

DANES-PICTA.COM

A 1 2 3 4 5 6 M 8 9 10 11 12 13 14 15 B 17 18 19

**AKADEMIA SZTABU GENERALNEGO**  
im. gen. broni K. Świerczewskiego

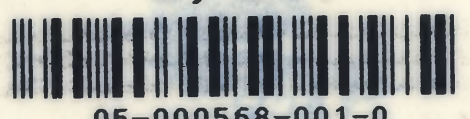
INSTYTUT ORGANIZACJI I TECHNIKI DOWODZENIA  
ZAKŁAD I

Egz. Nr 33

ppłk dr M. CIECHANOWICZ

**NIEKTÓRE MODELE WALKI OGÓLNOWOJSKOWEJ**  
(Skrypt)

Biblioteka Główna  
Akademii Obrony Narodowej  
S/547



05-000568-001-0



12860



AKADEMIA SZTABU GENERALNEGO  
im. gen. broni K. Świerczewskiego

---

INSTYTUT ORGANIZACJI I TECHNIKI DOWODZENIA  
ZAKŁAD I

Egz. Nr 33

ppłk dr M. CIECHANOWICZ

NIEKTÓRE MODELE WALKI OGÓLNOWOJSKOWEJ  
(Skrypt)

Biblioteka Główna  
Akademii Obrony Narodowej

S/547



05-000568-001-0



12860

A K A D E M I A   S Z T A B U   G E N E R A L N E G O  
im.gen.broni K.Swierczewskiego

-----  
I N S T Y T U T   O R G A N I Z A C J I   I   T E C H N I K I   D O W O D Z E N I A  
Z A K Ł A D   I



ppłk dr M. CIECHANOWICZ

NIEKTÓRE MODELE WALKI OGÓLNOWOJSKOWEJ

Wskrypt/



-----  
REMBERTOW

styczeń

1966 r.

Treść

Wstęp

- I. Ciąg zdarzeń /wystrzałów/, Ciąg skutecznych strzałów Poissona
- II. Model walki o zależności liniowej.
- III. Model walki o zależności kwadratowej w ujęciu deterministycznym.
  1. Sformułowanie równań Lanchestera
  2. Rozwiązanie równań
  3. Analiza otrzymanych rozwiązań
  4. Wpływ uderzenia uprzedzającego
  5. Wpływ uzupełnienia sił w procesie walki
  6. Wpływ tempa mobilizacji sił
  7. Wpływ strat operacyjnych
  8. Wpływ posiadanej ilości amunicji
  9. Uwzględnienie jednoczesnego rażenia kilku jednostek przeciwnika.
- IV. Model walki o zależności kwadratowej w ujęciu probabilistycznym.
  1. Sformułowanie zadania
  2. Prawdopodobieństwo zmiany sił w dowolnie małym odcinku czasu.
  3. Równania różniczkowe charakteryzujące prawdopodobne stany procesu rozwoju walki
    - a/ Prawdopodobieństwo tego, że w momencie  $t + \Delta t$  system będzie się znajdował w stanie  $A_{N_1, N_2}$
    - b/ Prawdopodobieństwo tego, że w momencie  $t + \Delta t$  system będzie się znajdował w stanie  $A_{kl}$
    - c/ Prawdopodobieństwo tego, że w momencie  $t + \Delta t$  system będzie się znajdował w stanie  $A_{ko}$
    - d/ Prawdopodobieństwo tego, że w momencie  $t + \Delta t$  system będzie się znajdował w stanie  $A_{ol}$
    - e/ Układ równań różniczkowych charakteryzujący rozwój walki dwóch zgrupowań.
- V. Model walki dwóch obszarów
  1. Schematyzacja walki
  2. Równania opisujące proces rozwoju walki
  3. Uwzględnienie wpływu pewnych czynników na proces rozwoju walki

a/ Wpływ uderzenia uprzedzającego

b/ Wpływ tempa mobilizacji sił

c/ Wpływ tempa uzupełniania sił

VI. Analiza walki partyzanckiej.

Zakończenie

Literatura.

## Wstęp

Na obecnym etapie rozwoju nauk, zwłaszcza ścisłych, niektóre fragmenty działań bojowych można analizować w oparciu o naukowe metody. Analizę tę możemy przeprowadzić wówczas, gdy potrafiemy walkę sformalizować - nadać jej wyraz modelu matematycznego. Jednakże przedstawienie walki ogólnowojskowej w postaci modelu matematycznego, dokładnie odzwierciedlającego wszystkie występujące w niej współzależności, nie jest sprawą ani prostą ani łatwą. Zazwyczaj bowiem nie wszystkie czynniki wywierające wpływ na przebieg walki /operacji/ są wielkościami znanymi, niektóre z nich dają się określić tylko w przybliżeniu, innych natomiast w ogóle nie można ustalić z wystarczającą dokładnością. Mimo to w każdej sytuacji konfliktowej, gdzie tylko występuje walka zbrojna między dwiema stronami, dokonanie analizy ilościowej danego problemu zawsze jest celowe, nawet wtedy, gdy spodziewamy rezultat daje się określić chociażby w przybliżeniu. Analiza ilościowa jest tylko przedłużeniem analizy jakościowej badanego procesu, w celu ustalenia przesłanek racjonalnego działania. Druga stanowi przesłankę dla pierwszej oraz uściśla i uzupełnia ją, gdyż posługuje się obiektywnym aparatem poznawczym.

Burzliwy rozwój szybkołoczących EMC daje możliwość prowadzenia badań w zakresie modelowania procesów walki. Skomplikowany charakter tych modeli może być szczegółowo analizowany przy użyciu maszyn cyfrowych, a uzyskane tą drogą wnioski będą przydatne dla osoby podejmującej decyzję odnośnie użycia posiadanych sił i środków. Zazwyczaj model walki ogólnowojskowej przedstawiany jest w postaci równań /układu równań/ różniczkowych.

Kilka najprostszych i najciekawszych równań różniczkowych, ustalających matematyczną zależność w zmaganiach sił zbrojnych opracował w 1916 r. matematyk angielski F.W. Lanchester w pracy pod tytułem: "Airorafit in Warfare; the Dawn of the Fourth arm".<sup>1/</sup> Równania te miały na celu analityczne określenie przebiegu walki, tj. określenie w każdym momencie czasu ilości strat i ilości pozostałych żołnierzy obu walczących stron. Opracowane przez Lanchestera równania dotyczyły bitew, wojen antycznych i okresu pojawienia się ~~broni~~ palnej. Jednakże rozszerzając i uogólniając te równania można przejść od prostych do bardziej złożonych operacji.

-----  
1/ Rola lotnictwa w wojnie; powstanie czwartego rodzaju broni.

Z matematycznego punktu widzenia równania te mają znaczenie ogólne i wykorzystywane są przy analizie pewnych procesów w wielu dziedzinach nauki, np. w badaniach przebiegu reakcji chemicznych, badaniu przebiegu walki o byt gatunków biologicznych i innych.

Przedstawienie procesu walki przy pomocy równań łączy się z poważnym uproszczeniem i stąd nie można oczekiwać pełnej zbliżoności z rzeczywistością. Wzory matematyczne nie zawierają bowiem "ukrytych myśli" ani nie władają "zdolnościami myślenia", a uzyskane wyniki nie mogą być wykorzystywane pochopnie, gdyż nie zastępują one twórczej pracy ludzi. Należy jednakże pamiętać, że metody matematyczne pomagają w rozwiązaniu konkretnych zadań, które intuicyjnie trudno jest rozwiązać lub wręcz niemożliwie. O wyższości ścisłych metod stanowi dokładność podporządkowania się ich założeniom wyjściowym, leżącym u podstaw przyjętego systemu badawczego.

Modele walki opracowane przez Lanchestera zostały rozwinięte przez szereg autorów i obecnie przyjmują one postać bardziej lub mniej uogólnionych zależności, stosownie do stopnia trudności rozpatrywanego problemu.

Zależnie od przyjętych założeń, leżących u podstaw badanego procesu, można otrzymać różne modele dynamiki walki opisane przy pomocy równań. W dalszej części zostaną rozpatrzone niektóre prostsze modele i wyprowadzone równania, które je opisują.

Jednakże najpierw zapoznamy się z pewnymi pojęciami pomocniczymi.

#### I. CIĄG ZDARZEŃ /WYSTRZAŁÓW/. CIĄG SKUTECZNYCH STRZAŁÓW POISSONA

Rozpatrując dynamikę walki licznych grup nie jesteśmy w stanie zaznaczyć momentu każdego wystrzału, każdej jednostki biorącej udział w walce. Nawet gdyby to się udało, model okazałby się zbyt skomplikowany, a przy tym głównie - nie odzwierciedlałby realnego stanu rzeczy. W rzeczywistości momenty wystrzałów pojedynczych jednostek będą przypadkowymi.

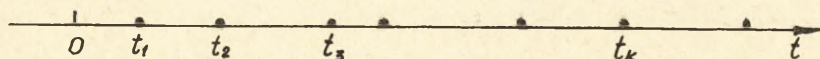
Dlatego przy rozpatrywaniu dynamiki walki zawsze będziemy posługiwać się schematem przypadkowego rozkładu ognia.

Ciąg strzałów w czasie będziemy rozpatrywać jako pewien ciąg zdarzeń.

W rachunku prawdopodobieństwa ciągiem zdarzeń nazywa się ciąg jednorodnych zdarzeń zachodzących jeden po drugim w pewnych przypadkowych momentach czasu. Jako przykłady mogą służyć:

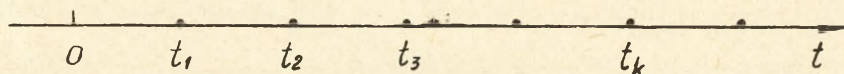
- ciąg włączeń przyrządów oświetlających do sieci elektrycznej;
- ciąg awarii maszyny liczącej;
- ciąg celów powietrznych wchodzących w strefę ognia, systemu OPL;
- ciąg ataków wykonywanych na cel powietrzny znajdujący się nad bronionym obszarem.

Ciąg zdarzeń można wyobrażać jako ciąg momentów ich pojawienia się  $t_1, t_2, \dots, t_k, \dots$  na osi czasu ot /rys. 1.1/.



Rys.1. 1 ciąg zdarzeń

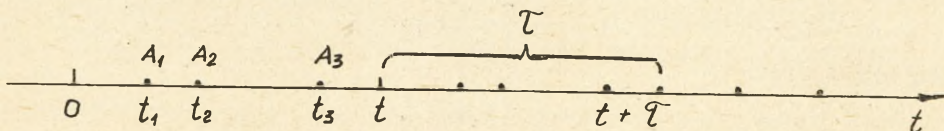
Jeżeli punkty  $t_1, t_2, \dots, t_k, \dots$  są rozdzielone ściśle jednakowymi przedziałami  $\tau$  /rys. 1.2/, to ciąg nazywamy regularnym.



Rys.1.2 Regularny ciąg zdarzeń

Może się wydawać, że ciąg regularny jest najbardziej prostym ze wszystkich możliwych ciągów zdarzeń. Tak jednak nie jest. Rzecz polega na tym, że w ciągu regularnym momenty pojawiania się kolejnych zdarzeń są związane ze sobą ostrą, funkcjonalną zależnością. Moment ten bardzo znacznie utrudnia analizę zjawisk, w których figuruje jednocześnie duża liczba takich ciągów /np. walka bardzo licznych grup jednostek bojowych, z których każda oddaje strzały w momentach czasu, rozdzielonych ściśle określonymi przedziałami/. O wiele prościej jest analizować ciągi zdarzeń, zachodzących w przypadkowych momentach czasu niezależnie jedno od drugiego /tzw. ciągi Poissona/.

Przedstawimy dowolne uderzenia  $A_1, A_2, \dots$ , pojawiające się w momentach  $t_1, t_2, \dots$ , punktami na osi odciętych ot /rys. 1.3/



Rys.3 Ciąg zdarzeń

Zakładamy, że punkty na osi ot pojawiają się pojedynczo, tj. zbieżność w jednym i tym samym momencie czasu dwóch lub więcej zdarzeń jest praktycznie niemożliwa. Taki ciąg nazywamy zwyczajnym.

Wydzielmy na osi ot odcinek długości  $\tau$ , o początku w punkcie  $t$  i końcu w punkcie  $t + \tau$ . Ciąg zdarzeń nazywa się ciągiem bezwarunkowym, jeżeli prawdopodobieństwo tego, że na odcinek  $\tau$  przypada określona ilość punktów nie zależy od rozmieszczenia na osi ot innych punktów na innych odcinkach.

Bezwarunkowe ciągi zdarzeń mają miejsce wszędzie, gdzie pojawiania się kolejnych zdarzeń uwarunkowe są różnymi, nie związanymi jedna z drugą, przyczynami. Za przykład takiego ciągu zdarzeń może służyć ciąg wezwań centrali telefonicznej, gdzie abonenci dzwonią bez żadnej zmywy, kierując się pewnymi, nie związanymi ze sobą przyczynami.

W rachunku prawdopodobieństwa dowodzi się, że jeżeli ciąg zdarzeń jest zwyczajny i bezwarunkowy, to ilość zdarzeń przypadająca na dany odcinek  $\tau$  ma rozkład Poissona. W szczególności prawdopodobieństwo tego, że na odcinek przypada równo  $m$  punktów określa się wzorem

$$P_m = \frac{a^m}{m!} e^{-a} \quad /1.1/$$

gdzie  $a$  - średnia ilość punktów przypadających na odcinek.

W związku z tym zwyczajny i bezwarunkowy ciąg zdarzeń nazywamy krótko ciągiem Poissona.

Rozpatrzmy na osi ot ciąg zdarzeń Poissona.

Oznaczmy przez  $\lambda$  średnią ilość zdarzeń przypadających na jednostkę czasu i nazwijmy tę wielkość gęstością ciągu zdarzeń. Np. gęstością ciągu wezwań centrali telefonicznej będzie średnia liczba wezwań na jednostkę czasu /godzina, minuta/.

Gęstość ciągu zdarzeń może być stała lub zmienna, zależna od czasu.

Rozpatrzmy najpierw najprostszy przypadek, gdy gęstość ciągu jest stała:  $\lambda = \text{const.}$

Taki ciąg zdarzeń nazywamy stałym poisson'owskim lub ciągiem prostszym.

Oczywiście, dla prostszego ciągu, średnia ilość zdarzeń przypadająca na odcinek  $\tau$  jest proporcjonalna do jego długości.

$$a = \lambda \tau \quad /1.2/$$

i nie zależy od wyboru odcinka na osi ot.

W przypadku, gdy gęstość ciągu zależy od czasu, tzn. jest określona pewną funkcją  $\lambda/t$ , średnia ilość zdarzeń, przypadająca na odcinek  $\tau$ , wyraża się całką:

$$a = \int_t^{t+\tau} \lambda(t) dt. \quad /1.3/$$

Jeśli chodzi o wzór /1.1/ na prawdopodobieństwo  $P_m$ , to pozostaje on w obu przypadkach tak samo.

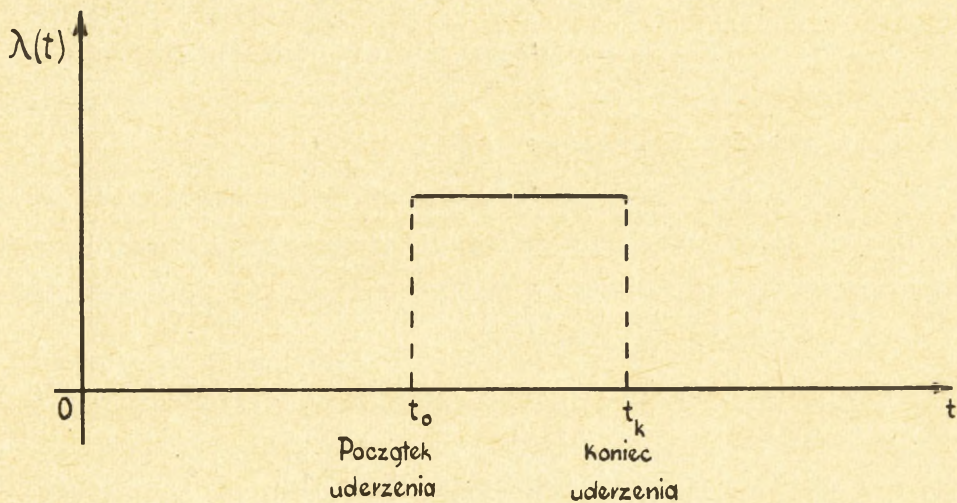
Kładąc do wzoru /1.1/  $m = 0$ , znajdziemy prawdopodobieństwo tego, że za czas  $\tau$  nie pojawi się ani jedno zdarzenie:

$$P_0 = e^{-a} \quad /1.4/$$

Odejmując  $P_0$  od jedności, otrzymamy prawdopodobieństwo tego, że na odcinku  $\tau$  pojawi się chociażby jedno zdarzenie:

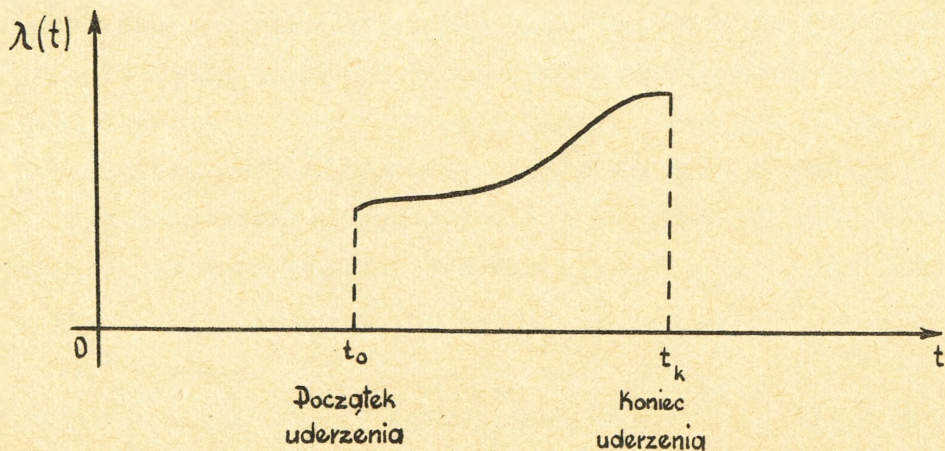
$$P_1 = 1 - e^{-a} \quad /1.5/$$

Podczas analizy dynamiki działań bojowych ciąg strzałów /lub uogólnionych strzałów/, oddawanych przez każdą jednostkę uczestniczącą w walce, wygodnie jest przedstawiać jako ciąg zdarzeń. Najbardziej prosto matematycznie opisuje się działania bojowe, jeżeli ciąg strzałów uważać za poisson'owski. Należy podkreślić, że ciąg ten nie koniecznie musi mieć stałą gęstość - może ona dowolnie zależeć od czasu. W szczególności, na przykład, jeżeli wykonuje się jedno krótkie uderzenie, można przyjmować gęstość równą zeru do pewnego momentu  $t_0$  /początek uderzenia/ i stałą do pewnego momentu  $t_k$  /koniec uderzenia/, po czym znów przyjmować ją równą zeru /rys. 1.4/.



Rys.1.4

Z biegiem czasu / $t_0$ ,  $t_k$ / można w dogodnym przypadku przyjmować gęstość ciągu strzałów  $\lambda/t/$  nie stałą, a zmienną według dowolnego prawa /rys. 1.5/.



Rys.1.5

Zauważmy, że przedstawienie ciągu strzałów w postaci ciągu Poissona zawsze powoduje pewne naciąganie. Na przykład, momenty kolejnych strzałów z jednej broni nie mogą stanowić ciągu Poissona, ponieważ siłą rzeczy są one rozdzielone pewnymi przedziałami czasu /koniecznymi, np. dla załadowania działa/. Jednakże niezbędnym jest mieć na uwadze następujące twierdzenie.

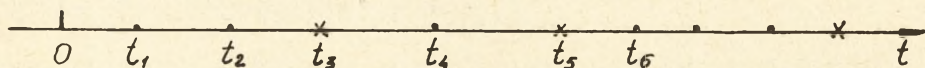
W rachunku prawdopodobieństwa dowodzi się, że przy wzajemnym nałożeniu się kilku niezależnych przypadkowych ciągów zdarzeń, praktycznie zawsze otrzymuje się ciąg, bliski poissonowskiemu. Wobec tego, jeżeli jeden cel jest ostrzeliwany niezależnie przez kilka dział, sumaryczny ciąg strzałów można w zupełności przyjmować jako poissonowski. Lecz i w tym przypadku, gdy ciąg wystrzałów ma jedno źródło i zawiera uchwytłą kolejność, zamiana takiego ciągu poissonowskim, z reguły mało wpływa na wyniki obliczeń. Dlatego też założenie o poissonowskim ciągu strzałów szeroko jest stosowane przy matematycznym przedstawianiu działań bojowych.

Bardzo dogodne jest przyjmować jeszcze jedno założenie. Polega ono na przejściu od ciągu strzałów do tzw. "ciągu skutecznych strzałów",

Strzał nazywamy "skutecznym" jeśli razi on cel /lub raziłby, gdyby cel do tego czasu nie był rażony/.

Rozpatrzmy na osi czasu ot ciąg strzałów, przedstawionych punktami na rys. 1.6.

x x x Ciąg skutecznych strzałów



Rys. 1.6

Każdy z tych strzałów z pewnym prawdopodobieństwem porazi cel, tj. okazuje się skutecznym. Oznaczmy na osi ot skuteczne strzały krzyżakami. Oczywiście, skuteczne strzały swoją drogą przedstawiają pewien ciąg. W przypadku, jeśli początkowy ciąg strzałów był poissonowski, a strzały okazują się "rażącymi" lub "nierażącymi" niezależnie jeden od drugiego, ciąg skutecznych strzałów także będzie poissonowski, lecz o innej gęstości, a mianowicie:

$$\Lambda = p\lambda,$$

gdzie  $\lambda$  - gęstość ciągu strzałów;

$p$  - prawdopodobieństwo rażenia celu jednym strzałem.

Gęstość ciągu skutecznych strzałów  $\Lambda$  przedstawia jak gdyby efektywną szybkostrzelność, podczas gdy  $\lambda$  - po prostu szybkostrzelność działa lub grupy dział /środków ogniowych/.

Zauważmy, że obie wielkości  $\lambda$  i  $p$  mogą być zarówno stałe, jak i zależne od czasu.

## II. MODEL WALKI O ZALEŻNOSCI LINIOWEJ

Najprostszym modelem walki jest model Lanchestera o zależności liniowej. Model ten rozwiązuje zagadnienie walki dwóch przeciwnych zgrupowań bojowych /stron/. U jego podstaw leżą następujące założenia:

- a/ Obie strony biorące udział w walce atakują jedna drugą.  
Każda ze stron jest w zasięgu działania broni strony przeciwnej.
- b/ Walczące strony składają się z jednorodnych jednostek bojowych /np. karabiny, czołgi, samoloty/. Jednostki bojowe stron mogą się różnić między sobą.
- c/ Każda ze stron zna tylko teren, na którym znajduje się przeciwnik, bez znajomości skutków ognia.
- d/ Ogień walczącej strony jest równomiernie rozłożony na obszarze, na którym znajduje się przeciwnik.
- e/ Walczące strony nie mają strat operacyjnych /niebojowych/.
- f/ Walczące strony nie są uzupełniane świeżymi siłami w przypadku walk wieloetapowych.

Jak wynika z założeń, walkę rozpatruje się jako szereg następujących po sobie starć, stanowiących proces ciągły o stale zmieniającej się ilości jednostek bojowych. Jeżeli ponadto przyjmiemy, że wszystkie starcia odbywają się w jednakowych przedziałach czasu, o pewnej wielkości średniej, wówczas na tej podstawie możemy przejść od zmiennej typu skokowego do zmiennej typu ciągłego. Pozwala to traktować walkę jako funkcję ciągłą zmiennej  $t$  /czasu/ i stosować metody rachunku różniczkowego dla określenia zmian w stanach sił obu stron w dowolnym momencie walki.

