

M A T E M A T Y K A

$$1 + \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \dots + \frac{1}{10}\right) + \left(\frac{1}{11} + \frac{1}{12} + \dots + \frac{1}{100}\right) + \left(\frac{1}{101} + \dots + \frac{1}{1000}\right) + K$$

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x}$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n \quad f'(c) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{3^n + 4^n}$$

$$\lim_{x \rightarrow x_0^+} \frac{1}{x}$$

$$\int a^x dx = \frac{a^x}{\ln a} + C$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_1 \cdot q^{n-1}$$

$$f'(x) = \frac{1}{g'(y)}$$

$$\int f(x) dx = F(x) + C$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| = q < 1$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{4n+3}{5n-4} \right)^{2n}$$

$$f(x) = \arccos x$$

$$f(x_1) \geq f(x_2)$$

$$f(x_1) \neq f(x_2)$$

$$f(b)$$

$$F'(x) = f(x)$$

$$f'(x) = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$$

$$f(x_1) \leq f(x_2)$$

$$f^{-1}(x) = \log_3 x$$

$$f(x_0 + \Delta x)$$

$$\int \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} dx = \arcsin x + C$$

Mieczysław Pełc
Marek Juszczyk



MATEMATYKA

Mieczysław Pelc
Marek Juszczyk

AKADEMIA OBRONY NARODOWEJ

WARSZAWA 2003



Projekt okładki: Marek Juszczyk

ISBN 83-89423-25-1

Sygn. AON 5556/03

Druk i oprawa: Akademia Obrony Narodowej – Wydział Wydawniczy, zam. nr 994/2003

SPIS TREŚCI

WSTĘP	5
1. Elementy rachunku zdań i algebry zbiorów	6
1.1. Zdania i spójniki zdaniowe	6
1.2. Rachunek zdań	7
1.3. Zbiory i działania na zbiorach	9
1.4. Przedziały	15
1.5. Iloczyn kartezjański	19
2. Funkcje jednej zmiennej i ich własności	22
2.1. Pojęcie funkcji	22
2.2. Właściwości szczególne funkcji liczbowych	24
2.3. Funkcja różnowartościowa i funkcja odwrotna	31
2.4. Złożenie (superpozycja) funkcji	34
2.5. Funkcje elementarne	36
a) funkcja liniowa	36
b) funkcja kwadratowa	38
c) funkcja potęgowa	40
d) funkcja wykładnicza	41
e) funkcja logarytmiczna	42
f) funkcje trygonometryczne	43
3. Ciągi liczbowe	49
3.1. Granica ciągu	49
3.2. Twierdzenie o trzech ciągach	51
3.3. Monotoniczność ciągu	53
3.4. Obliczanie granic ciągu	55
3.5. Liczba e (stała Eulera)	58
4. Granica i ciągłość funkcji	61
4.1. Granica funkcji	61
4.2. Granice niewłaściwe	63
4.3. Ciągłość funkcji	68
4.4. Właściwości funkcji ciągłych	72
5. Pochodna funkcji	76
5.1. Określenie pojęcia pochodna funkcji	76
5.2. Obliczanie pochodnych	79

5.3.	Pochodna funkcji złożonej	81
5.4.	Różniczka funkcji	83
5.5.	Twierdzenie Rolle'a	84
5.6.	Twierdzenie de L'Hospitala	86
6.	Badanie przebiegu zmienności funkcji	91
6.1.	Asymptoty	91
6.2.	Monotoniczność i ekstrema	98
6.3.	Wklęsłość i wypukłość krzywej. Punkty przegięcia	105
6.4.	Tempo zmian wartości funkcji	108
6.5.	Schemat badania przebiegu zmienności funkcji	111
7.	Rachunek całkowy funkcji jednej zmiennej	124
7.1.	Funkcja pierwotna	124
7.2.	Wzory podstawowe	126
7.3.	Całkowanie przez części	127
7.4.	Całkowanie przez podstawienie	129
7.5.	Całkowanie niektórych funkcji wymiernych	131
7.6.	Całka oznaczona	137
7.6. a)	właściwości całki oznaczonej	138
7.6. b)	interpretacja geometryczna	140
7.7.	Całka niewłaściwa w przedziale nieskończonym	145
8.	Macierze, wyznaczniki, operacje elementarne	153
8.1.	Macierze i działania na macierzach	153
8.2.	Wyznacznik macierzy kwadratowej	156
8.3.	Macierz odwrotna	160
8.4.	Operacje elementarne	162
8.5.	Układy równań liniowych	165
9.	Funkcje wielu zmiennych	179
9.1.	Definicja, dziedzina, warstwiec	179
9.2.	Pochodne cząstkowe, przyrost i różniczka funkcji	182
9.3.	Gradient funkcji	185
9.4.	Elastyczności cząstkowe	189
9.5.	Ekstremum funkcji dwóch zmiennych	191
9.6.	Wartość największa i najmniejsza funkcji	195
9.7.	Metoda najmniejszych kwadratów	203
	BIBLIOGRAFIA	212

Wstęp

Niniejszy skrypt przeznaczony jest dla studentów magisterskich studiów uzupełniających na kierunku ekonomicznym Akademii Obrony Narodowej.

Treści w nim zawarte są zbieżne z aktualnie realizowanym programem wykładów i ćwiczeń z przedmiotu Matematyka. Oprócz podstawowego materiału wymaganego na egzaminie zawiera również zagadnienia, przykłady i pojęcia nieco wykraczające poza aktualny program. Wynika to z faktu, że program nauczania może się nieco zmieniać i te tematy mogą być przydatne w przyszłości. Poza tym materiał dydaktyczny powinien zawierać treści wykraczające poza minimum programowe tak, aby pewne pojęcia lepiej przedstawić na tle szerszego kontekstu.

Autorzy wyrażają przekonanie, że skrypt ten będzie przydatny zarówno dla studentów zainteresowanych zaliczeniem przedmiotu jak i dla tych, którzy posiadają większe aspiracje, zainteresowania bądź potrzeby stosowania w większym stopniu matematyki w swoich dalszych studiach.

Omówione w poszczególnych rozdziałach zagadnienia ilustrowane są stosunkowo dużą ilością przykładów. Po każdym rozdziale zamieszczone są zadania do samodzielnego rozwiązania.

Autorzy mają nadzieję, że niniejszy skrypt dobrze będzie służył studentom na drodze poznawania matematyki i jej zastosowania w ekonomii. Jednocześnie zdają sobie sprawę z tego, że napisanie wartościowego podręcznika jest zadaniem trudnym. Dlatego będziemy wdzięczni wszystkim, którzy zechcą przekazać nam swoje uwagi dotyczące tego materiału.

Autorzy

Instytut Ekonomii i Logistyki, Warszawa 2003 r.

1.

ELEMENTY RACHUNKU ZDAŃ I ALGEBRY ZBIORÓW

1.1.

ZDANIA I SPÓJNIKI ZDANIOWE

Zdanie – w logice – to wypowiedź w formie orzekającej, której możemy przypisać jedną z dwóch wartości logicznych: prawdę lub fałsz. O zdaniu prawdziwym mówimy, że ma ono wartość logiczną **1**; o zdaniu fałszywym zaś że ma ono wartość logiczną **0**. Zdania oznaczać będziemy małymi literami alfabetu i używamy zwykle symboli **p, q, r, s, (...)**. Jeżeli zdanie **p** jest prawdziwe to piszemy **p = 1**, jeżeli zaś zdanie **p** jest fałszywe to piszemy **p = 0**.

Na przykład zdanie

p \equiv Robert Korzeniowski zdobył na olimpiadzie w Sydney dwa złote medale olimpijskie posiada wartość logiczną **p = 1**,

zaś zdanie

q \equiv liczba 7 jest liczbą parzystą posiada wartość logiczną **q = 0**.

Ze zdań logicznych można budować zdania złożone. W tym celu posługujemy się tzw.

funktorami będącymi spójnikami zdaniowymi.

Przyjmujemy następujące oznaczenia:

\sim **negacja**, zdanie $\sim p$ czytamy **nie jest prawdą że p**

\wedge **koniunkcja** (iloczyn logiczny), $p \wedge q$ czytamy **p i q**

\vee **alternatywa** (suma logiczna), $p \vee q$ czytamy **p lub q**

\Rightarrow **implikacja** (wynikanie), $p \Rightarrow q$ czytamy **jeżeli p to q**

\Leftrightarrow **równoważność**, $p \Leftrightarrow q$ co czytamy **p wtedy i tylko wtedy gdy q**.

Negacja jest spójnikiem jednoargumentowym, pozostałe są spójnikami dwuargumentowymi.

Tabelki wartości logicznych zdań złożonych w zależności od wartości logicznych zdań p i q są następujące:

p	$\sim p$
0	1
1	0

p	q	$p \wedge q$
0	0	0
0	1	0
1	0	0
1	1	1

p	q	$p \vee q$
0	0	0
0	1	1
1	0	1
1	1	1

p	q	$p \Rightarrow q$
0	0	1
0	1	1
1	0	0
1	1	1

p	q	$p \Leftrightarrow q$
0	0	1
0	1	0
1	0	0
1	1	1

Koniunkcja zdań p i q jest prawdziwa tylko w jednym przypadku, gdy obydwa zdania tj. zarówno p jak i q są prawdziwe.

Alternatywa jest fałszywa tylko w jednym przypadku, gdy obydwa zdania tj. zarówno p jak i q są fałszywe.

Implikacja także jest fałszywa tylko w jednym przypadku, a mianowicie gdy poprzednik p jest prawdziwy, a następnik q – fałszywy.

Równoważność jest prawdziwa gdy obydwa zdania p jak i q są jednocześnie prawdziwe, lub gdy obydwa zdania tj. zarówno p jak i q są fałszywe.

1.2.

RACHUNEK ZDAŃ

Zdania i funktory stanowią elementy tzw. rachunku zdań. Zdania należy traktować jako obiekty, zaś funktory odgrywają rolę działań wykonywanych na tych obiektach.

