



Grey Scale #13



DANES-PICTA.COM

A 1 2 3 4 5 6 M 8 9 10 11 12 13 14 15 B 17 18 19

AKADEMIA SZTABU GENERALNEGO
im. gen. broni K. Świerczewskiego

KURS BADAŃ OPERACYJNYCH

18

ARCHIWUM

ppłk dypl. mgr M. CIECHANOWICZ

**Temat: WAŻNIEJSZE MODELE
PROCESÓW WALKI
OGÓLNOWOJSKOWEJ**

(Skrypt)

Biblioteka Główna
Akademii Obrony Narodowej

S/508



05-000612-001-0

12985

WARSZAWA

LUTY

1965

Druk. ASG-O-XV-2585



AKADEMIA SZTABU GENERALNEGO
im. gen. broni K. Świerczewskiego

KURS BADAŃ OPERACYJNYCH

18

ARCHIWUM

ppłk dypl. mgr M. CIECHANOWICZ

**Temat: WAŻNIEJSZE MODELE
PROCESÓW WALKI
OGÓLNOWOJSKOWEJ**

(Skrypt)

Biblioteka Główna
Akademii Obrony Narodowej

S/508



05-000612-001-0

12985

WARSZAWA

LUTY

1965

AKADEMIA SZTABU GENERALNEGO
im.gen.broni K.Świerczewskiego

KURS BADAŃ OPERACYJNYCH

ppłk dypl. mgr M. CIECHANOWICZ

WAŻNIEJSZE MODELE PROCESÓW WALKI OGÓLNOWOJSKOWEJ



T R E Ś Ć

~~SECRET~~

W s t ę p

1. Model walki Lanchesterá o zależności liniowej.
2. Model walki Lanchesterá o zależności kwadratowej.
3. Zastosowanie modelu Lanchesterá w walce partyzanckiej.

W s t e p.

Na obecnym etapie rozwoju nauk , zwłaszcza ścisłych, analizę działań bojowych można przeprowadzać stosując naukowe metody. Analizy walki możemy dokonywać wówczas, gdy potrafiemy ją sformalizować - nadać jej wyraz modelu matematycznego. Jednakże przedstawienie walki ogólnowojskowej w postaci modelu matematycznego, do którego odzwierciedlającego wszystkie występujące tam współzależności, nie jest sprawą ani prostą ani łatwą. Zazwyczaj bowiem nie wszystkie wskaźniki wywierające wpływ na przebieg walki /operacji/ są wielkościami znanymi, niektóre z nich dają się określić tylko w przybliżeniu, innych natomiast w ogóle nie można ustalić z wystarczającą dokładnością. Mimo to w każdej sytuacji konfliktowej, gdzie tylko występuje walka zbrojna między dwiema stronami, dokonuje się analizy ilościowej danego problemu, nawet wtedy, gdy spodziewany rezultat daje się określić chociażby w przybliżeniu. Analiza ilościowa jest tylko przedłużeniem analizy jakościowej badanego procesu, w celu ustalenia sposobu racjonalnego działania. Druga stanowi przesłankę dla pierwszej oraz uściśla i uzupełnia ją, gdyż posługuje się obiektywnym aparatem poznawczym.

Ostatecznym celem każdego dowódcy /sztabu/ organizującego działania bojowe jest określenie warunków niezbędnych dla odniesienia zwycięstwa nad przeciwnikiem, przy jednoczesnym minimum strat własnych. Osiągnięcia zwycięstwa za wszelką cenę, byłoby sprzeczne z zasadą racjonalnego działania.

Szczególny problem wyłania się bowiem wtedy, kiedy strona zwycięska ponosi więcej strat niż wymaga tego konieczność osiągnięcia wygranej. Ponadto pojawia się kwestia odnośnie celowości angażowania dodatkowych sił. Problemy te mogą być przeanalizowane i rozwiązane metodami matematycznymi. Okazuje się bowiem, że pewne rodzaje walk ogólnowojskowych można przedstawić w postaci równań różniczkowych. Wprowadzenie do tych równań wskaźników ilościowych charakteryzujących walkę, pozwala przewidywać rozwój działań, w przypadku niezmienności przyjętych wskaźników.

Na ogół rozwiązywanie równań różniczkowych nie należy do łatwych zadań, stąd można przy ich pomocy wyrażać stosunkowo proste rodzaje działań bojowych, a w związku z tym i zakres ich zastosowania będzie dość wąski. Niżej zostaną

wskazane również inne poważne ograniczenia zakresu stosowania podobnych równań. Pomimo to, w szeregu wypadkach, rozwiązanie równań różniczkowych pozwala ustalić bardzo ciekawą i przydatną w spójność między kryteriami efektywności zawartymi w tych równaniach.

Można zestawić wiele równań różniczkowych typu ogólnego, z których każde będzie odpowiadało odmiennej sytuacji taktycznej lub strategicznej, jednak tylko niewiele z nich może być interesujące. Kilka najprostszych i najciekawszych równań różniczkowych, ustalających matematyczną zależność w zmaganiach sił zbrojnych opracował w 1916 r. matematyk angielski P.W. Lanchester w pracy pod tytułem: "Aircraft in Warfare; the Dawn of the Fourth Arm."^{1/} Równania te miały na celu analityczne określenie przebiegu walki, tj. określenie w każdym momencie czasu ilości strat i ilości pozostałych żołnierzy obu walczących stron. Opracowane przez Lanchester'a równania dotyczyły bitew wojen antycznych i okresu pojawienia się broni palnej, przewidywały przy tym dla każdej strony jednakowe uzbrojenie. Jednakże rozszerzając układ równań różniczkowych można przejść od prostych do bardziej złożonych operacji. Z matematycznego punktu widzenia równania te mają znaczenie ogólne i wykorzystywane są przy analizie w wielu dziedzinach nauki, np. w badaniu przebiegu reakcji chemicznych, badaniu przebiegu walki o byt gatunków biologicznych i innych. Rozwiązanie przebiegu walki przy pomocy równań łączy się z tak poważnym uproszczeniem, że oczywiście, nie można oczekiwać pełnej zbliżoności z rzeczywistością. Równania różniczkowe nie zawierają bowiem "ukrytych myśli" ani nie władają "zdolnościami myślenia", a rozwiązanie ich może zastąpić twórczej pracy ludzi. Należy jednakże pamiętać, że metody matematyczne pomagają w rozwiązaniu konkretnych zadań stawianych przez człowieka, a o ich niewątpliwiej wyższości stanowi dokładność podporządkowania się założeniom wyjściowym, leżącym u podstaw przyjętego systemu badawczego. To z kolei zmusza do rozwijania ścisłych metod przy rozwiązywaniu złożonych problemów wojskowych.

Przy formułowaniu równań różniczkowych dla analizy procesów walki, Lanchester oparł się na jednej z głównych zasad strategii jaką jest koncentracja: skupienie wszystkich zasobów walczącej strony na rozwiązanie jednego zadania i odpowiednia koncentracja podstawowych sił zbrojnych na jednym kierunku

^{1/} "Rola lotnictwa w wojnie; powstanie czwartego rodzaju broni".

działań bojowych. Jednak zasada koncentracji nie jest samą w sobie zasadą strategii, w tej samej mierze można ją również zastosować w sztuce operacyjnej i taktyce, zasada ta, w swej materialnej treści, bazuje na faktach o czysto naukowym charakterze.

Między metodami obrony, stosowanymi w przeszłości i współcześnie, istnieje zasadnicza różnica. W czasach, gdy broń bezpośrednio przeciwstawiała się broni, działania obronne były proste, uderzenia miecza albo halabardy pasowano mieczem albo tarczą; we współczesnych warunkach w zasadzie również broń odpowłada broni np.: obroną przed ogniem karabinowym jest ogień karabinowy, ale wykorzystuje się też i ogień innych środków: czołgów, artylerii, lotnictwa.

Ale współczesna obrona nie jest prosta, gdyż bitwa w znacznym stopniu staje się kolektywna. Jako następstwo tej różnicy, znaczenie koncentracji w toku historii stawalo się zmienne. W dawnych warunkach żaden plan strategiczny ani manewr taktyczny nie dopuszczał do bezpośredniej styczności bojowej nierównej ilości sił - zawsze z jednej i drugiej strony uczestniczyła prawie jednakowa ilość żołnierzy; każdy żołnierz mógł zwykle znaleźć sobie jednego przeciwnika. Jeżeli zdarzały się wypadki takiej koncentracji sił, gdy na jednego żołnierza przypadało na pewnych odcinkach bitwy po dwóch żołnierzy strony przeciwnej, to i wówczas ilość żołnierzy rzeczywście uczestniczących w walce w określonym momencie czasu /dopóty, dopóki front nie został przerwany/ była, z grubsza biorąc, jednakowa z obydwu stron. W warunkach współczesnych wszystkie te założenia są nieistotne. Przy posiadaniu dalekonośnego uzbrojenia ogniowego, koncentracja przeważającej ilości sił zapewnia w walce zwykłą przewagę i strona ilościowo słabsza znajdzie się pod oddziaływaniem o wiele silniejszego ognia niż może sama wykonać przeciwko swojemu wrogowi. W istocie rzeczy znaczenie tej różnicy jest większe, niż to się wydaje przy wstępnym zaznajamianiu się z tym problemem. Wpływ przewagi liczebnej jest węzłowym zagadnieniem i dlatego niżej zostanie dokładnie rozpatrzony.

W równaniach Lanchester'a dają się wyróżnić dwa podstawowe modele walki zbrojnej, które w popularnej literaturze noszą nazwę: prawo zależności liniowej i prawo zależności kwadratowej.

1. Model walki Lanchesterá o zależności liniowej.

Model ten jest oparty na następujących założeniach:

- a/ Dwie strony /jednostki wojskowe, żołnierze/, biorące udział w walce, atakują jedna drugą. Każda strona walcząca jest w zasięgu działania broni strony przeciwnej.
- b/ Strony walczące są identyczne /jednakowo uzbrojone/, poza umiejętnością zadawania przeciwnikowi różnych strat /np. różnica celności ognia/.
- c/ Każda strona walcząca zna tylko teren, na którym znajduje się przeciwnik, bez znajomości skutków ognia.
- d/ Ogień walczącej strony jest równomiernie rozłożony na obszarze, na którym znajduje się przeciwnik.
- e/ Strony walczące nie mają strat operacyjnych /niebojowych/, np. w skutek uszkodzeń czy zużycia środków bojowych, strat przy transporcie itp.
- f/ Strony walczące nie są uzupełniane świeżymi siłami w przypadku walk wieloetapowych.

Aby przedstawić rozpatrywane zagadnienie w postaci równania matematycznego, wprowadźmy oznaczenia:

- b - ilość sił strony niebieskich w pewnym momencie czasu;
- r - ilość sił strony czerwonych w pewnym momencie czasu;
- t - czas;
- E - współczynnik efektywności działań - stosunek przeciętnej ilości strat sił strony niebieskich do przeciętnej ilości strat strony czerwonych;
- b_0 - początkowy stan sił strony niebieskich;
- r_0 - początkowy stan sił strony czerwonych.

Jak wynika z założeń, każdą walkę rozpatruje się jako szereg następujących po sobie starć, stanowiących proces ciągły o stale zmieniającej się ilości jednostek bojowych. Jeżeli ponadto przyjmiemy, że wszystkie starcia odbywają się w jednakowych przedziałach czasu, o pewnej wielkości średniej, wówczas na tej podstawie możemy przejść od zmiennej typu skokowego do zmiennej typu ciągłego. Rozwala to traktować walkę jako funkcję ciągłą zmiennej - t - i stosować metody rachunku różniczkowego dla określenia zmian w stanach sił obu stron w dowolnym momencie walki.

Rozsądnym będzie rozpatrywać tylko te walki, w wyniku których dochodzi do zniszczenia jednego z dwu uczestników pojedynku. Aby nadać rozważaniom bardziej ogólny charakter zakładamy, że jedna ze stron ma określoną przewagę w uzbrojeniu lub przygotowaniu bojowym. Straty sił zbrojnych strony czerwonych, poniesione w jednej walce /starciu/, przeciętnie są równe stosunkowi ogólnej ilości strat strony czerwonych do ogólnej ilości starć, analogiczne rozumowanie jest słuszne w odniesieniu do strony niebieskich.

