równania, a następnie zestawia się otrzymany wynik z pozostałymi zależnościami traktowanymi jako nierówności. A oto praktyczna metoda postępowania:

Piszemy najpierw wszystkie osiem zależności jako równości, rozwiązujemy którekolwiek siedem spośród nich, sprawdzamy, czy otrzymane wartości x i y są nieujemne i czy spełnione jest także ósme równanie. Jeżeli tak - otrzymaliśmy rozwiązanie. Jeżeli nie, to odrzucamy uzyskane wyniki i próbujemy innego sposobu. Piszemy mianowicie jakąś wybraną zależność w postaci ścisłej nierówności, a pozostałych siedem jako równości. Jeżeli ścisła nierówność jest jedną z zależności obejmujących szukane wielkości x, np.

$$P^2_1 \; x_1 + P^2_2 \; x_2 + P^2_3 \; x_3 \;>\; V',$$

to odpowiadająca tej nierówności wielkość y /w danym przypadku y_2 /równa się zeru, co oznacza, że sposób /wariant/ działania j = 2 jest dla przeciwnika wyraźnie niekorzystny i wobec tego nie powinien on go stosować jako swojego optimum.
Podobnie jest dla zależności między wielkościami y.
Jeżeli np.

$$P^1_2 \; y_1 + P^2_2 \; y_2 + P^3_2 \; y_3 < V'$$

to odpowiadająca tej nierówności wielkość x_2 równa się zeru, co oznacza, że wariant ugrupowania k = 2 jest dla nas wyraźnie niekorzystny i dlatego nie powinniśmy go stosować.

Jeżeli wyłączymy te przypadki, pozostaje jeszcze pewien układ zależności, gdzie porównuje się wielkości x z V' oraz takie, gdzie porównuje się wielkości y z V'. Odpowiada to optymalnym wartościom x i y, różnym od zera. Wynik jest taki, że gdy stosujemy korzystne warianty ugrupowania zgodnie z częstościami optymalnymi, wtedy każdy sposób /wariant/ działania przeciwnika stosowany z częstością optymalną pozwala osiągnąć wartość prawdopodobieństwa obrony obiektu równą dokładnie V′. Podobnie jest dla strony przeciwnej. Mamy tutaj najprostszy sprawdzian każdego przypuszczalnego rozwiązania optymalnego dla obu stron. Bierzemy nasze optymalne rozwiązanie i oceniamy wartość prawdopodobieństwa obrony obiektu dla każdego z korzystnych sposobów /wariantów/ działania przeciwnika; w wyniku powinniśmy otrzymać w każdym przypadku tę samą wartość /V′/. Podobnie znajdujemy tę samą wartość /V′/ oceniając optymalną taktykę strony przeciwnej, dla każdego z korzystnych wariantów ugrupowania środków OPL. Przykład liczbowy wyjaśni jeszcze bardziej opisaną wyżej metodę.

Niech będzie dana macierz A, która po wyeliminowaniu wyraźnie niekorzystnych sposobów /wariantów/ działania przeciwnika i wariantów ugrupowania środków OPL, ma postać

k \ j	j = 1			$\min\limits_{j} P^{j}_{k}$ /α/
	= 1	= 2	= 3	
k = 1	0,8	0,2	0,2	0,2
k = 2	0,4	0,1	0,6	0,1
k = 3	0,6	0,5	0,0	0,0
$\max\limits_{k} P^{j}_{k}$ /α/	0,8	0,5	0,6	–

/45/

Należy znaleźć optymalne częstości

x_k^* i y_j^* .

W celu łatwiejszego liczenia mnożymy każdy element macierzy /45/ przez 10. Po tej operacji macierz przyjmie postać.

j / k	j = 1	j = 2	j = 3
k = 1	8	2	2
k = 2	4	1	6
k = 3	6	5	0

/45 /

Na podstawie macierzy /45/ wypisujemy układ warunków /44/:

$$8\ x_1 + 4\ x_2 + 6\ x_3 \geqslant V'$$
$$2\ x_1 + 1\ x_2 + 5\ x_3 \geqslant V'$$
$$2\ x_1 + 6\ x_2 + 0\ x_3 \geqslant V'$$
$$x_1 + x_2 + x_3 = 1$$
$$8\ y_1 + 2\ y_2 + 2\ y_3 = \leqslant V'$$
$$4\ y_1 + 1\ y_2 + 6\ y_3 \leqslant V'$$
$$6\ y_1 + 5\ y_2 + 0\ y \leqslant V'$$
$$y_1 + y_2 + y_3 = 1.$$

Przyjmujemy najpierw wszystkie zależności jako równości i rozwiązujemy układ równań dla wartości x, tzn.

$$8\ x_1 + 4\ x_2 + 6\ x_3 = V'$$
$$2\ x_1 + x_2 + 5\ x_3 = V'$$
$$2\ x_1 + 6\ x_2 = V'$$
$$x_1 + x_2 + x_3 = 1.$$

Rozwiązując ten układ równań np. metodą podstawienia, otrzymamy

$$x_1 = -\frac{1}{2}, \quad x_2 = \frac{3}{4}, \quad x_3 = \frac{3}{4}, \quad V' = \frac{7}{2},$$

co nie jest dopuszczalne wobec $x_1 < 0$. Przyjmujemy teraz jedną z tych zależności jako ścisłą nierówność np.

$$8\,x_1 + 4\,x_2 + 6\,x_3 > V',$$

z czym łączy się $y_1 = 0$. Równania są teraz następujące

$$\begin{aligned} 2\,x_1 + x_2 + 5\,x_3 &= V' \\ 2\,x_1 + 6\,x_2 &= V' \\ x_1 + x_2 + x_3 &= 1. \end{aligned} \qquad \begin{aligned} 2\,y_2 + 2\,y_3 &= V' \\ y_2 + 6\,y_3 &= V' \\ 5\,y_2 &= V' \\ y_2 + y_3 &= 1 \end{aligned}$$

Ostatnie dwa równania po prawej stronie dają

$$y_2 = \frac{V'}{5}, \qquad y_3 = \frac{1 - V'}{5},$$

co nie jest dopuszczalne wobec $y_3 < 0$, ponieważ jak wynika z macierzy /45'/ $2 < V' < 5$.