Jeżeli przyjmiemy założenie że litery $p, q, r, s, (\dots)$ reprezentują pewne (a nie konkretne) zdania, wówczas stają się one tzw. zmiennymi zdaniowymi.

Wyrażenia budowane ze zmiennych zdaniowych nazywamy schematami rachunku zdań. Każde wyrażenie rachunku zdań staje się zdaniem wtedy, gdy w miejsce danej litery podstawimy konkretne zdanie.

Tautologia lub prawem rachunku zdań nazywamy taki schemat zdaniowy, w którym po podstawieniu za zmienne zdaniowe dowolnych zdań otrzymamy zawsze zdanie prawdziwe. Tautologie są to schematy niezawodnego wnioskowania. Istotne jest, że treść zdań jakie podstawimy do tautologii na miejsce zmiennych zdaniowych, nie ma wpływu na prawdziwość zdania, jakie z niej otrzymujemy. Prawdziwość tego zdania wynika z samej budowy (struktury) tautologii.

Niektóre tautologie zebrano w tablicy 1.

Tablica 1. Wybrane tautologie

Nazwa tautologii	Zapis	Sposób odczytania
prawo podwójnego przeczenia	$\sim(\sim p) \Leftrightarrow p$	zaprzeczenie zaprzeczenia zdania p jest równoważne zdaniu p
prawo wyłącznego środka	$p \vee (\sim p)$	alternatywa dwóch zdań, z których jedno jest zaprzeczeniem drugiego, jest prawdziwe
prawo sprzeczności	$\sim(p \wedge (\sim p))$	zaprzeczenie koniunkcji dwóch zdań, z których jedno jest zaprzeczeniem drugiego, jest prawdziwe
prawo sylogizmu (przechodności implikacji)	$[(p \Rightarrow q) \wedge (q \Rightarrow r)] \Rightarrow (p \Rightarrow r)$	jeżeli zdanie p implikuje zdanie q i zdanie q implikuje zdanie r , to zdanie p implikuje zdanie r
prawo transpozycji	$[(\sim q) \Rightarrow (\sim p)] \Rightarrow (p \Rightarrow q)$	jeżeli zaprzeczenie zdania q implikuje zaprzeczenie zdania p , to zdanie p implikuje zdanie q
prawo Duns-Scotusa	$(\sim p) \Rightarrow (p \Rightarrow q)$	zaprzeczenie zdania p implikuje, że zdanie p implikuje dowolne zdanie q
prawo Claviusa	$(\sim p \Rightarrow p) \Rightarrow p$	jeżeli zaprzeczenie zdania p implikuje zdanie p , to p
prawa de Morgana	$\sim(p \vee q) \Leftrightarrow ((\sim p) \wedge (\sim q))$	negacja alternatywy jest równoważna komunikacji negacji
	$\sim(p \wedge q) \Leftrightarrow ((\sim p) \vee (\sim q))$	negacja komunikacji jest równoważna alternatywie negacji

Źródło: Wojciech Żakowski, Matematyka cz. I, WNT, Warszawa 1970, s. 23.

Do sprawdzenia tautologii może służyć metoda zero – jedynkowa, która polega na rozważeniu wszystkich możliwości układów wartości logicznych zmiennych zdaniowych, które w badanym wyrażeniu występują.

Dla przykładu wykażemy prawdziwość prawa kontrapozycji wykorzystywanego w matematyce w prowadzeniu dowodu nie wprost.

$$(p \Rightarrow q) \Leftrightarrow (\sim q) \Rightarrow (\sim p)$$

p	q	$p \Rightarrow q$	$\sim q$	$\sim p$	$(\sim q) \Rightarrow (\sim p)$	$(p \Rightarrow q) \Leftrightarrow (\sim q) \Rightarrow (\sim p)$
0	0	1	1	1	1	1
0	1	1	0	1	1	1
1	0	0	1	0	0	1
1	1	1	0	0	1	1

Uzyskanie samych jedynek w ostatniej kolumnie świadczy o tym, że analizowany schemat jest schematem niezawodnego wnioskowania czyli tautologią. Gdyby w tej właśnie kolumnie chociaż raz wystąpiło zero, to taki schemat nie byłby tautologią.

Czasami stosujemy jakiś rodzaj wnioskowania co do którego nie mamy pewności czy jest wnioskowaniem niezawodnym. Wówczas dobrze jest taki schemat przedstawić w postaci w której użyto zmienne zdaniowe, a następnie sprawdzić czy jest to schemat niezawodnego wnioskowania.

Przykładowo aby sprawdzić poprawność wnioskowania:

Jeżeli padał deszcz to jezdnia jest mokra

i wiemy, że jezdnia jest mokra

to możemy stwierdzić, że padał deszcz.

Zapiszemy to wnioskowanie w postaci schematu ze zmiennymi zdaniowymi.

Mamy tutaj dwa zdania

p – padał deszcz

q – jezdnia jest mokra

zaś samo rozumowanie przebiegało według schematu:

$$((p \Rightarrow q) \wedge q) \Rightarrow p$$

Następnie metodą zero – jedynkową sprawdzimy czy taki schemat wnioskowania jest tautologią.

Mamy następującą tablicę:

p	q	$p \Rightarrow q$	$(p \Rightarrow q) \wedge q$	$((p \Rightarrow q) \wedge q) \Rightarrow p$
0	0	1	0	1
0	1	1	1	0
1	0	0	0	1
1	1	1	1	1

Otrzymane w ostatniej kolumnie zero świadczy, że stosowany schemat nie jest tautologią. A zatem przedstawione wnioskowanie jest prawdopodobne ale nie niezawodne.

1.3.

ZBIORY I DZIAŁANIA NA ZBIORACH

Pojęcie zbioru w matematyce należy do pojęć pierwotnych (niedefiniowalnych).

Pojęcie należenia do zbioru również jest pojęciem pierwotnym.

Zbiory oznaczamy dużymi literami, np. **A**, **B**, (...).

Elementy zbioru, małymi literami np. **a**, **b**, (...).

Jeżeli element **a** należy do zbioru **A** wówczas zapisujemy $a \in A$.

Znak \in czytamy: należy do.

Jeżeli element **b** nie należy do zbioru **A** wówczas zapisujemy: $b \notin A$.

Znak \notin czytamy: nie należy do.

Interesują nas zbiory liczbowe. Wyróżnić można następujące zbiory:

R – zbiór liczb rzeczywistych np.: $\sqrt{2}$, $-\frac{3}{2}$, 7

C – zbiór liczb całkowitych np.: -6, -1, 0, 2, 5

N – zbiór liczb naturalnych np.: 1, 2, 3,

W – zbiór liczb wymiernych (typu $\frac{p}{q}$, $q \neq 0$)

NW – zbiór liczb niewymiernych np. $\sqrt{2}$, π ,

Z – zbiór liczb zespolonych⁽¹⁾

¹ Liczba zespolona $z = a + jb$, gdzie $a = \text{Re } z$ (część rzeczywista liczby z), zaś $b = \text{Im } z$ (część urojona liczby z)

Zbiór pusty to taki zbiór, który nie ma żadnych elementów. Przykładem zbioru pustego jest na przykład zbiór dotychczasowych laureatów Konkursu Chopinowskiego, którzy startowali w wyścigach Formuła 1.

Zbiór pusty oznaczamy symbolem \emptyset

Istnieje pojęcie podzbioru zbioru X .

A jest podzbiorem zbioru X (co zapisujemy)

$$A \subset X \Leftrightarrow (x \in A \Rightarrow x \in X)$$

wtedy i tylko wtedy gdy jeśli element x należy do zbioru A to ten sam element x należy również do zbioru X .

Zbiór U nazywamy **przestrzenią** lub **zbiorem pełnym**.

Dopełnienie A' zbioru A do przestrzeni U definiowane jest następująco:

$$(a \in A') \Leftrightarrow ((a \in U) \wedge (a \notin A))$$

Oznacza to, że element a należy do dopełnienia zbioru A wtedy i tylko wtedy, gdy element ten należy do przestrzeni U i nie należy do zbioru A .

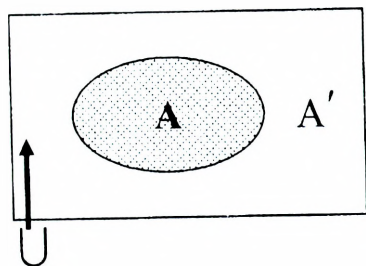
Słuszna jest równość

$$A' = U - A$$

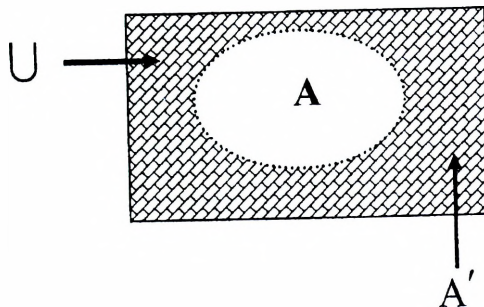
np. jeśli U – zdefiniujemy jako wszystkich studentów Akademii Obrony Narodowej, zbiór A stanowią wszyscy studenci studiów zaocznych AON to w skład dopełnienia A' wchodzi wszyscy studenci AON, którzy nie są studentami studiów zaocznych.

Graficznie zbiory przedstawiamy za pomocą tzw. diagramów Venna, w których zbiór symbolizuje tarcza koła.