Przyjmując kolejne starcia jako ciągłą zmianę ilości sił obu stron w dowolnych momentach czasu Δt_1 , zmiany sił obu stron Δr_1 i Δb_1 dają się przedstawić w postaci zależności:

$$\frac{\Delta b_1}{\Delta r_1} = E; \quad \frac{\Delta r_1}{\Delta b_1} = \frac{1}{E}.$$

Jeżeli przedziały czasu Δt_1 są dowolnie małe, wówczas

$$\lim_{t \rightarrow 0} \frac{r/t_0 + \Delta t / -r/t_0/}{\Delta t} = r'/t_0/;$$

$$\lim_{t \rightarrow 0} \frac{b/t_0 + \Delta t / -b/t_0/}{\Delta t} = b'/t_0/.$$

Zatem zmiany sił b i r w toku walki można napisać w postaci następujących równań różniczkowych

$$\frac{dr}{dt} = - \frac{1}{1+E} \quad \text{--- --- --- /1.1/},$$

$$\frac{db}{dt} = - \frac{E}{1+E} \quad \text{--- --- --- /1.2/}.$$

Całkując te równania i kładąc warunki początkowe $r/0/ = r_0$, $b/0/ = b_0$, otrzymamy:

$$r = r_0 - \frac{t}{1+E} \quad \text{--- --- --- /1.3/},$$

$$b = b_0 - \frac{tE}{1+E} \quad \text{--- --- --- /1.4/}.$$

Dzieląc stronami równanie /1.2/ przez /1.1/ mamy

$$\frac{db}{dr} = E \quad \text{--- --- --- /1.5/}.$$

Równania /1.3/ i /1.4/ możemy napisać w postaci:

$$r_0 - r = \frac{t}{1 + E} \quad \text{--- /1.3'/.}$$

$$b_0 - b = \frac{tE}{1 + E} \quad \text{--- /1.4'/.}$$

Mnożąc /1.3'/ przez E dostaniemy równość prawych stron /1.3'/ i /1.4'/, a stąd

$$b_0 - b = E / r_0 - r / \quad \text{--- /1.6/.}$$

lub

$$E = \frac{b_0 - b}{r_0 - r} \quad \text{--- /1.6'/.}$$

Zatem wzór /1.6/ jest słuszny dla dowolnego momentu czasu trwania walki.

Ponieważ rozwiązanie równań /1.1/ i /1.2/ są liniowe względem t -i stosunek między b i r jest także liniowy, stąd równania te często są nazywane liniowym prawem Lanchester'a.

Z równania /1.6/ widzimy, że stan sił jednej ze stron w dowolnym momencie czasu zależy od stanu sił drugiej strony i efektywności działań.

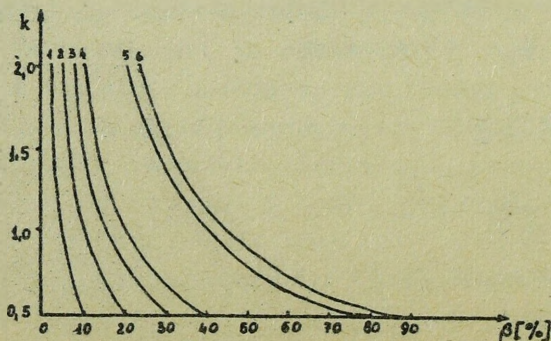
Jeżeli oznaczymy przez:

$$\frac{b_0}{r_0} = k \quad \text{--- stosunek sił w momencie rozpoczęcia walki;}$$

$$\alpha = \frac{r_0 - r}{r_0} \cdot 100 \quad \text{--- procent strat sił strony czerwonej;}$$

$$\beta = \frac{b_0 - b}{b_0} \cdot 100 \quad \text{--- procent strat sił strony niebieskiej,}$$

wówczas procent strat strony niebieskiej, zależnie od wielkości poszczególnych parametrów, można przedstawić w postaci niżej zamieszczonego wykresu /rys. 1/.



Rys. 1.

Poszczególne krzywe są sporządzane dla następujących wielkości poszczególnych parametrów.

$$1/ \alpha = 10\%, \quad E = 0,5;$$

$$2/ \alpha = 20\%, \quad E = 0,5;$$

$$3/ \alpha = 30\%, \quad E = 0,5;$$

$$4/ \alpha = 20\%, \quad E = 1;$$

$$5/ \alpha = 20\%, \quad E = 2;$$

$$6/ \alpha = 30\%, \quad E = 1,5.$$

A oto przykład obliczenia niektórych punktów krzywych. Obliczenia wykonamy dla

$$k = 1,5, \quad \alpha = 30\%, \quad E = 0,5.$$

Pomnożmy licznik i mianownik prawej strony /1.6'/ przez $\frac{100}{r_0}$, wówczas otrzymamy

$$E = \frac{\frac{b_0 - b}{r_0} \cdot 100}{\frac{r_0 - r}{r_0} \cdot 100}$$

lecz $\frac{b_0}{r_0} = 1,5$, stąd $r_0 = \frac{b_0}{1,5}$. Biorąc to pod uwagę oraz uwzględniając wprowadzone wyżej oznaczenia będziemy mieli

$$E = \frac{1,5 \cdot \beta}{\alpha},$$

a podstawiając przyjęte wartości na E i α będzie

$$0,5 = \frac{1,5 \beta}{30\%}$$

skąd $\beta = 10\%$.

W analogiczny sposób dokonujemy obliczeń dla innych wartości parametrów.

Obliczenia te zestawione są w poniższej tabeli.
/Tabela 1/.

TABELA 1

k	E=0,5 $\alpha=10\%$	E=0,5 $\alpha=20\%$	E=0,5 $\alpha=30\%$	E=1 $\alpha=20\%$	E=2 $\alpha=20\%$	E=1,5 $\alpha=30\%$	
0,5	10%	20%	30%	40%	80%	90%	
1,0	5%	10%	15%	20%	40%	45%	β
1,5	3,3%	6,6%	10%	13,3%	26,6%	30%	
2,0	2,5%	5%	7,5%	10%	20%	22,5%	

Zarówno z wykresu jak i tabeli wynika, że w pewnych przypadkach o stratach przeciwnika decyduje wyłącznie efektywność działań i przewidywany procent strat własnych. Np. straty przeciwnika $\beta = 20\%$ wynoszą przy $E = 0,5$; $\alpha = 20\%$, $k = 0,5$, jak też przy $E = 1$, $\alpha = 20\%$, $k = 1,0$ oraz przy $E = 2$, $\alpha = 20\%$, $k = 2$.

Stąd wnioskujemy, że niekorzystny stosunek sił można równoważyć zwiększając efektywność działań i odwrotnie, dysponując gorszą efektywnością - należy kompensować ją zwiększając początkowy stosunek sił.

Należy jednakże wystrzegać się wyciągania zbyt pochopnych wniosków, gdyż model jest słuszny tylko w przypadku spełnienia przyjętych założeń. Nie uwzględnia on bowiem szeregu istotnych czynników zarówno ilościowych jak i jakościowych takich jak np. warunki terenowe, warunki atmosferyczne, stan psychiczny wojsk, zmęczenie i inne.

Przedstawiony model walki ogólnowojskowej o zależności liniowej, sformułowany przez Lanchester'a, posiada charakter deterministyczny, bowiem zakłada, że wszystkie występujące w nim parametry są określone i stałe. W praktyce jednak nie zawsze będzie to możliwe do osiągnięcia. Częściej wystąpią przypadki znajomości tylko prawdopodobieństw zaistnienia odnośnych układów.

Stąd też, omawiany model można rozpatrywać również - w ujęciu probabilistycznym.

Równania Lanchester'a zakładają, że w momencie kompletnego zniszczenia sił jednej ze stron, druga strona zawsze będzie posiadała określoną ilość sił zdolnych do walki. Istnieje jednak również pewne prawdopodobieństwo, że wszystkie siły jednej strony będą zniszczone bez jakichkolwiek strat w siłach drugiej strony.

Określmy więc prawdopodobieństwo powodzenia strony czerwonych tj. $P/r_0, b_0/$. Ponieważ zniszczenie wszystkich sił strony niebieskich nie zależy od tego, czy w najbliższym czasie jedna lub druga strona straci jedną jednostkę bojową, zatem prawdopodobieństwo powodzenia strony czerwonych można oznaczyć zarówno przez $P/r_0, b_0 - 1/$ jak i $P/r_0 - 1, b_0/$.

Tak więc wspomniane prawdopodobieństwo wyniesie

$$P/r_0, b_0/ = M/r_0, b_0/ \cdot P/r_0, b_0 - 1/ + N/r_0, b_0/P/r_0 - 1, b_0/ \dots /1.7/,$$

gdzie: $- N/r_0, b_0/$ - prawdopodobieństwo straty jednej jednostki strony niebieskich;

$- M/r_0, b_0/ = 1 - N/r_0, b_0/$ - prawdopodobieństwo straty jednej jednostki strony czerwonych.

Z uwagi na przyjęte założenia modelu, funkcje prawdopodobieństw zniszczenia poszczególnych jednostek można traktować jako stałe, tj.

$$M/r_0, b_0/ = p = \text{const.}, \quad N/r_0, b_0/ = q = \text{const.} \dots /1.8/.$$

Uwzględniając to, równanie /1.7/ przyjmie postać

$$P/r_0, b_0/ = pP/r_0, b_0 - 1/ + qP/r_0 - 1, b_0/ \dots /1.9/.$$

Rozpatrując model o zależności liniowej można powiedzieć, że w wyniku każdego starcia strona czerwonych traci przeciętnie $\frac{E}{1 + E}$ jednostek, a strona niebieskich przeciętnie $\frac{1}{1 + E}$ jednostek.

Wychodząc z tych zależności, prawdopodobieństwo, że zostaną zniszczone wszystkie siły strony niebieskich, a strona czerwonych nie poniesie strat, wynosi

$$P/0, b_0/ = 1 + E \sqrt{b_0} \dots /1.10/.$$

Natomiast prawdopodobieństwo, że zostaną zniszczone wszystkie siły strony czerwonych, zaś strona niebieskich nie będzie miała żadnych strat, określone jest wzorem

$$P/\alpha_0, 0/ = 1/1 + E/\alpha_0^{-r_0} \dots \dots \dots /1.11/.$$

Rozwijając wyrażenie /1.10/ dla przypadku strat w ilości α jednostek strony czerwonych i b_0 - strony niebieskich, prawdopodobieństwo uzyskania sukcesu przez czerwonych wynosi

$$P/\alpha, b_0/ = \frac{1/\alpha + b_0 - 1/! E^\alpha}{\alpha! /b_0 - 1/! /1 + E/\alpha + b_0} \dots \dots \dots /1.12/.$$

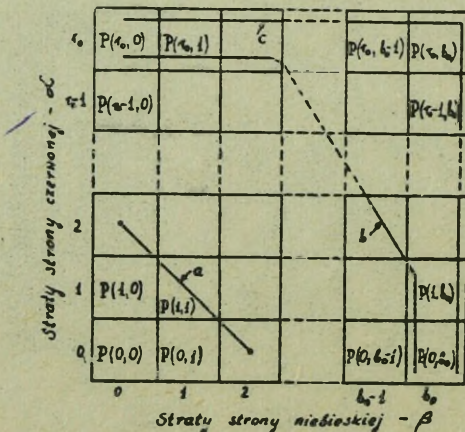
Analogicznie rozwijając /1.11/ dla przypadku strat w ilości β jednostek strony niebieskich i r_0 - strony czerwonych, prawdopodobieństwo odniesienia sukcesu przez niebieskich wyraża się wzorem

$$P/r_0, \beta / = \frac{1/\beta + r_0 - 1/! E^{r_0}}{\beta! /r_0 - 1/! /1 + E/\beta + r_0} \dots \dots \dots /1.13/.$$

oraz

$$P/r_0, b_0/ = 0 \dots \dots \dots /1.14/.$$

Jeżeli przez n oznaczymy ilość starć, wówczas wartości prawdopodobieństw wyrażone przez wzory /1.12/ i /1.13/ można przedstawić w postaci wykresu /rys.2/.



Rys. 2.

Na wykresie linie a , b , c charakteryzują sytuację, która wynika w dowolnym czasie. Na przykład, krzywa a odpowiada $n = 2$, a krzywa b odpowiada $n = b_0 + 1$. Poziomy i pionowy odcinek krzywej b oznacza zakończenie walki, natomiast skośna część tej krzywej wskazuje, że walki trwają nadal. Krzywa c odpowiada $n > r_0 + b_0$ i odnosi się do momentu, gdy wszystkie możliwe walki będą zakończone. Suma wszystkich P wziętych wzdłuż wolnej z krzywych równa jest jedności /co jest zupełnie oczywiste/.