Nie są też spełnione pozostałe równania. Dowolny wybór jednej zależności i przyjmowanie jej jako ścisłą nierówność prowadzi do tego samego negatywnego wyniku.

Przyjmujemy następnie dwie zależności jako ścisłe nierówności. Podejście takie samo jak poprzednio nasuwa myśl, że dobrze być może spóbować jednej spośród zależności zawierających y, np.

$$8\,x_1 + 4\,x_2 + 6\,x_3 > V' \quad \text{przy czym } y_1 = 0,$$

$$8\,y_1 + 2\,y_2 + 2\,y_3 < V' \quad \text{przy czym } x_1 = 0.$$

Pozostałe zależności przyjmujemy jako równania, tzn.

$$x_2 + 5\,x_3 = V' \qquad\qquad y_2 + 6\,y_3 = V'$$

$$6\,x_2 = V' \qquad\qquad 5\,y_2 = V'$$

$$x_2 + x_3 = 1 \qquad\qquad y_2 + y_3 = 1.$$

Rozwiązanie daje

$$x_1 = 0,\ x_2 \frac{1}{2}, \qquad x_3 = \frac{1}{2},$$

$$y_1 = 0,\ y_2 \frac{1}{2}, \qquad y_3 = \frac{2}{5},$$

$V' = 3$, a dzieląc przez 10 otrzymamy x/ $V' = 0{,}3$.

Zatem na optymalne rozwiązanie składają się dwa warianty ugrupowania: k= 2 i k = 3, które powinny być stosowane z częstościami 0,5. Dla przeciwnika najbardziej korzystne jest stosowanie sposobu działania j = 1 z kierunków $\alpha = 2$ i $\alpha = 3$, odpowiednio z częstościami $y_2 = 0{,}6$ i $y_3 = 0{,}4$.

Wtedy prawdopodobieństwo obrony obiektu wyniesie 0,3.

x

x x

Z treści niniejszego rozdziału nasuwa się zasadnicze pytanie: Czy jest możliwe ustalenie, na podstawie analizy rozwiązań otrzymanych wg opisanej metody, praktycznych zasad ugrupowania środków OPL w osłonie obiektu ?

Zarówno model matematyczny jak i rozwiązanie jego, wskazują wyraźnie na pewną właściwość, która cechuje wielkości: S_{l_1}, r_{i_1}. Zależą one od prawdopodobnych sposobów /wariantów/ działania przeciwnika, ilości i rodzaju środków OPL wydzielonych do obrony obiektu oraz ich możliwości. Wobec tego znając prawdopodobne sposoby /warianty/ działania przeciwnika oraz wariantując skład sił i środków wydzielonych do obrony obiektu możemy wartości s_{l_1} i r_{i_1} przedstawić w odpowiednich tabelach.

---

x/ Przez tę liczbę pomnożyliśmy wszystkie elementy macierzy /45/ wobec czego wartość prawdopodobieństwa obrony obiektu /wartość gry/ została również zwiększona o 10. Dla otrzymania rzeczywistej wartości gry należy podzielić otrzymaną z rozwiązania liczbę przez 10.

Nie da się natomiast ustalić żadnej zasady, jeśli chodzi o ilość sił i środków jaką należy rozmieścić na poszczególnych kierunkach /S^{θ}_{l}/, gdyż prawdopodobieństwo p^{j}_{kg} /α/ na każdym z kierunków kształtuje się z reguły inaczej dla różnych obiektów. Zagadnienie to dla konkretnego przypadku da się ściśle rozwiązać w oparciu o powyższy model.

Warto na zakończenie dodać, że przedstawiony model umożliwia wyznaczenie optymalnego rozwiązania, w którym uwzględniony jest wpływ czynników dających się ująć ilościowo.

Czynnikami tymi są:

a/ prawdopodobne sposoby /warianty/ działania przeciwnika, /w tym również kierunki nalotów/;

b/ oddziaływanie sił i środków OPL bezpośredniego sąsiada;

c/ skład oraz możliwości sił i środków OPL wydzielonych do osłony obiektu;

d/ warunki terenowe w świetle wymogów taktycznych.

Są to czynniki podstawowe. Uwzględnienie ich w sposób ścisły z pewnością przyczyni się do podniesienia efektywności osłony obiektu. Dodajmy, że decyzja podjęta przez dowódcę na podstawie tak otrzymanych danych posiada pełne i głębokie uzasadnienie w postaci konkretnych wskaźników liczbowych, obrazujących możliwości wykonania postawionego zadania. Z tych względów nakład pracy jest celowy.

R O Z D Z I A Ł II

PROBLEM OPTYMALNEGO ROZMIESZCZENIA PODODDZIAŁÓW TECHNICZNYCH /PUNKTÓW AMUNICYJNYCH/

1. Wymogi jakim winny odpowiadać rejony przewidziane dla pododdziałów technicznych /punktów amunicyjnych/

Pododdziały techniczne rozmieszcza się z zasady wewnątrz ugrupowania bojowego, w obszarze pomiędzy osłanianym obiektem i pododdziałami ogniowymi. Mogą one być w uzasadnionych przypadkach rozmieszczane także poza ugrupowaniem bojowym / z tyłu lub z boku/. Podobnie rzecz się ma z punktami amunicyjnymi.