Rozsądnym będzie rozpatrywać tylko te walki, w wyniku których dochodzi do zniszczenia jednego z dwu uczestników pojedynku. Aby nadać rozważaniom bardziej ogólny charakter

zakładamy, że jedna ze stron ma określoną przewagę w uzbrojeniu lub przygotowaniu bojowym. Straty sił jednej strony, poniesione w walce, przeciętnie są równe stosunkowi ogólnej ilości strat danej strony do ogólnej ilości starć, analogiczne rozumowanie jest słuszne i w odniesieniu do drugiej strony.

Aby przedstawić rozpatrywane zagadnienie w postaci równania matematycznego wprowadzimy następujące oznaczenia:

- $m_1$  - ilość sił strony czerwonych w pewnym momencie czasu;
- $m_2$  - ilość sił strony niebieskich w pewnym momencie czasu;
- $N_1$  - początkowy stan sił strony czerwonych;
- $N_2$  - początkowy stan sił strony niebieskich;
- $t$  - czas;
- $E$  - współczynnik efektywności działań - stosunek przeciętnej ilości strat sił strony niebieskich do przeciętnej ilości strat strony czerwonych.

Przyjmując kolejne starcia jako ciągłą zmianę ilości sił obu stron w dowolnych momentach czasu  $\Delta t$ , zmiany stanu sił obu stron  $\Delta m_1$  i  $\Delta m_2$  dają się przedstawić w postaci zależności:

$$\Delta m_1 = - \frac{1}{1+E} \Delta t ; \quad \Delta m_2 = - \frac{E}{1+E} \Delta t \quad /2.1/$$

Jeżeli przedziały czasu  $\Delta t$  są dowolnie małe, wówczas:

$$\lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{m_1(t_0 + \Delta t) - m_1(t_0)}{\Delta t} = m_1'(t_0), \quad /2.2/$$

$$\lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{m_2(t_0 + \Delta t) - m_2(t_0)}{\Delta t} = m_2'(t_0). \quad /2.3/$$

Zatem zmiany stanu sił obu stron w toku walki można napisać w postaci następujących równań różniczkowych:

$$\frac{dm_1}{dt} = - \frac{1}{1+E} ; \quad /2.4/$$

$$\frac{dm_2}{dt} = - \frac{E}{1+E} \quad /2.5/$$

Całkując te równania i kładąc warunki początkowe  $m_1/0/ = N_1$ ,  $m_2/0/ = N_2$ , otrzymamy:

$$m_1 = N_1 - \frac{t}{1+E}, \quad /2.6/$$

$$m_2 = N_2 - \frac{tE}{1+E}. \quad /2.7/$$

Równania /2.6/ i /2.7/ możemy napisać w postaci:

$$N_1 - m_1 = \frac{t}{1+E}, \quad /2.6'/$$

$$N_2 - m_2 = \frac{tE}{1+E}. \quad /2.7'/$$

Mnożąc /2.6'/ przez E dostaniemy równość prawych stron /2.6'/ i /2.7'/, a stąd

$$E /N_1 - m_1/ = N_2 - m_2, \quad /2.8/$$

$$E = \frac{N_2 - m_2}{N_1 - m_1}. \quad /2.8'/$$

Zatem wzór /2.8/ jest słuszny dla dowolnego momentu czasu trwania walki.

Ponieważ rozwiązania równań /2.4/ i /2.5/ są liniowe względem t i stosunek między  $m_2$  i  $m_1$  jest także liniowy, stąd równania te często są nazywane liniowym prawem Lanchestera.

Z równania /2.8/ widać, że stan sił jednej ze stron w dowolnym momencie czasu zależy od stanu sił drugiej strony i efektywności działań.

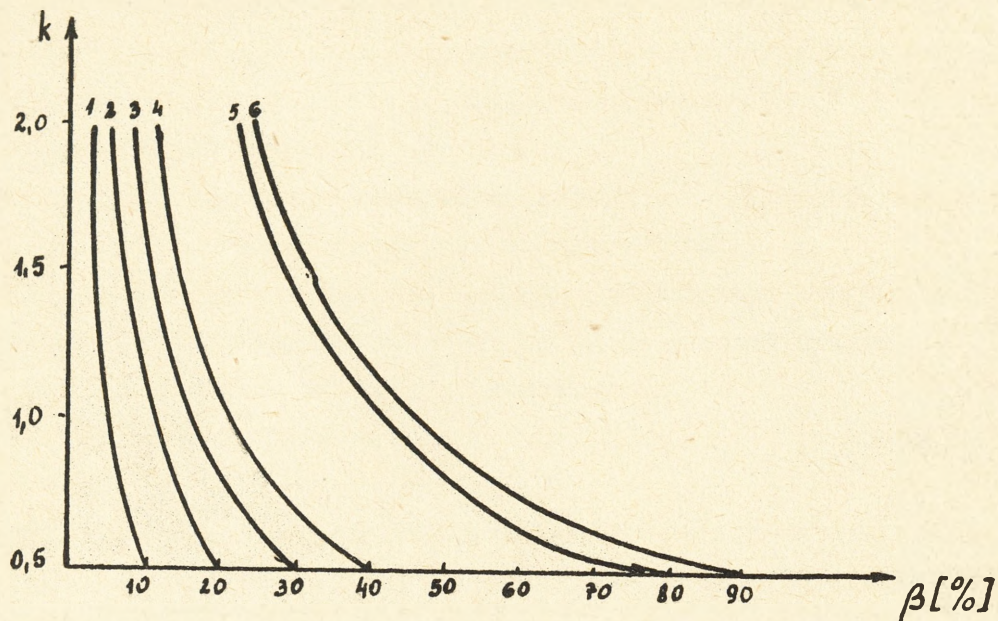
Jeżeli oznaczymy przez:

$$k = \frac{N_2}{N_1} - \text{stosunek sił w momencie rozpoczęcia walki;}$$

$$\alpha = \frac{N_1 - m_1}{N_1} \cdot 100 - \text{procent start sił strony czerwonych,}$$

$$\beta = \frac{N_2 - m_2}{N_2} \cdot 100 - \text{procent strat sił strony niebieskiej,}$$

wówczas procent strat strony niebieskich, zależnie od wartości poszczególnych parametrów, można przedstawić w postaci niżej zamieszczonego wykresu /rys.2.1/.



Rys. 2.1

Poszczególne krzywe są wykreślone dla następujących wartości parametrów:

- 1/  $\alpha = 10\%$ ,  $E = 0,5$ ;
- 2/  $\alpha = 20\%$ ,  $E = 0,5$ ;
- 3/  $\alpha = 30\%$ ,  $E = 0,5$ ;
- 4/  $\alpha = 20\%$ ,  $E = 1$ ;
- 5/  $\alpha = 20\%$ ,  $E = 2$ ;
- 6/  $\alpha = 30\%$ ,  $E = 1,5$ .

A oto przykład obliczenia niektórych punktów krzywych. Obliczenia wykonamy dla:

$$k = 1,5, \quad \alpha = 30\%, \quad E = 0,5.$$

Pomnożmy licznik i mianownik prawej strony /2.8/ przez  $\frac{100}{N_1}$ , wówczas otrzymamy:

$$E = \frac{\frac{N_2 - m_2}{N_1} \cdot 100}{\frac{N_1 - m_2}{N_1} \cdot 100}$$

Lecz  $\frac{N_2}{N_1} = 1,5$ , stąd  $N_1 = \frac{N_2}{1,5}$ . Biorąc to pod uwagę oraz uwzględniając wprowadzone wyżej oznaczenia będziemy mieli

$$E = \frac{1,5 \beta}{\alpha}$$

a podstawiając przyjęte wartości na E i  $\alpha$  otrzymamy  $\beta = 10\%$

W analogiczny sposób dokonujemy obliczeń dla innych wartości parametrów.

Obliczenia te zestawione są w poniższej tabeli /tabela 1/.

Tabela 1

k	E=0,5 $\alpha=10\%$	E=0,5 $\alpha=20\%$	E=0,5 $\alpha=30\%$	E=1 $\alpha=20\%$	E=2 $\alpha=20\%$	E=1,5 $\alpha=30\%$	
0,5	10%	20%	30%	40%	80%	90%	
1,0	5%	10%	15%	20%	40%	45%	$\beta$
1,5	3,3%	6,6%	10%	13,3%	26,6%	30%	
2,0	2,5%	5%	7,5%	10%	20%	22,5%	

Zarówno z wykresu jak i tabeli wynika, że w pewnych przypadkach o stratach przeciwnika decydują wyłącznie efektywność działań i procent strat własnych. Na przykład straty przeciwnika  $\beta = 20\%$  wynoszą - przy  $E = 0,5$ ,  $\alpha = 20\%$ ,  $k = 0,5$ , jak też przy  $E = 1$ ,  $\alpha = 20\%$ ,  $k = 1$  oraz przy  $E = 2$ ,  $\alpha = 20\%$ ,  $k = 2$ .

Stąd wnioskujemy, że niekorzystny stosunek sił można równoważyć zwiększając efektywność działań i odwrotnie, dysponując gorszą efektywnością - należy kompensować ją zwiększając początkowy stosunek sił.

Należy jednakże wystrzegać się wyciągania zbyt pochopnych wniosków, gdyż model jest słuszny tylko w przypadku spełnienia przyjętych założeń. Nie uwzględnia on szeregu istotnych czynników wpływających na przebieg walki, takich jak np: warunki terenowe, warunki atmosferyczne, stan psychiczny wojsk, zmęczenie i inne.

Przedstawiony model walki o zależności liniowej, sformułowany przez Lanchestera, posiada charakter deterministyczny, zakłada bowiem, że wszystkie występujące w nim parametry są określone i stałe.

### III. MODEL WALKI O ZALEŻNOSCI KWADRATOWEJ W UJECIU DETERMINISTYCZNYM

#### 1. Sformułowanie r-ównań Lanchestera

Przy rozwiązywaniu praktycznych zadań, aby wykryć tendencję rozwoju walki, nie zawsze zachodzi potrzeba szczegółowego opisywania wszystkich stanów układu, niekiedy wystarczy znać nadzieję matematyczną /wartość średnią/ liczby ocalałych jednostek bojowych w dowolnym momencie czasu, tak z jednej jak i drugiej strony.

Obliczając nadzieję matematyczną liczby pozostałych jednostek dochodzimy do modelu walki Lanchestera o zależności kwadratowej.

U podstaw tego modelu leżą następujące założenia:

- a/ Każda jednostka bojowa dowolnej strony, dopóki nie jest zniszczona, oddaje przypadkowy ciąg strzałów z pewną średnią szybkostrzelnością; ciąg ten /dokładnie lub w przybliżeniu/ jest poisson'owski.
- b/ Każda jednostka bojowa jednej strony może prowadzić ogień do dowolnej jednostki drugiej strony i odwrotnie. Ogień jest celowany, tj. skierowany na zniszczenie ściśle określonej jednostki bojowej przeciwnika. Jednym strzałem nie można razić więcej niż jedną jednostkę bojową.
- c/ Jeżeli jednostka bojowa została rażona, ogień natychmiast zostaje przenoszony na inną, a jednostka rażona nie bierze dalszego udziału w działaniach bojowych.
- d/ Czas lotu pocisku do celu nie bierze się pod uwagę, w porównaniu z ogólnym czasem trwania walki.
- e/ W dowolnym momencie czasu ogólna efektywność bojowa każdej strony /średnia szybkostrzelność całej grupy pozostałych jednostek bojowych/ jest proporcjonalna nie do liczby przypadkowo ocalałych jednostek bojowych, a do jej nadziei matematycznej /wartości średniej/.

Ostatnie założenie jest szczególnie istotne dla bardzo licznych zgrupowań, kiedy przypadki związane z rażeniem lub nierażeniem pojedynczej jednostki bojowej, mało wpływają na sumaryczną moc ogniową zgrupowania, która dla każdego etapu walki okazuje się bliską średniej wartości. Dla bardzo licznych grup przypadki te zaczynają wpływać tylko w końcu walki w "okresie wyniszczenia", gdy w składzie jednej ze stron /lub obu/ pozostaje bardzo mało jednostek bojowych. Natomiast dla początkowego stadium walki zamiana liczby losowej pozostałych jednostek, na średnią wartość jest w pełni dopuszczalna.

Oznaczmy przez  $m_1$  nadzieję matematyczną liczby ocalałych /nierażonych/ jednostek bojowych strony I w momencie czasu  $t$ . Analogicznie  $m_2$  - strony II.

Wyprowadzimy matematyczne zależności, pozwalające określić dla dowolnego momentu  $t$  średnie liczebności stron, tj. orientacyjnie przewidywać rozwój walki.

Oznaczmy przez  $\lambda_1$  średnią szybkostrzelność /ilość strzałów w jednostce czasu/ jednej jednostki bojowej strony I;  $\lambda_2$  - to samo dla strony II. Załóżmy, że każdy strzał jednostki bojowej strony I razi cel, do którego prowadzi się ogień, z prawdopodobieństwem  $p_1$ , strony II -  $p_2$ . Wówczas każda jednostka bojowa strony I będzie realizować ciąg skutecznych strzałów Poissona o gęstości

$$\Lambda_1 = \lambda_1 p_1.$$

a jednostka bojowa strony II - z gęstością

$$\Lambda_2 = \lambda_2 p_2.$$

Weźmy pod uwagę dowolny moment czasu i zobaczymy jak zmienia się średnia liczebność stron  $m_1$  i  $m_2$  w dowolnie małym odcinku czasu  $\Delta t$ . Oznaczmy przez  $\Delta m_1$  przyrost wielkości  $m_1$  za czas  $\Delta t$ . Wielkość  $m_1$  zmniejsza się wraz z upływem czasu i za czas  $\Delta t$  zmiana ta będzie równa średniej liczbie jednostek rażonych przez przeciwnika.

Zobaczymy, ile jednostek porazi przeciwnik /strona II/ za czas  $\Delta t$ . W momencie  $t$  strona II posiada  $m_2$  jednostek bojowych, każda z nich za czas  $\Delta t$  wykonuje średnio  $\Lambda_2 \Delta t$  skutecznych strzałów, każdy strzał razi jedną i tylko jedną jednostkę strony I.

Dlatego przyrost nadziei matematycznej liczby ocalałych jednostek bojowych strony I, za czas  $\Delta t$  można napisać w postaci:

$$\Delta m_1 = - \Lambda_2 m_2 \Delta t \quad /3.1/$$

Dzieląc obie strony równości przez  $\Delta t$  i przechodząc do granicy przy  $\Delta t \rightarrow 0$ , otrzymujemy równanie różniczkowe

$$\frac{dm_1}{dt} = - \Lambda_2 m_2.$$

Przeprowadzając analogiczne rozumowania dla  $m_2$  otrzymujemy układ równań różniczkowych wyrażający średnie liczebności stron I i II w procesie walki

$$\frac{dm_1}{dt} = -\Lambda_2 m_2 \quad , \quad /3.2/$$

$$\frac{dm_2}{dt} = -\Lambda_1 m_1$$

Równania /3.2/ są równaniami Lanchestera o zależności kwadratowej.

W przypadku gdy  $\Lambda_1$  i  $\Lambda_2$  są niezależne od czasu  $t$ , wówczas układ /3.2/ jest układem równań różniczkowych liniowych.

## 2. Rozwiązanie równań

Aby rozwiązać równania /3.2/ należy ustalić warunki początkowe. W momencie początku walki  $t = 0$  należy przyjąć

$$m_1 = N_1, \quad m_2 = N_2 \quad /3.3/$$

Równania /3.2/ są prawdziwe zarówno dla stałych, jak i zmiennych wartości  $\Lambda_1$  i  $\Lambda_2$  /efektywna szybkostrzelność/. Jednakże przy  $\Lambda_1 = \text{const}$ ,  $\Lambda_2 = \text{const}$ . całkowanie ich jest bardzo proste.

Różniczkując względem  $t$  pierwsze równanie układu /3.2/ otrzymamy

$$\frac{d^2 m_1}{dt^2} = -\Lambda_2 \frac{dm_2}{dt} \quad /3.4/$$

Kładąc  $\frac{dm_2}{dt}$  z drugiego równania /3.2/ do /3.4/ mamy

$$\frac{d^2 m_1}{dt^2} = -\Lambda_1 \Lambda_2 m_1 \quad /3.5/$$

Równanie /3.5/ jest różniczkowym równaniem liniowym drugiego rzędu o stałych współczynnikach. Rozwiązaniem ogólnym tego równania jest:

$$m_1 = c_1 e^{r_1 t} + c_2 e^{r_2 t} \quad , \quad /3.6/$$

a równanie charakterystyczne ma postać

$$r^2 - \Lambda_1 \Lambda_2 = 0. \quad /3.6/$$

Stąd przysługujemy pierwiastki równania charakterystycznego

$$r_1 = \sqrt{\Lambda_1 \Lambda_2} \quad , \quad r_2 = -\sqrt{\Lambda_1 \Lambda_2}$$

Jeżeli zaś przyjmiemy dodatkowe założenie, że  $\Lambda_1 = \Lambda_2 = 1$  wówczas

$$r^2 - \Lambda^2 = 0$$

i pierwiastkami tego równania są

$$r_1 = \Lambda, \quad r_2 = -\Lambda$$

Otrzymamy więc rozwiązanie ogólne na  $m_1$  w postaci

$$m_1 = C_1 e^{\Lambda t} + C_2 e^{-\Lambda t}, \quad /3.7/$$

gdzie  $C_1, C_2$  - stałe całkowania.

Różniczkując /3.7/ stronami dostajemy

$$\frac{dm_1}{dt} = C_1 \Lambda e^{\Lambda t} - C_2 \Lambda e^{-\Lambda t}.$$

Lecz /patrz układ równań /3.2/

$$\frac{dm_1}{dt} = -\Lambda m_2$$

więc

$$-\Lambda m_2 = C_1 \Lambda e^{\Lambda t} - C_2 \Lambda e^{-\Lambda t}$$

Dzieląc ostatnie równanie stronami przez  $-\Lambda$  mamy

$$m_2 = -C_1 e^{\Lambda t} + C_2 e^{-\Lambda t}$$

Otrzymaliśmy więc rozwiązanie układu równań /3.2/ przy założeniu

$\Lambda_1 = \Lambda_2 = \Lambda$  w postaci

$$m_1 = C_1 e^{\Lambda t} + C_2 e^{-\Lambda t}, \quad /3.8/$$

$$m_2 = -C_1 e^{\Lambda t} + C_2 e^{-\Lambda t}.$$

Kładąc warunki początkowe dla  $t = 0, m_1 = N_1, m_2 = N_2$  otrzymamy

$$N_1 = C_1 + C_2 \quad /3.9/$$

$$N_2 = -C_1 + C_2$$

Z układu tego wyznaczymy stałe całkowania  $C_1$  i  $C_2$ .

Dodając /3.9/ stronami jest

$$N_1 + N_2 = 2 C_2$$

stąd

$$C_2 = \frac{N_1 + N_2}{2}$$

Kładąc tę wartość do pierwszego równania /3.9/ mamy

$$N_1 = C_1 + \frac{N_1 + N_2}{2}$$

Stąd w oczywisty sposób wyznaczamy  $C_1$

$$C_1 = \frac{N_1 - N_2}{2}$$

Kładąc wartości  $C_1$  i  $C_2$  do /3.8/ otrzymujemy

$$m_1 = \frac{N_1 - N_2}{2} e^{\Lambda t} + \frac{N_1 + N_2}{2} e^{-\Lambda t}$$

$$m_2 = -\frac{N_1 - N_2}{2} e^{\Lambda t} + \frac{N_1 + N_2}{2} e^{-\Lambda t} \quad /3.10/$$

Podnosząc /3.10/ stronami do kwadratu i odejmując drugie równanie od pierwszego dostaniemy

$$m_1^2 = \left(\frac{N_1 - N_2}{2}\right)^2 e^{2\Lambda t} + \frac{1}{2} (N_1 - N_2) (N_1 + N_2) +$$

$$+ \left(\frac{N_1 + N_2}{2}\right)^2 e^{-2\Lambda t},$$

$$m_2^2 = \left(\frac{N_1 - N_2}{2}\right)^2 e^{2\Lambda t} - \frac{1}{2} (N_1 - N_2) (N_1 + N_2) +$$

$$+ \left(\frac{N_1 + N_2}{2}\right)^2 e^{-2\Lambda t},$$

czyli

$$m_1^2 - m_2^2 = N_1^2 - N_2^2,$$

skąd

$$N_1^2 - m_1^2 = N_2^2 - m_2^2 \quad /3.11/$$

Przejdźmy zatem do rozpatrzenia przypadku gdy  $\Lambda_1 \neq \Lambda_2$ .

Kładąc pierwiastki równania charakterystycznego /3.6'/ do /3.6/ otrzymamy

$$m_1 = C_1 e^{\sqrt{\Lambda_1 \Lambda_2} t} + C_2 e^{-\sqrt{\Lambda_1 \Lambda_2} t} \quad /3.12/$$

Z układu równań /3.2/ mamy

$$m_2 = -\frac{1}{\Lambda_2} \frac{dm_1}{dt}$$

Różniczkując /3.12/ otrzymujemy

$$\frac{dm_1}{dt} = \sqrt{\Lambda_1 \Lambda_2} C_1 e^{-t\sqrt{\Lambda_1 \Lambda_2}} - \sqrt{\frac{\Lambda_1}{\Lambda_2}} C_2 e^{t\sqrt{\Lambda_1 \Lambda_2}}.$$

dlatego też

$$m_2 = \sqrt{\frac{\Lambda_1}{\Lambda_2}} C_2 e^{-t\sqrt{\Lambda_1 \Lambda_2}} - \sqrt{\frac{\Lambda_1}{\Lambda_2}} C_1 e^{t\sqrt{\Lambda_1 \Lambda_2}} \quad /3.13/$$

Mając na uwadze warunki początkowe wyznaczmy stałe całkowania  $C_1$  i  $C_2$  z równań /3.12/ i /3.13/.

$$N_1 = C_1 + C_2,$$

$$N_2 = \sqrt{\frac{\Lambda_1}{\Lambda_2}} C_2 - \sqrt{\frac{\Lambda_1}{\Lambda_2}} C_1 \quad /3.14/$$

Rozwiązując układ równań /3.14/ otrzymamy

$$C_1 = \frac{N_1 - N_2 \sqrt{\frac{\Lambda_2}{\Lambda_1}}}{2}, \quad C_2 = \frac{N_1 + N_2 \sqrt{\frac{\Lambda_2}{\Lambda_1}}}{2}. \quad /3.15/$$

Kładąc  $C_1$  i  $C_2$  do równań /3.12/ i /3.13/ mamy

$$\begin{aligned} m_1 &= \frac{1}{2} (N_1 - N_2 \sqrt{\frac{\Lambda_2}{\Lambda_1}}) e^{t\sqrt{\Lambda_1 \Lambda_2}} + \frac{1}{2} (N_1 + N_2 \sqrt{\frac{\Lambda_2}{\Lambda_1}}) e^{-t\sqrt{\Lambda_1 \Lambda_2}} = \\ &= \frac{1}{2} N_1 (e^{t\sqrt{\Lambda_1 \Lambda_2}} + e^{-t\sqrt{\Lambda_1 \Lambda_2}}) - \frac{1}{2} N_2 \sqrt{\frac{\Lambda_2}{\Lambda_1}} (e^{t\sqrt{\Lambda_1 \Lambda_2}} - e^{-t\sqrt{\Lambda_1 \Lambda_2}}) = \\ &= N_1 \operatorname{cosh} t\sqrt{\Lambda_1 \Lambda_2} - N_2 \sqrt{\frac{\Lambda_2}{\Lambda_1}} \operatorname{sinh} t\sqrt{\Lambda_1 \Lambda_2}; \\ m_2 &= \frac{1}{2} \sqrt{\frac{\Lambda_1}{\Lambda_2}} (N_2 \sqrt{\frac{\Lambda_2}{\Lambda_1}} + N_1) e^{-t\sqrt{\Lambda_1 \Lambda_2}} - \frac{1}{2} \sqrt{\frac{\Lambda_1}{\Lambda_2}} (N_1 - N_2 \sqrt{\frac{\Lambda_2}{\Lambda_1}}) e^{t\sqrt{\Lambda_1 \Lambda_2}} = \\ &= \frac{1}{2} N_2 (e^{t\sqrt{\Lambda_1 \Lambda_2}} + e^{-t\sqrt{\Lambda_1 \Lambda_2}}) - \frac{1}{2} \sqrt{\frac{\Lambda_1}{\Lambda_2}} (e^{t\sqrt{\Lambda_1 \Lambda_2}} - e^{-t\sqrt{\Lambda_1 \Lambda_2}}) = \\ &= N_2 \operatorname{cosh} t\sqrt{\Lambda_1 \Lambda_2} - N_1 \sqrt{\frac{\Lambda_1}{\Lambda_2}} \operatorname{sinh} t\sqrt{\Lambda_1 \Lambda_2}. \end{aligned}$$

Tak więc rozwiązanie równań /3.2/ dla przypadku gdy  $\Lambda_1 \neq \Lambda_2$  otrzymujemy w postaci:

$$m_1 = N_1 \operatorname{cosh} t \sqrt{\Lambda_1 \Lambda_2} - N_2 \sqrt{\frac{\Lambda_1}{\Lambda_2}} \operatorname{sinh} t \sqrt{\Lambda_1 \Lambda_2},$$

/3.16/

$$m_2 = N_2 \operatorname{cosh} t \sqrt{\Lambda_1 \Lambda_2} - N_1 \sqrt{\frac{\Lambda_1}{\Lambda_2}} \operatorname{sinh} t \sqrt{\Lambda_1 \Lambda_2}.$$

Przekształćmy wyrażenia /3.16/ tak, żeby zmniejszyć ilość zmiennych. W tym celu wprowadzimy następujące oznaczenia:

$$\nu = \frac{N_1}{N_2} - \text{współczynnik przewagi sił},$$

$$\alpha = \frac{\Lambda_1}{\Lambda_2} - \text{współczynnik przewagi ogniowej};$$

$$\mathcal{M}_1 = \frac{m_1}{N_1} - \text{średnia wartość części pozostałych jednostek bojowych strony I};$$

$$\mathcal{M}_2 = \frac{m_2}{N_2} - \text{średnia wartość części pozostałych jednostek bojowych strony II}.$$

Dzieląc równania /3.16/ odpowiednio przez  $N_1$  i  $N_2$  oraz wprowadzając przyjęte oznaczenia otrzymamy:

$$\mathcal{M}_1 = \operatorname{cosh} t \sqrt{\Lambda_1 \Lambda_2} - \frac{1}{\nu} \sqrt{\frac{1}{\alpha}} \operatorname{sinh} t \sqrt{\Lambda_1 \Lambda_2},$$

$$\mathcal{M}_2 = \operatorname{cosh} t \sqrt{\Lambda_1 \Lambda_2} - \nu \sqrt{\alpha} \operatorname{sinh} t \sqrt{\Lambda_1 \Lambda_2}$$

Jeżeli ponadto wprowadzimy:

$$\tau = t \sqrt{\Lambda_1 \Lambda_2} - \text{umowna jednostka czasu};$$

$$\mathcal{K} = \nu \sqrt{\alpha} - \text{współczynnik ogólnej przewagi stron},$$

wówczas

$$\mathcal{M}_1 = \cosh \tau - \frac{1}{\mathcal{K}} \sinh \tau,$$

$$\mathcal{M}_2 = \cosh \tau - \mathcal{K} \sinh \tau.$$

/3.17/

W ten sposób sprowadziliśmy średnią liczebność stron do zależności od jednego parametru  $\mathcal{K}$  - współczynnika ogólnej przewagi.