Wówczas dopełnienie A' do zbioru A poglądowo przedstawić można w sposób następujący:



zbiór A' przedstawia poniższy rysunek



Dwa zbiory są **równe** wtedy i tylko wtedy, gdy każdy element jednego zbioru jest elementem drugiego i na odwrót

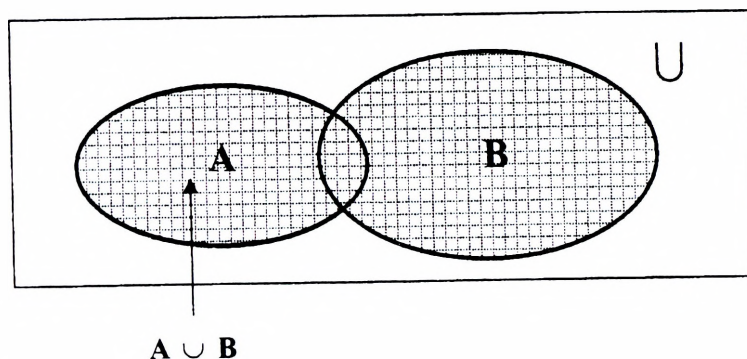
$$A = B \Leftrightarrow (A \subset B) \wedge (B \subset A)$$

Wyróżniamy trzy działania na zbiorach: **dodawanie, mnożenie, i odejmowanie**

Każde z tych działań przyporządkowuje dwóm danym zbiorom trzeci zbiór, zwany odpowiednio sumą $A + B$, iloczynem $A \cdot B$ oraz różnicą $A - B$ zbiorów A i B .

Suma zbiorów A i B nazywamy zbiór:

$$A \cup B = \{x: x \in A \cup x \in B\}$$



Suma zbiorów posiada następujące właściwości:

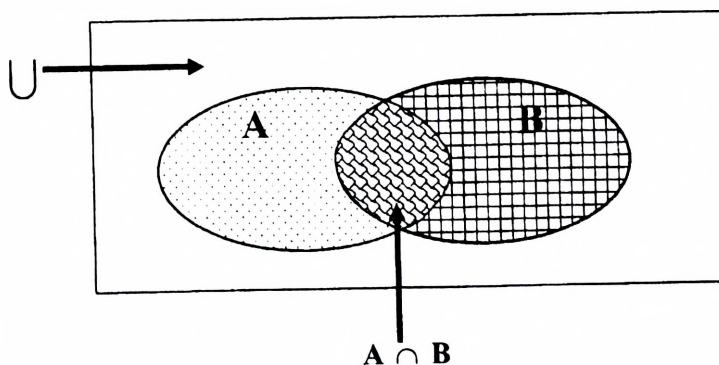
$$A \cup B = B \cup A$$

$$A \cup \emptyset = A$$

$$A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap C$$

Iloczynem zbiorów A i B nazywamy zbiór

$$A \cap B = \{x: x \in A \cap x \in B\}$$



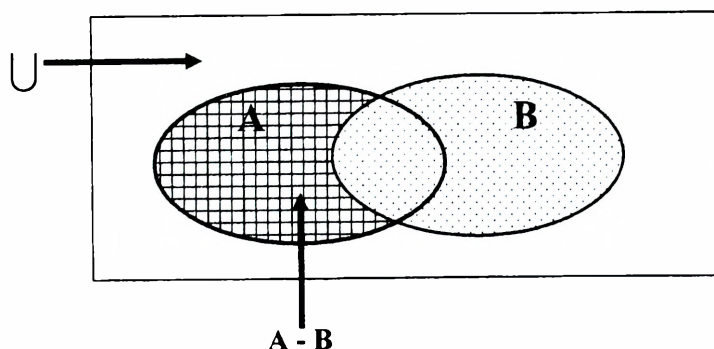
Mamy następujące właściwości iloczynu

$$A \cap B = B \cap A$$

$$A \cap (B \cap C) = (A \cap B) \cap C$$

Różnicą zbiorów **A** i **B** nazywamy zbiór zdefiniowany w sposób następujący

$$A - B = \{x: x \in A \cap x \notin B\}$$



Różnicę zapisujemy również w postaci $A \setminus B$

Przykładowo:

Niech zbiór U tworzą wszyscy studenci AON

Zbiór **A** – tworzą studenci I roku studiów zaocznych AON

Zbiór **B** – studenci AON, którzy noszą okulary.

Wówczas zbiór **A - B** tworzą wszyscy studenci I roku studiów zaocznych AON którzy nie noszą okularów.

Przykład 1

Dane są zbiory:

$$A = \{x: x \in \mathbb{N} \quad |3x - 4| < 9\}$$

$$B = \{x: x \in \mathbb{R} \quad \frac{x^2 + 5x - 14}{2x^2 \cdot (x + 4)} \leq 0\}$$

Wyznaczyć zbiory $A \cup B$, $A \cap B$, $A \setminus B$

Rozwiązanie:

Najpierw wyznaczamy zbiór A

$$-9 < 3x - 4 < 9$$

$$-5 < 3x < 13$$

$$-\frac{5}{3} < x < \frac{13}{3}$$

a ponieważ poszukujemy rozwiązania tej nierówności wśród liczb naturalnych zbiór A tworzą cztery liczby 1, 2, 3 i 4, co zapisujemy:

$$A = \{1, 2, 3, 4\}$$

Zbiór B wyznaczamy wykorzystując wykres funkcji wymiernej. Łatwo sprawdzić, że jej licznik rozkłada się na czynniki

$$x^2 + 5x - 14 = (x+7)(x-2), \text{ a zatem mamy rozwiązać nierówność:}$$

$$\frac{(x+7) \cdot (x-2)}{2x^2 \cdot (x+4)} \leq 0 \quad x \neq 0, x \neq -4$$

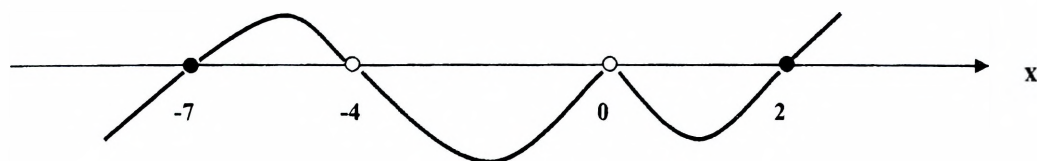
Po pomnożeniu nierówności przez 2 otrzymujemy

$$\frac{(x+7) \cdot (x-2)}{x^2 \cdot (x+4)} \leq 0$$

Miejscami zerowymi są $x_1 = -7$, $x_2 = 2$, zaś punktami w których wartość wyrażenia jest nieokreślona są 0 oraz -4. Punkty te nanosimy na osi 0x (punkty wyłączone z dziedziny oznaczamy jako \circ)



Wykres rysujemy od prawej do lewej strony, w tym przypadku rozpoczynając od góry; Wykres ten trzy razy przecina oś 0x, raz „dotyka” tej osi. Mamy przybliżony jego kształt



Stąd odpowiedź:

$$B = (-\infty; -7) \cup (-4; 0) \cup (0; 2)$$

Mamy zatem

$$A \cup B = (-\infty; -7) \cup (-4; 0) \cup (0; 2) \cup \{3, 4\}$$

$$A \cap B = \{1, 2\}$$

$$A \setminus B = \{3, 4\}$$

1.4.

PRZEDZIAŁY

Niech a i b będą liczbami rzeczywistymi, przy czym $a < b$.

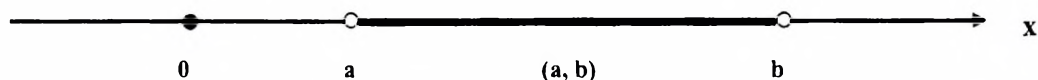
Wyróżnić można cztery przedziały skończone oraz pięć przedziałów nieskończonych, definiowane następująco:

Przedziały skończone

a) Przedział otwarty (a, b)

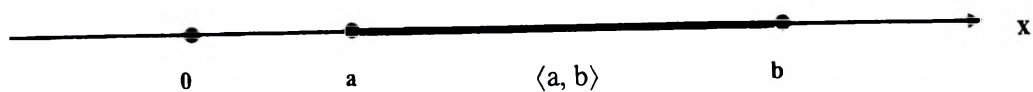
$$\text{Df: } x \in (a, b) \Leftrightarrow (a < x < b)$$

Liczby a i b nazywamy końcami przedziału; liczbę $b - a$ długością przedziału



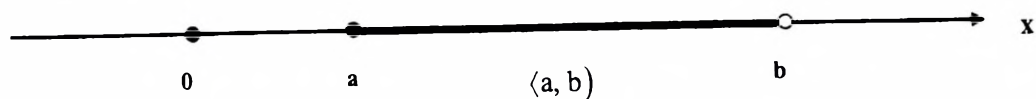
b) **Przedział domknięty⁽²⁾ $\langle a, b \rangle$**

$$\text{Df: } x \in \langle a, b \rangle \Leftrightarrow (a \leq x \leq b)$$



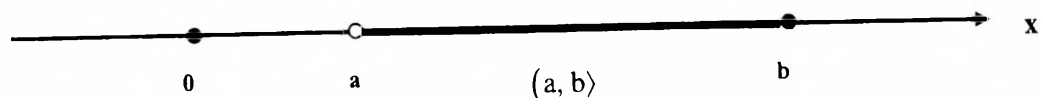
c) **Przedział lewostronnie domknięty $\langle a, b \rangle$**

$$\text{Df: } x \in \langle a, b \rangle \Leftrightarrow (a \leq x < b)$$



d) **Przedział prawostronnie domknięty (a, b)**

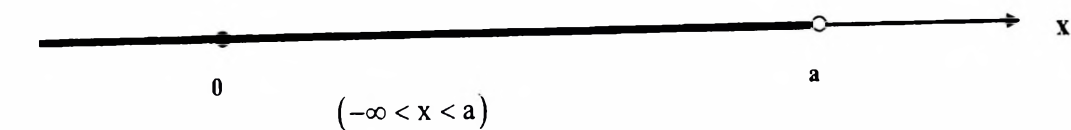
$$\text{Df: } x \in (a, b) \Leftrightarrow (a < x \leq b)$$



Przedziały nieskończone

e)

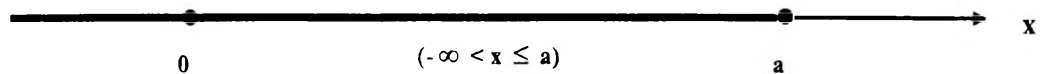
$$(-\infty, a) \quad \text{Df: } x \in (-\infty, a) \Leftrightarrow (x < a)$$



² Inny zapis tego samego przedziału ma postać $[a, b]$.