Dla momentów odpowiadających krzywym b lub c , przeciętna ilość strat uczestników bitwy nie będzie odpowiadała równaniu /1.6/. W szczególności zbadanie przypadku przedstawionego przez krzywą b wskazuje, że przy zbliżaniu się końca walki w szeregach pozostaje pewna ilość jednostek strony niebieskich, albo pewna ilość jednostek strony czerwonych. Dla każdej danej wartości r_0 , b_0 lub E można obliczyć przeciętną ilość jednostek pozostałych w szeregach, przy tych, wzajemnie wykluczających się możliwościach.

Dla przykładu z tabeli 2 można odczytać wartości r i b w przypadku, gdy na początku walki strona czerwonych dysponowała pięcioma jednostkami, a strona niebieskich - trzema. Na podstawie obliczeń można określić przeciętną ilość sił, pozostałych w szeregach każdej z walczących stron po n walkach. Wynik tych obliczeń oznaczony słowem "prawdopodobne", podany jest w poniższej tabeli sporządzonej dla warunków początkowych

$$r_0 = 5; \quad b_0 = 3; \quad E = 1.$$

TABELA 2

Wartości przeciętne	Przy wartościach n							
	0	1	2	3	4	5	6	7
r , prawdopodobne	5,0	4,5	4,0	3,5	3,06	2,72	2,48	2,367
r , Lanchester'a	5,0	4,5	4,0	3,5	3,0	2,5	2,0	2,0
b , prawdopodobne	3,0	2,5	2,0	1,5	1,06	0,72	0,48	0,367
b , Lanchester'a	3,0	2,5	2,0	1,5	1,0	0,5	0	0

Prawdopodobieństwo, że zostaną zniszczone siły strony czerwonych wynosi $\frac{29}{128} = 0,2266$.

Jeżeli zwycięży strona niebieskich, to spodziewana ilość pozostałych w jej szeregach jednostek jest równa 1,0621.

Prawdopodobieństwo, że zostaną zniszczone siły strony niebieskich wynosi $\frac{99}{128} = 0,7734$.

Jeżeli zwycięży strona czerwonych, to spodziewana ilość pozostałych w jej szeregach jednostek jest równa 3,061.

Obliczone w ten sposób wartości r i b można porównać z wartościami tych wielkości, określonymi zgodnie z rozwiązaniami równań Lanchester'a /wielkości te są oznaczone w tabeli słowem "Lanchester'a"/. Widzimy, że w tym wypadku istnieje przynajmniej jedna szansa na cztery, że w wyniku bitwy siły strony czerwonych zostaną zniszczone, a po stronie niebieskiej pozostanie przeciętnie około 1,06 jednostek. Pozostałe trzy szanse na cztery /w przybliżeniu/ mówią, że zostaną zniszczone siły niebieskich, a w szeregach strony czerwonych pozostanie przeciętnie około trzech jednostek. Ograniczoność stosowania równań Lanchester'a do oceny wyników ostatniego etapu starcia jest oczywista. Naturalnie, wyciągając taki wniosek należy zauważyć, że przy dużych wielkościach względne odchylenia od prawa zależności liniowej Lanchester'a byłyby mniejsze.

2. model walki Lanchester'a o zależności kwadratowej.

=====

Jeśli weźmiemy pod uwagę współczesną walkę, charakteryzującą się stosowaniem dalekonośnej broni, to stwierdzimy, że nie można dzielić poszczególnych walk na pojedyncze starcia, gdyż każdy uczestnik starcia może prowadzić ogień /przynajmniej w idealnym przypadku/ do dowolnego przeciwnika. Oprócz tego sytuację pola walki można uczynić bardziej realną przez uwzględnienie strat powstałych nie w bezpośrednich działaniach bojowych. Straty te /nazwijmy je operacyjnymi/ można przyjmować jako proporcjonalne do liczby jednostek uczestniczących w akcji. Ponadto obie strony ciągle przygotowują uzupełnienia: przeprowadzają szkolenie składu osobowego, produkują sprzęt bojowy itp. Wielkości te zmieniają się w czasie, ale z pewnym przybliżeniem mogą być uważane za stałe.

Do tych uzupełnień model walki Lanchester'a zostaje uogólniony. Przed przystąpieniem do jego sformułowania i analizy wprowadźmy następujące oznaczenia:

$$- a_1 = \frac{b_0}{e_r} \left[n + \frac{1}{2} / m_b - m_r / \right] ;$$

$$- a_2 = \frac{b_0}{e_r} \left[n - \frac{1}{2} / m_b - m_r / \right] ;$$

- b - ilość jednostek strony niebieskich w dowolnym momencie walki;
- b_0 - początkowa ilość jednostek strony niebieskich;
- e_b - efektywność jednostek strony niebieskich, tj. liczba jednostek strony czerwonych wyeliminowanych przez działanie każdej niebieskiej jednostki na jednostkę czasu;
- e_r - efektywność jednostek strony czerwonych;
- $k = \frac{m}{n}$;
- $m = \frac{1}{2} / m_b + m_r /$;
- m_b - straty operacyjne strony niebieskich, tj. część jednostek niebieskich wyeliminowanych z walki na jednostkę czasu, na skutek innych przyczyn niż akcje przeciwnika;
- m_r - straty operacyjne strony czerwonych;
- $n = \left[e_b e_r + \frac{1}{4} / m_b - m_r /^2 \right]^{\frac{1}{2}}$;
- r - ilość jednostek strony czerwonych w dowolnym momencie walki;
- r_0 - początkowa ilość jednostek strony czerwonych;
- r_f - końcowa ilość jednostek strony czerwonych;
- t - czas;
- t_b - czas potrzebny dla całkowitego zniszczenia sił strony niebieskich / $b = 0$ /;
- P - szybkość uzupełniania strat przez stronę czerwonych;
- Q - szybkość uzupełniania strat przez stronę niebieskich.

Omawiany model walki jest oparty na następujących założeniach.

- a. Dwie strony /jednostki wojskowe, żołnierze/, biorące udział w walce, atakują jedna drugą. Każda strona walcząca jest w zasięgu działania broni strony przeciwnej.
- b. Strony walczące są identyczne /jednakowo uzbrojone/, poza umiejętnością zadawania przeciwnikowi różnych strat /np. różnica celności ognia/.
- c. Położenie każdej walczącej strony jest dostatecznie znane, jak również znane są skutki własnego ognia, w związku z czym po zniszczeniu jednego celu ogień może być przeniesiony na następny cel. Oznacza to, że każda jednostka bojowa może oddziaływać ogniem równocześnie na wszystkie jednostki przeciwnika bez względu na ich rozmieszczenie w terenie, równocześnie sama znajduje się pod oddziaływaniem wszystkich jego jednostek bojowych. /Dużego znaczenia nabiera tu manewr wojsk/.
- d. Ogień jest prowadzony równomiernie na pozostałe przy życiu jednostki.
- e. Efektywność, skala strat operacyjnych i szybkość uzupełniania strat są stałe w czasie i stałe dla wszystkich jednostek tej samej strony.

Uwzględniając te założenia model walki może być rozważany jako ciągły i można go przedstawić w postaci następujących równań różniczkowych.

$$\frac{dr}{dt} = P - e_b b - m_r r \dots \dots \dots /2.1/$$

$$\frac{db}{dt} = Q - e_r r - m_b b \dots \dots \dots /2.2/$$

Rozpatrując walkę w ciągu bardzo krótkiego okresu czasu można przyjąć, że straty nie będą uzupełniane oraz, że nie będzie strat operacyjnych. / $P = 0$, $Q = 0$, $m_r = 0$, $m_b = 0$ /.

Takie założenie nie odbiega zbyt od rzeczywistości, jeżeli tylko odcinek czasu będzie dowolnie krótki. Wówczas równania /2.1/ i /2.2/ znacznie się upraszczają i przyjmują postać

$$\frac{dr}{dt} = - e_b b \dots \dots \dots /2.3/,$$

$$\frac{db}{dt} = - e_r r \dots \dots \dots /2.4/.$$

Rozwiązując ten układ równań przy warunkach początkowych

$$r/0/ = r_0, \quad b/0/ = b_0 \dots \dots \dots /2.5/$$

można obliczyć ilość sił pozostałych po zakończeniu walki.

Różniczkując /2.4/ otrzymamy

$$\frac{d^2 b}{dt^2} = -e_r \frac{dr}{dt}.$$

Korzystając z równania /2.3/ otrzymujemy równanie różniczkowe drugiego rzędu:

$$\frac{d^2 b}{dt^2} = e_b b_r b, \quad \text{czyli} \quad \frac{d^2 b}{dt^2} - e_b e_r b = 0. \quad /2.6/.$$

Jest to równanie różniczkowe drugiego rzędu kształtu

$$y'' + py' + qy = 0$$

którego rozwiązanie ogólne ma postać

$$y = C_1 e^{h_1 x} + C_2 e^{h_2 x}, \quad 1/.$$

a liczba h spełnia równanie charakterystyczne

$$h^2 + ph + q = 0.$$

Stąd rozwiązaniem ogólnym równania /2.6/ jest

$$b = C_1 e^{h_1 t} + C_2 e^{h_2 t} \dots \dots \dots /2.7/.$$

a równanie charakterystyczne przyjmie postać

$$h^2 - e_b e_r = 0.$$

Jeżeli ponadto przyjmiemy, że $e_b = e_r = w$, wówczas

$$h^2 - w^2 = 0,$$

a stąd

$$h_1 = w, \quad h_2 = -w \dots \dots \dots /2.8/.$$

Kładąc /2.8/ do /2.7/ otrzymamy

$$b = C_1 e^{wt} + C_2 e^{-wt}.$$

Różniczkując to równanie stronami mamy

$$\frac{db}{dt} = C_1 w e^{wt} - C_2 w e^{-wt}$$

1/ Symbol e w tym równaniu jest liczbą stanowiącą podstawę logarytmów naturalnych i nie ma on żadnego związku ze współczynnikami e_b i e_r występującymi w równaniach /2.3/ i /2.4/.

lecz $\frac{db}{dt} = -wr$,

więc $-wr = C_1 w e^{wt} - C_2 w e^{-wt}$,

skąd $r = -C_1 e^{wt} + C_2 e^{-wt}$.

Otrzymaliśmy więc rozwiązanie równań /2.3/ i /2.4/ w postaci

$$b = C_1 e^{wt} + C_2 e^{-wt}$$

$$r = -C_1 e^{wt} + C_2 e^{-wt}, \quad \dots \dots \dots /2.9/.$$

Dla warunków początkowych otrzymamy

$$b_0 = C_1 + C_2$$

$$r_0 = -C_1 + C_2.$$

Rozwiązując te równania wyznaczmy stałe całkowania C_1 i C_2 .

$$b_0 + r_0 = 2C_2, \quad \text{skąd}$$

$$C_2 = \frac{b_0 + r_0}{2}.$$

Z kolei

$$b_0 = C_1 + \frac{b_0 + r_0}{2}, \quad \text{czyli}$$

$$C_1 = b_0 - \frac{b_0 + r_0}{2} \quad \text{i ostatecznie}$$

$$C_1 = \frac{b_0 - r_0}{2}.$$

Podstawiając wartości C_1 i C_2 do /2.9/ otrzymujemy

$$b = \frac{1}{2} /b_0 - r_0/e^{wt} + \frac{1}{2} /b_0 + r_0/e^{-wt}$$

$$r = -\frac{1}{2} /b_0 - r_0/e^{wt} + \frac{1}{2} /b_0 + r_0/e^{-wt}.$$

Podnosząc te równania stronami do kwadratu i odejmując drugie od pierwszego dostaniemy

$$b^2 = \frac{1}{4} /b_0 - r_0/ e^{2wt} + \frac{1}{2} /b_0 - r_0/ /b_0 + r_0/ + \frac{1}{4} /b_0 + r_0/ e^{-2wt},$$

$$r^2 = \frac{1}{4} /b_0 - r_0/ e^{2wt} - \frac{1}{2} /b_0 - r_0/ /b_0 + r_0/ + + \frac{1}{4} /b_0 + r_0/ e^{-2wt},$$

$$b^2 - r^2 = /b_0 - r_0/ /b_0 + r_0/,$$

$$b^2 - r^2 = b_0^2 - r_0^2, \quad \text{skąd}$$

$$b_0^2 - b^2 = r_0^2 - r^2 \dots \dots \dots /2.10/.$$

Niekiedy model ten formułowany jest nieco odmiennie. Jeżeli przyjmiemy, że w dowolnym starciu jedna jednostka strony czerwonych może wytrącić z walki średnio $\frac{EG/t/}{1+E}$ jednostek strony niebieskich, a jedna jednostka strony niebieskich może średnio zniszczyć $\frac{G/t/}{1+E}$ jednostek strony czerwonych /gdzie E posiada znaczenie takie samo jak w modelu liniowym a G/t/ - intensywność walki/ wówczas sytuację bojową można przedstawić w postaci równań

$$\frac{dr}{dt} = - \frac{bG/t/}{1+E}, \quad \frac{db}{dt} = - \frac{rEG/t/}{1+E} \dots \dots \dots /2.3'/.$$

Dzieląc te równania stronami otrzymamy

$$\frac{dr}{db} = \frac{b}{rE}.$$

Całkując to równanie i kładąc warunki początkowe uzyskamy następujące równanie

$$b_0^2 - b^2 = E /r_0^2 - r^2/ \dots \dots \dots /2.10'/,$$

które uzależnia współczynnik efektywności E od różnicy kwadratów stanu początkowego i końcowego sił obu stron.