Główne zadanie pododdziału technicznego polega na przechowywaniu określonego zapasu pocisków rakietowych, przygotowaniu ich /montaż i sprawdzenie/ oraz dostarczaniu do pododdziałów ogniowych. Zadaniem zaś punktu amunicyjnego będzie nagromadzenie odpowiedniego zapasu amunicji i zaopatrywanie na bieżąco pododdziały ogniowe. Dowóz w przypadku rakiet odbywa się na samochodach transportowo załadowczych. Na każdy taki samochód można załadować tylko jeden pocisk.

Praktycznie rzecz polega na tym, że w pododdziale technicznym formuje się kolumny z pociskami rakietowymi dla odpowiednich dywizjonów ogniowych. Kolumnę skierowuje się na miejsce przeznaczenia po osiągnięciu przez nią gotowości do wykonania marszu.

Dowóz amunicji artyleryjskiej odbywa się na samochodach ciężarowych drużyn amunicyjnych pododdziałów ogniowych.

Rejony przewidziane dla pododdziałów technicznych powinny:

a/ zapewniać dobry dojazd do poszczególnych pododdziałów ogniowych, ze szczególnym uwzględnieniem pododdziałów znajdujących się na najbardziej prawdopodobnych kierunkach nalotu środków napadu powietrznego przeciwnika;

b/ stwarzać dogodne warunki maskowania oraz zapewniać dobre warunki pracy /przy montażu i sprawdzaniu pocisków rakietowych/;

c/ znajdować się w pobliżu linii kolejowej /bocznicy z rampami/, co umożliwi dowóz pocisków i paliw ze składów;

d/ znajdować się w miejscu umożliwiającym korzystanie z przemysłowej sieci elektrycznej, a jednocześnie z dala od ważnych punktów newralgicznych /obiektów/, na które przeciwnik może intensywnie oddziaływać;

e/ w warunkach pokoju znajdować się na gruntach państwowych;

f/ odpowiadać wymaganiom OPBMaR.

Punkty a, b,c i f określają jednocześnie wymogi jakim winny odpowiadać rejony przewidziane dla punktów amunicyjnych.

Na podstawie tak sprecyzowanych wymogów, znajomości terenu i ogólnej sytuacji taktycznej możemy wyznaczyć rejony nadające się do rozmieszczenia pododdziałów technicznych /punktów amunicyjnych/. Rejonów takich najczęściej będzie więcej niż pododdziałów technicznych /punktów amunicyjnych/. Dla każdego z tych rejonów warunki dowozu pocisków rakietowych /amunicji artyleryjskiej/ do poszczególnych pododdziałów ogniowych będą na ogół różne, ponieważ zmieniać się będą odległości i drożnia, a wraz z nimi czas dowozu. Postawmy więc sobie za zadanie ustalenie rejonów, które by spełniały podane wymogi, a jednocześnie stwarzały możliwie najlepsze warunki zaopatrywania pododdziałów ogniowych w pociski rakietowe /amunicję artyleryjską/.

Problemem tym zajmiemy się w dalszej części rozdziału. Przedtem musimy w sposób możliwie ścisły sformułować istotę samego problemu, by móc go matematycznie rozwiązać.

2. Sformułowanie problemu

Do osłony dużych i ważnych obiektów może być wydzielonych kilka lub nawet kilkanaście pododdziałów rakiet przeciwlotniczych i kilka pododdziałów technicznych. Pododdziały te mogą być zorganizowane w jeden związek taktyczny lub kilka /np. dwa - trzy/ oddziałów. Do osłony mniejszych obiektów wydziela się nie więcej niż jeden oddział rakiet przeciwlotniczych, mający w swym składzie kilka pododdziałów ogniowych i jeden pododdział techniczny. Do osłony ważnych obiektów punktowych może być wydzielony oddział artylerii przeciwlotniczej, w składzie do sześciu pododdziałów ogniowych. Zaopatrywanie pododdziałów ogniowych w amunicję artyleryjską dokonywane jest z jednego lub dwóch punktów amunicyjnych.

W celu zbudowania modelu matematycznego, który by odpowiadał każdej sytuacji taktycznej musimy sformułować problem bardzo ogólnie.

Załóżmy więc, że pewien obiekt$^{x/}$ osłaniają A_1, A_2..., A_s, pododdziały ogniowe, gdzie S oznacza ogólną ilość pododdziałów. Pododdziały te zaopatrywane są przez B_1, B_2,..., B_N pododdziały techniczne /punkty amunicyjne/, gdzie N - ogólna ilość pododdziałów technicznych /punktów amunicyjnych/. Mogą one być rozmieszczone w rejonach R_1, R_2 ..., R_M, gdzie M - ilość rejonów spełniających wymogi, o których była mowa wyżej. W każdym z tych rejonów możemy rozmieścić tylko jeden pododdział techniczny /punkt amunicyjny/.