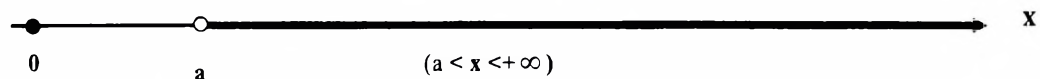
f)

$$(-\infty, a) \quad \text{Df: } x \in (-\infty, a) \Leftrightarrow (x < a)$$



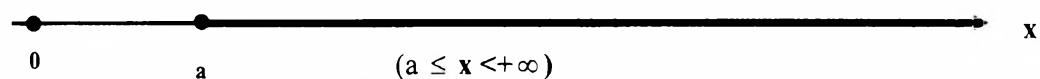
g)

$$(a, +\infty) \quad \text{Df: } x \in (a, +\infty) \Leftrightarrow (x > a)$$



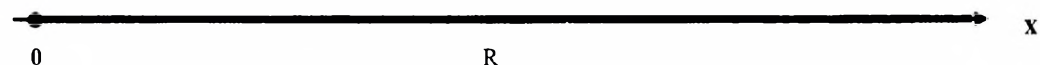
h)

$$\langle a, +\infty) \quad \text{Df: } x \in \langle a, +\infty) \Leftrightarrow (x \geq a)$$



i)

$$(-\infty, +\infty) \quad \text{Df: } (-\infty, +\infty) = \mathbb{R}$$



Przykładowo: Symbol $\langle 2, 5)$ oznacza przedział lewostronnie domknięty o końcach 2 i 5 oraz długości 3. Dolna granica 2 należy do tego przedziału, górna granica 5 – nie należy. Jest to ograniczony zbiór liczb. Kres dolny tego zbioru wynosi 2.

$$\inf \langle 2, 5) = 2$$

zaś kres górny wynosi 5, zapisujemy

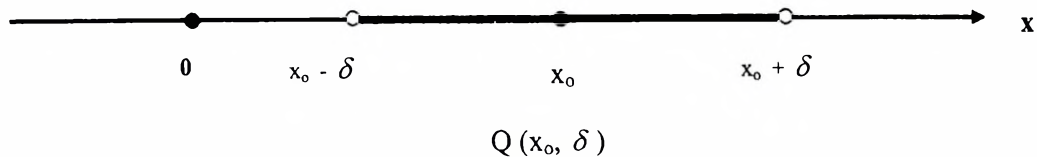
$$\sup \langle 2, 5) = 5$$

Do tego przedziału należy nieskończenie wiele liczb, liczba najmniejsza to **2**, liczby największej brak.

Natomiast przedział $(-\infty, 0)$ to zbiór wszystkich liczb ujemnych.

Otoczenie $Q(x_0, \delta)$ punktu x_0 o promieniu δ ($\delta > 0$)
definiowane jest następująco:

$$\text{Df: } (x \in Q(x_0, \delta) \Leftrightarrow (0 \leq |x - x_0| < \delta))$$

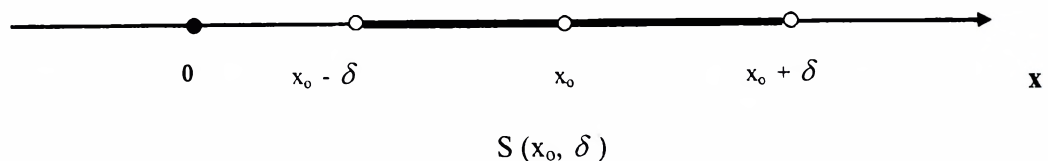


Punkt $x \in Q(x_0, \delta)$

Przykładowo $Q(1, 1)$ jest otoczeniem punktu 1 o promieniu jeden, czyli przedziałem otwartym $(0, 2)$

Sąsiedztwo $S(x_0, \delta)$ punktu x_0 o promieniu δ ($\delta > 0$)

$$\text{Df: } x \in S(x_0, \delta) \Leftrightarrow (0 < |x - x_0| < \delta) \qquad x_0 \in S(x_0, \delta)$$



np. $S(2; 1)$ jest sąsiedztwem punktu 2 o promieniu 1. Jest nim przedział $(1,2) \cup (2,3)$.

Wypisanie elementów zbioru w nawiasach klamrowych: np. $\{2, 5, 11\}$ oznacza zbiór złożony z trzech liczb: **2, 5 i 11**. Taki sposób stosujemy w przypadku zbiorów skończonych. Wypada zaznaczyć, że w nawiasach klamrowych mogą być również zawarte zbiory nieskończone. Na przykład zapis $\{2,4,6, (...)\}$ oznacza zbiór złożony ze wszystkich liczb parzystych.

1.5.

ILOCZYN KARTEZJAŃSKI

Niech A i B będą otwartymi zbiorami. Iloczynem kartezjańskim zbiorów A i B nazywamy zbiór oznaczony $A \times B$ złożony z par (a, b) , gdzie $a \in A, b \in B$.

$$A \times B = \{(a, b); a \in A \cap b \in B\}$$

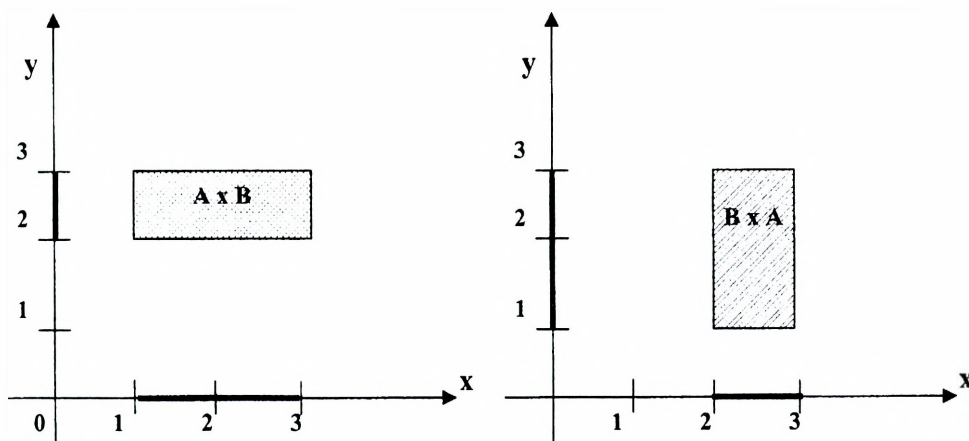
(a, b) – para uporządkowana; zbiór dwuelementowy.

Iloczyn kartezjański stanowią więc uporządkowane pary, z których na pierwszym miejscu jest element z pierwszego czynnika, a na drugim miejscu element z drugiego czynnika.

Przykład 2

$$\text{Niech } A = \langle 1, 3 \rangle, \quad B = \langle 2, 3 \rangle$$

Wyznaczyć $A \times B$ oraz $B \times A$



Z definicji iloczynu kartezjańskiego wynika, że

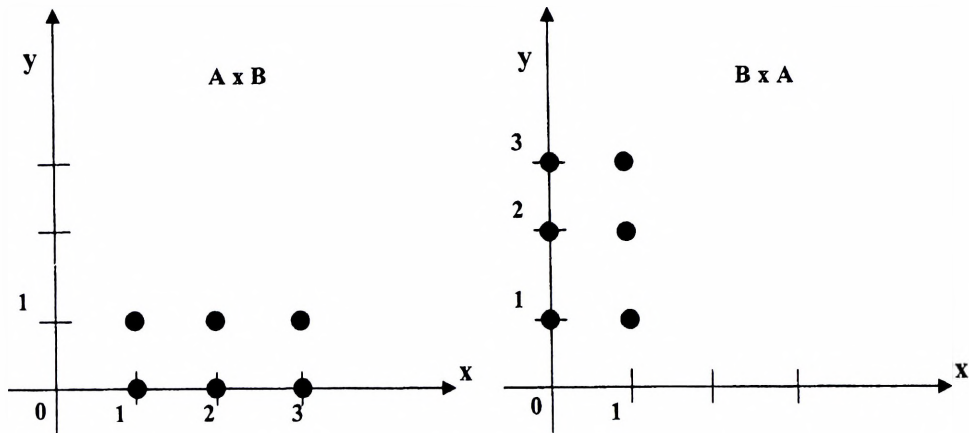
$$A \times B \neq B \times A, \quad \text{gdy } A \neq B$$

Jeżeli np. zbiór A ma n elementów, zbiór B ma k elementów to $A \times B$ ma $n \cdot k$ elementów

Przykład 3

Niech $A = \{1, 2, 3\}$, $B = \{0, 1\}$

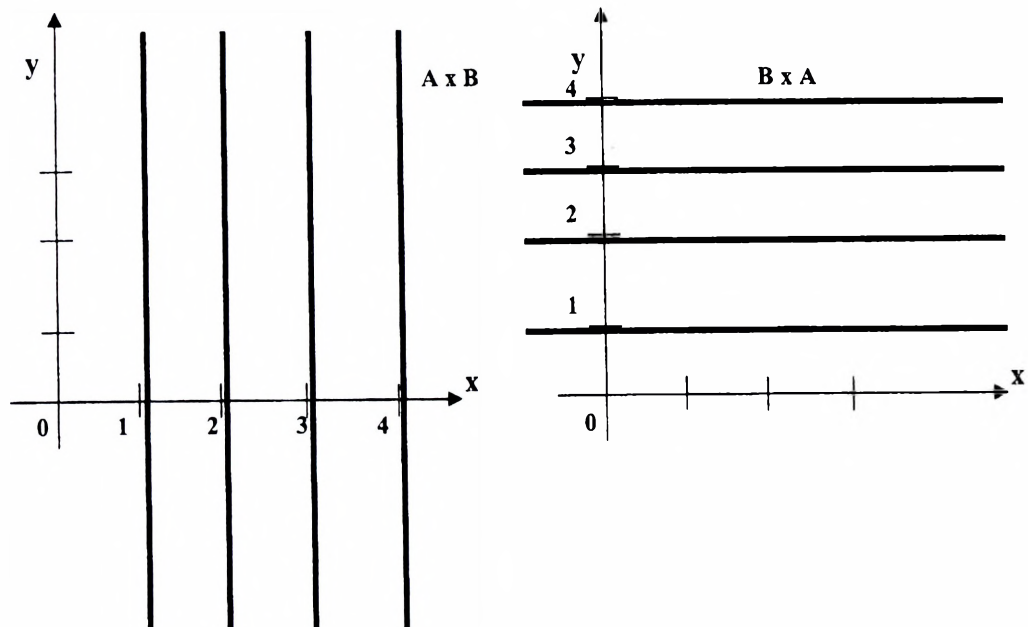
Wyznaczyć $A \times B$ oraz $B \times A$