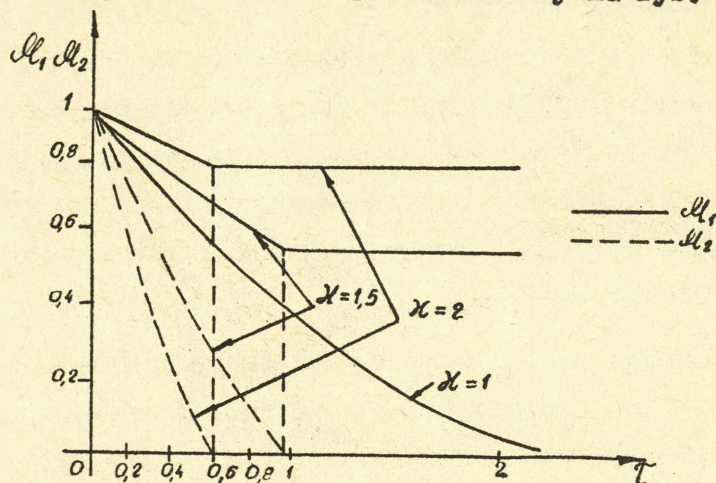
W przypadku szczególnym, gdy  $\mathcal{K} = 1$  /przewagi nie ma/

$$\mathcal{M}_1 = \mathcal{M}_2 = \mathcal{M} = e^{-\tau}$$

### 3. Analiza otrzymanych rozwiązań

Dla różnych wartości współczynnika przewagi  $\mathcal{K}$  sporządza się wykresy, na których można śledzić proces rozwoju walki.

Wykres taki jest przedstawiony na rys. 3.1.



Rys. 3.1. Wykres średniej ilości ocalałych jednostek strony I i II

Z wykresu widać, że ze wzrostem czasu maleje średnia ilość pozostałych jednostek bojowych oraz zwycięża zawsze ta strona, która posiada ogólną przewagę.

Charakter rozwoju walki w całości zależy od współczynnika przewagi ogólnej  $\mathcal{K}$ . Jeśli  $\mathcal{K} = 1$ , wówczas  $\mathcal{M}_1 = \mathcal{M}_2 = e^{-\tau}$  tj. żadna strona nie posiada przewagi, Jeśli  $\mathcal{K} > 1$  siły strony I maleją bardziej powoli niż siły strony II - zwycięstwo odnosi strona I. Jeśli natomiast  $\mathcal{K} < 1$ , wówczas siły strony I zmniejszają się szybciej niż strony II - zwycięstwo odnosi strona II.

$$\text{Na współczynnik przewagi ogólnej } \mathcal{K} = \nu\sqrt{\alpha} = \frac{N_1}{N_2} \sqrt{\frac{\Lambda_1}{\Lambda_2}}$$

większy wpływ wywiera stosunek sił  $\frac{N_1}{N_2}$  niż stosunek efektywnej szybkostrzelności  $\frac{\Lambda_1}{\Lambda_2}$ . Ze wzoru na współczynnik przewagi ogólnej

$\mathcal{K}$  wynika, że np. zwiększenie  $N_1$  dwa razy powoduje dwukrotny wzrost współczynnika  $\mathcal{K}$ , podczas gdy podwojenie  $\Lambda_1$ , powiększa  $\mathcal{K}$  tylko  $\sqrt{2} = 1,4$  raza.

Wynika to z rozpatrywanego schematu walki, w którym przyjęliśmy, że każda jednostka bojowa jednej strony może prowadzić ogień tylko do określonej jednostki bojowej drugiej strony. Stąd można wysnuć wniosek, iż powiększenie stanu liczebności sił może zrównoważyć niedużą przewagę efektywności uzbrojenia przeciwnika.

Popatrzmy co się stanie, jeśli siły strony I zmniejszymy dwukrotnie i jednocześnie powiększymy czterokrotnie ich efektywną szybkostrzelność. Współczynnik  $\mathcal{K}$  przy tym się nie zmieni. Dlatego też i rozwój walki w umownym czasie  $\tau$ , wynikający ze wzorów /3.17/ nie ulega zmianie. Jednak rozwój walki w realnym czasie  $t$  zmieni się, rozwój jej będzie dwukrotnie szybszy, gdyż wzrośnie dwa razy współczynnik  $\sqrt{\lambda_1 \wedge \lambda_2}$ .

Zauważmy, że wniosek ten nie jest uniwersalny i odnosi się nie do dowolnego przeciwdziałania. Związane to z tym, że w rozpatrywanym modelu zakłada się możliwe swobodne przenoszenie ognia z celu rażonego na cel nierażony. Przyjmuje się przy tym, że niezbędną do tego informacją, które cele zostały rażone, jest dostępna każdej ze stron i przeniesienie ognia jest natychmiastowe.

Na rys. 3.1 pokazana jest zależność krzywych  $\mathcal{N}_1$  i  $\mathcal{N}_2$  od umownego czasu  $\tau$  dla różnych wartości współczynnika ogólnej przewagi  $\mathcal{K}$ , strona I umownie jest rozpatrywana jako "zwycięska". Przy  $\mathcal{K} = 1$  krzywe  $\mathcal{N}_1$  i  $\mathcal{N}_2$  pokrywają się. Przy  $\mathcal{K} > 1$  krzywa  $\mathcal{N}_1$  po pewnym czasie  $\tau$  ma przebieg równoległy do osi odciętych /siły strony I nie ubywają/, a krzywa  $\mathcal{N}_2$  łączy się z osią  $\tau$  /siły strony II są zniszczone całkowicie/. Zauważmy, że krzywe  $\mathcal{N}_2$  przecinają oś odciętych pod pewnym kątem, jeśli by je przedłużać dalej, wówczas przeszłyby one do obszaru ujemnego, podczas gdy wiadomo, że część ocalałych jednostek nie może być wartością ujemną. Nieścisłość ta wynika stąd, że wykorzystywany w rozważaniach aparat matematyczny /uwzględniający przyjęte założenia, w szczególności e / jest przydatny tylko w tych etapach walki, gdy liczba ocalałych jednostek bojowych jest duża i nie nadaje się do analizy "etapu wyniszczenia" /gdy siły jednej ze stron są znikome/. W rzeczywistości krzywe  $\mathcal{N}_2$  będą zbliżały się do osi odciętych łagodnie /asymptotycznie/. Jednakże obliczenia wskazują, że przy dostatecznie licznych grupach /liczba jednostek rzędu 50 i więcej/ różnice

między rzeczywistą krzywą i krzywą otrzymaną z rozwiązania równań Lanchestera są nieznaczne i stąd przy orientacyjnym określaniu momentu "praktycznie pełnego zniszczenia" pokonanej strony, można posługiwać się krzywymi z rys. 3.1.

Rozpatrzmy kilka przykładów.

### Przykład 3.1

Dwie strony, I i II, posiadają po 1000 jednostek bojowych. Efektywna szybkostrzelność jest jednakowa /  $\Lambda_1 = \Lambda_2$ /. Przyjmijmy, że w pierwszym starciu uczestniczą wszystkie siły strony I i połowa sił strony II, w drugim starciu uczestniczą siły strony I, pozostałe po pierwszym starciu i druga połowa sił strony II.

Określić nadzieję matematyczną liczby pozostałych jednostek bojowych strony I po dwóch starciach, jeśli każde starcie jest prowadzone do momentu zniszczenia strony słabszej.

### Rozwiązanie:

Współczynnik ogólnej przewagi strony I w pierwszym starciu wynosi

$$\chi = \frac{M_1}{N_2} \sqrt{\frac{\Lambda_1}{\Lambda_2}} = \frac{1000}{500} \sqrt{1} = 2$$

Znajdźmy umowny czas, gdy nadzieja matematyczna pozostałych jednostek bojowych strony II w pierwszym starciu będzie równa zero.

Z równania  $M_2 = \cosh \tau - \chi \sinh \tau$ , kładąc  $M_2 = 0$  mamy

$$0 = \cosh \tau - \chi \sinh \tau,$$
$$\cosh \tau = \chi \sinh \tau$$

Dzieląc stronami przez  $\chi \cosh \tau$  otrzymujemy

$$\frac{1}{\chi} = \operatorname{tg} h \tau$$

a stąd

$$\tau = \operatorname{artgh} \frac{1}{\chi} \quad \text{czyli } \tau = \operatorname{artgh} \frac{1}{2}$$

Z tablic wartości funkcji hiperbolicznych znajdujemy  $\tau = 0,55$ .

Obliczamy nadzieję matematyczną części pozostałych jednostek bojowych strony I po pierwszym starciu:

$$M_1 = \cosh \tau - \frac{1}{\chi} \sinh \tau,$$

Kładąc obliczoną wartość  $\tau$  otrzymamy

$$M = \cosh 0,55 - \frac{1}{2} \sinh 0,55 = 0,866$$

Zatem nadzieja matematyczna liczby pozostałych jednostek bojowych

strony I po pierwszym starciu wynosi

$$\mathcal{H}_1 = \frac{m_1}{N_1}, \quad m_1 = \mathcal{H}_1 N_1, \quad m_1 = 0,866 \cdot 1000 = 866.$$

Współczynnik ogólnej przewagi strony I w drugim starciu jest równy:

$$\mathcal{K} = -\frac{866}{500} \sqrt{1} = 1,732$$

Umowny czas, po którym strona I odniesie zwycięstwo w drugim starciu wynosi:

$$\tau = \operatorname{artgh} \frac{1}{\mathcal{K}} = \operatorname{artgh} \frac{1}{1,732} = \operatorname{artgh} 0,59 = 0,68$$

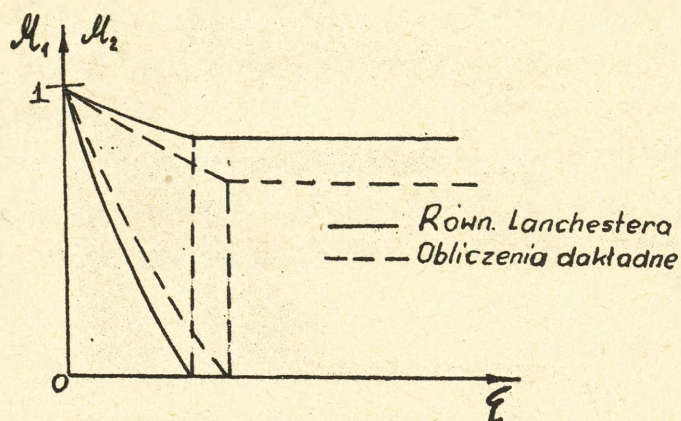
Nadzieja matematyczna liczby pozostałych jednostek bojowych strony I po drugim starciu jest równa:

$$\begin{aligned} \mathcal{H}_1 &= \cos h 0,68 - 0,59 \sin h 0,68 = 0,8095, \\ m_1 &= 866 \cdot 0,8095 = 701. \end{aligned}$$

Tak więc, jeśli strona II organizuje działania bojowe tak jak zostało podane, to traci ona wszystkie swoje siły, podczas gdy stronie I pozostanie średnio 701 jednostek bojowych.

Ponieważ przy wyprowadzaniu równań Lanchestera było poczynione założenie, że ogólna efektywność bojowa każdej ze stron jest proporcjonalna do nadziei matematycznej liczby ocalałych jednostek bojowych, stąd przy określaniu wartości  $\mathcal{H}_1$  i  $\mathcal{H}_2$  dopuszczamy błąd metodyczny. Błąd ten wynika z nieuwzględnienia przypadku, że do momentu  $t$  może być rażona większa lub mniejsza ilość jednostek od wartości średniej.

Jakościowy charakter zmian wartości  $\mathcal{H}_1$  i  $\mathcal{H}_2$  przy określaniu ich z równań Lanchestera i dokładnym obliczeniu pokazany jest na rys. 3.2.



Rys. 3.2

Przykład 3.2

Pięć dział przeciwpancernych strony I prowadzi walkę z trzema czołgami strony II. Efektywne szybkostrzelności jednostek bojowych są równe  $\lambda_1 = \lambda_2 = 1$ .

Określić nadzieję matematyczną liczby pozostałych jednostek bojowych strony I po zakończeniu walki.

Rozwiązanie.

Określamy współczynnik ogólnej przewagi strony I nad stroną II.

$$\kappa = \frac{N_1}{N_2} \sqrt{\frac{\lambda_1}{\lambda_2}} = \frac{5}{3}$$

Umowny czas, gdy  $N_2 = 0$ , wynosi

$$\tau = \operatorname{artgh} \frac{1}{\kappa} = \operatorname{artgh} 0,6 = 0,693$$

Nadzieja matematyczna liczby pozostałych jednostek bojowych strony I jest równa:

$$N_1 = \cos h 0,693 - 0,6 \sin h 0,693 = 0,8$$

$$m_1 = N_1 N_1 = 5 \cdot 0,8 = 4.$$

Przy dokładnym rozwiązaniu tego zadania otrzymujemy  $m_1 = 3,54$ .

Przykład 3.3

Rozpatrzmy walkę między dwiema grupami czołgów: strona I w składzie 50 i strona druga w składzie 25 czołgów. Czołgi strony II posiadają szybkostrzelność /uwzględniając czas na przeniesienie ognia/ równą 0,25 strzałów na minutę; średnie prawdopodobieństwo rażenia celu wynosi  $p_1 = 0,56$ . Czołgi strony II posiadają szybkostrzelność 0,5 strzałów na minutę;  $p_2 = 0,5$ . Dokonać prognozy rozwoju walki; wskazać stronę zwycięską, orientacyjny czas zakończenia walki o oczekiwane straty zwycięskiej strony.

Rozwiązanie:

Określamy współczynnik ogólnej przewagi stron.

$$\mathcal{K} = \frac{N_1}{N_2} \sqrt{\frac{\Lambda_1}{\Lambda_2}}$$

$$N_1 = 50; N_2 = 25; \Lambda_1 = \lambda_1 p_1; \Lambda_2 = \lambda_2 p_2;$$

$$\lambda_1 = 0,25; \lambda_2 = 0,5.$$

$$\Lambda_1 = 0,25 \cdot 0,56 = 0,14$$

$$\Lambda_2 = 0,5 \cdot 0,5 = 0,25$$

$$\mathcal{K} = \frac{50}{25} \sqrt{\frac{0,14}{0,25}} \approx \frac{2 \cdot 0,374}{0,5} \approx 1,5$$

Ponieważ  $\mathcal{K} > 1$ , zwycięstwo odniesie strona I.

Określamy umowny czas zakończenia walki.

$$\tau_k = \operatorname{artgh} \frac{1}{\mathcal{K}} = \operatorname{artgh} \frac{1}{1,5} \approx 0,8$$

Lecz  $\tau_k = t \sqrt{\Lambda_1 \Lambda_2}$ , stąd rzeczywisty czas zakończenia walki /w minutach/ wyniesie:

$$t_k = \frac{\tau_k}{\sqrt{\Lambda_1 \Lambda_2}} = \frac{0,8}{\sqrt{0,14 \cdot 0,25}} = \frac{0,8}{0,187} = 4,28 \text{ (min.)}$$

Obliczamy nadzieję matematyczną części pozostałych sił strony I:

$$\mathcal{H}_1 = \cos h 0,8 - 0,66 \sin h 0,8 = 1,3374 - 0,66 \cdot 0,8881 = 0,75.$$

Stąd nadzieja matematyczna ilości pozostałych sił strony I wynosi:

$$m_1 = N_1 \mathcal{H}_1 = 50 \cdot 0,75 = 37,5.$$

Straty strony zwycięskiej wyniosą:

$$\Delta N_1 = N_1 / 1 - \mathcal{H}_1 = 50 - 0,25 = 12,5$$

Przykład 3.4

Do odparcia nalotu grupy 9 samolotów bombowych używa się 12 samolotów myśliwskich. Efektywna szybkostrzelność myśliwca wynosi 0,04 wystrzały na minutę / $\Lambda_1 = 0,04$ /, bombowca - 0,03 wystrzały na minutę.

Określić nadzieję matematyczną liczby pozostałych bombowców po 5 min. od momentu rozpoczęcia walki oraz straty strony zwycięskiej po zakończeniu walki.

Rozwiązanie:

Współczynnik ogólnej przewagi wynosi:

$$\mathcal{X} = \frac{N_1}{N_2} \sqrt{\frac{\Lambda_1}{\Lambda_2}} = \frac{12}{9} \sqrt{\frac{0,04}{0,03}} = 1,54.$$

$\mathcal{X} > 1$  - zwycięstwo odnoszą myśliwce

Umowny czas, odpowiadający 5 min:

$$\tau = t \sqrt{\Lambda_1 \Lambda_2} = 5 \cdot \sqrt{0,04 \cdot 0,03} = 0,173$$

Nadzieja matematyczna liczby pozostałych bombowców:

$$\mathcal{H}_2 = \cos h 0,173 - 1,54 \sin h 0,174 = 1,015 - 1,54 \cdot 0,173 = 0,75,$$

$$m_2 = N_2 \cdot \mathcal{H}_2 = 9 \cdot 0,75 = 6,75.$$

Określamy umowny czas zakończenia walki /  $\tau_2 = 0$  /

$$\tau = \operatorname{artgh} \frac{1}{\mathcal{X}} = \operatorname{artgh} \frac{1}{1,54} = 0,78.$$

Nadzieja matematyczna liczby pozostałych myśliwców

$$\mathcal{H}_1 = \cos h 0,78 - 0,65 \sin h 0,78 = 0,76.$$

Straty myśliwców wynoszą:

$$\Delta N_1 = N_1 / 1 - \mathcal{H}_1 / = 12 / 1 - 0,76 / = 2,9.$$

Przykład 3.5

Szybkostrzelność samolotu myśliwskiego wynosi 2 strzały w ciągu jednostki czasu, a prawdopodobieństwo rażenia samolotu przeciwnika przy jednym strzale wynosi 0,25.

Samolot przeciwnika w tym samym czasie może oddać 3 strzały, a prawdopodobieństwo rażenia samolotu przeciwnika jednym strzałem wynosi 0,12. Należy stoczyć walkę z grupą 12 samolotów przeciwnika.

Określić wymaganą ilość samolotów myśliwskich, przy której będzie zapewniona ogólna przewaga myśliwców.

Rozwiązanie:

Ponieważ warunkiem uzyskania przewagi jest posiadanie takiej ilości samolotów myśliwskich  $N_1$ , aby zachodziła nierówność  $\mathcal{K} > 1$ , stąd otrzymujemy

$$\frac{N_1}{N_2} \sqrt{\frac{\Lambda_1}{\Lambda_2}} > 1,$$

a po oczywistych przekształceniach otrzymamy

$$\frac{N_1}{N_2} > \sqrt{\frac{\Lambda_1}{\Lambda_2}}$$

gdyż wszystkie wartości są ujemne.

Określamy efektywną szybkostrzelność stron:

$$\Lambda_1 = \lambda_1 p_1 = 2 \cdot 0,25 = 0,5;$$

$$\Lambda_2 = \lambda_2 p_2 = 3 \cdot 0,12 = 0,36.$$

Współczynnik przewagi ogniowej jest równy:

$$\alpha = \frac{\Lambda_1}{\Lambda_2} = \frac{0,5}{0,36} = 1,39,$$

a wymagana ilość samolotów myśliwskich wynosi

$$N_1 > \sqrt{\frac{12}{1,39}}, \text{ więc } N_1 > 10.$$

Rozpatrzmy obecnie wpływ różnych czynników, od których zależy powodzenie w walce. Przedstawiony model walki o zależności kwadratowej jest na tyle elastyczny, że pozwala prognozować rozwój walki uwzględniając czynniki wpływające na jej ostateczny rezultat.

4. Wpływ uderzenia uprzedzającego

Założmy, że strona I może wykonać uderzenie uprzedzające o pewien odcinek czasu  $t'$  wcześniej, niż strona II rozpocznie działania bojowe. Strona II po czasie  $t'$  od razu wprowadza do walki wszystkie swoje siły.

Równania /3.2/ przy uwzględnieniu tego czynnika będą miały następującą postać:

- przy  $t < t'$ :

$$\frac{dm_1}{dt} = 0, \quad /3.18/$$

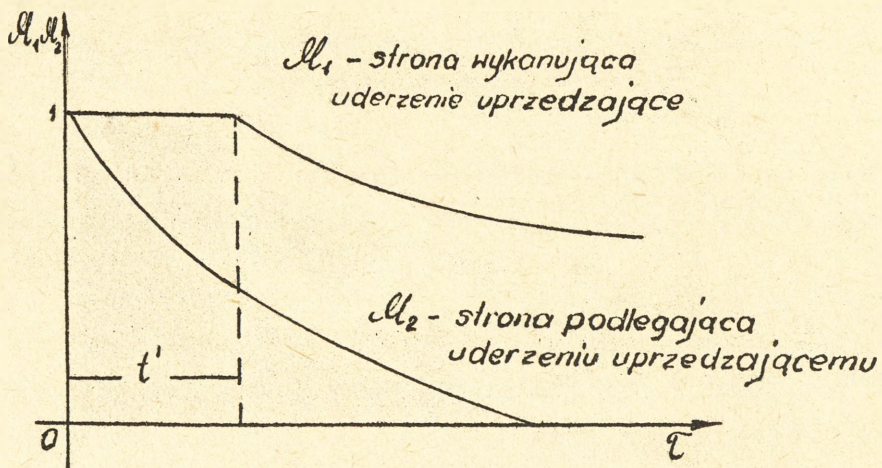
$$\frac{dm_2}{dt} = - \Lambda_1 N_1,$$

- przy  $t > t'$ :

$$\frac{dm_1}{dt} = - \Lambda_2 m_2, \quad /3.19/$$

$$\frac{dm_2}{dt} = - \Lambda_1 m_1$$

Rozwiązanie tych równań charakteryzuje proces rozwoju walki, gdy jedna ze stron wykonuje uderzenie uprzedzające. Jakościowa charakterystyka rozwoju walki jest przedstawiona na rys. 3.3.