Zaopatrywanie ma być realizowane w pewnym okresie czasu /O, T_z/, w którym ilość pocisków rakietowych /ilość amunicji/ wyrażona w jednostkach ognia pododdziału lub w tonach/, jaką może dostarczyć i - ty pododdział techniczny /punkt amunicyjny/ wynosi b_i. Ogólna ilość pocisków rakietowych /amunicji/, jaka może być przeznaczona na zaopatrzenie pododdziałów ogniowych wyniesie:

---

x/ Obiektem tym może być zgrupowanie wojsk, przeprawy, węzły komunikacyjne lub inne obiekty w strefie Frontu lub na obszarze kraju.

$$W = \sum_{i=1}^{N} b_i$$

Wymagane zapotrzebowanie j-tego pododdziału ogniowego w okresie /0, T_z/może wynieść a_j pocisków rakietowych /jednostek ognia/. W sumie zapotrzebowanie wszystkich pododdziałów może się kształtować

$$U = \sum_{j=1}^{s} a_j$$

Zakładamy oczywiście, że $U \leqslant W$.

W świetle wprowadzonych założeń problem sprowadza się do tego, aby z ogólnej ilości M rejonów wybrać N takich rejonów, które by odpowiadały wymogom podanym w punkcie pierwszym i jednocześnie zapewniały możliwie najkorzystniejsze warunki dowozu potrzebnej ilości pocisków rakietowych /amunicji artyleryjskiej/ do pododdziałów ogniowych.

Oczywistym jest, że rozważania nad postawionym problemem tylko wtedy mają sens, gdy $M \geqslant N$.

3. Kryterium efektywności

Przy planowaniu dowozu środków materiałowo-technicznych /w tym również pocisków rakietowych i amunicji artyleryjskiej/ do pododdziałów ogniowych, niezmiernie ważną rzeczą jest ekonomia czasu. Chodzi nam bowiem głównie o to, aby dowóz środków materiałowo-technicznych mógł być zrealizowany w czasie możliwie najkrótszym.

Zadanie tego typu jest zadaniem transportowym z tryterium czasu.

Ogólny czas, w jakim może być zrealizowany dowóz środków materiałowo-technicznych, zależy m.in. od:

a/ ilości pododdziałów ogniowych oraz ich zapotrzebowania;

b/ ilości pododdziałów technicznych /składów amunicyjnych/ i ich możliwości technologicznych /możliwości uzupełniania zapasów amunicji/;

c/ ilości i rodzaju środków transportowych oraz możliwości załadowczych i wyładowczych;

d/ odległości do pododdziałów ogniowych i rodzaju dróg;
e/ organizacji dowozu.

Czynniki od a/ do e/ w każdej konkretnej sytuacji będą na ogół znane. W oparciu o ich znajomość powinniśmy wybrać rejony $R_1, R_2, \ldots, R_M$ oraz zorganizować dowóz w ten sposób, by potrzebna ilość pocisków rakietowych /amunicji artyleryjskiej/ była dostarczona do pododdziałów ogniowych w czasie możliwie najkrótszym. Tak więc za kryterium optymalizacji przyjmiemy czas dowozu, będący funkcją podanych wyżej czynników. Czas ten należy zminimalizować.

4. Model matematyczny

W celu matematycznego sformułowania problemu postawionego w punkcie drugim i zbudowania modelu, wprowadźmy dodatkowo następujące oznaczenia:

t_{mj} – czas /w godzinach/ potrzebny do przewiezienia pocisków rakietowych /amunicji/ z rejonu R_m /gdzie $m = 1, 2, \ldots, M$/ do pododdziału ogniowego A_j, z uwzględnieniem czasu załadunku i rozładunku;

x_{ij} – ilość pocisków rakietowych /jednostek ognia pododdziału/, jaką zamierzamy przewieźć z B_i – tego pododdziału technicznego /punktu amunicyjnego/ do A_j – tego pododdziału ogniowego;

n_{ij} – ilość środków transportowych przeznaczonych do przewozu pocisków rakietowych /amunicji z B_i – tego pododdziału technicznego /punktu amunicyjnego/ do A_j – tego pododdziału ogniowego;

c – ładowność jednego środka transportowego wyrażona w jednostkach takich, jak x_{ij};

$\bar{x}_{ij} = \dfrac{x_{ij}}{n_{ij} \cdot c}$ – liczba kolumn środków transportowych przeznaczona do przewozu pocisków rakietowych /amunicji/ z B_i – tego pododdziału technicznego /punktu amunicyjnego/ do A_j – tego pododdziału ogniowego x/;

- - - - - - - - - - - - - - -

x/ Jeśli środki transportowe w kolumnie są o różnej ładowności, to iloczyn w mianowniku: $n_{ij} c$ należy zastąpić sumą $\sum_{l=1}^{n} c_l$, gdzie c_l – ładowność l – tego środka transportowego.

K_E - liczba kombinacji rozmieszczenia N pododdziałów technicznych /punktów amunicyjnych/ w M wybranych rejonach, która wyrazi się wzorem

$$K_E = \frac{M!}{/M-N/!N!};$$

K_e - kombinacja rozmieszczenia pododdziałów technicznych /punktów amunicyjnych/ o numerze e, gdzie e = 1,2,3,...,E/.

T_e - ogólny czas dowozu odpowiadający kombinacji o numerze e.

Trzeba znaleźć taką kombinację K_e i taki plan dowozu /tzn, takie wielkości $\bar{x}_{ij}$/, przy których czas dostarczania potrzebnej ilości pocisków rakietowych /amunicji artyleryjskiej/ w okresie /0,T_z/ do pododdziałów ogniowych byłby minimalny.

W tym celu zbudujemy najpierw macierz czasów dowozu /t_{mj}/ w formie tablicy.