Przykład 4

Wyznaczyć $A \times B$ oraz $B \times A$

Jeśli $A = \{N\}$, $B = \{R\}$



Zadania:

1. Sprawdzić czy następujące wyrażenia są tautologiami

- a) $(\sim p) \Rightarrow \sim(p \wedge q)$
- b) $(p \Rightarrow q) \Rightarrow ((\sim p) \vee q)$
- c) $(p \wedge (p \Rightarrow q)) \Rightarrow q$
- d) $((p \Rightarrow q) \wedge (q \Rightarrow r)) \Rightarrow (p \Rightarrow r)$
- e) $(p \Leftrightarrow r) \Leftrightarrow ((p \Leftrightarrow q) \wedge (q \Leftrightarrow r))$
- f) $((\sim q) \Rightarrow r) \wedge ((\sim q) \Rightarrow (\sim r)) \Rightarrow q$

2. Niech

$$A = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 8\} \text{ oraz } B = \{n \in \mathbb{N}; n^2 < 4n\}$$

Wyznaczyć zbiory $A \cap B$, $A \cup B$, $A \setminus B$

3. Dane są zbiory:

$$A = \{x \in \mathbb{R}; x > 0,1\} \text{ oraz } B = \{x \in \mathbb{N}; x \leq 3\}$$

Wyznaczyć zbiory $A \cap B$, $A \cup B$, $A \setminus B$ oraz $B \setminus A$

4. Dane są zbiory:

$$A = \{x \in \mathbb{N}; |x - 7| \geq 2\} \text{ oraz } B = \{x \in \mathbb{N}; x \leq 3\}$$

Wyznaczyć zbiory $A \cap B$, $A \cup B$ oraz $B - A$

5. Zaznaczyć na płaszczyźnie następujące iloczyny kartezjańskie

- a) $\mathbb{R} \times (0, 1)$
- b) $\{2, 3\} \times \mathbb{N}$
- c) $(0, +\infty) \times (0, +\infty)$
- d) $\mathbb{N} \times (3, 4)$
- e) $\{x \in \mathbb{R}; x^2 < 2\} \times \{x \in \mathbb{R}; |x| > 1\}$
- f) $\{x \in \mathbb{R}; 0 < x \leq 1 \cup x > 2\} \times \{x \in \mathbb{R}; -1 < x \leq 2\}$
- g) $\{x \in \mathbb{C}\} \times \{x \in \mathbb{R}; |x| < 3\}$

2.

FUNKCJE JEDNEJ ZMIENNEJ I ICH WŁASNOŚCI

2.1.

POJĘCIE FUNKCJI

Niech będą dane dwa niepuste zbiory X i Y .

Definicja. Funkcja określona na elementach zbioru X i o wartościach ze zbioru Y jest to przyporządkowanie każdemu elementowi zbioru X dokładnie jednego elementu zbioru Y .

Funkcję oznaczamy zwykle literą f i zapisujemy

$$y = f(x)$$

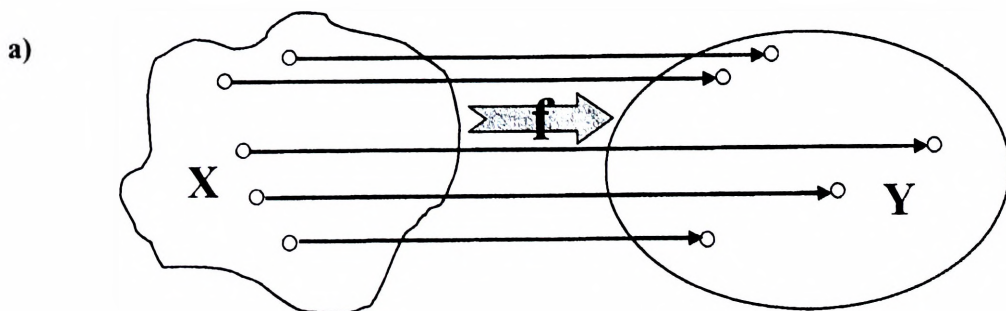
zaznaczając, że $x \in X$ i $y \in Y$, przy czym:

- x – zmienna niezależna, argument funkcji
- y – zmienna zależna, wartość funkcji
- X – dziedzina funkcji
- Y – zbiór wartości funkcji, przeciwdziedzina funkcji
- f – oznacza symbol przyporządkowania

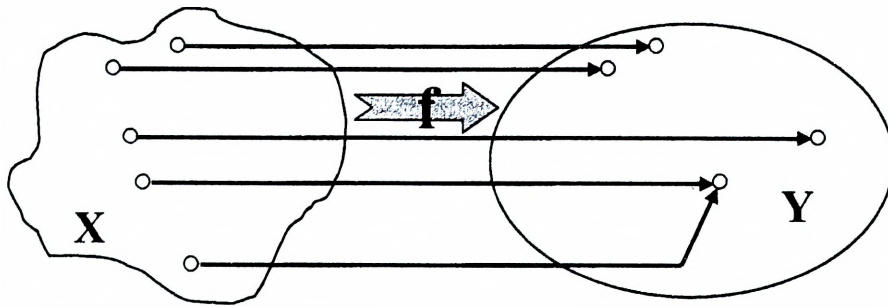
Przyporządkowanie funkcyjne jest przyporządkowaniem jednoznacznym, co oznacza, że konkretnej wartości x funkcja przyporządkowuje dokładnie jedną wartość y .

Na rys. 1 zostały schematycznie przedstawione trzy przyporządkowania a), b) i c).

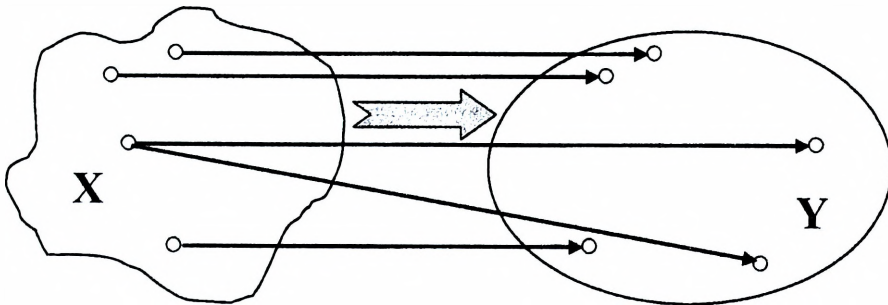
Rysunek 1. Przyporządkowania



b)



c)



Przyporządkowania schematycznie przedstawione na rys. a) i b) są funkcjami, natomiast trzecie oznaczenie jako c) funkcją nie jest gdyż jednemu elementowi zostały przyporządkowane jednocześnie dwie wartości y .

Używając wyrażenia funkcja mamy zwykle na myśli funkcje rzeczywiste lub funkcje jednej zmiennej rzeczywistej. Oznacza to, że zarówno dziedziną jak i przeciwdziedziną każdej takiej funkcji są pewne podzbiory zbioru liczb rzeczywistych. Funkcje takie nazywamy również funkcjami liczbowymi. Funkcja liczbowa określona jest konkretnym wzorem np. $y = x^3$. Dziedziną funkcji jest zbiór tych wszystkich x , dla których prawa strona tego wzoru ma określoną wartość. W przypadku funkcji $y = x^3$ jest nią zbiór liczb rzeczywistych, czyli zbiór \mathbf{R} .

Przykładowo: dziedziną funkcji $y = \log x$ jest zbiór \mathbf{R}_+ .

Tak rozumianą dziedziną nazywamy dziedziną naturalną. Niekiedy wyróżniamy dziedzinę sztuczną. Występuje to wówczas, jeżeli zmienna x ma konkretną interpretację. Jeśli na przykład x oznacza długość boku sześcianu zaś interesuje nas zależność objętości V sześcianu od długości jego boku, to związek jest jednoznaczny i wyraża się wzorem

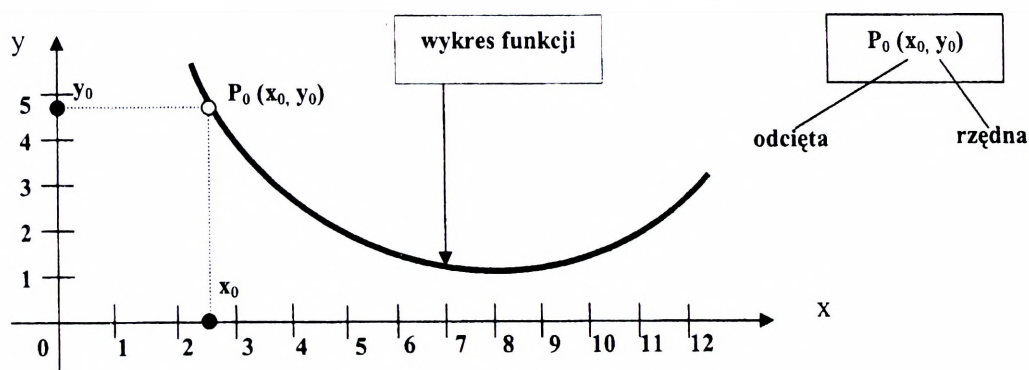
$$V = x^3$$

Dziedzina (sztuczna) takiej funkcji jest zbiór $X = \mathbf{R}_+$

Funkcję liczbową interpretować można geometrycznie sporządzając wykres funkcji. W tym celu najpierw na płaszczyźnie rysujemy dwie prostopadłe do siebie osie 0_x i 0_y o wspólnym początku O (tzw. układ współrzędnych prostokątnych 0_{xy}). Układ taki jest układem prostokątnym kartezjańskim, jeżeli na osiach tych została ustalona wspólna jednostka długości. Jeżeli na osiach 0_x i 0_y przyjęto różne jednostki długości to taki układ nazywamy układem prostokątnym (bez przymiottnika kartezjański). Na płaszczyźnie układu 0_{xy} zaznaczamy punkty o współrzędnych $(x, f(x))$.