Tak więc stany sił w końcu walki wynoszą:

$$r = \sqrt{r_0^2 - \frac{b_0^2 - b^2}{E}}, \quad b = \sqrt{b_0^2 - E/r_0^2 - r^2/}.$$

Ponieważ rozwiązanie układu równań /2.3/ i /2.4/ lub /2.3'/ przedstawia zależności pomiędzy ilościami jednostek obu stron podniesionymi do kwadratu, zatem równanie /2.10/ lub /2.10'/ nazywane jest często *prawem Lancches-ter'a o zależności kwadratowej*.

Prawo to słownie daje się wyrazić następująco: efektywność, użytych do walki jednostek, jest proporcjonalna do różnicy kwadratów stanu początkowego i końcowego sił /pod warunkiem, że czynniki determinujące efektywność indywidualną jednostek nie zmieniają się w ciągu walki/.

Przejdźmy obecnie do rozważań równań /2.1/ i /2.2/ w bardziej ogólnej formie, a mianowicie w przypadku kiedy tylko $P = Q = 0$. Równania te wówczas napiszemy w następującej relacji

$$\frac{dr}{dt} = -e_b b - m_r r \dots \dots \dots /2.11/,$$

$$\frac{db}{dt} = -e_r r - m_b b \dots \dots \dots /2.12/.$$

Całkując układ tych równań i kładąc warunki początkowe $r/0/ = r_0$ i $b/0/ = b_0$ otrzymamy następujące symetryczne wzory na r i b :

$$r/t/ = r_0 e^{-nt} \left\{ \cosh nt - \frac{1}{n} \left[\frac{b_0}{r_0} e_0 + \frac{1}{2} /m_r - m_b/ \right] \sinh nt \right\} /2.13/$$

$$b/t/ = b_0 e^{-nt} \left\{ \cosh nt - \frac{1}{n} \left[\frac{r_0}{b_0} e_r + \frac{1}{2} /m_b - m_r/ \right] \sinh nt \right\} /2.14/,$$

gdzie:

$$m = \frac{1}{2} /m_b + m_r/ ; \quad n = \left[e_b e_r + \frac{1}{4} /m_b - m_r/ ^2 \right] ^{\frac{1}{2}} \dots /2.15/.$$

Dyskusja tych rozwiązań wskazuje ogólnie, że jedno z nich pozostaje dodatnie dla wszystkich $t > 0$, podczas gdy drugie przy pewnym określonym t przecina osie współrzędnych.

Punkt przecięcia osi współrzędnych reprezentuje koniec walki, natomiast ujemne wartości nie przedstawiają żadnego praktycznego znaczenia. Warunkiem wygrania strony czerwonych jest istnienie rozwiązania $b/t/ = 0$, tj. współczynnik $\sinh nt$ w /2.14/ musi być większy od jedności.

Warunek ten daje się zredukować do nierówności

$$\frac{r_o^2}{b_o^2} \cdot \frac{e_r}{e_b} > 1 + /m_r - m_b/ \frac{r_o}{b_o} : e_b \dots \dots \dots /2.16/,$$

którą po prostych przekształceniach możemy napisać w postaci

$$\frac{e_r r_o}{b_o} - m_r > \frac{e_b b_o}{r_o} - m_b \dots \dots \dots /2.17/.$$

Czas t_b , przy którym rozwiązanie $b/t_b = 0$, można wyznaczyć z równania /2.14/, które jest równoważne z /2.18/

$$t_b = \frac{1}{n} \operatorname{tgh}^{-1} \cdot \frac{n}{\frac{e_r r_o}{b_o} + \frac{1}{2} /m_b - m_r/} \dots \dots \dots /2.18/.$$

Gdy $t_b < \infty$, strona czerwonych wygrywa. Dla znikomych strat operacyjnych, tj. gdy można przyjąć, że

$$m_b = m_r = 0 \dots \dots \dots /2.19/$$

nierówność /2.16/ redukuje się do prawa zależności kwadratowej Lanchester'a, czyli

$$\frac{r_o^2}{b_o^2} > \frac{e_b}{e_r} \dots \dots \dots /2.20/.$$

Warunek ten utrzymywany jest w mocy, przy podstawowych stratach operacyjnych tak długo, jak długo zachodzi równość

$$m_b = m_r \dots \dots \dots /2.21/.$$

W rzeczywistości straty te nie pozostają niezmiennie, lecz ulegają wzrostowi, na co wskazują czynniki w /2.13/ i /2.14/.

W szczególnym przypadku, gdy w /2.17/ zachodzi równość, tj.

$$\frac{e_r r_o}{b_o} - m_r = \frac{e_b b_o}{r_o} - m_b \dots \dots \dots /2.22/$$

zarówno r jak i b zbliżają się asymptotycznie do zera i wówczas przypuszczalnie walka będzie trwała nadal.

Krzywe te — $\frac{b/t}{b_o}$ i $\frac{r/t}{r_o}$ dla specjalnych warunków pokazane są na rys. 3.

Dla sporządzenia tego wykresu przyjęto następujące wartości:

$$e_0 = 8, \quad m_0 = 3,$$

$$e_r = 1, \quad m_r = 1, \dots \dots \dots /2.23/.$$

$$\frac{r_0}{b_0} = 3.$$

Podstawiając te wartości do równań /2.13/ i /2.14/ otrzymamy

$$\frac{r/t}{r_0} = / \cosh 3t - 0,555 \sinh 3t / \exp /-2t/ \dots \quad /2.24/.$$

$$\frac{b/t}{b_0} = / \cosh 3t - 1,333 \sinh 3t / \exp /-2t/ \dots \quad /2.25/.$$

Czas zakończenia walki obliczamy z /2.18/ i wynosi on

$$t_b = 0,325 \dots \dots \dots /2.26/.$$

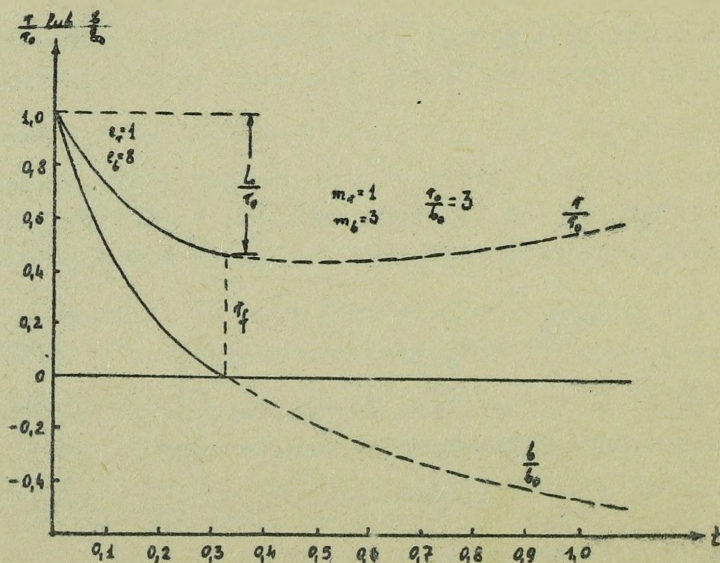
Znormalizowany, względem stanu początkowego, końcowy stan jednostek strony czerwonych r_f równa się

$$\frac{r_f}{r_0} = 0,4608 \dots \dots \dots /2.27/.$$

a ogólne znormalizowane straty wynoszą

$$\frac{L_r}{r_0} = 1 - \frac{r_f}{r_0} = 0,5392 \dots \dots \dots /2.28/.$$

gdzie $L_r = r_0 - r_f$.



Rys. 3. Ogólna część pozostałych sił $\frac{r/t}{r_0}$ lub $\frac{b/t}{b_0}$ / w czasie t w dowolnych jednostkach.

Zastanówmy się obecnie nad stratami zwycięzcy. Ogólnie strona zwycięska angażuje mniej sił niż posiada i w czasie ograniczonym ma możliwość wygrania walki. W tym przypadku wyłania się problem czy zwycięzca może minimizować straty do odpowiednio dobranej liczby. W dyskusji poniżej będziemy rozważać, że strona niebieskich użyła b_0 jednostek i nie jest w stanie je uzupełniać, oraz znana jest efektywność e_r e_b , a siły czerwonych są dostatecznie liczne aby osiągnąć zwycięstwo. Walka toczy się tak długo, aż siły niebieskich zostaną całkowicie zniszczone, tj. do momentu gdy $b = 0$. Powstaje wobec tego pytanie, jaki powinien być początkowy stan sił strony czerwonych r_0 , aby straty czerwonych minimizować?

Wykorzystując tożsamość

$$\operatorname{tgh}^{-1} x = \frac{1}{2} \ln \frac{1+x}{1-x} \dots \dots \dots /2.29/$$

wyrażenie /2.18/ możemy przekształcić i napisać w postaci

$$t_b = \frac{1}{2n} \ln \frac{\frac{e_r r_0}{b_0} + \frac{1}{2} /m_b - m_r/ + n}{\frac{e_r r_0}{b_0} + \frac{1}{2} /m_b - m_r/ - n} \dots \dots \dots /2.30/.$$

Wartość końcowa rozmiarów sił czerwonych, gdy zwycięstwo nie jest osiągnięte, może być znaleziona przez podstawienie /2.30/ do /2.13/, otrzymamy wówczas

$$r_f = r_0 \left\{ 1 + \frac{b_0}{r_0 e_r} \left[n + \frac{1}{2} /m_b - m_r/ \right] \right\}^{\frac{1-k}{2}} \cdot \left\{ 1 - \frac{b_0}{r_0 e_r} \left[n - \frac{1}{2} /m_b - m_r/ \right] \right\}^{\frac{1+k}{2}} \dots \dots /2.31/.$$

Zapis tego wyrażenia możemy uprościć przez wprowadzenie dodatkowych oznaczeń, będziemy wtedy mieli

$$r_f = /r_0 + a_1/ \frac{1-k}{2} \cdot /r_0 - a_2/ \frac{1+k}{2} \dots \dots /2.32/,$$

gdzie:

$$a_1 = \frac{b_0}{e_r} \left[n + \frac{1}{2} / m_b - m_r / \right] \dots \dots \dots /2.33/,$$

$$a_2 = \frac{b_0}{e_r} \left[n - \frac{1}{2} / m_b - m_r / \right] \dots \dots \dots /2.33'/,$$

$$k = \frac{m}{n} \dots \dots \dots /2.34/.$$

Aby zbadać straty czerwonych

$$L_r = r_0 - r_f \dots \dots \dots /2.35/$$

w końcu walki, możliwe są do rozważenia trzy przypadki:

$$k = 1, \quad k < 1, \quad k > 1.$$

W przypadku gdy $k = 1$, z /2.32/ i /2.35/ wynika,
że

$$L_r = a_2 = \frac{b_0}{e_r} \left[n - \frac{1}{2} / m_b - m_r / \right] \dots \dots \dots /2.36/,$$

która to wielkość nie jest zależna od r_0 .

Rodzaj krzywych dla pozostałych dwóch przypadków może być określony przy pomocy pochodnej wyrażenia /2.35/. Różniczkując /2.35/ otrzymujemy

$$\frac{d L_r}{d r_0} = 1 = \left[\frac{r_0 - a_2 / \frac{k-1}{2}}{r_0 + a_1 / \frac{k+1}{2}} \right] \left(1 + \frac{m_b b_0}{e_r r_0} \right) r_0 \dots /2.37/.$$

Kiedy a_1 i a_2 są dodatnie zachowanie się krzywej jest następujące:

- gdy $k > 1$ i $r_0 = a_2$, krzywa dąży do jedności;
- gdy $k < 1$ i $r_0 = a_2$, krzywa dąży do nieskończoności poprzez wartości ujemne.

Dla $r_0 > a_2$, straty stają się równe

$$L_r = \frac{b_0 m_r}{e_r} \dots \dots \dots /2.38/.$$

Rozważania te są poczynione dla stosunkowo dużej ilości sił strony czerwonych, straty ogólne czerwonych zależą tylko od liczby jednostek niebieskich oraz skali strat operacyjnych i stałej efektywności czerwonych jednostek.