Rys. 3.3.

Strona wykonująca uderzenie uprzedzające, niszczy siły strony przeciwnej i tym samym zmienia współczynnik ogólnej przewagi na swoją korzyść. Dlatego nawet strona słabsza, przy wykonaniu uderzenia uprzedzającego, może zwyciężyć.

Oczekiwane straty w czasie uderzenia uprzedzającego określamy przy pomocy następujących zależności:

$$\Delta N_2 = \Lambda_1 N_1 t' \quad \text{/uderzenie uprzedzające wykonuje strona I/}$$
$$\Delta N_1 = \Lambda_2 N_2 t' \quad \text{/uderzenie uprzedzające wykonuje strona II/}$$

### Przykład 3.6

Grupa składająca się z 8 samolotów /strona II/ atakuje 6 samolotów strony I. W rezultacie niespodziewanego ataku strony I, samoloty strony II mogą otworzyć ogień odwetowy nie wcześniej niż po 6 min. Efektywna szybkostrzelność samolotów obu stron jest równa i wynosi 0,1 /  $\Lambda_1 = \Lambda_2 = 0,1$ /. Określić ogólną przewagę stron w momencie rozpoczęcia ataku przez stronę I i w momencie rozpoczęcia działań odwetowych przez stronę II.

Rozwiązanie:

Współczynnik ogólnej przewagi w momencie rozpoczęcia walki:

$$\mathcal{K} = \frac{6}{8} \sqrt{1} = 0,75.$$

Ponieważ  $\mathcal{K} < 1$ , przewagę posiada strona II.

Oczekiwane straty strony II w czasie uderzenia uprzedzającego wynoszą:

$$\Delta N_2 = \Lambda_1 N_1 t' = 0,1 \cdot 6 \cdot 6 = 3,6$$

Współczynnik ogólnej przewagi w momencie rozpoczęcia działań odwetowych przez stronę II:

$$\mathcal{K}' = \frac{N_1}{N_2 - \Delta N_2} \sqrt{\frac{\Lambda_1}{\Lambda_2}} = \frac{6}{8 - 3,6} \sqrt{1} = 1,36$$

Tak więc wykonanie uderzenia uprzedzającego zmienia współczynnik ogólnej przewagi na korzyść strony I, od wartości  $\mathcal{K} = 0,75$  do  $\mathcal{K}' = 1,36$ .

### Przykład 3.7

Strona I posiada 20 jednostek bojowych, a strona II - 30 jednostek bojowych. Efektywna szybkostrzelność jednostek bojowych obu stron jest równa i wynosi 5 strzałów na godzinę /  $\Lambda_1 = \Lambda_2 = 5$  /

Określić na ile wcześniej strona I powinna wykonać uderzenie uprzedzające, aby nie przegrać starcia.

Rozwiązanie:

Ponieważ  $\mathcal{K}_1 = \Lambda_2$ , to strona I nie przegra starcia w tym przypadku, jeśli zniszczy ona 10 jednostek bojowych strony II, nie tracąc żadnej swojej jednostki. W tym przypadku współczynnik ogólnej przewagi  $\mathcal{K}$  będzie równy jedności. Z kolei należy określić czas, w ciągu którego strona II straci 10 jednostek bojowych.

Całkując równanie  $\frac{dm_2}{dt} = -\Lambda_1 N_1$  otrzymujemy

$$m_2 = -\Lambda_1 N_1 t' + C$$

Z warunków początkowych  $t' = 0$ ,  $m_2 = N_2$  znajdujemy  $C = N_2$ .  
Stąd

$$m_2 = N_2 - \Lambda_1 N_1 t'$$

$$t' = \frac{N_2 - m_2}{\Lambda_1 N_1} = \frac{30 - 20}{5 \cdot 20} = 0,1.$$

Strona I powinna więc wykonać uderzenie uprzedzające na 0,1 godz. wcześniej od momentu rozpoczęcia walki.

5. Wpływ uzupełniania sił w procesie walki.

Model walki Lanchestera pozwala również uwzględnić wpływ uzupełniania sił /wprowadzania odwołów/ na proces rozwoju walki. Jeżeli uzupełnianie sił odbywa się w sposób dyskretny, wówczas zadanie rozwiązuje się przy pomocy wzorów /3.17/. Przy tym do momentu wprowadzania świeżych sił, współczynnik ogólnej przewagi  $\mathcal{K}$  będzie odpowiadał stosunkowi sił na początku walki. Aby opisać rozwój walki po uzupełnieniu sił, należy określić nowy współczynnik ogólnej przewagi  $\mathcal{K}'$ , odpowiadający nowemu stosunkowi sił i rozwiązać zadanie znanymi metodami.

Jeśli natomiast uzupełnianie sił dokonuje się w sposób ciągły, przy czym strony wprowadzają w jednostce czasu następujące ilości jednostek bojowych:

-  $n_1$  - ilość wprowadzanych jednostek strony I;

-  $n_2$  - ilość wprowadzanych jednostek strony II;

wówczas zamiast równania /3.1/ możemy napisać nowy wzór na przyrost nadziei matematycznej liczby ocalałych jednostek strony I za czas  $\Delta t$ ;

$$\Delta m_1 = -\Lambda_2 m_2 \Delta t + n_1 \Delta t$$

W wyrażeniu tym pierwszy, ujemny, człon przedstawia zmianę /ubytek/ jednostek bojowych w wyniku oddziaływania przeciwnika, drugi, dodatni - zmianę /wzrost ilości/ na skutek wprowadzania świeżych sił.

Dzieląc to wyrażenie przez  $\Delta t$  i przechodząc do granicy przy  $\Delta t \rightarrow 0$ , otrzymujemy:

$$\frac{dm_1}{dt} = -\Lambda_2 m_2 + n_1$$

Dokonując analogiczne rozważania w odniesieniu do  $m_2$ , otrzymujemy układ równań różniczkowych:

$$\frac{dm_1}{dt} = -\Lambda_2 m_2 + n_1 \quad /3.20/$$

$$\frac{dm_2}{dt} = -\Lambda_1 m_1 + n_2$$

Jeżeli  $n_1$  i  $n_2$  są constans, wówczas rozwiązanie układu równań /3.20/ ma postać:

$$\begin{aligned} \mathcal{H}_1 &= \cosh \tilde{t} - \frac{1}{\mathcal{K}} \sin h \tilde{t} + a / k \sin h \tilde{t} - \cosh \tilde{t} + 1 / \\ \mathcal{H}_2 &= \cosh \tilde{t} - \mathcal{K} \sinh \tilde{t} + b / -\frac{1}{\mathcal{K}} \sin h \tilde{t} - \cos h \tilde{t} + 1 / \end{aligned} \quad /3.21/$$

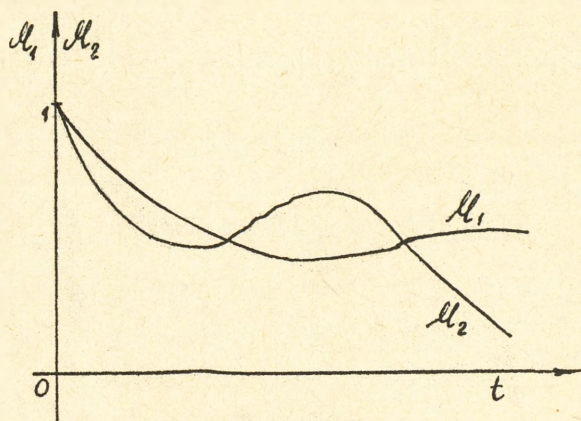
gdzie  $\mathcal{K} = \frac{n_1}{n_2} \sqrt{\frac{\Lambda_1}{\Lambda_2}}$  - współczynnik przewagi wprowadzanych sił;

$a = \frac{n_2}{\Lambda_1 N_1}$ ;  $b = \frac{n_1}{\Lambda_2 N_2}$  - współczynniki charakteryzujące odnośne tempo wprowadzanych sił.

/Znaczenie pozostałych symboli w /3.21/ jest analogiczne jak we wzrach /3.17/.

Względniając uzupełnienie sił, krzywe  $\mathcal{H}_1 /t/$  i  $\mathcal{H}_2 /t/$  będą miały zupełnie inny kształt niż uprzednio, na przykład taki jak pokazano na rys. 3.4.

Kształt krzywych będzie zależał od tego, w jakich ilościach, w jakich odcinkach czasu i w jakim tempie są uzupełniane siły.



Rys 3.4.

#### 6. Wpływ tempa mobilizacji sił

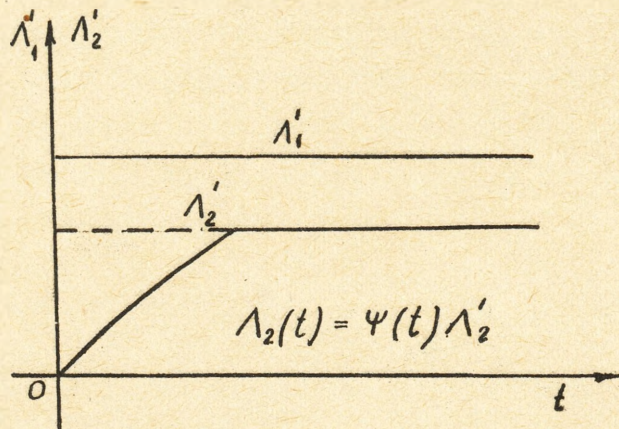
Przyjmijmy, że strona I rozpoczyna działania bojowe, efektywna szybkostrzelność jej jednostek równa jest  $\Lambda'_1$ . Strona II mobilizuje swoje siły z określonym tempem. Przy czym efektywna szybkostrzelność jej jednostek bojowych rośnie zgodnie z określonym prawem:

$$\Lambda_2 / t / = \psi / t / \Lambda'_2$$

gdzie  $\psi / t /$  - funkcja czasu, charakteryzująca zmianę efektywnej szybkostrzelności;

$\Lambda'_2$  - efektywna szybkostrzelność jednostek bojowych strony II po zakończeniu mobilizacji sił.

Charakter zmiany efektywnej szybkostrzelności jednostek bojowych stron jest pokazany na rys. 3.5.



Rys. 3.5

Równania /3.2/, uwzględniając tempo mobilizowanych sił, przyjmą postać:

$$\frac{dm_1}{dt} = -m_2 \cdot \psi(t) \Lambda'_2$$

$$\frac{dm_2}{dt} = -m_1 \Lambda'_1$$

/3,22/

Rozwiązując układ tych równań, można określić wymagane tempo mobilizacji sił niezbędne dla pomyślnego rozstrzygnięcia walki oraz wpływ tempa mobilizacji na stosunek sił w procesie rozwoju działań.

Wydawać by się mogło, że wpływ tempa mobilizacji sił na rozwój walki powinien być uwzględniany analogicznie jak i wpływ uzupełniania sił. Jednakże tak nie jest. Niezmobilizowane siły do momentu  $t$  mogą być rażone ogniem przeciwnika, same nie prowadząc żadnej działalności. Natomiast świeże siły /odwody/ wprowadzane do walki podlegają oddziaływaniu przeciwnika w momencie ich wprowadzenia, przy czym same również mogą prowadzić działalność ogniową. Dlatego też wskazane czynniki są uwzględniane odmiennymi metodami.

7. Wpływ strat operacyjnych

Przez pojęcie "straty operacyjne" rozumiemy straty niebojowe np.: ubytki naturalne, fizyczne zużycie sprzętu, moralne zużycie sprzętu itp.

Uwzględniając te straty równania /3.2/ przyjmą postać:

$$\begin{aligned} \frac{dm_1}{dt} &= -\Lambda_2 m_2 - \eta_1 m_1, \\ \frac{dm_2}{dt} &= -\Lambda_1 m_1 - \eta_2 m_2 \end{aligned} \quad /3.23/$$

gdzie  $\eta_1$  - straty operacyjne strony I w jednostce czasu;  
 $\eta_2$  - straty operacyjne strony II w jednostce czasu.

Z równań tych wynika, że straty operacyjne są przyjmowane jako proporcjonalne do ilości jednostek bojowych, co jest w pełni uzasadnione.

Całkując układ równań /3.2.3/ i kładąc warunki początkowe:  $t = 0, m_1 = N_1, m_2 = N_2$  otrzymujemy:

$$\begin{aligned} M_1 &= e^{-rt} \left\{ \cosh st - \frac{1}{s} \left[ \frac{N_2 \Lambda_2}{N_1} + \frac{1}{2} (\eta_1 - \eta_2) \right] \sinh st \right\}, \\ M_2 &= e^{-rt} \left\{ \cosh st - \frac{1}{s} \left[ \frac{N_1 \Lambda_1}{N_2} + \frac{1}{2} (\eta_2 - \eta_1) \right] \sinh st \right\}. \end{aligned} \quad /3.24/$$

gdzie  $r = \frac{1}{2} (\eta_1 + \eta_2)$ ;  
 $s = \left[ \Lambda_1 \Lambda_2 + \frac{1}{4} (\eta_1 + \eta_2)^2 \right]^{\frac{1}{2}}.$

Rozumując podobnie jak przy analizie równań /3.17/ dojdziemy do wniosku, że warunkiem odniesienia zwycięstwa przez stroną I jest zachodzenie nierówności:

$$\frac{1}{s} \left[ \frac{N_1 \Lambda_1}{N_2} + \frac{1}{2} (\eta_2 - \eta_1) \right] > 1. \quad /3.25/$$

Mnożąc tę nierówność stronami przez  $s$  otrzymujemy:

$$\frac{N_1 \Lambda_1}{N_2} + \frac{1}{2} (\eta_2 - \eta_1) > \left[ \Lambda_1 \Lambda_2 + \frac{1}{4} (\eta_1 + \eta_2)^2 \right]^{\frac{1}{2}}$$

Po podniesieniu stronami do kwadratu mamy:

$$\frac{N_1^2 \Lambda_1^2}{N_2^2} + \frac{N_1 \Lambda_1}{N_2} (\eta_2 - \eta_1) + \frac{1}{4} (\eta_2 - \eta_1)^2 > \Lambda_1 \Lambda_2 + \frac{1}{4} (\eta_1 + \eta_2)^2$$

Dokonując redukcji i dzieląc stronami przez  $\Lambda_1 \Lambda_2$  otrzymujemy nierówności:

$$\frac{N_1^2 \Lambda_1^2}{N_2^2 \Lambda_2} + \frac{N_1}{N_2 \Lambda_2} (\eta_2 - \eta_1) > 1,$$

lub

$$\frac{N_1^2 \Lambda_2}{N_2^2 \Lambda_1} > 1 + \frac{N_1}{N_2 \Lambda_1} (\eta_1 - \eta_2)$$

Mnożąc stronami przez  $\frac{N_2 \Lambda_2}{N_1}$  dostajemy

$$\frac{N_1 \Lambda_1}{N_2} - \eta_1 > \frac{N_2 \Lambda_2}{N_1} - \eta_2 \quad /3.26/$$

Otrzymaliśmy zatem podstawowy warunek konieczny dla uzyskania przewagi ogólnej strony I nad II, a tym samym odniesienia zwycięstwa.

Łatwo sprawdzić, że w przypadku  $\eta_1 = \eta_2 = 0$  /a więc gdy nie ma strat operacyjnych/, nierówność /3.26/ można sprowadzić do podstawowej nierówności wynikającej z modelu walki Lanchestera o zależności kwadratowej, a mianowicie

$$\frac{N_1}{N_2} \sqrt{\frac{\Lambda_1}{\Lambda_2}} > 1$$

W rzeczy samej, kładąc do /3.26/  $\eta_1 = 0, \eta_2 = 0$ , następnie mnożąc stronami przez  $\frac{N_1}{N_2 \Lambda_2}$  i pierwiastkując, otrzymujemy wspomnianą nierówność:

### Przykład 3.8

Określić stronę zwycięską, czas zakończenia walki oraz oczekiwane straty zwycięzcy mając dane:

$$\begin{array}{lll} \Lambda_1 = 1; & \eta_1 = 1; & N_1 = 30; \\ \Lambda_2 = 8; & \eta_2 = 3; & N_2 = 10. \end{array}$$

### Rozwiązanie:

Określamy stronę zwycięską korzystając z nierówności /3.26/.

Kładąc odpowiednie dane otrzymujemy:

$$\frac{30 \cdot 1}{10} - 1 > \frac{10 \cdot 8}{30} - 3,$$

$$2 > -\frac{1}{3}$$

ponieważ ma miejsce nierówność /3.26/ przeto zwycięska będzie strona I.

Czas zakończenia walki  $t_k$  obliczamy z drugiego równania /3.24/.

Kładąc  $\mathcal{H}_2 = 0$  otrzymujemy

$$0 = e^{-rt} \left\{ \cosh st_k - \frac{1}{S} \left[ \frac{N_1 \Lambda_1}{N_2} + \frac{1}{2} (\eta_2 - \eta_1) \right] \sinh st_k \right\}.$$

Dzielimy stronami przez  $e^{-rt} \cdot \cos h st_k$ , mamy

$$0 = 1 - \frac{1}{S} \left[ \frac{N_1 \Lambda_1}{N_2} + \frac{1}{2} (\eta_2 - \eta_1) \right] \operatorname{tg} h st_k,$$

skąd po prostych przekształceniach wyznaczamy  $t_k$

$$t_k = \frac{1}{s} \operatorname{artgh} \frac{s}{\frac{N_1 \Lambda_1}{N_2} + \frac{1}{2} (\eta_2 - \eta_1)}.$$

Kładąc odpowiednie wartości dostajemy

$$t_k = \frac{1}{\left[ 1.8 + \frac{1}{4} (3-1)^2 \right]^{\frac{1}{2}}} \operatorname{artgh} \frac{\left[ 1.8 + \frac{1}{4} (3-1)^2 \right]^{\frac{1}{2}}}{\frac{30 \cdot 1}{10} + \frac{1}{3} (3-1)},$$

czyli

$$t_k = \frac{1}{3} \operatorname{artgh} \frac{3}{4}.$$

Z tablic wartości funkcji hiperbolicznych odnajdujemy

$$t_k = \frac{1}{3} \cdot 0,972$$

A więc czas zakończenia walki wynosi  $t_k = 0,324$  /odpowiednich jednostek czasowych/.

Określamy nadzieję matematyczną części pozostałych sił strony I. W tym celu kładziemy obliczony czas zakończenia walki oraz inne parametry do pierwszego równania układu /3.24/ i otrzymujemy

$$\begin{aligned} \mathcal{H}_1 &= e^{-2 \cdot 0,324} \left( \cosh 3 \cdot 0,324 - \frac{1}{3} \cdot \frac{5}{3} \sinh 3 \cdot 0,324 \right) = \\ &= e^{-0,628} \left( \cosh 0,972 - \frac{5}{9} \sinh 0,972 \right) = \\ &= 0,532 \left( 1,511 - \frac{5}{9} \cdot 1,132 \right), \end{aligned}$$

$$\mathcal{H}_1 = 0,468.$$

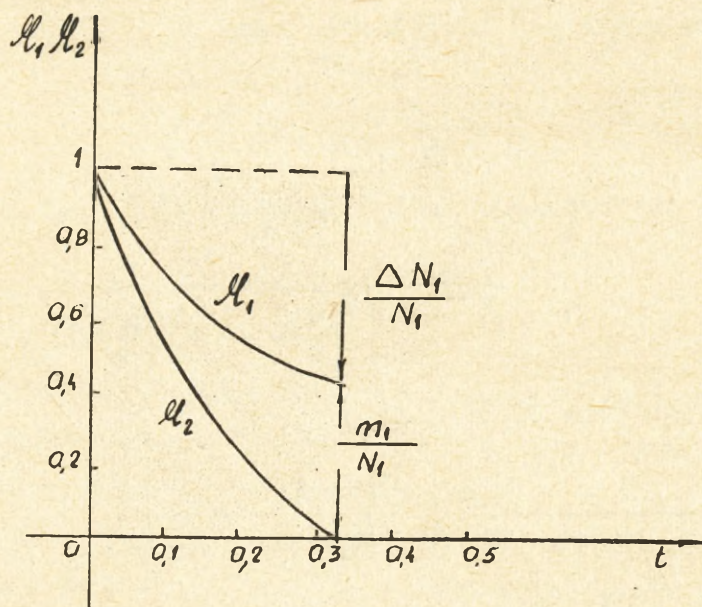
Stąd nadzieja matematyczna ilości pozostałych sił strony I wynosi:

$$m_1 = N_1 \mathcal{H}_1 = 30 \cdot 0,468 = 14.$$

Natomiast straty strony zwycięskiej wyniosą:

$$\Delta N_1 = N_1 / 1 - \mathcal{H}_1 / = 30 \cdot 0,532 = 16$$

Otrzymane rozwiązanie możemy przedstawić w postaci wykresu /rys.3.6/



Rys. 3.6.

### 8. Wpływ posiadanej ilości amunicji

Założmy początkowo, że zapas amunicji jest ściśle związany z jednostką bojową /zostaje niszczone razem z nią i nie może przechodzić na inną/ i jest wystarczający na prowadzenie ognia z określoną szybkostrzelnością w ciągu pewnego czasu; oznaczmy ten czas przez  $\tau_1$  dla strony I i  $\tau_2$  dla strony II.

Oczywiście

$$\tau_1 = \frac{k_1}{\lambda_1}, \quad \tau_2 = \frac{k_2}{\lambda_2}$$

gdzie  $k_1$  - zapas pocisków posiadanych przez każdą jednostkę bojową strony I;

$\lambda_1$  - średnia szybkostrzelność jednostki bojowej strony I;

$k_2, \lambda_2$  - analogiczne charakterystyki strony II.

Aby uwzględnić ograniczoność amunicji wystarczy przyjąć, o czasie  $\tau_1$  dla strony I i  $\tau_2$  dla strony II, intensywność działania równą zeru:

$$u_1 / t / = 0 \text{ przy } t > \tau_1,$$

$$u_2 / t / = 0 \text{ przy } t > \tau_2$$

Nieco inaczej będzie wyglądała sytuacja w przypadku, gdy istnieje możliwość uzupełniania wszystkich jednostek bojowych w amunicję.

Niech strona I posiada w składzie amunicyjnym po  $k_1$  pocisków na każdą jednostkę bojową, razem  $k_1 N_2 = M_1$  pocisków; strona II -  $k_2 N_2 = M_2$  pocisków. Przy zniszczeniu jednostki bojowej, zapas amunicji, przypadający na nią w składzie nie ulega zniszczeniu i zostaje rozdzielony między inne jednostki. Wówczas każda pozostała jednostka bojowa strony I będzie prowadziła ogień ze swoją szybkostrzelnością do takiego momentu  $\tilde{t}'_1$ , aż wyczerpie się cały zapas. Oczywiście /jeśli szybkostrzelność w pierwszym i drugim przypadku jest jednakowa/  $\tilde{t}'_1 > \tilde{t}_1$ , tzn, przy scentralizowanym rozdziale amunicji przerwanie ognia nastąpi później.

Znajdźmy wartość  $\tilde{t}'_1$ . Przypuśćmy, że w momencie  $t$  liczba pozostałych jednostek bojowych strony I jest równa  $m_1$ . Określmy średnią ilość pocisków, która będzie rozchodowana przez te jednostki w ciągu dowolnie krótkiego odcinka czasu  $dt$ . Każda jednostka za czas  $dt$  zużyje  $\lambda_1 dt$  pocisków,  $m_1$  jednostek -  $m_1 \cdot \lambda_1 dt$  pocisków. Aby określić ogólne średnie zużycie pocisków  $r_1$  do momentu  $t$ , należy obliczyć całkę

$$r_1 = \int_0^t m_1 \lambda_1 dt, \quad /3.27/$$

gdzie:  $m_1$  - zależna od  $t$  - średnia liczba jednostek bojowych pozostała w momencie  $t$ ;

$\lambda_1$  - średnia szybkostrzelność jednostki bojowej.