Wykres funkcji tworzy zbiór takich właśnie punktów, jeśli x przyjmuje wszystkie wartości z dziedziny funkcji.

Rysunek 2. Przykładowy wykres funkcji $y = f(x)$



2.2.

WŁAŚCIWOŚCI SZCZEGÓLNE FUNKCJI LICZBOWYCH

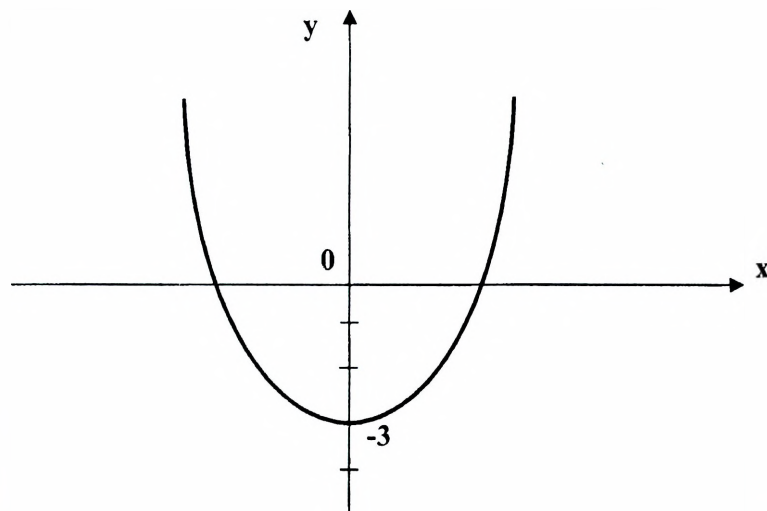
Niech funkcja $f(x)$ będzie funkcją liczbową określoną w zbiorze X .

a) funkcja ograniczona

Definicja. Funkcją $f(x)$ nazywamy ograniczona z dołu w zbiorze X , jeżeli istnieje taka liczba M , że dla każdego $x \in X$ zachodzi relacja

$$f(x) \geq M$$

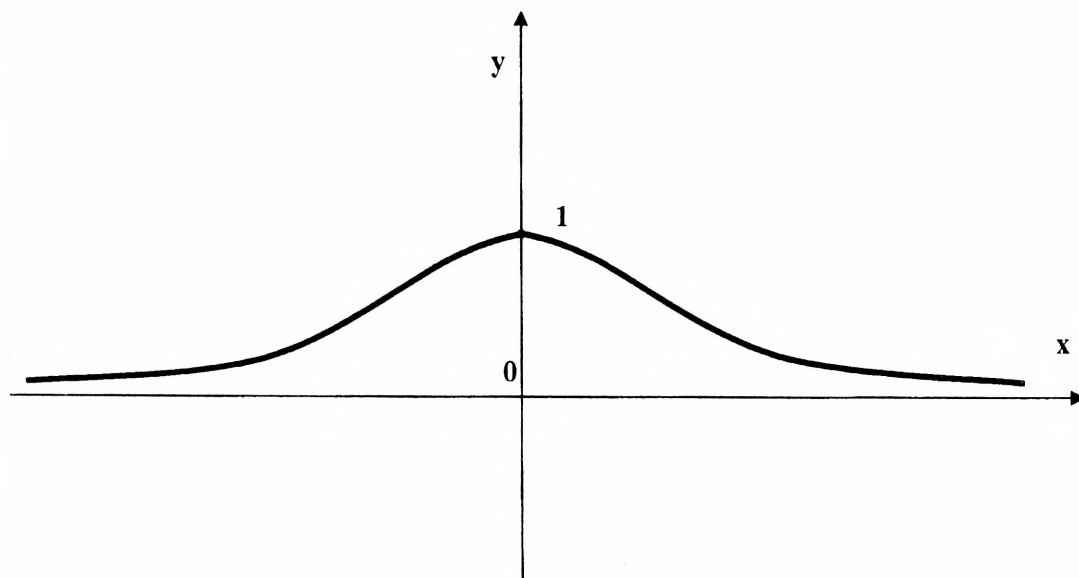
Przykładowo: funkcja $f(x) = x^2 - 3$ jest ograniczona z dołu przez liczbę minus 3



Definicja. Funkcję $f(x)$ nazywamy ograniczona z góry w zbiorze X , jeżeli istnieje taka liczba M , że dla każdego $x \in X$ zachodzi związek

$$f(x) \leq M$$

Przykładowo funkcja $f(x) = \frac{1}{x^2+1}$ jest ograniczona z góry przez liczbę 1



Definicja. Funkcję $f(x)$ nazywamy ograniczona w zbiorze X , jeżeli istnieje taka liczba M , że dla każdego $x \in X$ zachodzi związek

$$|f(x)| \leq M$$

Funkcja jest ograniczona, gdy jest ograniczona z dołu jak i ograniczona z góry. Przykładem takiej funkcji może być funkcja $f(x) = \cos x$. Jest ona ograniczona przez liczbę 1.

b) funkcja parzysta, funkcja nieparzysta

Definicja. Funkcję $f(x)$ nazywamy parzysta, jeżeli dla każdego x z jej dziedziny zachodzi warunek

$$f(x) = f(-x)$$

Przykładami funkcji parzystych mogą być funkcje:

$$f(x) = x^2, \quad f(x) = \cos x, \quad f(x) = \frac{1}{x^2},$$

Definicja. Funkcją $f(x)$ nazywamy nieparzysta, jeżeli dla każdego x z jej dziedziny zachodzi związek

$$f(x) = -f(-x)$$

Przykładami funkcji nieparzystych są funkcje:

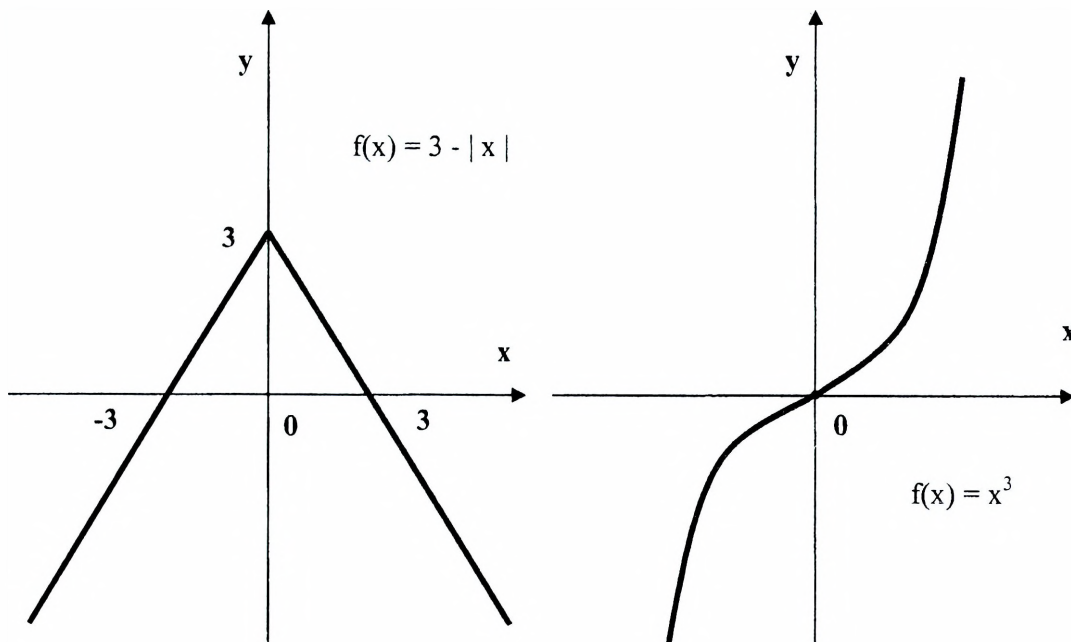
$$f(x) = \sin x, \quad f(x) = \operatorname{tg} x, \quad f(x) = x^3, \quad \text{czy} \quad f(x) = 3x$$

Zwróćmy uwagę na to, że dla funkcji parzystej oś rzędnych O_y jest osią symetrii wykresu funkcji, zaś w przypadku funkcji nieparzystej początek układu współrzędnych O jest środkiem symetrii dla jej wykresu.

Rysunek 3. Przykłady funkcji

a) parzystej $f(x) = 3 - |x|$

b) nieparzystej $f(x) = x^3$



c) funkcja rosnąca, funkcja malejąca, funkcja monotoniczna

Definicja. Funkcję $f(x)$ nazywamy rosnącą w zbiorze X jeżeli dla każdych dwóch liczb x_1, x_2 z tego zbioru takich, że $x_1 < x_2$ spełniony jest warunek

$$(\alpha) \quad f(x_1) < f(x_2)$$

Przykład 1

Wykazać, że funkcja $f(x) = 2x - 1$ jest rosnąca.