Poprzednio zakładaliśmy, że $b_0 = \text{const.}$, podczas gdy r_0 było zmienne. Celowym jest więc znormalizować L_r w zależności od b_0 . Będzie wówczas

$$\frac{L_r}{b_0} = \frac{r_0}{b_0} - \left\{ \frac{r_0}{b_0} + \frac{1}{e_r} \left[n + \frac{1}{2} / m_b - m_r \right] \right\}^{\frac{1-k}{2}} \cdot \left\{ \frac{r_0}{b_0} - \frac{1}{e_r} \left[n - \frac{1}{2} / m_b - m_r \right] \right\}^{\frac{1+k}{2}} \dots /2.39/.$$

Uwzględniając to równanie możemy rozważyć trzy przypadki szczególne,

1/ $k = 1$. Gdy $e_b = 8$, $e_r = 1$, $m_b = 3$, $m_r = 1$, $k = \frac{2}{3}$, $n=3$, wówczas /2.39/ redukuje się do

$$\frac{L_r}{b_0} = \frac{r_0}{b_0} - \left/ \frac{r_0}{b_0} + 4 \right/^{1/6} \left/ \frac{r_0}{b_0} - 2 \right/^{5/6} \dots /2.40/.$$

Dla $\frac{r_0}{b_0} \rightarrow \infty$

$$\frac{L_r}{b_0} \rightarrow 1 \dots /2.41/.$$

2/ $k = 1$. Gdy $e_b = 8$, $e_r = 1$, $m_b = 4$, $m_r = 2$, $n = 3$, wtedy

$$\frac{L_r}{b_0} = 2 \dots /2.42/$$

dla każdej wartości $\frac{r_0}{b_0} > 2$.

3/ $k > 1$. Gdy $e_b = 8$, $e_r = 1$, $m_b = 5$, $m_r = 3$, $k = \frac{4}{3}$, $n=3$, wtedy

$$\frac{L_r}{b_0} = \frac{r_0}{b_0} - \left/ \frac{r_0}{b_0} + 4 \right/^{-1/6} \left/ \frac{r_0}{b_0} - 2 \right/^{7/6} \dots /2.43/.$$

Dla $\frac{r_0}{b_0} \rightarrow \infty$,

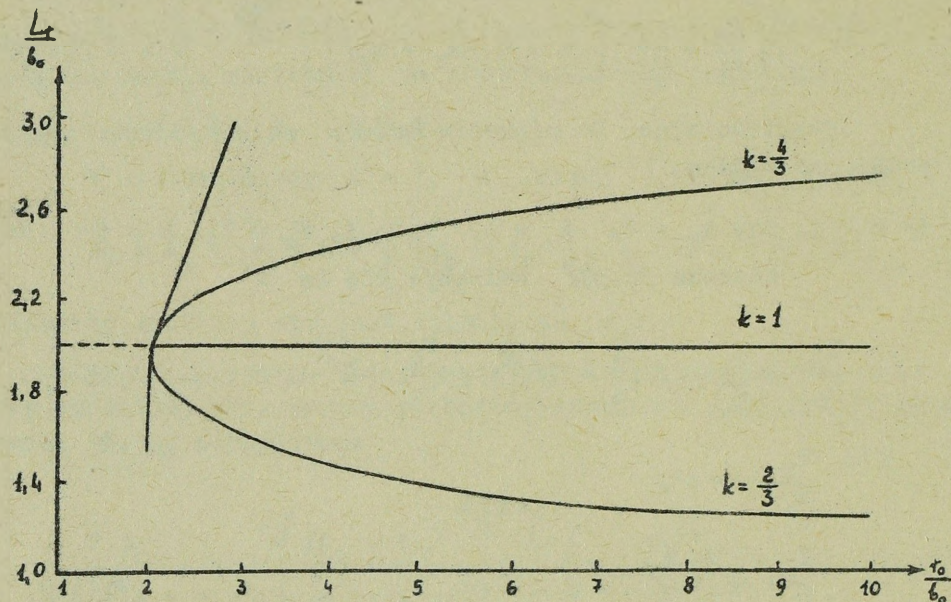
$$\frac{L_r}{b_0} \rightarrow 3 \dots /2.44/.$$

Ogólnie dla każdej wartości k ,

$$\frac{L_r}{b_0} \rightarrow \frac{m_r}{e_r}, \text{ przy } \frac{r_0}{b_0} \rightarrow \infty \dots \dots \dots /2.45/,$$

co zostało już wykonane przez /2.38/.

Na rys. 4 są pokazane znormalizowane straty zwycięzcy w trzech przypadkach omówionych wyżej.



Rys. 4. Znormalizowane straty zwycięzcy $\frac{L_r}{b_0}$ i znormalizowane początkowe siły zwycięzcy $\frac{r_0}{b_0}$ dla $k = \frac{2}{3}$, $k = 1$ i $k = \frac{4}{3}$.

Z powyższego wykresu można zauważyć kilka ciekawych własności. Widzimy, że aby zapewnić zwycięstwo, początkowy stosunek sił $\frac{r_0}{b_0}$ musi być większy od dwóch.

/ $\frac{r_0}{b_0} > 2$ /. Ogólnie stosunek ten powinien wynosić minimum

$$\frac{a_2}{b_0}.$$

Przy użyciu większej ilości jednostek straty ulegają zmniejszeniu - gdy $k < 1$ i ogólne straty powiększają się - gdy $k > 1$. Dla $k = 1$ ogólne straty pozostają bez zmian dla

każdej wartości $\frac{r_0}{b_0}$ powyżej niezbędnego minimum.

Reasumując widzimy, że strona będąca w stanie osiągnąć zniszczenie przeciwnika może zredukować własne straty przez wydzielenie dodatkowych sił powyżej żądanego minimum, zachowując przy tym odpowiednie zależności istniejące między stratami operacyjnymi i efektywnością $/k < 1/$. Ta redukcja strat jest stosunkowo szybka przy niewielkim zwiększaniu sił ponad niezbędne minimum, po czym różnica ta staje się nieznaczna i straty stają się proporcjonalne do efektywności zwycięskiej strony.

Z drugiej strony, jeśli $k > 1$, użycie większej liczby jednostek, niż wymagane minimum dla osiągnięcia zwycięstwa, powoduje zwiększanie się strat.

Poprzednio pokazaliśmy, że można ustalić która strona wygra, gdy stałe charakteryzujące walkę są znane /równania /2.16/ i /2.17/ /. Powstaje przy tym ciekawe pytanie, czy wówczas, gdy dokładnie znamy wartości końcowe niektórych constants możemy je zastąpić w określonym czasie przez inne, które łatwiej można uzyskać.

Alternatywnie biorąc, te ostatnie mogą być użyte dla zweryfikowania wniosków opartych na równaniach /2.16/ i /2.17/.

Pokażemy niżej, że nie jest konieczne użycie wartości e_b , e_r , m_b i m_r , jeżeli istnieje możliwość przyjęcia odpowiednich b/t i r/t przy czasie $t = 0$.

W celu wykazania tej tezy, przekształćmy nierówność /2.17/ do postaci

$$r_0/r_0 e_r + b_0 m_b / > b_0/b_0 e_b + r_0 m_r / \dots \dots \dots /2.46/.$$

Wykorzystując równania /2.11/ i /2.12/ powyższą nierówność możemy napisać jako

$$r_0 \left[-\frac{db}{dt} \right]_{t=0} > b_0 \left[-\frac{dr}{dt} \right]_{t=0} \dots \dots \dots /2.47/,$$

$$= \left[\frac{1}{b} \frac{db}{dt} \right]_{t=0} > - \left[\frac{1}{r} \frac{dr}{dt} \right]_{t=0} \dots \dots \dots /2.48/,$$

lub

$$- \left[\frac{d/\ln b/}{dt} \right]_{t=0} > - \left[\frac{d/\ln r/}{dt} \right]_{t=0} \dots \dots \dots /2.49/.$$

Oznacza to, iż strona posiadająca większy ujemny stosunek zmiany logarytmu liczby jednostek, przy $t = 0$, przegra walkę. Ponadto procent zmiany liczby jednostek /2.48/ lub stosunek zmian logarytmu liczby jednostek /2.49/ dla obu stron jest znany, przy $t = 0$, znajomość wartości e_b , e_r , m_b i m_r nie jest niezbędna.

W oparciu o początkowe rozważania, ostateczny wynik można określić, rozpatrując niektóre niekorzystne alternatywy, które mogą wchodzić w rachubę jako możliwe.

Równania /2.11/ i /2.12/ można przekształcić do następującej formy

$$\frac{1}{e_b} \frac{dr}{dt} + \frac{m_r}{e_b} r = -b \dots \dots \dots /2.50/,$$

$$\frac{1}{e_r} \frac{db}{dt} + \frac{m_b}{e_r} b = -r \dots \dots \dots /2.51/.$$

Jeśli ponadto oznaczmy

$$L = \frac{1}{e_b}, \quad R = \frac{m_r}{e_b}, \quad C = \frac{1}{e_r}, \quad G = \frac{m_b}{e_r}$$

wówczas równania /2.50/ i /2.51/ przyjmą postać

$$L \frac{dr}{dt} + Rr = -b \dots \dots \dots /2.52/,$$

$$C \frac{db}{dt} + Gb = -r \dots \dots \dots /2.53/.$$

W powyższych rozważaniach modelu walki Lanchester'a o zależności kwadratowej uwzględniano tylko parametry zdeterminowane. Jednakże w realnych sytuacjach informacje o poszczególnych parametrach będą miały najczęściej charakter probabilistyczny i stochastyczny. Ujęcie modelu z uwzględnieniem tych właściwości wymaga stosowania rachunku prawdopodobieństwa tak w zakresie budowy, jak też rozwiązania i weryfikacji modelu.

Rachunek prawdopodobieństwa do analizy modelu walki Lanchester'a wprowadzili Ph. M. Morse i G.E. Kimball [1] .

Przedstawienie modelu walki Lanchester'a o zależności kwadratowej w ujęciu probabilistycznym /przy wykorzystaniu parametrów jako zmiennych losowych o znanym rozkładzie/ można sprowadzić do następującego rozważania.

Uwzględniając model o zależności kwadratowej w ujęciu deterministycznym można przyjąć, że jedna jednostka bojowa strony czerwonych może zniszczyć przeciętnie $\frac{\tau\sqrt{E}}{b}$ jednostek niebieskich, natomiast jedna jednostka bojowa strony niebieskich może zniszczyć przeciętnie $\frac{\tau}{r\sqrt{E}}$ jednostek strony czerwonych, przy czym τ oznacza czas trwania walki i wynosi:

$$\tau = \frac{\sqrt{E}}{1+E} \int G /t/dt$$

gdzie: G/t - intensywność walki.

Interesują nas te jednostki każdej z walczących stron, które nie zostaną porażone w toku walki i po jej zakończeniu będą zdolne do działań. Prawdopodobieństwa, że nie zostanie zniszczona jedna jednostka bojowa strony czerwonych, względnie jedna jednostka strony niebieskich wynoszą odpowiednio:

$$P_r = 1 - \frac{\tau}{r\sqrt{E}} / b, \quad P_b = 1 - \frac{\tau\sqrt{E}}{b} / r.$$

Stosując rozkład wielomianowy znajdujemy prawdopodobieństwo zniszczenia w czasie walki α jednostek strony czerwonych i β jednostek strony niebieskich. Odpowiednie prawdopodobieństwa wynoszą:

$$P/\alpha/ = \frac{r!}{\alpha! / r - \alpha!} 1 - g / b / r = \alpha / \left[1 - 1 - g / b \right]^\alpha,$$

$$P/\beta/ = \frac{b!}{\beta! / b - \beta!} 1 - g / r / b = \beta / \left[1 - 1 - g / r \right]^\beta, \quad \dots /2.54/,$$

$$\text{gdzie: } g = \frac{\tau}{r\sqrt{E}}, \quad c = \frac{\tau\sqrt{E}}{b}.$$

Ze wzorów tych można znaleźć przeciętną ilość jednostek każdej ze stron, zniszczonych podczas walki po pewnym czasie jej trwania, a mianowicie:

$$\alpha = r [1 - 1 - g/b] , \quad \dots \dots \dots /2.55/.$$

$$\beta = b [1 - 1 - c/r]$$

W przypadku gdy τ przyjmuje małe wartości, a ilość jednostek biorących udział w walce z jednej i drugiej strony jest duża, wówczas powyższe równania dają się przedstawić w prostszych postaciach:

$$\alpha = r [1 - \exp /- bg/] , \quad \dots \dots \dots /2.56.$$

$$\beta = b [1 - \exp /- rc/]$$

W odniesieniu do równości /2.54/ zastosujemy rachunek różniczkowy dla określenia prawdopodobieństw interesujących nas zdarzeń. Jeżeli określimy wielkości $P/r, b, t/$ jako prawdopodobieństwo, że w momencie t , po stronie czerwonych będzie się jeszcze znajdować r jednostek, a po stronie niebieskich - b jednostek, wówczas dokonując analizy walki elementarnej trwającej odcinek czasu dt , funkcje prawdopodobieństwa czynią zadość następującym zależnościom:

$$\frac{d}{dt} P /r, b, t/ = r \sqrt{E} [P/r, b + 1, t/ - P /r, b, t/] + \\ + \frac{b}{\sqrt{E}} [P/r + 1, b, t/ - P/r, b, t/]$$

$$\frac{d}{dt} P/r, 0, t/ = r \sqrt{E} P/r, 1, t/ , \quad \dots \dots \dots /2.57/.$$

$$\frac{d}{dt} P/0, b, t/ = -\frac{b}{\sqrt{E}} P/1, b, t/$$

Dokładna analiza równań /2.57/ wskazuje, że przeciętne wartości r i b traktowane jako funkcje czasu, dość dobrze odpowiadają wartościom obliczonym na podstawie ujęcia deterministycznego dla początkowych okresów walki. Natomiast w późniejszych etapach pojawiają się pewne odchylenia.