R_m \ A_j	A_1	A_2	...	A_j	...	A_s
R_1	t_{11}	t_{12}	...	t_{1j}	...	t_{1s}
R_2	t_{21}	t_{22}	...	t_{2j}	...	t_{2s}
....	...	...	...	...	...	...
R_m	t_{m1}	t_{m2}	...	t_{mj}	...	t_{ms}
....	...	...	...	...	...	...
R_m	t_{M1}	t_{M2}	...	t_{Mj}	...	t_{MS}

/1/

Czasy t_{mj} obliczamy, biorąc pod uwagę: odległości od R_m do A_j, stan drożni, porę roku i doby, stopień wyszkolenia kierowców, stan techniczny pojazdów, średnią ilość pojazdów w kolumnie, możliwe do przewidzenia zakłócenia w ruchu, powstające najczęściej na skrzyżowaniach dróg /przejazdach kolejowych/. Ponadto uwzględniamy czas załadunku i rozładunku ilości pocisków rakietowych /amunicji/ przewożonej przez środki transportowe jednej kolumny.x/ Jeśli dowóz amunicji odbywa się w kilku rzutach, /co najczęściej ma miejsce/, to należy wliczać również czas powrotu środków transportowych.

Oczywiście, sporządzenie macierzy czasów nie jest rzeczą prostą. Konieczne jest tu duże doświadczenie oraz znajomość sytuacji taktycznej, szczególnie terenu i możliwości środków transportowych.

Po zbudowaniu macierzy czasów, może się okazać, że niektóre rejony są wyraźnie niekorzystne, ze względu na zbyt długie czasy dowozu. Wiersze odpowiadające takim rejonom wykreślamy. Za rejony wyraźnie niekorzystne możemy uznać te, dla których czasy dowozu są większe od odpowiednich czasów dowozu innych rejonów /porównanie wierszy/. Po tej operacji ilość wierszy macierzy może się zmniejszyć, co ułatwia rozwiązanie.

Dla macierzy zredukowanej obliczamy następnie ilość kombinacji K_E, wg podanego uprzednio wzoru, z tym, że liczba M odpowiada aktualnej ilości wierszy macierzy czasów.

Dla każdej kombinacji rozmieszczenia pododdziałów technicznych /punktów amunicyjnych/ określamy następnie minimalny czas dowozu, w oparciu o warunki:

---

x/ Przyjmujemy średnią ilość środków transportowych w kolumnie. Powstającą z tej racji różnicę możemy wyeliminować w trakcie rozwiązywania przez wprowadzenie do wzoru na $\bar{x}_{ij}$ pewnego współczynnika k, uwzględniającego różnicę w ilości środków transportowych.

$$\sum_{j=1}^{S} \bar{x}_{ij} = b_i \quad , \qquad \sum_{i=1}^{N} \bar{x}_{ij} = aj \qquad /2/$$

przy czym zakładamy, że[x/]

$$\sum_{i=1}^{N} b_i = \sum_{j=1}^{S} sj \ , \qquad /3/$$

czyli określamy minimum formy liniowej

$$T_e = \sum_{i=1}^{N} \sum_{j=1}^{S} t_{ij}^{/e/} \; x_{ij} \qquad /4/$$

Otrzymamy w ten sposób minimalne czasy dowozu $T_{1\ min}$, $T_{2\ min}$,...., Te_{min}, ..., $T_{E\ min}$. Najmniejszy z tych czasów będzie stanowił optymalne rozwiązanie. Oznacza to, że kombinacja K_e rozmieszczenia pododdziałów, technicznych /punktów amunicyjnych/, przy której

$$Te_{min} = \min /T_{1\ min}, T_{2\ min}, ..., T_{E min}/ \qquad /5/$$

oraz plan dowozu /tzn. obliczone wartości $X = /\bar{x}_{ij}/$ odpowiadający temu czasowi stanowią rozwiązanie optymalne.

W przypadku, gdy dowóz pocisków rakietowych /amunicji/ będzie realizowany w jednym rzucie, tzn. przy jednym kursie środków transportowych[xx/], wtedy dla każdej kombinacji K_e trzeba znaleźć takie nieujemne rozwiązanie $X_{opt} = /x_{ij}/opt$, dla którego t_{xopt} będzie najmniejszy spośród wszystkich t_{xmax}, odpowiadających różnym nieujemnym rozwiązaniem $X = /\bar{x}_{ij}/$.

Mając obliczone minimalne czasy dowozu $t_{xopt}^{/1/}$, $t_{xopt}^{/2/}$,..., $t_{xopt}^{/e/}$, $t_{xopt}^{/E/}$, wybieramy następnie tę kombinację K_e i to rozwiązanie X_{opt}, dla których

$$t_{xopt}^{/e/} = \min /t_{xopt}^{/1/}, t_{xopt}^{/2/}, ..., t_{xopt}^{/E/} / \qquad /5/$$

---

x/ Założenie to nie odbiega od realności i sprawia, że model matematyczny jest tzw. modelem zamkniętym.

xx/ Przypadek ten może mieć miejsce wówczas, gdy czas $/o,T_z/$ jest krótki, zapotrzebowanie pododdziałów ogniowych niewielkie oraz dysponujemy dostateczną ilością środków transportowych.

Macierz /1/, warunki /2/ i /3/ oraz równania /5/ i /5'/ stanowią ogólny model matematyczny. Jeżeli ilość kombinacji K_E jest niewielka oraz mało jest pododdziałów technicznych /punktów amunicyjnych/, to problem znalezienia rozwiązania optymalnego w oparciu o powyższy model nie przedstawia większych trudności i może być z powodzeniem rozwiązany bez użycia elektronowych maszyn cyfrowych. Jednak przy dużej liczbie kombinacji K_E oraz większej ilości pododdziałów technicznych /punktów amunicyjnych/ i pododdziałów ogniowych zachodzi potrzeba zastosowania maszyn cyfrowych.