Z: $x_1 < x_2$

T: $f(x_1) < f(x_2)$

Dowód: Wyznaczamy kolejno

$$f(x_1) = 2x_1 - 1$$

$$f(x_2) = 2x_2 - 1$$

Tworzymy różnicę

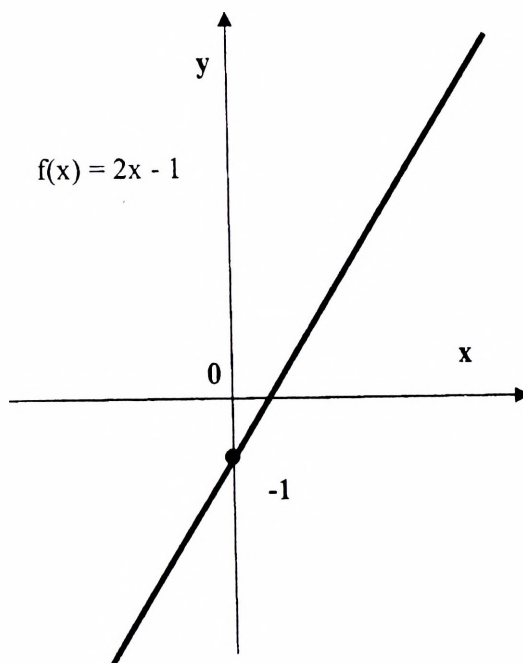
$$f(x_1) - f(x_2) = 2x_1 - 1 - (2x_2 - 1) = 2x_1 - 1 - 2x_2 + 1$$

Z założenia wynika, że $x_1 - x_2 < 0$, zatem mamy związek

$$f(x_1) - f(x_2) = 2(x_1 - x_2) < 0, \quad \text{a zatem}$$

$$f(x_1) < f(x_2) \quad \text{c.n.d.}$$

Rysunek 4. Przykład funkcji rosnącej



Definicja. Funkcję $f(x)$ nazywamy malejącą w zbiorze X , jeżeli dla każdych dwóch liczb x_1, x_2 z tego zbioru takich, że $x_1 < x_2$ spełniony jest warunek

$$(\beta) \quad f(x_1) > f(x_2)$$

Czytelnikowi zostawiamy sprawdzenie, że funkcja $f(x) = \frac{1}{x}$ jest malejąca w przedziale $(0, +\infty)$.

Jeżeli w podanych definicjach funkcji rosnącej i malejącej zastępujemy nierówność α przez

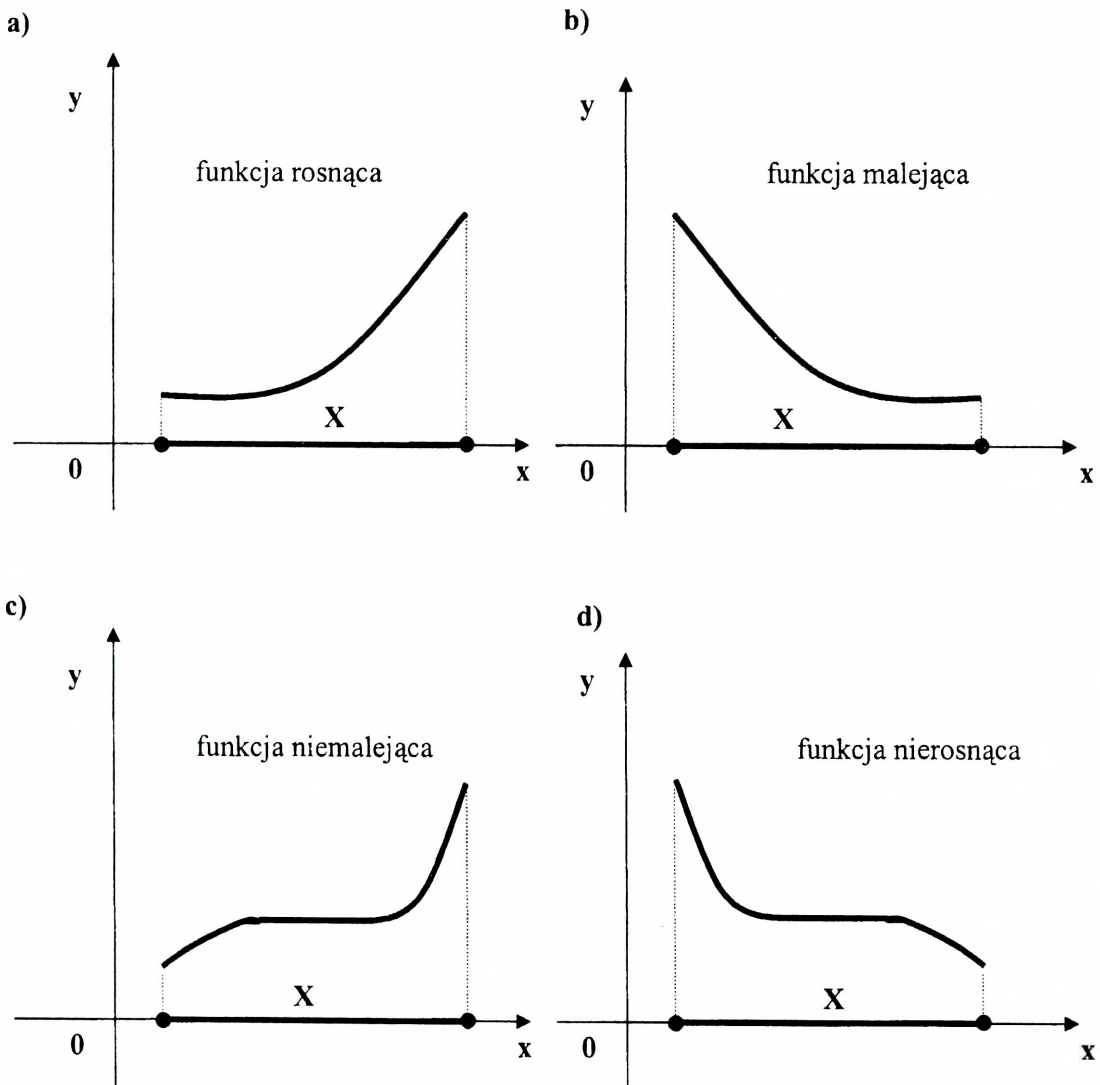
$$f(x_1) \leq f(x_2)$$

zaś nierówność β przez

$$f(x_1) \geq f(x_2)$$

otrzymamy odpowiednio definicję funkcji niemalejącej zamiast rosnącej oraz nierosnącej zamiast malejącej.

**Rysunek 5. Przykładowe wykresy funkcji
rosnącej, malejącej, niemalejącej, nierosnącej**



Definicja. Funkcja monotoniczna w zbiorze jest to każda funkcja, która jest niemalejąca lub nierosnąca w tym zbiorze.

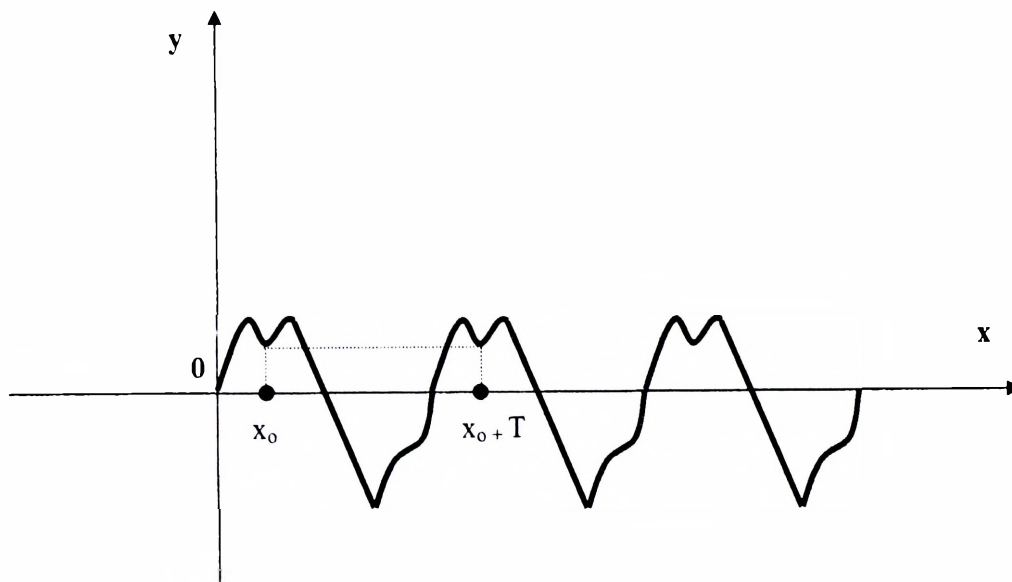
Funkcję rosnącą, a także malejącą nazywamy funkcją ściśle monotoniczną, natomiast funkcję niemalejącą, a także nierosnącą nazywamy monotoniczną w szerszym sensie.

d) funkcja okresowa

Definicja. Funkcję $f(x)$ nazywamy okresową, jeżeli istnieje taka liczba $T > 0$, że dla każdej liczby x z dziedziny funkcji f i dla każdego całkowitego k spełniony jest warunek

$$f(x + kT) = f(x)$$

Rysunek 6. Przykładowy wykres funkcji okresowej



Przykładami funkcji okresowych są funkcje trygonometryczne,

a więc $\sin x$, $\cos x$, $\operatorname{tg} x$ i $\operatorname{ctg} x$.

Ich okresy podstawowe odpowiednio wynoszą: 2π , 2π , π i π .

2.3.

FUNKCJA RÓŻNOWARTOŚCIOWA I FUNKCJA ODWROTNA

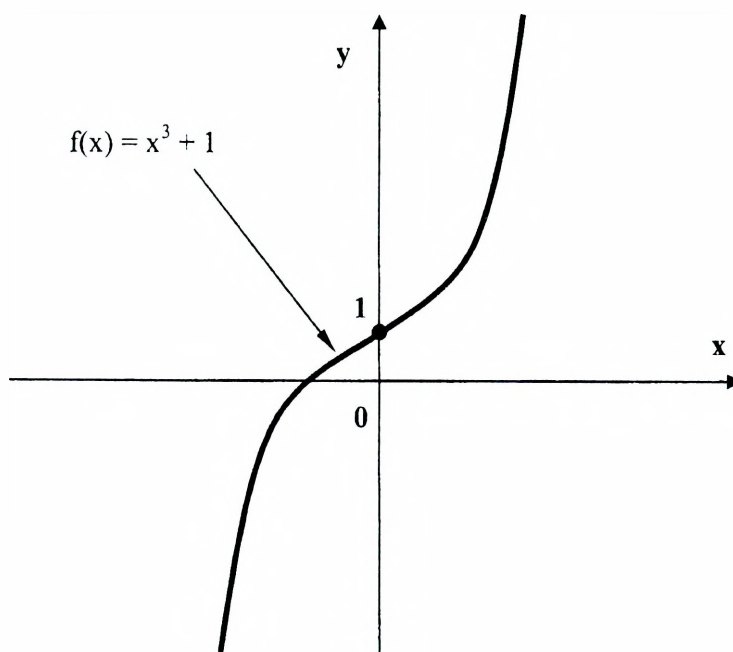
Niech $f(x)$ będzie funkcją określoną w zbiorze X .