Określmy przykładowo funkcje prawdopodobieństwa dla wartości początkowych $r_0 = 5$, $b_0 = 3$, $E = 1$.

Wartości tych prawdopodobieństw $P /r, b, t/$, za wyjątkiem przypadków $r = 0$, $b = 0$, podane są w tabeli 3.

TABELA 3

Ilość pozostałych jednostek strony czerwonych - r	Ilość pozostałych jednostek strony niebieskich - b		
	3	2	1
5	$\exp /-8t/$	$5 \exp /-7t/ [1 - \exp /-t/]$	$\frac{25}{2} \exp /-6t/ [1 - \exp /-t/]^2$
4	$3 \exp /-7t/ [1 - \exp /-t/]$	$11 \exp /-6t/ [1 - \exp /-t/]^2$	$\frac{113}{6} \exp /-5t/ [1 - \exp /-t/]^3$
3	$\frac{9}{2} \exp /-6t/ [1 - \exp /-t/]^2$	$\frac{71}{6} \exp /-5t/ [1 - \exp /-t/]^3$	$\frac{163}{12} \exp /-4t/ [1 - \exp /-t/]^4$
2	$\frac{9}{2} \exp /-5t/ [1 - \exp /-t/]^3$	$\frac{49}{6} \exp /-4t/ [1 - \exp /-t/]^4$	$\frac{359}{60} \exp /-3t/ [1 - \exp /-t/]^5$
1	$\frac{27}{8} \exp /-4t/ [1 - \exp /-t/]^4$	$\frac{473}{120} \exp /-3t/ [1 - \exp /-t/]^5$	$\frac{1191}{720} \exp /-2t/ [1 - \exp /-t/]^6$

Do każdego wyrażenia w tablicy wchodzi parametr charakteryzujący czas, a suma wszystkich P, w każdym okresie czasu, równa się jedności. Końcowy stan sił otrzymuje się przy t dążącym do nieskończoności. Wartości prawdopodobieństw dla $r = 0$ lub $b = 0$ będą różne od zera, co wskazuje na istnienie pewnej ilości jednostek jednej lub drugiej strony po zakończeniu walki. Wartości prawdopodobieństw końcowych wyników starcia /dla przyjętych wyżej warunków początkowych/ są następujące.

a/ Strona czerwonych:

$$P/5,0, \infty = 0,3721; \quad P/2,0, \infty = 0,0712;$$

$$P/4,0, \infty = 0,269; \quad P/1,0, \infty = 0,295.$$

$$P/3,0, \infty = 0,1456;$$

Prawdopodobieństwo odniesienia zwycięstwa wynosi 0,8874. Natomiast spodziewana ilość pozostałych jednostek wyniesie 3,994, jeśli strona czerwonych wygra walkę.

b/ Strona niebieskich:

$$P/0,3, \infty = 0,0362;$$

$$P/0,2, \infty = 0,0469;$$

$$P/0,1, \infty = 0,0295.$$

Prawdopodobieństwo odniesienia zwycięstwa wynosi 0,1126. Natomiast ilość pozostałych jednostek wyniesie 2,059, jeśli strona niebieskich wygra walkę.

A więc szanse odniesienia zwycięstwa przez stronę czerwonych i niebieskich są w stosunku około 9 : 1.

Porównując wyniki otrzymane według modelu o zależności liniowej i o zależności kwadratowej widzimy, że szansa zwycięstwa niebieskich zmalała z 1 : 4 do 1 : 9. Świadczy to o wzroście znaczenia przewagi sił w tym modelu. Za wnioskiem tym przemawia również spodziewana ilość pozostałych jednostek w końcowym momencie walki. Stąd dysponując nieśszą efektywnością można ją rekompensować w pewnych granicach, ilością użytych jednostek bojowych. Jeśli nie jest to możliwe do uzyskania w drodze przydziału, wtedy można przez wykonanie manewru skupić na żądanym odcinku odpowiednią prze wagę sił.

Reasumując rozważania dotyczące modelu walki Lanchester'a o zależności kwadratowej możemy wyciągnąć następujące wnioski.

- a/ Oryginalne prawo Lanchester'a o zależności kwadratowej, wyrażające ogólną zależność efektywności między dwiema walczącymi stronami, może w bardziej uogólnionej wersji zawierać straty operacyjne oraz uwzględniać szybkość uzupełniania strat, a także może być przedstawiane w ujęciu probabilistycznym.
- b/ Jeżeli straty operacyjne obu stron są równe, model znacznie się upraszcza, lecz wyrażenie ogólnych strat zwycięzcy nie jest oczywiste.
- c/ Jeśli straty operacyjne są wysokie, lub bardziej dokładnie, jeśli $k > 1$, wówczas przy zwiększaniu sił przez stronę zwycięską, zwiększają się jej straty. Wzrost strat jest monotoniczny, przy czym jest on znacznie większy przy początkowym zwiększaniu sił.
- d/ Jeśli $k < 1$, straty zwycięzcy mają tendencję spadkową, szczególnie przy użyciu dodatkowych sił ponad niezbędne minimum.
- e/ Jeśli $k = 1$, użycie dodatkowych sił przez zwycięzcę nie powoduje zmiany ogólnych jego strat.
- f/ Jeśli w początkowej fazie walki zachodzi relacja

$$\frac{e_r r_o}{b_o} - m_r > \frac{e_b b_o}{r_o} - m_b$$

zwycięską jest strona czerwonych, a w przypadku relacji

$$\frac{e_r r_o}{b_o} - m_r < \frac{e_b b_o}{r_o} - m_b$$

zwycięstwo odnosi strona niebieskich. Jeżeli w relacji tej zachodzi równość - walka jest nierozstrzygnięta.

- g/ Przy braku dokładnych danych szacunkowych o wielkościach e_b , e_r , m_b , m_r , walka może stać się podstawą do określenia początkowego procentowego stosunku strat. Może to być szczególnie pożyteczne w rzeczywistej walce, kiedy na podstawie początkowych wyników pragnie się przewidzieć jej końcowy rezultat.
- h/ Model o zależności kwadratowej posiada pewne przesłanki względnie adekwatnie odzwierciedlające podstawowe zależności występujące w procesie współczesnej walki ogólnowojskowej.

3. Zastosowanie modelu Lanchester'a w walce partyzanckiej.

Model Lanchester'a może być zastosowany do badania stosunku sił niezbędnego dla odniesienia zwycięstwa w walce z oddziałami partyzanckimi. Zostało dowiedzione, że oddziały partyzanckie wykonujące atak mogą, przez zastosowanie odpowiedniej taktyki która kompensuje ich słabość, pokonać opór sił regularnych, które posiadają zdecydowaną przewagę ilościową i jakościową. Wojska regularne mogą jednak odnosić zwycięstwa przez odpowiedni podział środków, sposób działania i podział sił na grupy stosownie do przewidywanych potyczek. Przy tym oddziały partyzanckie będą stały przed niezmiernie trudnym zadaniem, zmniejszenia wysokich stosunków liczbowych, jakie mogą współcześnie uzyskiwać wojska regularne.

Od czasu ukazania się równań Lanchester'a, ukształtowało wiele odmian tego modelu, stosowanych do analizy pewnych rodzajów walk. Jednakże próby weryfikacji siłą rzeczy musiały polegać na danych historycznych, specyficznych tylko dla danej sytuacji. Jednakże i w tych przypadkach, chociaż realność modelu sprawdzano a posteriori, robiono to bez uogólnień.

Mimo istniejących ograniczeń, równania Lanchester'a w swej pierwotnej formie przedstawiają wspaniały aparat do analizy pewnych typów ~~wieloletnich~~ militarnych starć. Mając to na uwadze, odmiana równań Lanchester'a była stosowana do badania pewnych parametrów walk z partyzantami w krajach kolonialnych /po drugiej wojnie światowej/. Najbardziej interesującym parametrem walki tego typu, jest stosunek sił oddziałów partyzanckich i wojsk regularnych.

Rozpatrzmy walkę między małymi grupami.

Przyjmijmy, że siły dwóch stron - partyzantów i wojsk regularnych są rozdzielane na małe grupy takie, że grupy po jednej stronie są równe co do wielkości, a grupy po przeciwnej stronie wchodzi do walki kolejno jedna po drugiej. Warunek równości walczących sił jest^{1/}

1/ Analiza ta pomija wiele istotnych czynników występujących w walkach partyzanckich, szczególnie postawę miejscowej ludności, którą obie strony muszą zwalczać lub popierać zarówno środkami politycznymi, ekonomicznymi, psychologicznymi i militarnymi. Z drugiej strony czynniki te można uważać za odzwierciedlone w parametrach analizy /np. efektywność stron lub wielkość grupy/. Czynniki te mogłyby być wyrażone przy użyciu rachunku prawdopodobieństwa, w naszym przypadku nie jest to uczynione.

$$bx_{10}^{m_1} = ax_{20}^{m_2} \dots \dots \dots /3.1/$$

oparty na następujących równaniach

$$\frac{dx_1}{dt} = - \frac{ax_1x_2}{m_1},$$

$$\frac{dx_2}{dt} = - \frac{bx_1x_2}{m_2}, \dots \dots \dots /3.2/$$

gdzie: x_1 - ilość sił oddziałów partyzanckich w pewnym momencie czasu;

x_2 - ilość sił wojsk regularnych w pewnym momencie czasu;

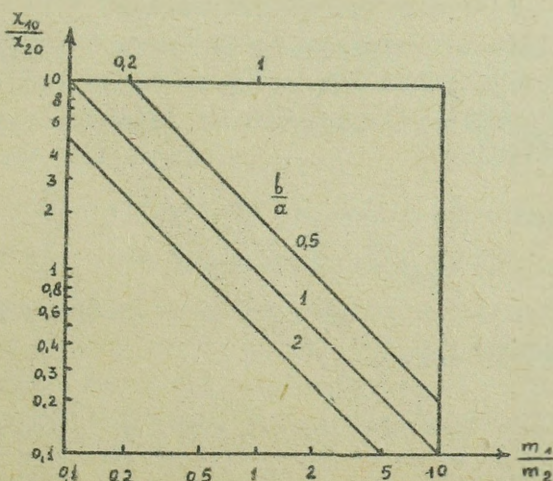
x_{10}, x_{20} - początkowy stan sił odpowiednio partyzantów i wojsk regularnych;

a - efektywność wojsk regularnych;

b - efektywność oddziałów partyzanckich;

m_1, m_2 - wielkości grup odpowiednio partyzantów i wojsk regularnych.

Na wykresie /rys. 5/ pokazano, dla kilku wartości stosunku $\frac{b}{a}$, że stosunek sił jest funkcją względnej wielkości grupy. Ponadto z wykresu można odczytać, że strona posiadająca zdecydowaną przewagę liczebną może zwyciężyć, jeżeli we wszystkich pojedynczych starciach grupy jej wystarczająco przewyższają liczebnie grupy drugiej strony, albo gdy zmiana stosunku sił jest wystarczająca na jej korzyść.



Rys. 5.

Charakter walki partyzanckiej polega na tym, że siły regularne muszą być dzielone na części aby broni wiele punktów, które mogą być atakowane przez partyzantów, a ta że by tropić rozproszone grupy partyzanckie. Skutkiem tego słabsi liczebnie partyzancki mogą odnosić sukcesy, jeśli potrafią utrzymać lokalną przewagę liczebną w starciach z wojskami regularnymi.