Wartość  $\tilde{t}'_1$  może być określona, jako taka wartość  $t$ , przy której całka /3.27/ jest równa całemu zapasowi amunicji  $k_1 N_1 = M_1$ ;

$$M_1 = \int_0^{\tilde{t}'_1} m_1 \lambda_1 dt \quad /3.28/$$

Analogiczna wartość  $\tilde{t}'_2$  dla strony II może być określona z zależności:

$$M_2 = \int_0^{\tilde{t}'_2} m_2 \lambda_2 dt \quad /3.29/$$

Praktycznie przy uwzględnianiu ograniczonego zapasu amunicji, można jednocześnie z całkowaniem równań /3.2/ obliczać całki:

$$r_1 = \int_0^t m_1 \lambda_1 dt, \quad r_2 = \int_0^t m_2 \lambda_2 dt;$$

przedstawiające zużycie pocisków przez strony do momentu  $t$  i przyjmować intensywność działania danej strony równą zeru, po tym, gdy całka osiągnie wartość równą całemu zapasowi amunicji.

9. Uwzględnienie jednoczesnego rażenia kilku jednostek przeciwnika

W dotychczasowych rozważaniach wychodziliśmy z założenia, że pojedynczy strzał skierowany na jedną jednostkę bojową może razić tylko tę jednostkę i nie może razić innych. Założenie to jest słuszne dla pocisków o bardzo małym promieniu rażenia lub w odniesieniu do celów bardzo rozśrodkowanych.

Nie przedstawia jednak trudności przybliżone uwzględnienie rażącego działania pocisków nie tylko w odniesieniu do danego celu, ale i do sąsiednich.

Przypuśćmy, że strzelanie prowadzi się do celu w pełni określonego i przy trafieniu w niego, rażony jest nie tylko ten cel, ale i kilka sąsiednich w granicach promienia rażenia pocisku R. Ocenimy średnią ilość tych "sąsiednich" jednostek przyjmując, że środek powierzchni rażenia pocisku przypada na każdą z jednostek bojowych i określając liczbę jednostek sąsiednich oraz uśredniając ją na całe zgrupowanie.

Oznaczmy przez:

- $d_1$  - średnia ilość jednostek strony I rażonych pośrednio /oprócz jednostki, do której prowadzi się ogień/;
- $d_2$  - analogiczna wielkość dla strony II.

Podobnie do rozważań w poprzednich punktach, możemy obliczyć średni ubytek jednostek strony I w jednostce czasu. Przyrost ten

$\Delta m_1$  składa się z dwóch członów:

- a/ średnia liczba jednostek bojowych rażonych bezpośrednim strzelaniem do nich;
- b/ średnia liczba jednostek rażonych pośrednio, wskutek dużego promienia rażenia pocisku.

Pierwsza liczba jest równa -  $\Lambda_2 m_2 \Delta t$ . Drugą liczbę można obliczyć następująco: bierzemy średnią liczbę jednostek rażonych pośrednio jednym pociskiem  $d_1$ , mnożymy tę liczbę przez ilość strzałów  $\Lambda_2 m_2 \Delta t$  i przez prawdopodobieństwo  $\frac{m_1}{N_1}$  tego, że

jednostka ta nie była rażona wcześniej, czyli otrzymamy

$$- d_1 \Lambda_2 m_2 \frac{m_1}{N_1} \Delta t$$

Z kolei będziemy mieli:

$$\Delta m_1 = -\Lambda_2 m_2 \Delta t \quad /1 + d_1 \frac{m_1}{N_1} /.$$

lub dzieląc przez  $\Delta t$  i przechodząc do granicy

$$\frac{dm_1}{dt} = -\Lambda_2 m_2 / 1 + d_1 \frac{m_1}{N_1} \quad /3.30/$$

i przez analogię

$$\frac{dm_2}{dt} = -\Lambda_1 m_1 / 1 + d_2 \frac{m_2}{N_2} \quad /3.31/$$

Przechodząc w równaniach /3.30/ i /3.31/ do zmiennych

$$\mathcal{H}_1 = \frac{m_1}{N_1}, \quad \mathcal{H}_2 = \frac{m_2}{N_2}$$

Otrzymujemy:

$$\frac{d\mathcal{H}_1}{dt} = -u_2 \mathcal{H}_2 - u'_2 \mathcal{H}_1 \mathcal{H}_2,$$

$$\frac{d\mathcal{H}_2}{dt} = -u_1 \mathcal{H}_1 - u'_1 \mathcal{H}_1 \mathcal{H}_2.$$

gdzie:  $u_1 = \frac{\Lambda_1 N_1}{N_2}$ ,  $u_2 = \frac{\Lambda_2 N_2}{N_1}$  - parametry

charakteryzujące działanie odpowiednich stron, w wyniku rażenia tylko ostrzeliwanych jednostek;

$$u'_1 = \Lambda_1 d_2 \frac{N_1}{N_2}, \quad u'_2 = \Lambda_2 d_1 \frac{N_2}{N_1} \quad \text{- parametry charaktery-}$$

zujące działanie odpowiednich stron, w wyniku pośredniego rażenia jednostek pociskiem dużej mocy.

Zastanówmy się w jaki sposób można określić średnią liczbę jednostek rażonych pośrednio.

Niech jednostki bojowe strony I będą rozmieszczone w określony sposób na pewnym obszarze. Opisujemy wokół każdej jednostki okręgi o promieniu rażenia pocisku R. Otrzymamy stąd w każdym przypadku pewną liczbę jednostek rażonych pośrednio. Biorąc średnią arytmetyczną liczby jednostek rażonych pośrednio, przy wszystkich możliwych położeniach środka rażenia pocisku, otrzymamy wielkość  $d_1$ .

W przypadku, gdy dokładne rozmieszczenie jednostek nie jest znane, a są one na całej powierzchni obszaru  $S_1$  rozmieszczone równomiernie, wówczas można przyjmować średnią liczbę jednostek

rażonych pośrednio  $d_1$  jako proporcjonalną powierzchni rażenia pocisku, tj. równą średniej części powierzchni obszaru rażonej jednym pociskiem, pomnożonej przez  $N_1 - 1$ .

#### IV. MODEL WALKI O ZALEŻNOSCI KWADRATOWEJ W UJĘCIU PROBABILISTYCZNYM

W poprzednim rozdziale omówiliśmy model walki pozwalający określić nadzieję matematyczną ilości pozostałych sił w dowolnym momencie czasu, wynikającą z deterministycznego charakteru tego modelu.

Obecnie sformułujemy równania, które umożliwią określenie prawdopodobieństwa różnej ilości pozostałych sił /rodków/ obu przeciwstawnych stron w dowolnym momencie rozwoju walki.

##### 1. Sformułowanie zadania

Problem formułujemy następująco:

- walka toczy się między dwoma przeciwstawnymi zgrupowaniami sił;
  - strona I posiada  $N_1$  jednorodnych jednostek bojowych;
  - strona II posiada  $N_2$  jednorodnych jednostek bojowych.
- /Jednostki bojowe jednej strony nie muszą być takie same, jak jednostki drugiej strony/;
- jednostka bojowa strony I razi jednostkę bojową strony II jednym "uogólnionym" strzałem z prawdopodobieństwem równym  $p_1$ ;
  - jednostka bojowa strony II razi jednostkę bojową strony I jednym "uogólnionym" strzałem z prawdopodobieństwem  $p_2$ .
- "Uogólnionym" strzałem nazywamy grupę strzałów objętą wspólną cechą, np. seria pocisków, seria bomb, salwa rakiet itp.
- "Uogólnione" strzały są niezależne:
- średnie szybkostrzelności jednostek bojowych stron są odpowiednio równe  $\lambda_1$  i  $\lambda_2$ .

Należy określić:

$$P_{kl} /t/, \quad /przy k = 0, 1, 2, \dots, N_1; \\ l = 0, 1, 2, \dots, N_2/$$

prawdopodobieństwo tego, że w momencie  $t$  strona pierwsza będzie posiadać  $k$  nierażonych jednostek bojowych, a strona II -  $l$  nierażonych jednostek bojowych.

Aby opisać proces walki dwóch zgrupowań przy pomocy równań różniczkowych przyjmujemy następujące założenia:

- każda jednostka bojowa jednej strony prowadzi celny ogień do jednostki bojowej drugiej strony i przy tym może być rażona tylko ta jednostka;
- przecelowywanie jest natychmiastowe, tj. po zniszczeniu jednej jednostki bojowej ogień natychmiast przenosi się na inną;
- ciąg "uogólnionych" strzałów każdej jednostki bojowej jest stałym poisson'owskim. Gęstości ciągów "uogólnionych" strzałów jednostek bojowych stron są odpowiednio równe  $\lambda_1$  i  $\lambda_2$ ;
- wystrzelony pocisk osiąga cel praktycznie natychmiast.

Ponieważ czas lotu pocisków jest bardzo krótki, informacja natychmiastowa, ciąg wystrzałów poisson'owski, to prawdopodobieństwo dowolnego przyszłego stanu systemu /każdy stan systemu charakteryzuje się liczbą pozostałych jednostek bojowych stron/ zależy tylko od momentu czasu  $t$  i nie zależy od tego, w jaki sposób system znalazł się w danym stanie /nie zależy od poprzedniego rozwoju procesu/. Tak więc w modelu tym proces walki jest przypadkowym procesem Markowa.

Okoliczność ta jest trzonem analitycznej metody analizy dynamiki walki. Bez tego niemożliwym by było opisanie procesu walki przy pomocy równań różniczkowych zwyczajnych.

## 2. Prawdopodobieństwo zmiany się w dowolnie małym odcinku czasu

Efektywną szybkostrzelność jednostek bojowych stron określamy analogicznie jak i w poprzednim rozdziale, tj. I i II strony odpowiednio:

$$\Lambda_1 = \lambda_1 p_1; \quad \Lambda_2 = \lambda_2 p_2$$

W interpretacji fizycznej, efektywna szybkostrzelność jednostki bojowej jest gęstością poisson'owskiego ciągu skutecznych strzałów lub inaczej, liczbą jednostek bojowych rażonych średnio w jednostce czasu.

Określimy prawdopodobieństwo tego, że w dowolnie małym odcinku czasu  $\Delta t$  każda ze stron nie dokonuje ani jednego rażącego strzału lub wykonuje jeden rażący strzał.

Ponieważ ciąg rażących strzałów każdej jednostki bojowej jest poisson'owski, to również i ciąg rażących strzałów wszystkich jednostek bojowych, np. strony I, będzie poisson'owski z gęstością

$$\Lambda_1 N_1.$$

Dlatego prawdopodobieństwo tego, że strona I za czas  $t$  nie wykona ani jednego rażącego strzału, jest równe

$$P_0^I = e^{-\Lambda_1 N_1 t},$$

a prawdopodobieństwo tego, że strona I za czas  $t$  wykona nie mniej niż jeden rażący strzał, jest równe

$$P_1^I = 1 - e^{-\Lambda_1 N_1 t}$$

Przyjmując  $t = \Delta t \rightarrow 0$ , rozwijamy  $e^{-\Lambda_1 N_1 \Delta t}$  w szereg:

$$e^{-\Lambda_1 N_1 \Delta t} = 1 + \frac{-\Lambda_1 N_1 \Delta t}{1!} + \frac{(-\Lambda_1 N_1 \Delta t)^2}{2!} + \dots$$

i ograniczając się tylko do dwóch pierwszych członów szeregu, otrzymujemy:

$$P_0^I = 1 - \Lambda_1 N_1 \Delta t,$$

- prawdopodobieństwo tego, że za  $\Delta t \rightarrow 0$  strona I nie wykona ani jednego rażącego strzału;

$$P_1^I = \Lambda_1 N_1 \Delta t,$$

- prawdopodobieństwo tego, że za  $\Delta t \rightarrow 0$  strona I wykona nie mniej niż jeden rażący strzał.

Ponieważ ciąg rażących strzałów jest poisson'owski, to prawdopodobieństwo tego, że za czas  $\Delta t \rightarrow 0$  zostaną wykonane dwa i więcej rażące strzały są wielkościami nieskończenie małymi drugiego i wyższego rzędu. Dlatego  $P_1^I = \Lambda_1 N_1 \Delta t$  można przyjmować jako prawdopodobieństwo tego, że za czas  $\Delta t \rightarrow 0$  strona I wykona jeden rażący strzał.

Dokonując analogicznych rozumowań, otrzymujemy:

$$P_0^{II} = 1 - \Lambda_2 N_2 \Delta t$$

- prawdopodobieństwo tego, że za czas  $\Delta t \rightarrow 0$  strona II nie wykona ani jednego rażącego strzału;

$$P_1^{II} = \Lambda_2 N_2 \Delta t,$$

- prawdopodobieństwo tego, że za czas  $\Delta t \rightarrow 0$  strona II wykona jeden rażący strzał.

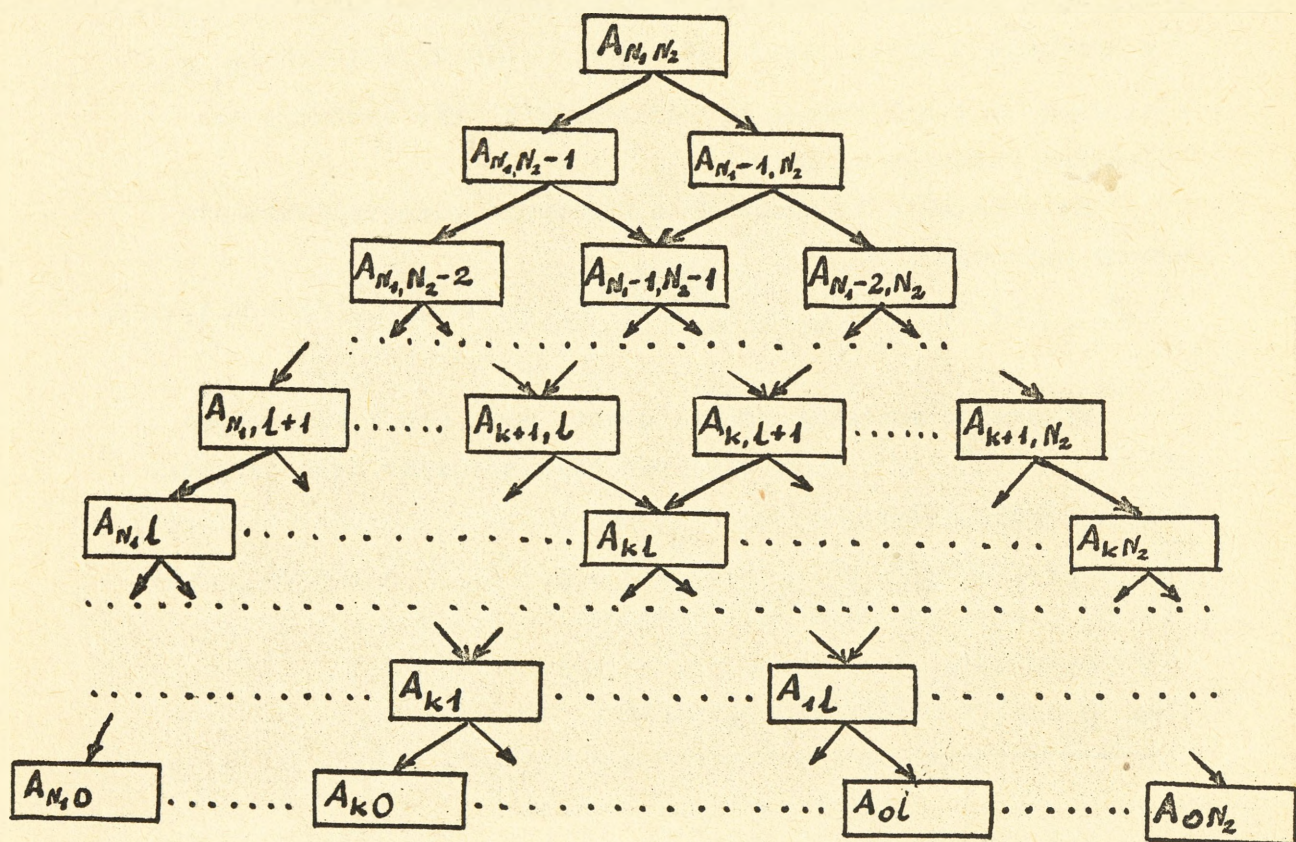
3. Równania różniczkowe charakteryzujące prawdopodobne stany procesu rozwoju walki.

Rozpatrzmy proces rozwoju walki jako przejście systemu środków bojowych z jednego stanu w drugi. Stan systemu będziemy oznaczać literą  $A$  z indeksami  $k, l$   $/A_{kl}/$ , gdzie

$k$  - liczba ocalałych jednostek bojowych strony I;

$l$  - liczba ocalałych jednostek bojowych strony II.

Na rys. 4.1 przedstawiony jest schemat możliwych stanów systemu; strzałkami pokazane są możliwe przejścia jednego stanu w drugi.



Rys. 4.1.

Właściwość tego schematu polega na tym, że nie ma ruchu zwrotnego, gdyż rażona jednostka nie wraca do szeregu, a uzupełnienie nie istnieje.

Wykorzystując przedstawiony schemat, zestawimy równania różniczkowe charakteryzujące prawdopodobieństwa różnych stanów systemu. Prawdopodobieństwo tego, że w momencie  $t$  system będzie znajdował się w stanie  $A_{kl}$  oznaczmy przez  $P_{kl}/t$ .

a/ Prawdopodobieństwo tego, że w momencie  $t + \Delta t$  system będzie się znajdował w stanie  $A_{N_1 N_2}$

System będzie się znajdował w stanie wyjściowym  $A_{N_1 N_2}$ , jeśli będą spełnione jednocześnie następujące warunki:

- w momencie  $t$  system znajduje się w stanie wyjściowym  $A_{N_1 N_2}$ ;
- za czas  $\Delta t$  ani strona I, ani strona II nie wykonują ani jednego rażącego strzału.

Na podstawie twierdzenia o iloczynie prawdopodobieństw możemy napisać:

$$P_{N_1 N_2}(t + \Delta t) = P_{N_1 N_2} P_0^I P_0^{II} = P_{N_1 N_2}(t) (1 - N_1 \Lambda_1 \Delta t) (1 - N_2 \Lambda_2 \Delta t).$$

Wykonując mnożenie prawej części równania i odrzucając człon  $\propto \Delta t^2$ , jako wielkość nieskończenie małą drugiego rzędu, otrzymujemy:

$$P_{N_1 N_2}/t + \Delta t/ = P_{N_1 N_2}/t / 1 - N_1 \Lambda_1 \Delta t - N_2 \Lambda_2 \Delta t/,$$

skąd

$$\frac{P_{N_1 N_2}/t + \Delta t/ - P_{N_1 N_2}/t}{\Delta t} = - (N_1 \Lambda_1 + N_2 \Lambda_2) P_{N_1 N_2}/t/.$$

Przechodząc do granicy przy  $\Delta t \rightarrow 0$ , po lewej stronie otrzymujemy pochodną, a stąd równanie różniczkowe charakteryzujące prawdopodobieństwo stanu początkowego systemu

$$\frac{dP_{N_1 N_2}}{dt} = - (N_1 \Lambda_1 + N_2 \Lambda_2) P_{N_1 N_2}(t). \quad /4.1/$$

b/ Prawdopodobieństwo tego, że w momencie  $t + \Delta t$  system będzie się znajdował w stanie  $A_{kl}$

System będzie się znajdował w momencie  $t + \Delta t$  w stanie  $A_{kl}$ ,

jeśli zaistnieje jeden z następujących rozłącznych warunków:

- w momencie  $t$  system znajdował się w stanie  $A_{kl}$  i za czas  $\Delta t$  nie była rażona ani jedna jednostka bojowa /stan  $A'_{kl}$ /;
- w momencie  $t$  system znajdował się w stanie  $A_{k+1,l}$  i za czas  $\Delta t$  strona I straciła jedną jednostkę bojową, a strona II nie straciła ani jednej jednostki /stan  $A''_{kl}$ /;
- w momencie  $t$  system znajdował się w stanie  $A_{k,l+1}$  i za czas  $\Delta t$  strona I nie straciła ani jednej jednostki bojowej, a strona II straciła jedną jednostkę /stan  $A'''_{kl}$ /.

Stosując zasadę mnożenia i uwzględniając zależności prawdopodobieństw zmiany sił stron w dowolnie małym przedziale czasu, prawdopodobieństwa stanów  $A'_{kl}$ ,  $A''_{kl}$ ,  $A'''_{kl}$  możemy napisać następująco:

$$\begin{aligned} P(A'_{kl}) &= P_{kl}(t) (1 - k \Lambda_1 \Delta t) (1 - l \Lambda_2 \Delta t) = \\ &= P_{kl}(t) (1 - k \Lambda_1 \Delta t - l \Lambda_2 \Delta t) ; \end{aligned}$$

$$P(A''_{kl}) = P_{k+1,l}(t) l \Lambda_2 \Delta t (1 - k \Lambda_1 \Delta t) = P_{k+1,l}(t) l \Lambda_2 \Delta t ;$$

$$\begin{aligned} P(A'''_{kl}) &= P_{k,l+1}(t) (1 - l \Lambda_2 \Delta t) k \Lambda_1 \Delta t = \\ &= P_{k,l+1}(t) k \Lambda_1 \Delta t ; \end{aligned}$$

gdzie:  $1 - k \Lambda_1 \Delta t$  - prawdopodobieństwo tego, że strona I nie zniszczyła ani jednej jednostki strony II;

$1 - l \Lambda_2 \Delta t$  - prawdopodobieństwo tego, że strona II nie zniszczyła ani jednej jednostki strony I;

$l \Lambda_2 \Delta t$  - prawdopodobieństwo tego, że strona II zniszczyła jedną jednostkę strony I;

$k \Lambda_1 \Delta t$  - prawdopodobieństwo tego, że strona I zniszczyła jedną jednostkę strony II.

Na podstawie twierdzenia o sumie możemy napisać:

$$\begin{aligned} P_{kl}(t - \Delta t) &= P(A'_{kl}) + P(A''_{kl}) + P(A'''_{kl}) = \\ &= P_{kl}(t) (1 - k \Lambda_1 \Delta t - l \Lambda_2 \Delta t) + P_{k+1,l}(t) l \Lambda_2 \Delta t + P_{k,l+1}(t) k \Lambda_1 \Delta t, \end{aligned}$$

skąd dzieląc stronami przez  $\Delta t$  i po oczywistych przekształceniach, otrzymamy:

$$\frac{P_{kl}(t + \Delta t) - P_{kl}(t)}{\Delta t} = -(k\lambda_1 + l\lambda_2)P_{kl}(t) + l\lambda_2 P_{k+l}(t) + k\lambda_1 P_{k,l+1}(t).$$

Przy  $\Delta t \rightarrow 0$  po lewej stronie będziemy mieli pochodną, a więc otrzymamy równanie różniczkowe charakteryzujące prawdopodobieństwo stanu systemu  $A_{kl}$

$$\frac{dP_{kl}}{dt} = -(k\lambda_1 + l\lambda_2)P_{kl} + l\lambda_2 P_{k+l} + k\lambda_1 P_{k,l+1} \quad /4.2/$$

/Dla uproszczenia zapisu argument  $k$  został opuszczony i w dalszym ciągu będziemy go opuszczali, pamiętając jednak, że prawdopodobieństwo stanu systemu jest funkcją czasu/.

Równanie /4.2/ jest prawdziwe dla  $0 < k < N_1$ ,

$0 < l < N_2$ .

c/ Prawdopodobieństwo tego, że w momencie  $t + \Delta t$  system będzie się znajdował w stanie  $A_{ko}$

System będzie się znajdował, w momencie  $t + \Delta t$ , w stanie  $A_{ko}$ , jeśli zaistnieje jeden z następujących warunków rozłącznych:

- w momencie  $t$  system znajduje się w stanie  $A_{ko}$  i za czas  $\Delta t$  nie została zniszczona ani jedna jednostka /stan  $A'_{ko}$ /;
- w momencie  $t$  system znajduje się w stanie  $A_{kl}$  i za czas  $\Delta t$  strona II traci jedną jednostkę, a strona I strat nie ma /stan  $A''_{ko}$ /.