5. Rozwiązanie modelu

Przejdziemy teraz do omówienia metody znajdowania rozwiązania optymalnego $X_{opt} = /\bar{x}_{ij}/_{opt}$ dla kombinacji K_e.

Celowym jest najpierw wypisać dla każdej kombinacji K_e macierz, która by zawierała czasy t_{ij} oraz wartości szukane $\bar{x}_{ij}$, tzn.

B_i \ A_j	A_1	A_2	...	A_j	...	A_s	b_i
B_1	t_{11} / $\bar{x}_{11}$	t_{12} / $\bar{x}_{12}$	...	t_{1j} / $\bar{x}_{1j}$	...	t_{1s} / $\bar{x}_{1s}$	b_1
B_2	t_{21} / $\bar{x}_{21}$	t_{22} $\bar{x}_{22}$	...	t_{2j} / $\bar{x}_{2j}$	...	t_{2s} / $\bar{x}_{2s}$	b_2
...	...	...	...	...	...	...	...
B_i	t_{i1} / $\bar{x}_{i1}$	t_{i2} / $\bar{x}_{i2}$	...	t_{ij} / $\bar{x}_{ij}$	...	t_{is} / $\bar{x}_{is}$	b_i
...	...	...	...	...	...	...	...
B_N	t_{N1} / $\bar{x}_{N1}$	t_{N2} / $\bar{x}_{N2}$	...	t_{Nj} / $\bar{x}_{Nj}$	...	t_{Ns} / $\bar{x}_{Ns}$	b_N
a_j	a_1	a_2	...	a_j	...	a_s	-

/6/

Ilość takich macierzy będzie równa liczbie K_E. Metoda postępowania przy znajdowaniu rozwiązania optymalnego dla każdej macierzy jest taka sama. Polega ona na tym, że zaczynając od pewnego początkowego wyboru, przechodzimy kolejno do innych wyborów o mniejszej wartości

$$T_e = \sum_{i=1}^{N} \sum_{j=1}^{S} t_{ij}^{/e/} \bar{x}_{ij}$$

i w skończonej liczbie kroków dochodzimy do rozwiązania optymalnego $/X_{opt}/$. Stąd wynika zadanie zbudowania pierwszego wyboru.

Rozpatrzmy następujący sposób zbudowania pierwszego wyboru.

Znajdujemy elementy pierwszego wiersza macierzy /6/, tj. wartości $\bar{x}_{1j}$. W tym celu w pierwszym wierszu tej macierzy odszukujemy najmniejszy element t_{1j}. Niech to będzie element t_{1j1}. Wtedy kładziemy $\bar{x}_{1j1} = \min /a_{j1}, b_1/$. Jeżeli $b_1 > a_{j1}$, szukamy w tym samym wierszu następnego najmniejszego elementu t_{1j2}, spełniającego warunek $t_{1j2} \geqslant t_{1j1}$ i kładziemy $\bar{x}_{1j2} = \min /a_{j2}, b_1 - x_{1j1}/$. Postępowanie kontynuujemy, dopóki całkowicie nie spełnimy pierwszego równania

$$b_1 = \sum_{j=1}^{S} \bar{x}_{1j} .$$

Jeżeli w pewnym kroku tego procesu okaże się, że reszta z $\bar{b}_1$ równa się dokładnie odpowiedniemu a_{ju}, to położymy $\bar{x}_{1ju}$ równe tej reszcie $\bar{x}_{1ju} = a_{ju}$, dodatkowo kładziemy następną, odpowiednią co do wielkości wartość zmiennej $\bar{x}_{1ju+1} = 0$. Potem przechodzimy do drugiego wiersza, do trzeciego itd. Przy tym w kolumnach, których odpowiednie równania, tj.

$$a_j = \sum_{i=1}^{N} \bar{x}_{ij}$$

są całkowicie spełnione, nie zapisuje się zera.

Z konstrukcji wynika, że otrzymane w ten sposób pierwsze rozwiązanie jest wyborem, gdyż liczba zaznaczonych elementów t_{ij} równa się N + S - 1 i wśród nich nie ma ani jednego zamkniętego łańcucha.x/

Następnie elementy t_{ij} pierwszego wyboru przekształcamy w zera. Jeżeli przy tym pozostałe elementy przekształcanej macierzy są nieujemne, to pierwszy wybór jest optymalny.

Jeżeli po uczynieniu elementów pierwszego wyboru równymi zeru w macierzy są liczby ujemne, to znajdujemy największy /co do wartości bezwzględnej element ujemny/.

Tworzymy w następnym kroku łańcuch zamknięty największego elementu ujemnego z elementami pierwszego wyboru, które uczyniliśmy równe zeru, oraz budujemy drugi wybór, przenosząc z łańcucha liczbę $\overline{x}_{ij}$ równą najmniejszej liczbie w parzystym półłańcuchu.

Ponieważ największy element ujemny stał się wybranym przez pierwszy wybór, przeto doprowadzamy go do wartości równej zeru, ale tak, żeby pozostałe elementy pierwszego wyboru, odpowiadające nowemu wyborowi, pozostały także równe zeru.