Najnowsza historia daje liczne przykłady, kiedy wojska regularne musiały używać ponad dziesięciokrotnie większej przewagi sił, aby pomyślnie rozegrać walkę z partyzantami. Zwykle można by się spodziewać, że jeżeli partyzanci posiadają mało doskonałą broń albo ograniczoną ilość broni zdobytej na przeciwniku, podczas gdy wojska regularne dysponują pełnym zestawem doskonałej broni, zmiana stosunku sił będzie na korzyść tych drugich, czyniąc lokalny stosunek sił nadmiernie wysoki. Powstaje wobec tego pytanie, czy partyzancki mogą zastosować taką taktykę, która wywrze wpływ na lokalny stosunek sił w odwrotnym kierunku tak, żeby mogli zwyciężać mniejszymi lub równymi ilościami w oddzielnych starciach.

Założmy, że wojska regularne poszukują w terenie partyzantów lub zamierzają zaatakować ich bazę. Partyzanci przeciwstawiają się wojskom regularnym poprzez przygotowanie zasadzki. Po rozpoczęciu walki partyzancki ostrzeliwują wojska regularne obserwując je dokładnie. Przeto straty wojsk regularnych są proporcjonalne do ilości strzelających partyzantów. Partyzanci są ukryci, a zatem siły regularne kierują ogień na ślepo, ostrzeliwując obszar zajmowany przez partyzantów. Stąd straty odpowiednich grup będą proporcjonalne do ilości strzelających żołnierzy wojsk regularnych i ilości partyzantów zajmujących obszar ostrzeliwany przez siły regularne. Równania opisujące tę sytuację są następujące:

$$\frac{dx_1}{dt} = -ax_1x_2,$$

$$\frac{dx_2}{dt} = -bx_1 \dots \dots \dots /3.3/,$$

a warunek dla równości jest

$$x_{10} = \frac{4x_2^2}{2b} \dots \dots \dots /3.4/.$$

Należy zauważyć, że przypadek symetrycznego ostrzeliwania powierzchni prowadzi do modelu o zależności kwadratowej lub liniowej, w przeciwnym razie stałe odpowiedniki różnią się rzędami wielkości. Użyty we wzorze /3.3/ symbol A oznacza prawdopodobieństwo zniszczenia jednej jednostki sił partyzantów i wynosi

$$A = \frac{r_2 A_2}{A_1},$$

gdzie: r_2 - jest szybkostrzelnością jednostki uzbrojenia wojsk regularnych;

A_2 - jednostka obszaru skuteczności broni partyzantów /pojęcie to należy rozumieć, że wszyscy żołnierze po jednej stronie mają te same typy broni, np. same karabiny, same karabiny maszynowe itp./.

A_1 - obszar ostrzeliwany przez wojska regularne.

Symbol $b = r_1 p_{12}$, użyty we wzorze /3.3/, oznacza prawdopodobieństwo zniszczenia jednej jednostki wojsk regularnych, gdzie:

- r_1 - szybkostrzelność jednostki uzbrojenia partyzantów;
- p_{12} - prawdopodobieństwo zniszczenia przy pojedynczym wystrzale z broni partyzantów w ogniu bezpośrednim.

W ten sposób

$$\frac{A}{2b} = \frac{r_2 A_2}{A_1 r_1 p_{12}} \dots \dots \dots /3.5/$$

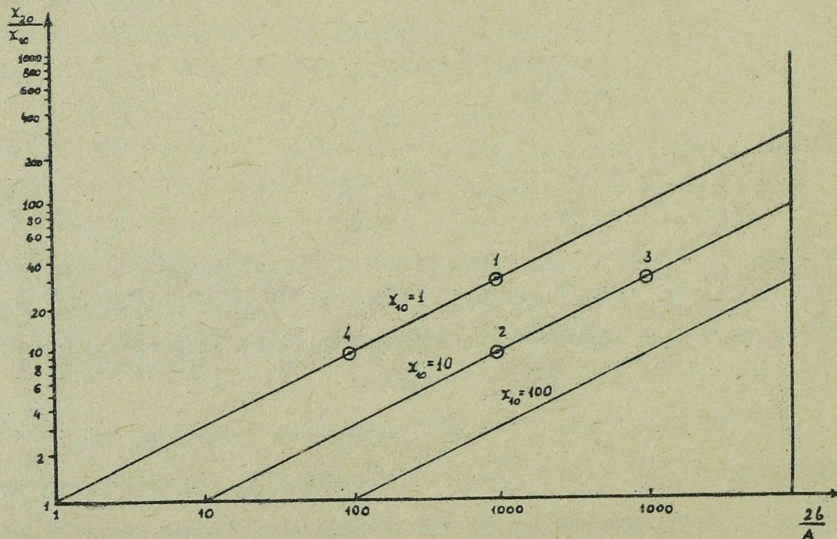
i jeżeli szybkostrzelność broni po obu stronach jest równa, wówczas $\frac{A}{2b}$ może być rzędu 0,001 lub mniejszego. /Na przykład, A_2 dla pocisku karabinowego może wynosić od 0,1 do 0,4 m² p_{12} może być rzędu 0,1/.

Na wykresie /rys. 6/ pokazano stosunek sił $\frac{x_2}{x_1}$ jako funkcję od $\frac{A}{2b}$ dla kilku wartości x_{10} . Alternatywę działania dla obu stron można określić z wykresu i równania /3.4/. Wojska regularne mogą powiększyć liczbę sił wysyłanych na patrol, w przewidywaniu zasadzki, albo mogą powiększyć obszar skuteczności swej broni. Z kolei partyzanci mogą powiększyć ilość sił w zasadzce, lub rozprzestrzenić na większym obszarze /zakłada się, że nie będą ani mieli możliwości zwiększenia skuteczności broni, z uwagi na słabsze wyszkolenie/.

Rozpatrzmy przykładowo siły dwóch stron z jednakowym uzbrojeniem i niech $\frac{2b}{A} = 1000$, $x_{10} = 1$. Sytuację tę określa punkt /1/ na wykresie - wojska regularne muszą mieć siły równe 32 /tyle krotną przewagę/, aby mieć pewność pokonania oporu partyzantów.

Gdy partyzanci powiększą swoje początkowe siły dziesięciokrotnie, wówczas daną sytuację odzwierciedla punkt /2/ na wykresie /rys. 6/ i wtedy stosunek sił poprawia się na korzyść wojsk regularnych, ponieważ partyzanci powiększyli gęstość sił na zajmowanym obszarze, powiększając tym samym prawdopodobieństwo trafienia swoich ludzi. Niemniej jednak, wojska regularne, z uwagi na powiększenie sił partyzantów, potrzebują ogólnie większej ilości sił dla zapewnienia sukcesu w walce z partyzantami.

Natomiast jeśli partyzanci powiększają swoje siły dziesięć razy przy zachowaniu poprzedniej gęstości, wtedy sytuację ilustruje punkt /3/ na wykresie /rys. 6/. Wówczas wojskom regularnym niezbędny jest analogiczny stosunek sił jak w punkcie /1/. Mogą to one uzyskać jedynie drogą powiększenia swoich sił tyle razy, ile razy powiększyli swoje siły partyzanci.



Rys. 6. Wykres stosunku sił w zasadzce.

Walka taka teoretycznie może trwać nieograniczenie bez rozstrzygnięcia, jeżeli każda strona doskonale panuje nad własnymi środkami i posiada pełne informacje o stronie przeciwej. Jednakże istnieją praktyczne możliwości środków bojowych

np. kiedy strzelający partyzanci znajdujący się głębiej nie widzą swoich celów, lub gdy prowadzą ogień na zbyt dużych odległościach, lub gdy teren nie pozwala na rozszerzenie obszaru zasadzki. Z tego względu, jeżeli wojska regularne będą posiadały dostatecznie duże siły, biorąc pod uwagę ilość możliwych starć z zasadzką mogą stworzyć dogodną sytuację dla odniesienia zwycięstwa, albo zmuszać partyzantów do uchylenia się od walki. Może to jednak wymagać więcej oddziałów niż wojska regularne mają do dyspozycji w lokalnym obszarze.

W przypadku powiększenia przez wojska regularne obszaru skuteczności swego uzbrojenia /na przykład przez użycie moździerzy lub dział zamiast karabinów/, mogą one powiększyć A_2 o jeden lub dwa rzędy wielkości. Dokonując tej zmiany, będą one prawdopodobnie zmuszone, z uwagi na właściwości broni do obniżenia szybkości ognia, tak że rzeczywisty efekt będzie mniejszy, niż to sugeruje zmiana powierzchni skuteczności. Jeżeli efektywność ognia i powierzchnię jego skuteczności wojska regularne powiększą dziesięć razy, wtedy sytuację tę przedstawia punkt /4/ na rys. 6. W tym przypadku wyraźnie zmniejsza się ilość sił wojsk regularnych, konieczna do wygrania walki. Jeżeli partyzanci nie mają żadnych wiarygodnych informacji o tym, że wojska regularne używają broni o większej skuteczności, mogą oni zamierzać powiększyć ilość swoich sił, a potem zmuszeni okolicznościami chwili - rozproszyć je, przywracając tym samym sytuację zaznaczoną na wykresie punktem /1/. W ten sposób pojawia się niekorzystna okoliczność, dla wojsk regularnych, rozproszenia a ognia i w ten sposób prawdopodobnie pośrednio poprawienia szans partyzantów.

W praktyce przebieg walki zależy także od wielu innych czynników, takich jak np. gdzie i w jakim stopniu ukryci są partyzanci, czy żołnierze wojsk regularnych, będąc ostrzeliwani, mogą się ukryć itp. Oprócz tego w rozważaniach pomija się fakt, że partyzanci, znajdujący się w ukryciu, mają przewagę czynnika zaskoczenia, a więc mogą znacznie zmniejszyć siły przeciwnika, zanim odpowie on swoim ogniem. Ta okoliczność działa oczywiście na korzyść partyzantów i poważnie zależy od skuteczności otwieranego ognia. Z drugiej strony, jeśli wojska regularne mogą niezwłocznie się ukryć, wtedy walka sprowadza się do modelu o zależności liniowej, a jeżeli jeszcze po otwarciu

ognia wojska regularne przewyższają liczebnie siły partyzantów, mogą one wygrać walkę, nawet przy stosunku sił nie tak wysokim jak to jest wymagane przez równanie /3.4/.

Jeżeli wojska regularne nie mają możliwości aby się ukryć, ale są w stanie niezwłocznie zbliżyć się do partyzantów, wtedy mogą one przechylić walkę na swoją korzyść dwoma możliwymi sposobami.

Wpływ psychologiczny ataku może wydatnie zmniejszyć skuteczność ognia partyzantów $/p_{12}/$, a to bezpośrednio wpływa na wzrost stosunku sił $\frac{I_2}{I_1}$.

Jeżeli zaś wojska regularne zbliżą się do partyzantów, doprowadzi to do bezpośredniej wzajemnej widzialności i wówczas walka sprowadza się do modelu o zależności kwadratowej, a wobec tego, jeśli wojska regularne chwilowo mają więcej sił, mogą wygrać walkę.

Przy dostatecznie długim czasie trwania walki zbliży się ona do modelu o zależności kwadratowej nawet wtedy, gdy wojska regularne pozostaną poza ukryciem, ponieważ jeśli przetrzymają dość długo, potrafią prawdopodobnie określić, źródła ognia partyzantów. W takim przypadku partyzantom celowym jest zakończyć walkę i wycofać się, jeśli nie zdołali oni w istotny sposób osłabić siły wojsk regularnych, ogniem otwartym z zaskoczeniem.

Wreszcie należy zauważyć, że jeżeli partyzanci posiadają taką samą ilość sił co i przeciwnik, w przybliżeniu to samo uzbrojenie oraz jego skuteczność, a znienacka otwarty ogień osłabi siłę wojsk regularnych, wtenczas z równań wnioskujemy, że partyzanci mogą zwyciężyć. W ten sposób, biorąc pod uwagę równania /3.1/ i /3.2/, strona posiadająca ogólnie mniej sił może wygrać walkę z niedużą tylko lokalną przewagą w pojedynczych starciach, przechylając zmianę stosunku sił na swoją korzyść dzięki wykorzystaniu czynnika zaskoczenia^{1/}.

Interesującym jest przypadek, kiedy wojska regularne atakują partyzantów stosując małe grupy, taktykę walki z zasadzek i lokalną przewagę liczebną. Przy takim działaniu szanse wygrania przez partyzantów stają się bardzo znikome.