Prawdopodobieństwa stanów  $A'_{ko}$ ,  $A''_{ko}$  wynoszą:

$$P /A'_{ko}/ = P_{ko}$$

$$P /A''_{ko}/ = P_{kl} k \wedge_1 \Delta t / 1 - \wedge_2 \Delta t / = P_{kl} k \wedge_1 \Delta t.$$

Na podstawie twierdzenia o sumie piszemy:

$$P_{ko} /t + \Delta t/ = P /A'_{ko}/ + P /A''_{ko}/ = P_{ko} + P_{kl} k \wedge_1 \Delta t,$$

stąd

$$\frac{P_{ko} / t + \Delta t - P_{ko}}{\Delta t} = P_{kl} k \wedge_1,$$

a przechodząc do granicy, przy  $\Delta t \rightarrow 0$  otrzymujemy:

$$\frac{d P_{ko}}{dt} = P_{kl} k \wedge_1 \quad /4.3./$$

Równanie to jest prawdziwe dla  $0 < k \leq N_1$ .

d/ Prawdopodobieństwo tego, że w momencie  $t + \Delta t$  system będzie się znajdował w stanie  $A_{01}$

Przez analogię do rozważań w pkt. c otrzymujemy:

$$P_{01} / t + \Delta t / = P_{01} + P_{11} l \wedge_2 \Delta t;$$

$$\frac{d P_{01}}{dt} = l \wedge_2 P_{11} \quad /4.4./$$

Równanie /4.4/ jest prawdziwe dla  $0 < l \leq N_2$ .

e/ Układ równań różniczkowych charakteryzujący rozwój walki dwóch zgrupowań

Grupując równania różniczkowe /4.1/- 4/ charakteryzujące prawdopodobieństwo zaistnienia poszczególnych stanów systemu, otrzymujemy następujący układ równań różniczkowych, opisujący proces rozwoju walki między dwoma zgrupowaniami:

$$\frac{d P_{N_1 N_2}}{dt} = - /N_1 \wedge_1 + N_2 \wedge_2 / P_{N_1 N_2},$$

.....  
 .....  
 .....

$$\frac{d P_{kl}}{dt} = - /k \wedge_1 + l \wedge_2 / P_{kl} + l \wedge_2 P_{k+1,l} + k \wedge_1 P_{k,l+1}$$

$$\left( \begin{array}{l} 0 < k < N_1 \\ 0 < l < N_2 \end{array} \right)$$

/4,5/

.....  
 .....  
 .....

$$D \frac{dP_{k0}}{dt} = k \wedge_1 P_{k1} \quad /0 < k \leq N_1/$$

$$\frac{dP_{0l}}{dt} = l \wedge_2 P_{1l} \quad /0 < l \leq N_2/$$

Równania różniczkowe prawdopodobnych stanów systemu można napisać bez dokonywania zawiłych rozważań. W tym celu można zastosować następującą mnemotechniczną zasadę. Najpierw należy zestawić schemat możliwych stanów systemu /rys. 4.1/. Na schemacie tym wskazać strzałkami możliwe przejścia systemu z jednego stanu w drugi. Na każdej strzałce napisać gęstość poisson'owskiego ciągu zdarzeń /rażących strzałów/, który powoduje przejście systemu do odpowiedniego stanu. Tak np. /rys. 4.1/ system ze stanu  $A_{N_1 N_2}$  przedchodzi do stanu  $A_{N_1-1 N_2}$ .

$N_2 - 1$  wskutek działania ciągu rażących strzałów z gęstością  $N_1 \wedge_1$ .

Pochodna prawdopodobieństwa stanu zawiera tyle składników, ile jest na schemacie strzałek prowadzących do danego stanu i wychodzących z niego. Jeśli strzałka prowadzi do danego stanu, składnik bierzemy ze znakiem plus, jeżeli wychodzi z danego stanu - ze znakiem minus. Każdy składnik jest iloczynem prawdopodobieństwa stanu, z którego wychodzi strzałka i gęstość ciągu rażących strzałów, zapisanej przy tej strzałce.

Układ /4.5/ zawiera  $(N_1 + 1) / (N_2 + 1) - 1$  równań.

Warunki początkowe całkowania:

$$\text{przy } t = 0, P_{N_1 N_2} = 1, P_{k1} = 0, /k \neq N_1, l \neq N_2/.$$

Czynnik normujący:

$$\sum_k \sum_l P_{kl} = 1,$$

ponieważ zdarzenia  $A_{kl}$  dla każdego momentu  $t$  przedstawiają pełną grupę zdarzeń.

Układ równań /4,5/ może być całkowany przy dowolnych konkretnych wartościach  $N_1$  i  $N_2$ . Pierwsze równanie układu zawiera tylko jedną funkcję niewiadomą  $P_{N_1 N_2}$  i może być rozwiązane zwykłymi metodami całkowania równań różniczkowych pierwszego rzędu. Podstawiając  $P_{N_1 N_2}$  do drugiego równania, otrzymamy równanie, które będzie zawierało tylko jedną funkcję niewiadomą  $P_{N_1-1 N_2}$ . W ten sposób należy postępować,

aż rozwiążemy wszystkie równania. W rezultacie otrzymamy układ rekurencyjny<sup>ch</sup> zależności, w których każda następna z prawdopodobieństwem  $P_{kl}$  wyraża się przez poprzednie /z dużymi indeksami/.

Całkowanie przedstawionego układu równań różniczkowych daje możliwość otrzymania wartości prawdopodobieństw możliwych stanów systemu jako funkcji czasu, co pozwala:

- określić prawdopodobieństwa liczby pozostałych jednostek bojowych każdej ze stron w dowolnym momencie czasu;
- określić nadzieję matematyczną liczby pozostałych jednostek w dowolnym momencie czasu;
- określić prawdopodobieństwo odniesienia zwycięstwa przez każdą ze stron.

Tak więc układ równań /4,5/ w pełni charakteryzuje proces rozwoju walki, przebiegającej według opisanego modelu.

Należy zauważyć, że przy dużych wartościach  $N_1$  i  $N_2$  całkowanie układu jest bardzo pracochłonne i dlatego należy wykorzystywać LMC. Jednakże proste zadania można rozwiązywać i bez użycia maszyn liczących.

#### Przykład 4.1

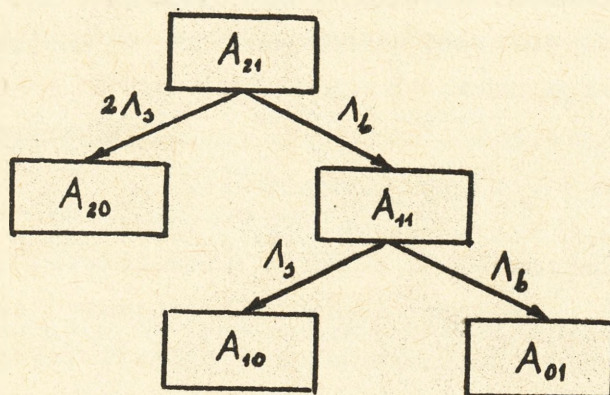
Dwa samoloty strony I atakują baterię środków przeciwlotniczych strony II. Efektywna szybkostrzelność samolotu wynosi  $\Lambda_s = 1$  strzał w jednostce czasu, a baterii -  $\Lambda_b = 2$  strzały w jednostce czasu.

Określić prawdopodobieństwo zwycięstwa każdej ze stron i nadzieję matematyczną liczby pozostałych jednostek zwycięskiej strony.

/Zwycięstwo liczy się wówczas, gdy zostaną zniszczone wszystkie jednostki strony przeciwnej/.

#### Rozwiązanie:

Rysujemy najpierw schemat możliwych stanów systemu, składającego się na początku z dwóch samolotów i jednej baterii środków przeciwlotniczych /rys. 4.2/.



Rys 4.2. Schemat możliwych stanów systemu

Stosując zasadę mnemotechniczną, piszemy równania różniczkowe prawdopodobnych stanów systemu:

$$1/ \frac{d P_{21}}{dt} = - (2 \Lambda_s + \Lambda_b) P_{21} = - 4 P_{21};$$

$$2/ \frac{d P_{20}}{dt} = 2 \Lambda_s P_{21} = 2 P_{21};$$

$$3/ \frac{d P_{11}}{dt} = - (\Lambda_s + \Lambda_b) P_{11} + \Lambda_b P_{21} = - 3 P_{11} + 2 P_{21}$$

$$4/ \frac{d P_{10}}{dt} = \Lambda_s P_{11} = P_{11};$$

$$5/ \frac{d P_{01}}{dt} = \Lambda_b P_{11} = 2 P_{11}$$

Zgodnie z tym co powiedzieliśmy wyżej otrzymaliśmy układ składający się z  $2 + 1 + 1 + 1 = 5$  równań.

Scałkujemy układ tych równań przy warunkach początkowych dla  $t = 0$ ,  $P_{21} = 1$ ,  $P_{20} = P_{11} = P_{10} = P_{01} = 0$

Pierwsze równanie możemy napisać w postaci:

$$-\frac{1}{4} \frac{d P_{21}}{P_{21}} = dt,$$

a więc

$$-\frac{1}{4} \int \frac{d P_{21}}{P_{21}} = \int dt,$$

obliczając całki otrzymujemy:

$$-\frac{1}{4} \ln P_{21} + C = t.$$

Kładąc warunki początkowe obliczamy stałą całkowania  $C = 0$   
Ostatecznie więc  $P_{21} = e^{-4t}$

Podstawiając obliczoną wartość  $P_{21}$  do drugiego równania i dokonując elementarnego przekształcenia otrzymujemy:

$$d P_{20} = 2 e^{-4t} dt,$$

stąd

$$\int d P_{20} = 2 \int e^{-4t} dt,$$

po scałkowaniu otrzymujemy

$$P_{20} = -\frac{1}{2} e^{-4t} + C$$

Stałą całkowania wyznaczamy z warunków początkowych

$$C = -\frac{1}{2}$$

A więc

$$P_{20} = -\frac{1}{2} / 1 - e^{-4t} /$$

Po podstawieniu  $P_{20}$  do trzeciego równania, otrzymujemy równanie różniczkowe liniowe niejednorodne:

$$\frac{d P_{11}}{dt} + 3 P_{11} = 2 e^{-4t}$$

Równanie tego kształtu rozwiązuje się według wzoru:

$$P_{11} = e^{-F} / C + \int g e^F dt /,$$

gdzie:

$$F = \int 3 dt = 3t,$$
$$g = 2 e^{-4t}$$

Wobec tego

$$P_{11} = e^{-3t} / C + 2 \int e^{-4t} e^{3t} dt / = e^{-3t} / C - 2 e^{-t} /.$$

Z warunków początkowych obliczamy stałą całkowania

$$C = 2$$

Tak więc

$$P_{11} = 2 e^{-3t} / 1 - e^{-t} /$$

Kładąc  $P_{11}$  do czwartego równania otrzymujemy:

$$d P_{10} = 2 e^{-3t} / 1 - e^{-t} / dt,$$

$$\int d P_{10} = 2 \int e^{-3t} dt - 2 \int e^{-4t} dt;$$

$$P_{10} = -\frac{2}{3} e^{-3t} + \frac{1}{2} e^{-4t} + C$$

Stała całkowania wynosi  $C = -\frac{1}{6}$

Więc

$$P_{10} = -\frac{1}{2} e^{-4t} - \frac{2}{3} e^{-3t} + \frac{1}{6}$$

Podstawiając  $P_{11}$  do piątego równania i całkując analogicznie jak czwarte otrzymujemy:

$$P_{01} = e^{-4t} - \frac{4}{3} e^{-3t} + \frac{1}{3}$$

Otrzymane wyniki prawdopodobieństw poszczególnych stanów systemu zestawmy w postaci tabeli:

Ilość pozostałych samolotów	Ilość pozostałych baterii	
	1	0
2	$P_{21} = e^{-4t}$	$P_{20} = \frac{1}{2} / 1 - e^{-4t} /$
1	$P_{11} = 2 e^{-3t} / 1 - e^{-t} /$	$P_{10} = \frac{1}{2} / e^{-4t} / - \frac{2}{3} e^{-3t} + \frac{1}{6} /$
0	$P_{01} = e^{-4t} - \frac{4}{3} e^{-3t} + \frac{1}{3}$	$P_{00} = 0$

Prawdopodobieństwo tego, że zwycięży strona I jest równe prawdopodobieństwu tego, że pozostanie nierażony chociażby jeden samolot, tj.:

$$P_s = P_{20} + P_{10}, \text{ przy } t \rightarrow \infty P_{20} = \frac{1}{2}, P_{10} = \frac{1}{6}$$

więc

$$P_s = \frac{1}{2} + \frac{1}{6} = \frac{4}{6}$$

Nadzieja matematyczna liczby pozostałych samolotów<sup>w</sup> przypadku ich zwycięstwa wynosi:

$$M /s/ = 2 \cdot \frac{1}{2} + 1 \cdot \frac{1}{6} = 1 \frac{1}{6}$$

Prawdopodobieństwo zwycięstwa strony II wynosi:

$$P = \frac{1}{3}$$

#### Przykład 4.2

Pięć dział przeciwpancernych strony I prowadzi walkę z trzema czołgami strony II. Efektywne szybkostrzelności jednostek bojowych są równe, tj.  $\wedge_1 = \wedge_2 = 1$ .

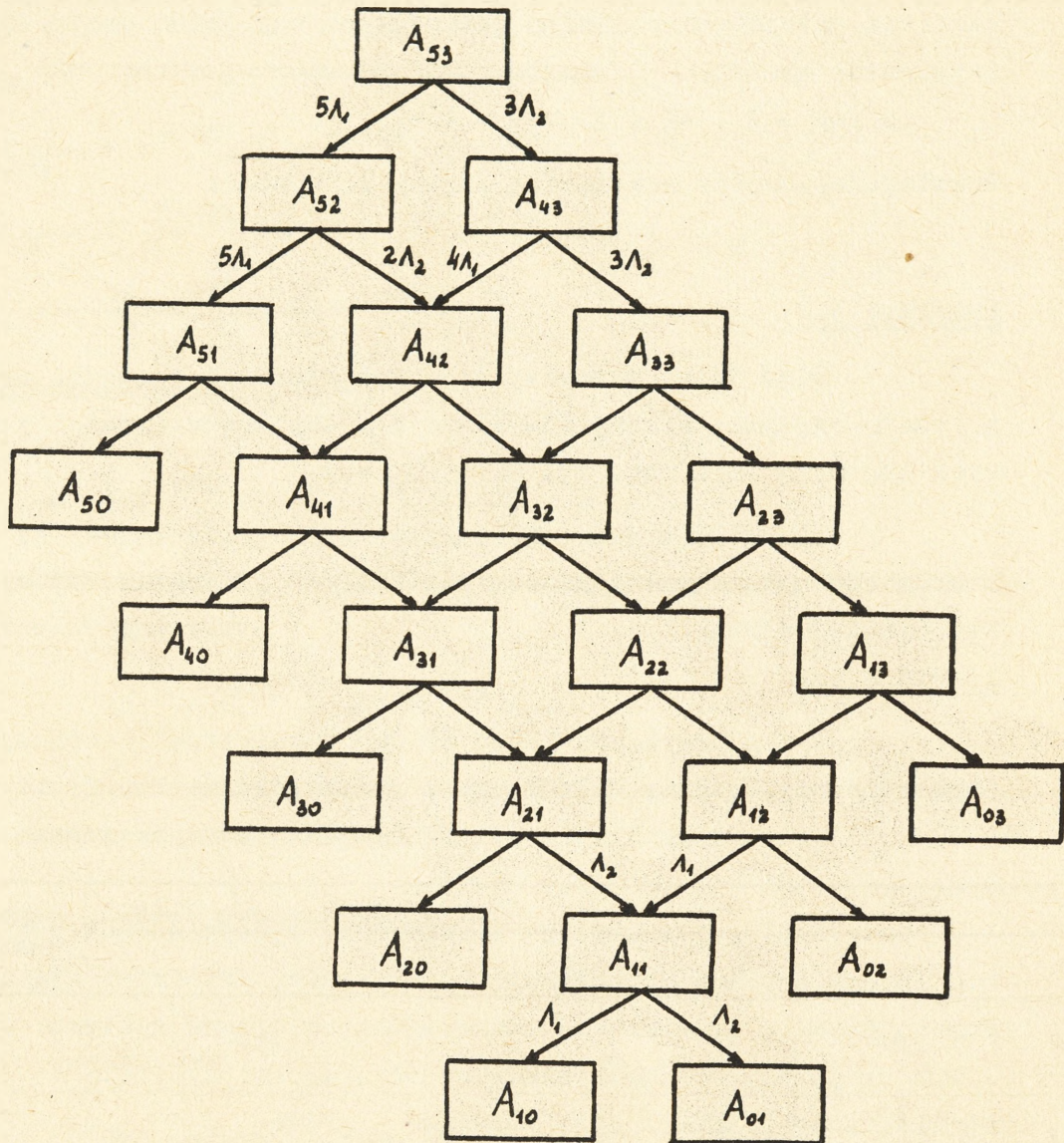
Określić prawdopodobieństwo zwycięstwa każdej ze stron i nadzieję matematyczną liczby pozostałych jednostek bojowych zwycięskiej strony.

#### Rozwiązanie:

W tym przypadku układ równań różniczkowych opisujący proces rozwoju walki, składa się z  $5+1/3+1/ - 1 = 23$  równań.

Schemat możliwych stanów systemu jest przedstawiony na rys. 4.3.

Posługując się tym schematem w sposób mnemotechniczny moglibyśmy napisać 23 równania różniczkowe, przedstawiające prawdopodobieństwa zaistnienia poszczególnych stanów systemu. Jednakże w tym przypadku, dla pokazania metody, ograniczymy się do przedstawienia tylko niektórych równań.



Kys 4.3. Schemat możliwych stanów systemu

$$1/ \quad \frac{d P_{53}}{dt} = - (5 \Lambda_1 + 3 \Lambda_2) P_{53} = - 8 P_{53}$$

$$2/ \quad \frac{d P_{52}}{dt} = - (5 \Lambda_1 + 2 \Lambda_2) P_{52} + 5 \Lambda_1 P_{53} = - 7 P_{52} + 5 P_{53}$$

$$3/ \quad \frac{d P_{43}}{dt} = - (4 \Lambda_1 + 3 \Lambda_2) P_{43} + 3 \Lambda_2 P_{53} = - 7 P_{43} + 3 P_{53}$$

$$21/ \frac{d P_{11}}{dt} = - \lambda_1 P_{11} + \lambda_2 P_{11} + \lambda_1 P_{12} + \lambda_2 P_{21} = - 2 P_{11} + P_{12} + P_{21};$$

$$22/ \frac{d P_{10}}{dt} = \lambda_1 P_{11} = P_{11};$$

$$23/ \frac{d P_{01}}{dt} = \lambda_2 P_{11} = P_{11}$$

Wyniki całkowania tego układu równań są zamieszczone w poniższej tabeli.

Ilość pozostałych jednostek strony I	Ilość pozostałych jednostek strony II		
	3	2	1
5	$e^{-8t}$	$5e^{-7t}(1-e^{-t})$	$\frac{25}{2}e^{-6t}(1-e^{-t})^2$
4	$3e^{-7t}(1-e^{-t})$	$11e^{-6t}(1-e^{-t})^2$	$\frac{113}{6}e^{-5t}(1-e^{-t})^3$
3	$\frac{9}{2}e^{-6t}(1-e^{-t})^2$	$\frac{71}{6}e^{-5t}(1-e^{-t})^3$	$\frac{163}{12}e^{-4t}(1-e^{-t})^4$
2	$\frac{9}{2}e^{-5t}(1-e^{-t})^3$	$\frac{49}{6}e^{-4t}(1-e^{-t})^4$	$\frac{359}{60}e^{-3t}(1-e^{-t})^5$
1	$\frac{27}{28}e^{-4t}(1-e^{-t})^4$	$\frac{427}{120}e^{-3t}(1-e^{-t})^5$	$\frac{1191}{720}e^{-2t}(1-e^{-t})^6$

Prawdopodobieństwa  $P_{k0}$ , przy  $t \rightarrow \infty$ , wynoszą:

$$P_{50} = 0,3721; P_{40} = 0,2690; P_{30} = 0,1456; P_{20} = 0,0712; P_{10} = 0,0295.$$

Prawdopodobieństwa  $P_{01}$ , przy  $t \rightarrow \infty$ , wynoszą:

$$P_{03} = 0,0362; P_{02} = 0,0469; P_{01} = 0,0295.$$

Prawdopodobieństwo tego, że zwycięży strona I, jest równe prawdopodobieństwu tego, że pozostanie nierażone chociażby jedno działo, a więc:

$$P_I = P_{50} + P_{40} + P_{30} + P_{20} + P_{10} = 0,8874.$$

Prawdopodobieństwo zwycięstwa strony II, jest równe prawdopodobieństwu tego, że pozostanie nierażony chociażby jeden czołg, czyli:

$$P_{II} = P_{03} + P_{02} + P_{01} = 0,1126.$$

Nadzieja matematyczna liczby pozostałych jednostek strony I, w przypadku jej zwycięstwa wynosi:

$$M_I = 5 P_{50} + 4 P_{40} + 3 P_{30} + 2 P_{20} + P_{10} = 3,5432.$$

/Uwaga - porównaj wynik z przykładu: 3.2/

Można również obliczyć nadzieję matematyczną liczby pozostałych jednostek strony II, w przypadku jej zwycięstwa, która wynosi:

$$M_{II} = 3 P_{03} + 2 P_{02} + P_{01} = 0,2329$$

Równania Lanchestera, omówione w rozdział III i IV, opisują taki model walki, w której przeniesienie ognia z celu na cel nierażony realizowane jest natychmiast, przy czym zakłada się, że każda strona posiada dokładną informację o tym, jakie cele zostały rażone, a czas niezbędny na uwzględnienie tej informacji i przeniesienie ognia na cel<sup>o</sup> nierażone, jest dowolnie krótki. Tak więc model ten przedstawia wysoce zorganizowaną walkę z pełną i niezawodną informacją o stanie przeciwnika i natychmiastową reakcją na tę informację.

W następnym rozdziale rozpatrzmy przeciwstawny skrajny przypadek - walkę zorganizowaną słabo - gdzie nie uzyskuje się informacji o stanie przeciwnika i nie dokonuje się przenoszenia ognia. Model ten nazwiemy modelem walki dwóch obszarów.

## V. MODEL WALKI DWOCH OBSZARÓW

### 1. Schematyzacja walki

Wprowadźmy następujące oznaczenia:

-  $N_1$  - ilość jednostek bojowych /rakiety, samoloty, czołgi itp/  
stronę I;

- $N_2$  - ilość jednostek bojowych strony II;
- $p_1$  - prawdopodobieństwo trafienia w cel przez jednostkę bojową strony I;
- $p_2$  - prawdopodobieństwo trafienia w cel przez jednostkę bojową strony II;
- $\lambda_1$  i  $\lambda_2$  - szybkostrzelność jednostek bojowych odpowiednio strony I i II;
- $\Lambda_1 = \lambda_1 p_1$ ;  $\Lambda_2 = \lambda_2 p_2$  - efektywne szybkostrzelności jednostek odpowiednio I i II strony.

Rozważany model jest oparty na niżej wymienionych założeniach:

- a/ każda jednostka bojowa I i II strony realizuje poisson'owski ciąg strzałów;
- b/ ogień każdej strony rozkłada się równomiernie na wszystkie jednostki bojowe przeciwnika, tj. średnia liczba strzałów przypadająca na jednostkę bojową w czasie  $\Delta t$ , jest jednakowa dla wszystkich jednostek;
- c/ strony nie posiadają informacji o rażonych celach i nie dokonują przenoszenia ognia;
- d/ czas lotu pocisku do celu jest dowolnie krótki /nie bierze się pod uwagę/;
- e/ sumaryczna moc ogniowa zgrupowania zależy nie od faktycznego stanu pozostałych jednostek, a od jego średniej wartości.