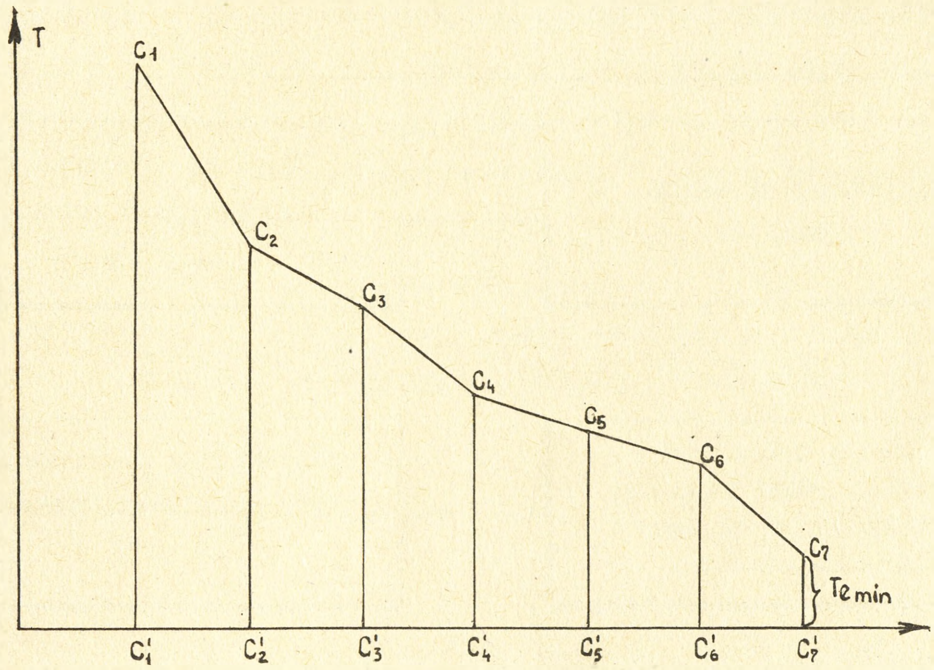
Operację tę powtarzamy dopóty, dopóki nie dojdziemy do wyboru, w którym w przekształconej macierzy wszystkie elementy pierwszego wyboru są równe zeru, a pozostałe - nieujemne. Ten ostatni wybór będzie rozwiązaniem optymalnym.

Dla obliczenia czasu dowozu, odpowiadającego rozwiązaniu optymalnemu, należy połączyć w jedną tablicę macierz czasów i ostatnie rozwiązanie. Suma iloczynów par liczb, stojących w klatkach tablicy stanowi czas dowozu T_{emin}, odpowiadający kombinacji K_e. Obliczamy następnie czasy dowozu odpowiadające innym kombinacjom i w oparciu o wzór /5/ znajdujemy T^*_{emin}, a stąd K^*_e,

- -

x/ Łańcuchem zamkniętym nazywamy ciąg postaci i_{1j1}, i_{1j2}, i_{2j2},......, i_{uju}, i_{uj1}. Jeśli elementy zamkniętego łańcucha ponumerujemy, obchodząc je np. w kierunku wskazówek zegara, to powiemy, że elementy tego łańcucha o nieparzystych numerach tworzą nieparzysty półłańcuch, zaś elementy i numerach parzystych - półłańcuch parzysty. Elementami tymi są i_{uju}.

Dla ilustracji opisanej metody znajdowania rozwiązania optymalnego warto podać jej interpretację geometryczną /rys.6/