^{1/} Analiza jest słuszna dla każdego ataku z zaskoczenia, dla którego sprawdzają się warunki prowadzące do równań /3.3/.

Powodowane to jest głównie posiadaniem uzbrojenia o znacznie mniejszej skuteczności jak też niemożliwością uzyskania niezbędnej przewagi lokalnej, co łatwo mogą osiągnąć wojska regularne. Jednakże przy takim działaniu wojska regularne napotykają duże trudności w zlokalizowaniu i śledzeniu grup partyzanckich, aby wykorzystać czynnik zaskoczenia. Trud ten jest wszakże opłacalny, gdyż znacznie podwyższa szanse odniesienia zwycięstwa przy niezmienionym stanie sił.

Przeanalizujmy jeszcze przebieg walki w oparciu o rozwiązanie równań /3.3/.

Rozwiązanie równań /3.3/, przy różnych stanach sił początkowych, wyraża się w postaci

$$x_1 = C_1 \left[1 + \left(\frac{x_{20} - K_1 \operatorname{tgh} t \alpha_1}{K_1 + x_{20} \operatorname{tgh} t \alpha_1} \right)^2 \right], \quad \dots /3.6/,$$

$$x_2 = K_1 \frac{x_{20} - K_1 \operatorname{tgh} t \alpha_1}{K_1 + x_{20} \operatorname{tgh} t \alpha_1},$$

gdzie: $K_1 = \sqrt{\frac{2bc_1}{A}},$

$$C_1 = x_{10} - \frac{Ax_{20}^2}{2b},$$

$$\alpha_1 = \frac{AK_1}{2},$$

$$t \alpha_1 < \frac{\pi}{2}.$$

W tym przypadku, jeśli zachodzi nierówność

$$x_{10} > \frac{Ax_{20}^2}{2b}$$

walkę wygrywają partyzanci, a stan ich sił po zakończeniu walki wynosi

$$x_{1k} = x_{10} - \frac{Ax_{20}^2}{2b}.$$

Równania /3.6/ można przekształcić do postaci następujących zależności

$$x_1 = c_2 \left[\left(\frac{x_{20} + K_2 \operatorname{tg} \alpha_2}{K_2 + x_{20} \operatorname{tg} \alpha_2} \right)^2 - 1 \right],$$

... /3.7/,

$$x_2 = K_2 \frac{x_{20} + K_2 \operatorname{tg} \alpha_2}{K_2 + x_{20} \operatorname{tg} \alpha_2}$$

gdzie: $K_2 = \sqrt{\frac{2bc_2}{A}}$,

$$c_2 = \frac{Ax_{20}^2}{2b} - x_{10},$$

$$\alpha_2 = \frac{AK_2}{2}.$$

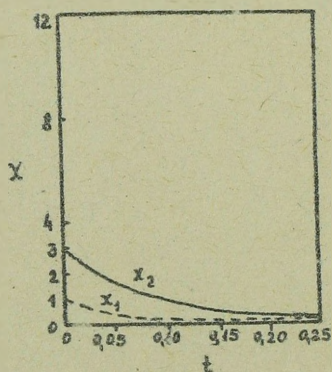
W tym przypadku, jeśli ma miejsce nierówność:

$$x_{10} < \frac{Ax_{20}^2}{2b}$$

walke wygrywają wojska regularne, a stan ich sił po zakończeniu walki wynosi

$$x_{2k} = \frac{Ax_{20}^2}{2b} - x_{10}.$$

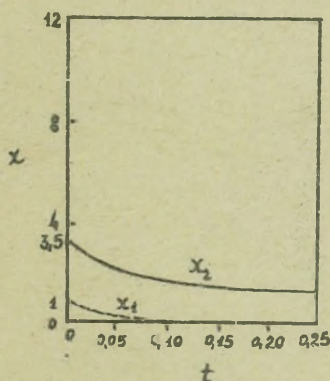
Na wykresach /rys. 7/ przedstawiony jest przebieg walki przy różnych stanach sił początkowych x_{10} i x_{20}



Rys. 7a.

Wykres na rys. 7a jest sporządzony dla: $\frac{A}{2b} = 0,1$, $x_{20} = 3$, $x_{10} = 1$. Z wykresu tego widzimy, że przy początkowym stosunku sił 3 : 1 na korzyść wojsk regularnych, w miarę

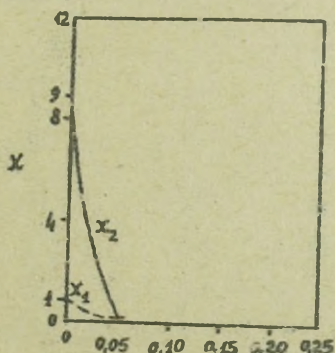
upływu czasu walki siły obu stron maleją, zbliżając się asymptotycznie do zera, a jednocześnie obserwujemy znaczny spadek przewagi liczebnej wojsk regularnych. Oznacza to, że walka może trwać stosunkowo długo, bez wyraźnego jej rozstrzygnięcia na którąkolwiek stronę.



Rys. 7b.

Wykres na rysunku 7b jest sporządzony dla następujących wartości parametrów: $\frac{a}{2b} = 0,1$, $x_{20} = 3,5$, $x_{10} = 1$.

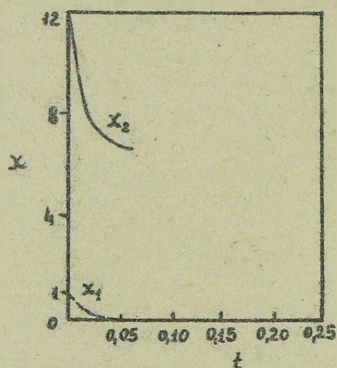
Z wykresu tego bezpośrednio widać wyraźną ciągłą przewagę wojsk regularnych, a ich końcowy stan sił jest większy od zera, podczas gdy już przy $t = 0,12$ siły partyzantów wynoszą zero. W takich warunkach sukces strony liczniejszej jest oczywisty.



Rys. 7c. t

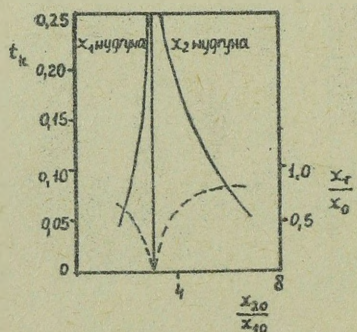
Wykres na rys. 7c opracowano dla: $\frac{a}{2b} = 0,01$, $x_{20} = 9$, $x_{10} = 1$. Interpretacja geometryczna przebiegu walki, przy podanych wyżej wartościach parametrów, posiada niezmiernie

interesującą właściwość. Charakterystyczną cechą jest gwałtowne zmniejszanie się stanu sił wojsk regularnych w początkowym okresie walki. Natomiast zmiana stanu liczebnego partyzantów jest o wiele łagodniejsza. Z wykresu tego trudno jest powiedzieć, która ze stron odnosi sukces.

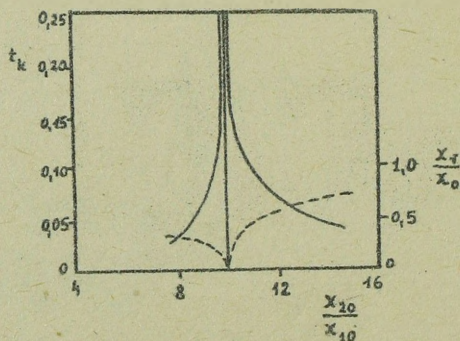


Rys. 7d.

Wykres na rys. 7d sporządzony dla parametrów o następujących wartościach: $\frac{a}{2b} = 0,01$, $x_{20} = 12$, $x_{10} = 1$. Podobnie jak i na poprzednim wykresie, obserwujemy tu również bardzo wyraźną zmianę stanu sił strony liczebniejszej, w początkowej fazie walki, a następnie – zmniejszenie się sił jest nieznaczne. W tym przypadku zwycięstwo wojsk regularnych jest zupełnie oczywiste i starcie będzie trwało stosunkowo krótko, gdyż już przy $t = 0,03$ stan liczebny partyzantów zostaje całkowicie zniszczony, tj. $x_1 = 0$.



Rys. 8a.



Rys. 8b.

Wykresy na rys. 8a i 8b przedstawiają wpływ początkowego stosunku sił na czas trwania walki i końcowy stan sił. Wykres na rys. 8a sporządzony jest dla $\frac{A}{2b} = 0,1$, a wykres na rys. 8b dla $\frac{A}{2b} = 0,01$. Na wykresach tych, t_k - oznacza czas, w ciągu którego strona przegrywająca traci wszystkie swoje siły/lub prawie wszystkie/, zaś $\frac{x_{20}}{x_{10}}$ - część sił pozostałą po zakończeniu walki.

Z wykresów łatwo zauważyć, że czas trwania walki gwałtownie maleje, gdy początkowy stosunek sił nie jest wystarczający aby odnieść zwycięstwo. Również wyraźnie się zmniejsza względna ilość straconych sił przez stronę wygrywającą.

Przedstawiona interpretacja geometryczna wskazuje, że jeśli $\frac{A}{2b} = 0,1$ wówczas: gdy $\frac{x_{20}}{x_{10}} < 3$ - stronę wygrywającą są partyzanci, gdy $\frac{x_{20}}{x_{10}} > 3$ - stronę wygrywającą są wojska regularne, a gdy $\frac{x_{20}}{x_{10}} = 3$ - walka staje się nierozstrzygnięta.

Jeżeli $\frac{A}{2b} = 0,01$, wtedy: gdy $\frac{x_{20}}{x_{10}} < 9$ - stronę wygrywającą są partyzanci, gdy $\frac{x_{20}}{x_{10}} > 9$ - stronę wygrywającą są wojska regularne, a gdy $\frac{x_{20}}{x_{10}} = 9$ - walka staje się nierozstrzygnięta.

Z wykresów wynika jeszcze jedna interesująca właściwość, mianowicie - zwycięstwo wojsk regularnych nad partyzantami staje się oczywiste tylko przy bardzo wyraźnej przewadze liczebnej.

Aczkolwiek zasadnicze założenia leżące u podstaw modelu walki Lanchester'a są poważnym ograniczeniem, okazuje się możliwym wykorzystywanie go do analizy niektórych rzeczywistych sytuacji bojowych. Pewną odmianę tego modelu zastosowaliśmy właśnie do przeanalizowania parametrów wywierających wpływ na stosunek sił w walce z partyzantami. Analiza pokazuje, że partyzanci zdecydowanie słabsi liczebnie mogą zwyciężyć, jeśli obie strony są rozdzielane na małe grupy, a partyzanci zawsze atakują posiadając lokalną przewagę ilościową.

Lokalna przewaga, wymagana po stronie partyzantów, może być poważnie zmniejszona, jeśli partyzanci działają korzystując zaskoczenie /z zasadzki/. W tym przypadku wojska regularne, chcąc odnieść zwycięstwo, muszą posiadać bardzo duży lokalny stosunek sił, lub nadzwyczaj skuteczne uzbrojenie, względnie jedno i drugie równocześnie. Partyzanci mogą zredukować zdecydowaną przewagę strony przeciwnej, poprzez zmniejszenie gęstości swoich sił na zajmowanym obszarze. Jeżeli w lokalnym starciu partyzanci atakują z zasadzki, a siły ich w przybliżeniu są równe wojskom regularnym i obie strony mają jednakowe uzbrojenie, wówczas wojska regularne nie mogą wygrać walki.

Jednakże w rzeczywistych warunkach bojowych możliwości wykonania manewru, rodzaje środków walki i ich ilość są poważnie ograniczone wieloma czynnikami. Jeżeli wojska regularne dysponują większą ilością środków niż partyzanci, zastosowanie przez siły regularne taktyki partyzanckiej, znacznie przyspiesza pokonanie partyzantów. Mimo to, ogólne wysokie stosunki sił na korzyść wojsk regularnych, które historycznie były przyjmowane jako niezbędne aby rozbić partyzantów, są niezmiernie trudne do zredukowania.

L I T E R A T U R A.

1. Ph. M. Morse, G.E. Kimball: Methods of Operations Research. Tłum.: Metody Badania Operacji, ASG, Rembertów 1962r.
2. R.E. Bach, J.L. Dolansky, H.L. Stups: Some Recent Contributions to the Lanchester theory of Combat, "Operations Research", Vol. 10, Num. 3, 1962r.
3. S.J. Deitchman: A Lanchester Model of Guerilla Warfare, "Operations Research", Vol. 10, Num.6, 1962r.
4. J. Skibiński płk dypl. dr: O pewnym modelu walki ogólnowojskowej.

Druk ASG - XV-2589 - 3237
100 egz.