Należy określić nadzieję matematyczną liczby pozostałych jednostek bojowych stron  $m_1$  i  $m_2$  w momencie czasu  $t$ .

## 2. Równania opisujące proces rozwoju walki

Określimy  $\Delta m_1$  - przyrost liczby pozostałych jednostek bojowych strony I za czas  $\Delta t$ . Przyrost ten jest równy /z przeciwnym znakiem/ liczbie skutecznych strzałów strony II, lecz nie wszystkich, a tylko tych, które przypadają na jeszcze nierażone jednostki strony I. Prawdopodobieństwo tego, że skuteczny strzał strony II przypadnie na nierażoną jednostkę bojową strony I, jest równe  $\frac{m_1}{N_1}$ .

Tak więc

$$\Delta m_1 = - \Lambda_2 m_2 \frac{m_1}{N_1} \Delta t.$$

skąd, dzieląc przez  $\Delta t$  i przechodząc do granicy przy  $\Delta t \rightarrow 0$ , otrzymujemy:

$$\frac{dm_1}{dt} = - \frac{\Lambda_2}{N_1} m_2 m_1$$

Rozumując analogicznie w odniesieniu do  $m_2$ , otrzymujemy układ równań

$$\frac{dm_1}{dt} = - \Lambda_2 \frac{m_1}{N_1} m_2,$$

$$\frac{dm_2}{dt} = - \Lambda_1 \frac{m_2}{N_2} m_1 \quad /5.1/$$

Warunki początkowe całkowania tego układu są:

przy  $t = 0$ ,  $m_1 = N_1$ ,  $m_2 = N_2$ .

Układ równań /5.1/ można sprowadzić do bardziej prostej postaci, mnożąc prawe strony odpowiednio przez  $\frac{N_2}{N_2-1}$  i  $\frac{N_1}{N_1-1}$  oraz

przechodząc do liczb względnych:

$$M_1 = \frac{m_1}{N_1-1}, \quad M_2 = \frac{m_2}{N_2-1}$$

Otrzymamy wówczas układ równań postaci

$$\frac{dM_1}{dt} = - u_2 M_1 M_2,$$

$$\frac{dM_2}{dt} = - u_1 M_1 M_2 \quad /5.2/$$

gdzie  $u_1 = \frac{\Lambda_1 N_1}{N_2}$ ,  $u_2 = \frac{\Lambda_2 N_2}{N_1}$  są parametrami określającymi

część jednostek przeciwnika rażoną w jednostce czasu całością sił danego zgrupowania w jego początkowym składzie.

Warunki początkowe całkowania układu /5.2/: przy  $t = 0$ ,  $M_1 = 1$ ,  $M_2 = 1$ .

Równania te noszą nazwę równań Dinera.

Przy  $u_1 = \text{const}$  i  $u_2 = \text{const}$  rozwiązanie układu równań /5.2/ jest następujące:

Dzieląc pierwsze równanie /5.2/ przez drugie otrzymujemy:

$$\frac{dM_1}{dM_2} = \frac{u_2}{u_1}$$

Stąd po scałkowaniu mamy

$$M_1 = \frac{u_2}{u_1} M_2 + C \quad /5.3/$$

Kładąc /5.3/ do drugiego równania /5.2/ będziemy mieli

$$\frac{dM_2}{dt} = -u_1 M_2 / -\frac{u_2}{u_1} M_2 + C/,$$

a po dokonaniu rozdziaku zmiennych

$$\frac{dM_2}{\left(\frac{u_2}{u_1} M_2 + C\right) M_2} = -u_1 dt \quad /5.4/$$

Całkujemy lewą stronę /5.4/, rozkładając na ułamki proste.

$$\int \frac{dM_2}{\left(\frac{u_2}{u_1} M_2 + C\right) M_2} = \int \left( \frac{A}{\frac{u_2}{u_1} M_2 + C} + \frac{B}{M_2} \right) dM_2$$

A i B znajdujemy metodą współczynników nieoznaczonych:

$$A M_2 + B \frac{u_2}{u_1} M_2 + BC = 1,$$

$$A + B \cdot \frac{u_2}{u_1} = 0,$$

$$BC = 1$$

Stąd:

$$B = -\frac{1}{C}, \quad A = -\frac{1}{C} \cdot \frac{u_2}{u_1}$$

Po podstawieniu współczynników A i B otrzymujemy

$$-\frac{1}{C} \int \frac{\frac{u_2}{u_1} dM_2}{M_2 \frac{u_2}{u_1} + C} + \frac{1}{C} \int \frac{dM_2}{M_2} = -\frac{1}{C} \ln \left( M_2 \frac{u_2}{u_1} + C \right) + \frac{1}{C} \ln M_2$$

Prawa strona /5.4/ jest równa

$$-\int u_1 dt = -u_1 t$$

Zatem rozwiązanie równania /5.4/ ma postać:

$$-\frac{1}{C} \ln \left( M_2 \left( \frac{u_2}{u_1} + C \right) \right) + \frac{1}{C} \ln M_2 = -u_1 t.$$

Po pomnożeniu stronami przez C mamy

$$-\frac{1}{C} \ln \left( M_2 \frac{u_2}{u_1} + C \right) + \frac{1}{C} \ln M_2 = -C u_1 t.$$

Dokonując kolejnych przekształceń otrzymujemy

$$\ln \frac{M_2}{M_2 \frac{u_2}{u_1} + C} = -C u_1 t,$$

$$\frac{M_2}{M_2 \frac{u_2}{u_1} + C} = e^{-C u_1 t}, \quad M_2 \frac{u_2}{u_1} + C = M_2 e^{C u_1 t},$$

stąd

$$M_2 = \frac{C}{e^{C u_1 t} - \frac{u_2}{u_1}}. \quad /5.5/$$

Stałą całkowania C znajdujemy z warunków początkowych.

Ponieważ przy  $t = 0$ ,  $M_2 = 1$ , to kładąc do /5.5/ będzie

$$1 = \frac{C}{1 - \frac{u_2}{u_1}}$$

a stąd stała C wynosi

$$C = \frac{u_1 - u_2}{u_1}. \quad /5.6/$$

Kładąc /5.6/ do /5.5/ mamy

$$M_2 = \frac{\frac{u_1 - u_2}{u_1}}{e^{(u_1 - u_2)t} - \frac{u_2}{u_1}},$$

a po oczywistym przekształceniu

$$M_2 = \frac{u_1 - u_2}{u_1 e^{(u_1 - u_2)t} - u_2}. \quad /5.7/$$

Określimy obecnie wartość  $M_1$ . Podstawiając /5.6/ i /5.7/ do /5.3/

mamy:

$$M_1 = M_2 \frac{u_2}{u_1} + C = \frac{u_1 - u_2}{u_1 e^{(u_1 - u_2)t} - u_2} \cdot \frac{u_2}{u_1} + \frac{u_1 - u_2}{u_1} =$$

$$\begin{aligned}
 &= \frac{u_2(u_1 - u_2) + (u_1 + u_2)(u_1 e^{(u_1 - u_2)t} - u_2)}{u_1(e^{(u_1 - u_2)t} - u_2)} \\
 &= \frac{u_2 u_1 + u_1^2 + u_2^2 e^{(u_1 - u_2)t} - u_1 u_2 - u_1 u_2 e^{(u_1 - u_2)t} + u_2^2}{u_1(u_1 e^{(u_1 - u_2)t} - u_2)} \\
 &= \frac{(u_1 - u_2)e^{(u_1 - u_2)t}}{u_1 e^{(u_1 - u_2)t} - u_2} = \frac{u_1 - u_2}{u_1 - u_2 e^{(u_2 - u_1)t}}
 \end{aligned}$$

skąd ostatecznie otrzymujemy:

$$\mathcal{H}_1 = \frac{u_2 - u_1}{u_2 e^{(u_2 - u_1)t} - u_1} \quad /5.8/$$

Tak więc, rozwiązanie układu równań /5.2/ ma postać:

$$\mathcal{H}_1 = \frac{u_2 - u_1}{u_2 e^{(u_2 - u_1)t} - u_1} \quad /5.9/$$

$$\mathcal{H}_2 = \frac{u_1 - u_2}{u_1 e^{(u_1 - u_2)t} - u_2}$$

W prawych stronach wzorów /5.9/ mamy dwa parametry:

$u_1$  i  $u_2$ . Jednakże analogicznie do tego, jak uczyniliśmy w rozdziale III, można sprowadzić te parametry do jednego. W tym celu wprowadzamy pojęcie zmownej jednostki czasu

$$t' = \frac{u_1 + u_2}{2} t \quad /5.10/$$

oraz parametr charakteryzujący przewagę jednej strony nad drugą

$$\beta = \frac{u_1 - u_2}{u_1 + u_2} \quad /5.11/$$

/W przypadku, jeśli  $u_2 > u_1$ , przewagę posiada strona druga i wówczas

$$\beta = \frac{u_2 - u_1}{u_1 + u_2}$$

Wyznamy z /5.11/  $u_1$ :

$$u_1 = \frac{u_2(1+\beta)}{1-\beta}$$

Wyznamy również wartość /  $u_1 - u_2$  / t. Mnożąc licznik i mianownik /5.11/ przez  $\frac{t}{2}$  otrzymujemy:

$$\beta = \frac{\frac{u_1 - u_2}{2} t}{\frac{u_1 + u_2}{2} t} = \frac{(u_1 - u_2)t}{2t'}$$

czyli

$$(u_1 - u_2)t = 2\beta t'$$

Podstawiając obliczone wartości do pierwszego równania /5.9/ otrzymujemy:

$$\begin{aligned} \mathcal{H}_1 &= \frac{u_2 - \frac{u_2(1+\beta)}{1-\beta}}{u_2 e^{-2\beta t'} - \frac{u_2(1+\beta)}{1-\beta}} = \frac{u_2 \frac{1-\beta-1-\beta}{1-\beta}}{u_2 \frac{(1-\beta)e^{-2\beta t'} - (1+\beta)}{1-\beta}} = \\ &= \frac{-2\beta}{(1-\beta)e^{-2\beta t'} - (1+\beta)} \end{aligned}$$

więc ostatecznie

$$\mathcal{H}_1 = \frac{2\beta}{(1+\beta) - (1-\beta)e^{-2\beta t'}} \quad /5.12/$$

Podobnie wyznaczając z /5.11/  $u_2$  oraz uwzględniając wartość /  $u_1 - u_2$  / t =  $2\beta t'$  otrzymujemy

$$\mathcal{H}_2 = \frac{u_1 - \frac{u_1(1-\beta)}{1+\beta}}{u_1 e^{2\beta t'} - \frac{u_1(1-\beta)}{1+\beta}},$$

a stąd po oczywistych przekształceniach

$$\mathcal{H}_2 = \frac{2\beta}{(1+\beta)e^{2\beta t'} - (1-\beta)} \quad /5.13/$$

Przedstawiony model, w porównaniu z modelem Lanchestera, charakteryzuje się bardziej powolnym rozwojem walki, przewaga jednej strony nad drugą wyraża się mniej ostro, zmniejszenie się ilości pozostałych sił odbywa się w wolniejszym tempie.

Rozpatrzmy to na przykładzie:

Przykład 5.1

Warunki zadania - jak przykład 3.3.

Porównać rozwój walki w ciągu 4 minut według modelu Lanchestera i omówionego wyżej.

Rozwiązanie:

Z warunków zadania mamy dane:

$$N_1 = 50, \quad \lambda_1 = 0,25 \text{ strz/min.}, \quad p_1 = 0,57;$$

$$N_2 = 25, \quad \lambda_2 = 0,5 \text{ strz/min.}, \quad p_2 = 0,5.$$

Obliczamy  $u_1$  i  $u_2$ .

$$u_1 = \frac{p_1 \lambda_1 N_1}{N_2} = \frac{0,57 \cdot 0,25 \cdot 50}{25} = 0,28$$

$$u_2 = \frac{p_2 \lambda_2 N_2}{N_1} = \frac{0,5 \cdot 0,5 \cdot 25}{50} = 0,126$$

Obliczając części pozostałych sił strony I i II odpowiednio po 1, 2, 3 i 4 minutach według wzorów /3.17/ i /5.9/ otrzymujemy następujące wyniki:

Model	Czas	1'	2'	3'	4'
Srednia część pozostałych jednostek					
Lanchestera $M_1$		0,891	0,823	0,761	0,739
$M_2$		0,736	0,497	0,277	0,069
Dinera $M_1$		0,895	0,825	0,771	0,731
$M_2$		0,768	0,603	0,463	0,393

Z wyników tych wyraźnie wynikają wnioski, o których była mowa wyżej.

3. Uogólnienie modelu

W dotychczasowych rozważaniach braliśmy pod uwagę niszczenie jednostek bojowych przeciwstawnych stron, jednakże tok rozumowania nie ulegnie zmianie, jeśli będziemy brali pod uwagę niszczenie obszaru przeciwnika, na którym są rozmieszczone jego jednostki. Rzeczywiście, jeśli przyjąć, że siły przeciwstawnych stron są rozmieszczone na pewnych obszarach i rażona powierzchnia

każdego obszaru jest proporcjonalna do liczby jednostek bojowych, to przedstawione równania będą charakteryzowały nie liczbę pozostałych jednostek bojowych, a część nierażonej powierzchni obszaru.

Wiadomo, że efektywność strzelania do celu powierzchniowego ocenia się względnymi stratami, przez które rozumiemy część rażonej powierzchni.

Wprowadźmy pojęcie "początkowa moc ogniowa strony", rozumiejąc przez to średnie względne straty, zadawane przeciwnikowi w jednostce czasu, na początku walki.

Wówczas będziemy mieli:

$$u_1 = \frac{S_r^I}{S_2} = \frac{\lambda_1 p_1 \mathcal{C}_1 N_1}{S_2}, \quad /5.14/$$

gdzie:  $u_1$  - początkowa moc ogniowa strony I;

$\mathcal{C}_1$  - powierzchnia rażenia jedną jednostką bojową za jeden strzał /pocisk, rakietą itp/ strony I;

$S_2$  - obszar, na którym są rozmieszczone jednostki bojowe strony II.

$$u_2 = \frac{S_r^{II}}{S_1} = \frac{\lambda_2 p_2 \mathcal{C}_2 N_2}{S_1}, \quad /5.15/$$

gdzie:  $u_2$  - początkowa moc ogniowa strony II;

$\mathcal{C}_2$  - powierzchnia rażenia jedną jednostką bojową za jeden strzał strony II;

$S_1$  - obszar, na którym są rozmieszczone jednostki bojowe strony I.

/Pozostałe symbole są analogiczne do oznaczeń wprowadzonych w punkcie 2/.

Przyjmijmy założenie, że w dowolnym momencie czasu moc ogniowa strony jest proporcjonalna do średniej części nierażonego obszaru.

Część nierażonego obszaru do momentu  $t$  oznaczmy, - strony I:

$$V_1(t) = \frac{S_n^I}{S_1}, \quad /5.16/$$

gdzie:  $S_n^I$  - nierażona część obszaru jednostek strony I;  
- strony II:

$$V_2(t) = \frac{S_n^{II}}{S_2}, \quad /5.17/$$

gdzie:  $S_n^{II}$  - nierażona część obszaru jednostek strony II.

Oczywiście, wielkość  $V_1 / t$  i  $V_2 / t$ , z biegiem czasu będą malały.

Przyrost części nierażonej obszaru strony I za czas  $\Delta t$  można określić z wyrażenia:

$$\Delta V_1 = - u_2 v_1 v_2 \Delta t \quad /5.18/$$

Wyjaśnijmy szczegółowiej prawą stronę tej równości. Iloczyn  $u_2 \Delta t$  przedstawia średnie względne straty zadawane przez stronę II za czas  $\Delta t$  na początku walki. Jeżeli  $u_2 \Delta t$  pomnożymy przez  $v_2$ , to otrzymamy iloczyn  $u_2 v_2 \Delta t$ , charakteryzujący średnie względne straty, zadawane przez stronę II za czas  $\Delta t$  w momencie,  $t$ , bowiem  $v_2$  - jest częścią nierażonego obszaru strony II w momencie  $t$ . Lecz w momencie  $t$  - strona I poniosła już straty i wielkość  $V_1$  w istocie będzie prawdopodobieństwem tego, że uderzenie strony II zostanie wykonane na nierażoną powierzchnię obszaru strony I.

Dlatego iloczyn  $u_2 v_1 v_2 \Delta t$  przedstawia przyrost części nierażonej powierzchni obszaru strony I za czas  $\Delta t$ .

Analogicznie dla strony II otrzymamy równanie:

$$\Delta V_2 = - u_1 v_1 v_2 \Delta t. \quad /5.19/$$

Dzieląc /5.18/ i /5.19/ przez  $\Delta t$  i przechodząc do granicy przy  $\Delta t \rightarrow 0$ , otrzymujemy układ równań różniczkowych, charakteryzujący proces rozwoju walki dwóch obszarów, w postaci:

$$\begin{aligned} \frac{d V_1}{d t} &= - u_2 v_1 v_2, \\ \frac{d V_2}{d t} &= - u_1 v_1 v_2 \end{aligned} \quad /5.20/$$

Warunki początkowe całkowania: przy  $t = 0$ ,  $V_1 = 1$ ,  $V_2 = 1$ . Układ równań /5.20/ jest analogiczny do układu równań /5.2/, z tym, że odpowiednie parametry w układzie /5.20/ mają wartości określone wzorami /5.14/, /5.15/, /5.16/, /5.17/.

Zatem przez analogię do /5.2/ możemy napisać rozwiązanie układu równań /5.20/ w postaci:

$$\begin{aligned} V_1 &= \frac{2\beta}{(1+\beta) - (1-\beta)e^{-2\beta t}}, \\ V_2 &= \frac{2\beta}{(1+\beta)e^{2\beta t} - (1-\beta)}. \end{aligned} \quad /5.21/$$

gdzie  $\beta$ ,  $t'$  oznaczają te same wartości co /5.11/ i /5.10/.

Podobnie jak i poprzednio, walkę wygrywa zawsze ta strona, która posiada większą początkową moc ogniową, tj. przy  $\beta > 0$  walkę wygrywa strona I, gdy  $\beta < 0$  walkę wygrywa strona II.

Przykład 5.2

Strona I posiada 12 wyrzutni rakiet rozmieszczonych na powierzchni  $360 \text{ km}^2$ . Szybkostrzelność każdej wyrzutni wynosi 2 rakiety na godzinę, Jedna rakietą razi powierzchnię  $4 \text{ km}^2$ .

Strona II posiada 6 wyrzutni rakiet rozmieszczonych na powierzchni  $300 \text{ km}^2$ . Szybkostrzelność każdej wyrzutni wynosi 3 rakiety na godzinę. Jedna rakietą razi powierzchnię  $3 \text{ km}^2$ .

Każda rakietą osiąga obszar przeciwnika z prawdopodobieństwem równym 1.

Określić, ile średnio pozostanie wyrzutni rakiet każdej ze stron po 3 godzinach walki.

Rozwiązanie:

Początkowa moc ogniowa strony I wynosi:

$$u_1 = \frac{2 \cdot 1 \cdot 4 \cdot 12}{360} = 0,32$$

Początkowa moc ogniowa strony II:

$$u_2 = \frac{3 \cdot 1 \cdot 3 \cdot 6}{360} = 0,15$$

Współczynnik przewagi:

$$\beta = \frac{0,32 - 0,15}{0,32 + 0,15} = 0,36$$

Umowny czas:

$$t' = 3 \cdot \frac{0,32 + 0,15}{2} = 0,71$$

Średnia część nierażonych jednostek bojowych /obszaru/ strony I wynosi:

$$v_1 = \frac{2 \cdot 0,36}{1 + 0,36 - /1 - 0,36/ e^{-2 \cdot 0,36 \cdot 0,71}} = 0,73;$$

- strony II:

$$v_2 = \frac{2 \cdot 0,36}{/1 + 0,36/ e^{2 \cdot 0,36 \cdot 0,71} - /1 - 0,36/} = 0,44$$

Nadzieję matematyczną liczby pozostałych jednostek bojowych stron można obliczyć, wychodząc z przyjętego uprzednio założenia, że są one rozmieszczone równomiernie na całym obszarze. Dlatego oznaczając nadzieję matematyczną liczby pozostałych jednostek strony I i II odpowiednio przez  $m_1$  i  $m_2$  możemy napisać:

$$V_1 = \frac{m_1}{N_1}, \text{ czyli } m_1 = V_1 N_1 = 0,73 \cdot 12 = 8,8;$$

$$V_2 = \frac{m_2}{N_2}, \text{ czyli } m_2 = V_2 N_2 = 0,44 \cdot 6 = 2,6.$$

### Przykład 2.3

10 wyrzutni rakiet strony I rozmieszczone jest na obszarze  $400 \text{ km}^2$ . Szybkostrzelność wyrzutni wynosi 2 rakiety na godzinę. Powierzchnia rażona jedną rakieta wynosi  $4 \text{ km}^2$ .

Strona II dysponuje 5 wyrzutniami rakiet, rozmieszczonymi na obszarze  $300 \text{ km}^2$ . Szybkostrzelność - 3 rakiety na godzinę. Powierzchnia rażona jedną rakieta -  $3 \text{ km}^2$ .

Prawdopodobieństwo trafienia w obszar przeciwnika jest równe 1.

Określić nadzieję matematyczną liczby ocalałych wyrzutni rakiet obu stron po dwóch godzinach od początku walki.

Rozwiązanie:

$$u_1 = \frac{2 \cdot 1 \cdot 4 \cdot 10}{300} = 0,267$$

$$u_2 = \frac{3 \cdot 1 \cdot 3 \cdot 5}{400} = 0,112$$

$$\beta = \frac{0,267 - 0,112}{0,267 + 0,112} = 0,41$$

$$e = \frac{0,267 + 0,112}{2} \cdot 2 = 0,379.$$

$$V_1 = \frac{2 \cdot 0,41}{1 + 0,41/e^{-2 \cdot 0,41 \cdot 0,379}} = 0,84,$$

$$V_2 = \frac{3 \cdot 0,41}{1 + 0,41/e^{2 \cdot 0,41 \cdot 0,379}} = 0,62$$

$$m_1 = 0,84 \cdot 10 = 8,4,$$

$$m_2 = 0,62 \cdot 5 = 3,1$$

Jak wspomnieliśmy wyżej, w opisanym modelu walki wygrywa zawsze ta strona, która posiada przewagę mocy ogniowej. Jeśli np.  $\beta > 0$ , walkę wygrywa strona I. Nierówność ta jest równoważna nierówności  $U_1 > U_2$ , a ta z kolei odpowiada nierówności

$$\frac{N_1 \mathcal{C}_1 \lambda_1 \frac{P_1}{S_2}}{N_2 \mathcal{C}_2 \lambda_2 \frac{P_2}{S_1}} > 1$$

Z ostatniej nierówności wynika, że przewaga strony jest proporcjonalna do: ilości jednostek bojowych, szybkostrzelności i powierzchni rażenia jednym strzałem:

Rolę powierzchni obszarów  $S_1$  i  $S_2$  określają stosunki

$$\frac{P_1}{S_2} = 1 \frac{P_2}{S_1}$$

Jeżeli powierzchnia celów jest mała w porównaniu z rozrzutem, to stosunek, np.  $\frac{P_1}{S_2}$  praktycznie nie zależy od wielkości powierzchni

przeciwnika /zwiększenie lub zmniejszenie  $S_2$  prowadzi zmiany  $P_1$  tak, że stosunek  $\frac{P_1}{S_2}$  pozostaje bez zmiany/.

To zaś oznacza, że początkowa moc ogniowa, w tym przypadku, nie zależy od wielkości powierzchni przeciwnika.

Jeśli natomiast powierzchnia celów jest duża w porównaniu z rozrzutem, to prawdopodobieństwo trafienia w cel praktycznie nie zależy od wielkości powierzchni / $p \approx 1$ / i w tym przypadku początkowa moc ogniowa strony jest odwrotnie proporcjonalna do powierzchni obszaru przeciwnika.

Wynika stąd, że przy określonej dokładności strzelania racjonalniejsze jest zwalczanie obiektów przeciwnika zajmujących dużą powierzchnię oraz, że strona zajmująca większy obszar przy innych czynnikach różnych - posiada przewagę.