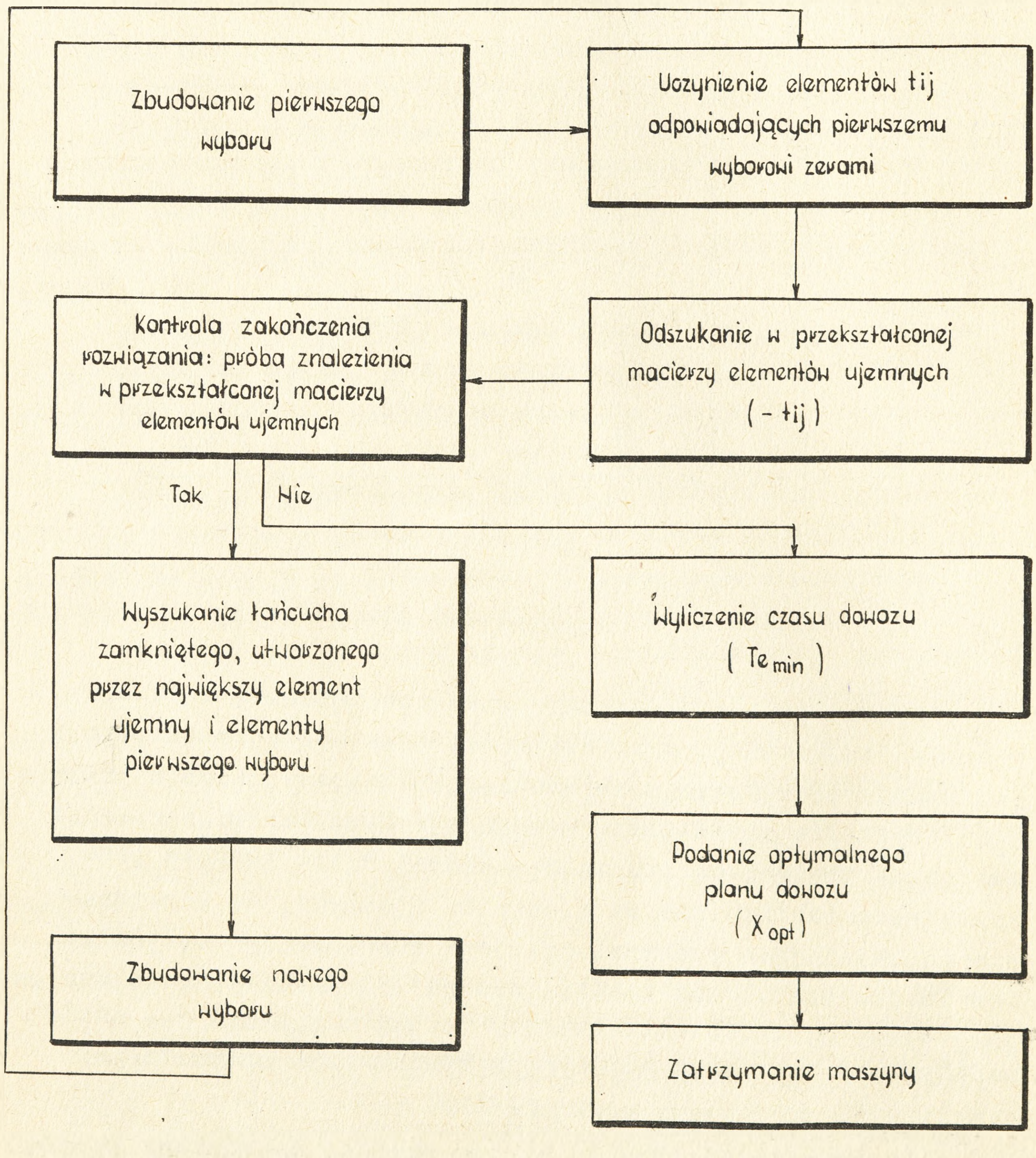


Na osi poziomej odłóżmy numer rozwiązania, a na osi pionowej odpowiadające mu wielkości czasu. Z początku, po zbudowaniu pierwszego rozwiązania, znajdujemy jeden z punktów C_1. Uczynienie elementów pierwszego wyboru zerami sprowadza nas na oś poziomą do punktu C_1'. Jeżeli w tym punkcie przekształcana tablica nie ma elementów ujemnych, to rozwiązanie odpowiadające punktowi C_1, jest rozwiązaniem optymalnym. Jeżeli przekształcana tablica nie ma tej własności, to znajdujemy punkt C_2 i ponownie wracamy do osi w punkcie C_2', gdzie badamy, czy nie otrzymaliśmy już rozwiązania optymalnego. Jeżeli nie, znajdujemy punkt C_3 itd.

Po skończonej liczbie kroków napewno osiągniemy ostatni punkt, który odpowiada rozwiązaniu optymalnemu.

Otrzymujemy łamaną czasu /rys.6/. Jak widać z rysunku, po każdym kroku czas dowozu się zmniejsza /w żadnym wypadku nie rośnie/.

Warto jeszcze na zakończenie podać schemat znajdowania rozwiązania optymalnego wg opisanej metody, w oparciu o który może być zbudowany program dla maszyny cyfrowej. Schemat taki przedstawiony jest na rys. 7.



Rys. 7.

W drugiej części pracy /rozdział IV/ podamy kilka przykładów, ilustrujących zakres i możliwości zastosowania modelu oraz pokazujących metodę postępowania przy jego rozwiązywaniu.

Na zakończenie wskażemy tylko, że opracowany model może mieć zastosowanie zarówno w systemie obrony punktowej, jak i strefowej. Można go również wykorzystać w innych przypadkach, jak np. przy planowaniu dowozu środków materiałowo-technicznych na szczeblu armii . Wtedy wystąpić może potrzeba przejścia do modelu otwartego[x/] /co w niczym nie zmieni istoty zagadnienia/ oraz przyjęcia innego kryterium efektywności, np. tonokilometrów przewozów środków materiałowo-technicznych lub ilości zużycia paliwa na jedną tonę przewożonego materiału, względnie obydwu wskaźników jednocześnie.

---

x/ Model nazywamy otwarty, jeśli $\sum_{i=1}^{N} b_i > \sum_{j=1}^{S} a_j$

B I B L I O G R A F I A

1. W.O. Aszkenazy: Primienienije tieorii igr w wojennom diele; Moskwa 1961r.
2. C.Karlin: Matematiczeskije mietody w tieorii igr, programirowanii i ekonomikie, Moskwa 1964r.
3. R.D.Luce i H.Raiffa: Igry i rieszenija, Moskwa 1961r.
4. W.Sadowski: Teoria podejmowania decyzji, Warszawa 1960r.
5. Mak - Kinsi: W wiedienije w tieoriju igr, Moskwa 1960r.
6. K.Bierz: Obszczaja tieorija igr nieskolkich lic,Moskwa 1961.
7. N.N.Worobiew: Matricznyje igry, Moskwa 1961r.
8. R.G.D.Allen: Ekonomia matematyczna, Warszawa 1961r.
9. O.Lange: Optymalne decyzje, Warszawa 1964r.
10. Praca zbiorowa: Zastosowanie matematyki i maszyn elektronicznych w planowaniu, Warszawa 1963r.
11. Saul I.Gass: Programowanie liniowe, Warszawa 1963r.
12. A.S.Barsow: Co to jest programowanie liniowe, Warszawa 1961r.
13. G.Polya: Jak to rozwiązać ? Warszawa 1964r.
14. T.Środka: Ćwiczenia z kombinatoryki i rachunku prawdopodobieństwa, Warszawa 1962r.
15. Przegląd techniki rakietowej zeszyt 45, Wydawnictwo Katedry Sprzętu Mechanicznego Politechniki Warszawskiej.
16. B.Birkhoff i Mac Lame: Przegląd algebry współczesnej, W-wa 1963r.
17. I.Birman i Ł,E.Minc: Matiematiczeskije mietody i problemy razmieszczenija proizwodstwa, Moskwa 1963r.

Wydrukowano w 20 egz.

Egz. nr 1-20BT.
Wyk: mjr Gozdecki
Druk: S.Cz.
Nr.ks. 0341/WW.