#### Przykład 5.4

Strona I posiada  $N_1$  jednostek bojowych z szybkostrzelnością  $\lambda_1$  i powierzchnią rażenia jednym strzałem  $\mathcal{C}_1$ . Prawdopodobne uchylenie rozrzutu kołowego  $E = 2$  km.

Środki bojowe przeciwnika są rozmieszczone na obszarze, który można sprowadzić do powierzchni koła o promieniu  $r = 1$  km.

Określić zmianę mocy ogniowej strony I, jeśli przeciwnik rozmieści swoje środki na powierzchni koła o promieniu  $r_1 = 1,5$  km.

Rozwiązanie:

Prawdopodobieństwo trafienia do koła o promieniu  $r = 1$  km wynosi

$$p_1 = 1 - \Psi\left(\frac{r}{t}\right) = 1 - \Psi\left(\frac{r}{E}\right) = 1 - 0,944 = 0,056,$$

$$\text{gdzie: } - \Psi\left(\frac{r}{E}\right) = e^{-\beta^2 \left(\frac{r}{E}\right)^2}.$$

Powierzchnia obszaru strony II:

$$S_2 = \pi r^2 = 3,14 \text{ km}^2$$

Moc ogniowa strony I:

$$u_1 = \frac{\lambda_1 \mathcal{C}_1 N_1 p_1}{S_2} = \lambda_1 \mathcal{C}_1 N_1 \frac{0,056}{3,14} = 0,018 \lambda_1 \mathcal{C}_1 N_1.$$

Prawdopodobieństwo trafienia do koła o promieniu  $r_1 = 1,5$  km:

$$p'_1 = 1 - \Psi\left(\frac{1,5}{2}\right) = 0,12.$$

Powierzchnia obszaru strony II przy  $r_1 = 1,5$  km:

$$S_2 = 3,14 \cdot 2,25 = 7,1 \text{ km}^2$$

Zmieniona moc ogniowa strony I:

$$u'_1 = \lambda_1 \mathcal{C}_1 N_1 \frac{0,12}{7,1} = 0,017 \lambda_1 \mathcal{C}_1 N_1$$

Z rozwiązania przykładu widać, że  $u_1 \approx u'_1$ , a to oznacza, że moc ogniowa strony, gdy powierzchnia celu jest mała w porównaniu z rozrzutem, praktycznie nie zależy od powierzchni celu.

W równaniach Dinera /5.20/ może być uwzględniony wpływ różnych czynników, podobnie jak i w równaniach Lanchestera.

#### 4. Uwzględnienie wpływu pewnych czynników na proces rozwoju walki

##### a/ Wpływ uderzenia uprzedzającego

Założmy, że strona I wykonuje uderzenia uprzedzające, natomiast strona II wprowadza do walki swoje siły w ciągu czasu  $t^0$ . W tym przypadku równania Dinera, opisujące proces rozwoju walki dwóch obszarów operacyjnych, będą miały następującą postać:

$$- \text{przy } t < t^0$$

$$\frac{d v_1}{dt} = 0;$$

/5.21/

$$\frac{d v_2}{dt} = - u_1 v_2;$$

- przy  $t > t^0$

$$\frac{d v_1}{dt} = - u'_2 v_1 v_2;$$

/5.22/

$$\frac{d v_2}{dt} = - u_1 v_1 v_2;$$

gdzie:  $u'_2$  - moc ogniowa strony II w momencie  $t = t^0$ .

Całkując drugie równanie układu /5.22/ otrzymamy

$$v_2 = e^{-u_1 t^0}$$

wówczas

$$u'_2 = u_2 v_2 = u_2 e^{-u_1 t^0}$$

Jakościowa charakterystyka rozwoju walki, gdy jedna ze stron wykonuje uderzenie uprzedzające, jest analogiczna do przedstawionej na rys. 3.3.

#### Przykład 5.5.

Strona I posiada, na początku walki, moc ogniową wynoszącą

$$u_1 = 0,4 \frac{1}{\text{godz.}}, \text{ a strona II - } u_2 = 0,6 \frac{1}{\text{godz.}}$$

Określić moce ogniowe stron po 15 minutach od rozpoczęcia walki, jeśli strona I wykonuje uderzenie uprzedzające, a strona II wprowadza do walki swoje siły w ciągu 15 minut.

Rozwiązanie:

Moc ogniowa strony I po 15 minutach nie ulegnie zmianie, a moc ogniowa strony II będzie wynosić:

$$u'_2 = u_2 e^{-u_1 t^0} = 0,6 e^{-0,4 \cdot 0,25} = 0,54 .$$

#### Przykład 5.6

Warunki z przykładu 5.5. Określić na ile wcześniej strona I powinna rozpocząć działania bojowe, aby zrównoważyć moc ogniową strony II.

Rozwiązanie:

Z równania  $U'_2 = U_2 e^{-u_1 t^\circ}$  Określamy  $t^\circ$ .

Po kolejnych przekształceniach otrzymujemy:

$$e^{u_1 t^\circ} = \frac{U_2}{U'_2}, \quad u_1 t^\circ = \ln \frac{U_2}{U'_2},$$

$$t^\circ = \frac{1}{u_1} \ln \frac{U_2}{U'_2}, \quad t^\circ = \frac{1}{0,4} \ln \frac{0,6}{0,54} = 1.$$

Strona I powinna rozpocząć działania bojowe na 1 godzinę wcześniej.

b/ Wpływ tempa mobilizacji sił

Przyjmijmy, że strona I rozpoczynając walkę posiada moc ogniową  $U'_1$ . Strona II stopniowo wprowadza do walki swoje siły, zwiększając moc ogniową według pewnego prawa, którego ogólna postać jest następująca:

$$U_2 / t / = U'_2 f / t /$$

gdzie  $U'_2$  - moc ogniowa strony II przy wprowadzeniu na początku walki wszystkich swoich sił;

$f / t /$  - funkcja czasu, charakteryzująca tempo mobilizacji sił.

Równania Dinera w tym przypadku mają postać:

$$\frac{d V_1}{dt} = - U_2 / t / V_1 V_2,$$

$$\frac{d V_2}{dt} = - U'_1 V_1 V_2$$

Po rozwiązaniu tych równań można ocenić wymagane tempo mobilizacji sił dla pomyślnego zakończenia walki.

Rozwój walki w tym przypadku ma charakter analogiczny jak przedstawiono to na rys. 3.5.

c/ Wpływ tempa uzupełniania sił

Jeżeli przyjmiemy, że w procesie walki może być dokonywane uzupełnianie sił obu stron, przy czym charakteryzuje się ono następującymi wielkościami:

-  $n_1$  - ilość jednostek bojowych wprowadzanych do walki przez stronę I;

-  $n_2$  - ilość jednostek bojowych wprowadzanych do walki przez stronę II;

wówczas równania Dinera przyjmują postać:

$$\frac{d V_1}{dt} = - u_2 V_1 V_2 + n_1;$$

$$\frac{d V_2}{dt} = - u_1 V_1 V_2 + n_2$$

Oprócz tego, w równaniach Dinera mogą być uwzględniane czynniki, które zostały wyszczególnione przy omawianiu równań Lanchestera.

#### VI. ANALIZA WALKI PARTYZANCKIEJ

Od czasu ukazania się równań Lanchestera, ukształtowało się wiele odmian tego modelu, stosowanych do analizy różnych rodzajów walki. Jednakże próby weryfikacji siłą rzeczy musiały polegać na danych historycznych, specyficznych dla danej sytuacji. Jednakże i w tych przypadkach, chociaż realność modelu sprawdzono a posteriori, czyniono to bez uogólnień.

Mimo istniejących ograniczeń, równania Lanchestera w swojej pierwotnej formie przedstawiają wspaniały aparat do analizy niektórych typów starć zbrojnych. Tak np. odmiana równań Lanchestera była stosowana do badania pewnych parametrów walki toczonych z partyzantami w krajach kolonialnych /po drugiej wojnie światowej/. Najbardziej interesującym parametrem walki tego typu, jest stosunek sił oddziałów partyzanckich i wojsk regularnych.

Zostało dowiedzione, że oddziały partyzanckie, przez zastosowanie odpowiedniej taktyki, mogą prowadzić skuteczną walkę z wojskami regularnymi, posiadającymi zdecydowaną przewagę ilościową i jakościową. Wojska regularne mogą jednak zwyciężać przez odpowiedni podział środków, sposób działania i podział sił na grupy stosowanie do przewidywanych potyczek.

Charakter walki partyzanckiej polega na tym, że siły regularne muszą być dzielone na części, aby bronić wielu punktów, które mogą być atakowane przez partyzantów, a także by tropić rozproszone grupy partyzanckie. Wskutek tego słabsi liczebnie partyzanci mogą odnosić sukcesy, jeśli potrafią utrzymać lokalną przewagę liczebną w starciach z wojskami regularnymi.

Najnowsza historia daje liczne przykłady, kiedy wojska regularne musiały używać ponad dziesięciokrotnie większych ilości sił, aby pomyślnie rozegrać walkę z partyzantami. Na ogół wydaje się, że jeżeli partyzanci posiadają mało doskonałe uzbrojenie albo ograniczoną ilość broni zdobytej na przeciwnku, a wojska regularne dysponują pełnym zestawem doskonałej broni, to zawsze przewaga będzie po stronie tych drugich. Powstaje wobec tego pytanie, czy partyzanci mogą zastosować taką taktykę, która spowoduje zmianę lokalnego stosunku sił w odwrotnym kierunku tak, żeby mogli zwyciężać mniejszymi lub równymi siłami.

Założmy, że wojska regularne poszukują w terenie partyzantów lub zamierzają zaatakować ich bazę. Partyzanci przeciwstawiają się wojskom regularnym poprzez przygotowanie zasadzki. Po rozpoczęciu walki partyzanci ostrzeliwiają wojska regularne, obserwując je dokładnie. Przeto straty wojsk regularnych są proporcjonalne do ilości strzelających partyzantów. Partyzanci są ukryci, a zatem wojska regularne kierują ogień na ślepo, ostrzeliwując obszar zajmowany przez partyzantów. Stąd straty partyzantów będą proporcjonalne do ilości strzelających żołnierzy wojsk regularnych i ilości partyzantów zajmujących ostrzeliwany obszar.

Wynika stąd, że przyrost sił partyzantów będzie następował według równań Dinera /5.20/, a przyrost sił wojsk regularnych - według równań Lanchestera /3.2/.

Zatem proces rozwoju walki partyzantów z wojskami regularnymi będzie charakteryzował następujący układ równań:

$$\frac{dx_1}{dt} = - u_2 x_1 x_2 \quad /6.1/$$

$$\frac{dx_2}{dt} = - \lambda_1 x_1,$$

gdzie:  $x_1$  - ilość sił partyzantów w pewnym momencie czasu;  
 $x_2$  - ilość sił wojsk regularnych w pewnym momencie czasu;  
 $\lambda_1$  - efektywna szybkostrzelność jednostki partyzantów

$$u_2 = \frac{\lambda_2 s_2}{s_1} \quad \text{- efektywność jednostki wojsk regularnych,}$$

gdzie:

$\lambda_2$  - szybkostrzelność jednostki uzbrojenia;

$s_2$  - powierzchnia rażona jednym strzałem;

$s_1$  - obszar zajmowany przez partyzantów.

Dla tego przypadku warunek równowagi stron wyraża następująca równość:

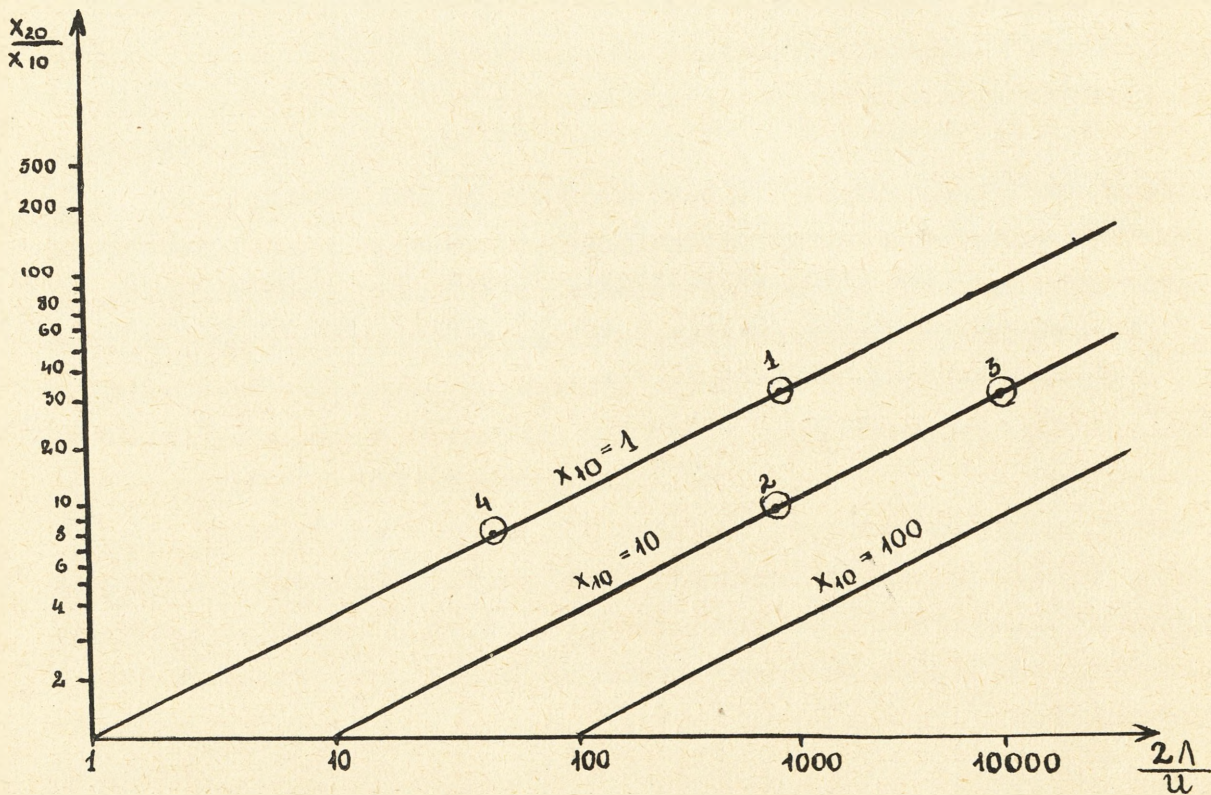
$$2 \wedge_1 x_{10} = u_2 x_{20} \quad /6.2/$$

gdzie:  $x_{10}$  - początkowy stan sił partyzantów;

$x_{20}$  - początkowy stan sił wojsk regularnych.

Biorąc pod uwagę tę równość, można określić wymagany początkowy stan sił jednej strony w zależności od liczebności sił drugiej strony.

Na wykresie /rys.6.1/ pokazano stosunek sił  $\frac{x_{20}}{x_{10}}$  jako funkcję  $\frac{2 \wedge_1}{u_2}$  dla kilku wartości  $x_{10}$ .



Rys.6.1

Wymaganą ilość sił każdej ze stron można określić z wykresu i równania /6.2/. Wojska regularne mogą powiększać liczebność sił do walki z partyzantami, albo mogą powiększyć obszar skuteczności swego uzbrojenia. Z kolei partyzanci mogą powiększyć ilość sił w lokalnych starciach lub rozprześcić je na większym obszarze /zakłada się, że nie będą oni mieli możliwości zwiększenia skuteczności swego uzbrojenia/.

Rozpatrzmy przykładowo jak powinien kształtować się stosunek sił przy założeniu, że partyzanci i wojska regularne posiadają jednakowe uzbrojenie. Niech  $\frac{2A_1}{u_2} = 1000$ ,  $x_{10} = 1$

Kładąc te wartości do /6.2/ otrzymujemy:

$$x_{20}^2 = 1000, \text{ stąd } x_{20} = 32.$$

Sytuację tę określa punkt /1/ na wykresie - a więc wojska regularne muszą posiadać siły 32 razy liczniejsze od sił partyzantów, aby zrównoważyć ich przewagę.

Gdy partyzanci powiększają swoje początkowe siły 10 razy, wówczas początkowy stosunek sił poprawia się na korzyść wojsk regularnych /punkt 2 na wykresie/, ponieważ partyzanci powiększyli gęstość <sup>sił</sup> na zajmowanym obszarze, powiększając tym samym prawdopodobieństwo trafienia swoich ludzi.

Natomiast jeśli partyzanci powiększają swoje siły 10 razy, przy zachowaniu poprzedniej gęstości, wtedy wojskom regularnym niezbędny jest analogiczny stosunek sił jak i w pierwszym przypadku /sytuację tę ilustruje punkt 3 na wykresie/.

Walka taka teoretycznie może trwać nieograniczenie bez rozstrzygnięcia, jeżeli każda strona doskonale panuje nad swoimi środkami i posiada informacje o przeciwniku. Jednakże istnieją praktyczne możliwości środków bojowych, np. gdy partyzanci nie mogą dokładnie obserwować swoich celów, lub gdy ogień prowadzą na zbyt dużych donośnościach, lub gdy teren nie pozwala na powiększenie zajmowanego obszaru. Z tego względu, jeżeli wojska regularne będą posiadały dostatecznie duże siły oraz biorąc pod uwagę ilość możliwych starć, mogą one stworzyć dogodną sytuację dla odniesienia zwycięstwa lub zmuszenia partyzantów do uchylenia się od walki. Może to jednak wymagać więcej sił niż te, które posiadają na danym obszarze.

W przypadku powiększenia przez wojska regularne obszaru skuteczności swego uzbrojenia /na przykład użycia dział zamiast karabinów/, mogą one powiększyć  $s_2$  o jeden lub dwa rzędy wielkości. Jednakże w tym przypadku zmniejszy się szybkostrzelność i w rezultacie efekt będzie mniejszy, niż to sugeruje zmiana powierzchni skuteczności ognia. Jeżeli efektywność ognia i powierzchnię jego skuteczności wojska regularne powiększą 10 razy, wtedy sytuację tę przedstawia punkt 4 na wykresie. Jeśli natomiast z kolei partyzanci powiększą swoje siły, a potem zmueszeni okolicznościami chwili - zaproszą je, to tym samym zostanie przywrócona sytuacja zaznaczona na wykresie punktem 1. W ten sposób pojawia się dla wojsk regularnych niekorzystna okoliczność rozproszenia ognia i tym samym pośrednio poprawienia szans partyzantów.

W rzeczywistości przebieg walki zależy także od wielu innych czynników, takich jak np: gdzie i w jakim stopniu są ukryci partyzanci, czy żołnierze wojsk regularnych mogą się ukryć, itp. Oprócz tego w rozważaniach pomija się fakt, że partyzanci znajdujący się w ukryciu mają przewagę zaskoczenia, a więc mogą znacznie zmniejszyć siły przeciwnika, zanim zdąży on odpowiedzieć swoim ogniem. Ta okoliczność działa oczywiście na korzyść partyzantów, a jej wyniki zależą od skuteczności ognia. Z drugiej strony jeśli wojska regularne mogą niezwłocznie się ukryć, wtedy walka sprowadza się do modelu Dinera.

Jeżeli zaś wojska regularne <sup>nie</sup> mają możliwości ukrycia się, ale są w stanie niezwłocznie nawiązać styczność z partyzantami, wtedy mogą one przesądzić walkę na swoją korzyść dwoma możliwymi sposobami.

Stosując zdecydowany atak mogą załamać psychicznie partyzantów, zmniejszając przez to skuteczność ich ognia, a to przecież wpływa na poprawę stosunku sił na korzyść wojsk regularnych.

Jeżeli zaś wojska regularne zbliżą się do partyzantów, doprowadzi to do bezpośredniej wzajemnej widzialności i wówczas walka sprowadzi się do modelu o zależności kwadratowej, stąd jeśli wojska regularne chwilowo będą posiadały więcej sił potrafią wygrać walkę.

Przy dostatecznie długim czasie trwania walki zbliży się ona w końcu do modelu o zależności kwadratowej, ponieważ wojska regularne potrafią prawdopodobnie określić źródła ognia partyzantów. W takim przypadku partyzanci powinni zakończyć walkę wycofaniem się, jeśli przez zaskoczenie nie potrafili istotnie osłabić siły wojsk regularnych.

Wreszcie należy zauważyć, że jeżeli partyzanci posiadają taką samą ilość sił co przeciwnik, w przybliżeniu to samo uzbrojenie oraz jego skuteczność, a otwarty z zaskoczeniem ogień osłabi siłę wojsk regularnych, wówczas z równań wnioskujemy, że partyzanci mogą osiągnąć zwycięstwo. Wykorzystanie czynnika zaskoczenia powoduje zmianę stosunku sił na korzyść partyzantów.

Interesującym jest przypadek, kiedy wojska regularne zwalczają partyzantów stosując małe grupy, taktykę walki z zasadzek i lokalną przewagę liczebną. Przy takim działaniu szanse wygrania walki przez partyzantów stają się bardzo znikome. Powodowane to jest głównie posiadaniem uzbrojenia o znacznie mniejszej skuteczności, jak też niemożliwością uzyskania niezbędnej przewagi lokalnej, co łatwo mogą osiągnąć wojska regularne. Jednak wojska regularne napotykają duże trudności w zlokalizowaniu i śledzeniu grup partyzanckich oraz wykorzystaniu czynnika zaskoczenia.

W ogólnym przypadku, gdy zachodzi nierówność

$$X_{10} > \frac{u_2 x_{20}^2}{2\Lambda_1}$$

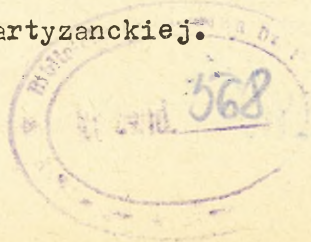
walkę wygrywają partyzanci, a w przypadku, gdy na miejsce nierówności przeciwna

$$X_{10} < \frac{u_2 x_{20}^2}{2\Lambda_1}$$

walkę wygrywają wojska regularne.

#### Z a k o ń c z e n i e

Aczkolwiek zasadnicze założenia leżące u podstaw modeli walki ogólnowojskowej są poważnym ograniczeniem, niemniej okazuje się możliwym wykorzystywanie ich do analizy rzeczywistych sytuacji bojowych. Przy pomocy równań różniczkowych można opisać różnorodne działania bojowe wyróżniające się składem zgrupowań i sposobem organizacji walki. W szczególności można uzyskać modele pośrednie między tymi, które zostały omówione w skrypcie, nakładając określone warunki na dokładność i szybkość otrzymania informacji o przeciwniku, efektywność ognia, sprawność przekazywania rozkazów itp. Oprócz tego mogą być stosowane kombinacje kilku modeli, jak to pokazano na przykładzie walki partyzanckiej.



Formalizacja procesów walki ogólnowojskowej ma szczególnie duże znaczenie dla przeprowadzenia jej analizy od strony ilościowej. Chociaż otrzymane wyniki nie mogą stanowić gotowych schematów działania, to jednak powinny być one brane pod uwagę przy organizacji walki.

Równania różniczkowe opisujące proces rozwoju rzeczywistej walki mogą być dość skomplikowane i dlatego do ich rozwiązania koniecznym jest wykorzystywanie EMC.

Literatura:

1. Ph. M. Morse, G.E. Kimball: Methods of Operations Research. Tłum. Metody badania operacji, ASG, Rembertów 1962 r.
2. E.S. Wentcel: Wwiedienije w issledowanije opieraczi. Wyd. "Sowietskoje Radio", Moskwa 1964 r.
3. W.J. Groszew: Matematyczeskije osnovy charakteristiki dynamiki boja. Wyd. WWKA, Monino 1962 r.
4. W.J. Kirriżkow, J.W. Kryżow, W.J. Groszew: Teorija bojowej offiektiwnosti, Wyd. WWKA, Monino 1964 r.
5. E.E. Bach, J.L. Dolansky, H.L. Stups: Some Recent Contributions to the Lanchestera theory of Combat, "Operations Research", Vol. 10, Num.3, 1962 r.
6. S.J. Deitchman: A Lanchester Model of Guerilla Warfare, "Operations Research", Vol. 10, Num. 6, 1962 r.
7. J. Skibiński: O pewnym modelu walki ogólnowojskowej.

Odbito 50 egz.

Egz.nr 1-50 bibliotajna  
Wyd.pptk CIECHANOWICZ  
Druk.K.L.  
Nr.ks.032/WW