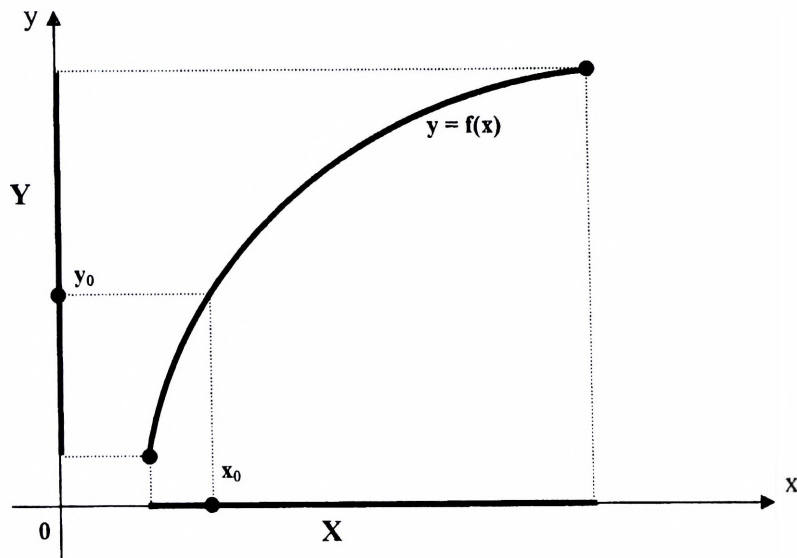
Definicja. Funkcję $f(x)$ nazywamy różnowartościową w zbiorze X , jeżeli dla każdych dwóch elementów x_1, x_2 tego zbioru

$$f(x_1) \neq f(x_2)$$

Przykładowo: funkcja $f(x) = x^3$ jest funkcją różnowartościową, natomiast funkcja $f(x) = |x|$ taką nie jest.

Rysunek 7. Przykład funkcji różnowartościowej



Rysunek 8. Funkcja różnowartościowa


Na rysunku 8 schematycznie przedstawiono funkcję, która jest różnowartościowa. Elementowi x_0 należącemu do dziedziny X przyporządkowany jest dokładnie jeden element y_0 (należący do przeciwdziedziny Y tej funkcji). Ale sytuację i rozumowanie można w pewnym sensie odwrócić i stwierdzić, że elementowi y_0 z przeciwdziedziny Y funkcji f przyporządkowany jest dokładnie jeden element x_0 z dziedziny X tej funkcji. To drugie przyporządkowanie określa na elementach przeciwdziedziny Y funkcji f pewną nową funkcję. Funkcję tą nazywamy funkcją odwrotną do funkcji f i oznaczamy symbolem f^{-1} .

Aby wyznaczyć funkcję odwrotną względem funkcji $f(x)$ należy:

- 1°. stwierdzić czy funkcja $f(x)$ jest różnowartościowa (gdyby nie była to funkcja odwrotna f^{-1} nie istnieje),
- 2°. wyznaczyć zależność x od y ,
- 3°. dokonać zamiany zmiennych x i y .

Przykład 2

Wyznaczyć funkcję odwrotną do funkcji

$$f(x) = 2 - 3x$$

- 1°. stwierdzamy, że funkcja $f(x) = -3x + 2$ jest różnowartościowa, czyli istnieje funkcja odwrotna $f^{-1}(x)$,

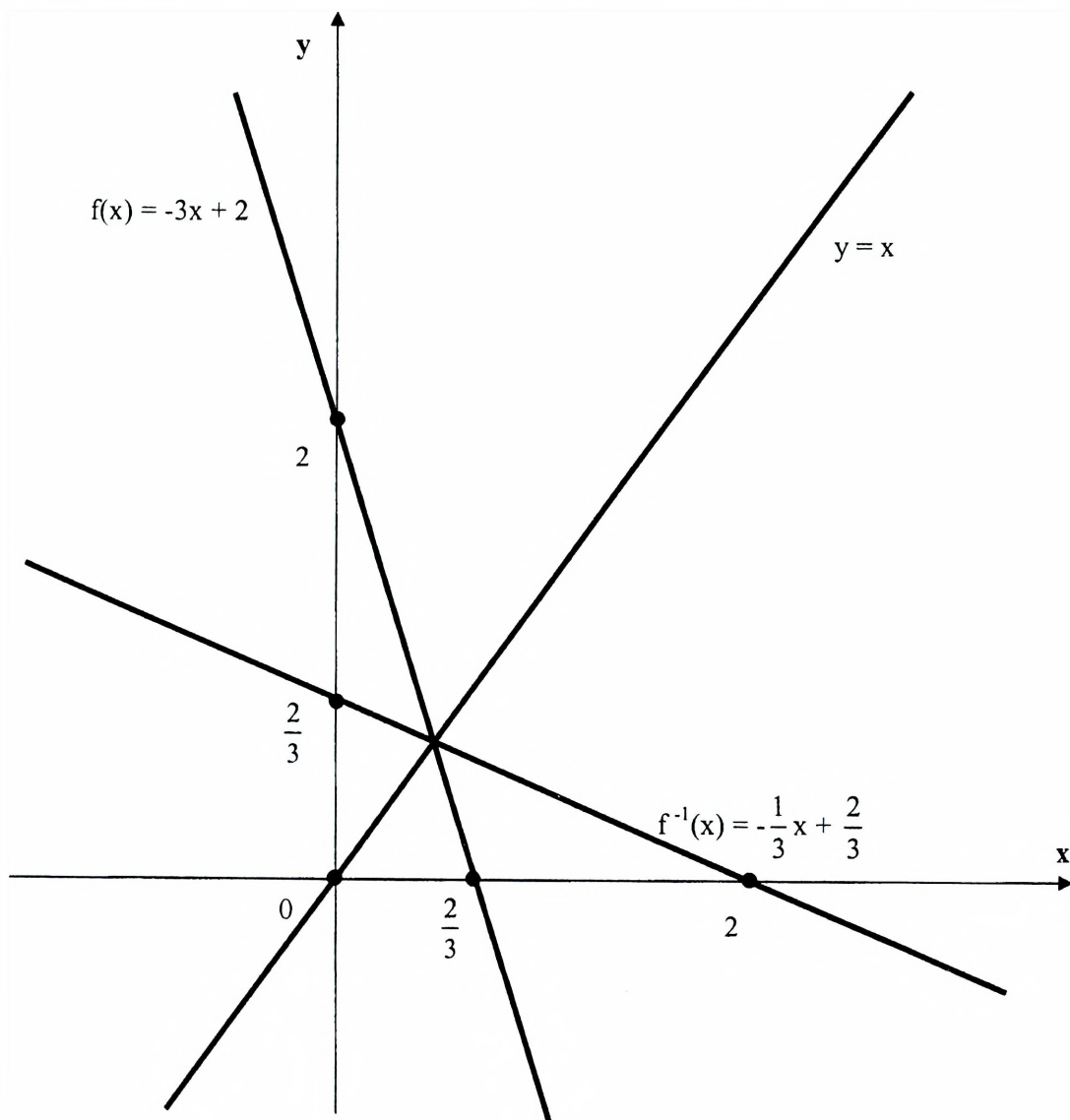
2°. $y = -3x + 2 \Rightarrow x = -\frac{1}{3}y + \frac{2}{3}$

3°. po dokonaniu zamiany zmiennych x i y mamy

$$y = -\frac{1}{3}x + \frac{2}{3}, \text{ a zatem } f^{-1}(x) = -\frac{1}{3}x + \frac{2}{3}$$

Po narysowaniu funkcji $f(x)$ oraz odwrotnej $f^{-1}(x)$ zauważyć można, że wykresy te mają oś symetrii. Jest nią prosta o równaniu $y = x$.

Rysunek 9. Funkcja $f(x)$ i funkcja odwrotna $f^{-1}(x)$



Warto zwrócić uwagę Czytelnika, że pojęcia: funkcja odwrotna i odwrotność funkcji nie są tożsame. Przykładowo odwrotność funkcji

$$f(x) = -3x + 2 \text{ jest to funkcja } \frac{1}{-3x+2}$$

a więc nie jest taka sama jak uprzednio wyznaczona funkcja odwrotna

$$f^{-1}(x) = -\frac{1}{3}x + \frac{2}{3}$$

2.4.

ZŁOŻENIE (SUPERPOZYCJA) FUNKCJI

Niech funkcja f przekształca $X \rightarrow Y$, zaś funkcja g przekształca $Y \rightarrow Z$

Definicja. Złożeniem funkcji f i g nazywamy funkcję oznaczoną $g \circ f$ określoną następująco: każdemu $x \in X$ przyporządkowany jest punkt

$$g(f(x)) \in Z$$

W wyniku złożenia funkcji f i g otrzymujemy funkcję $h(x)$ określoną wzorem

$$h(x) = g(f(x))$$

Występującą w powyższym wzorze funkcję f nazywamy funkcją wewnętrzną, zaś funkcję g nazywamy funkcją zewnętrzną funkcji złożonej h .

Można stwierdzić, że funkcja f „działa w pierwszej kolejności”, zaś funkcja g „działa później”.

Przykład 3

Niech $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, \quad f(x) = x^2 - 1,$

$f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, \quad g(x) = 2x + 1$

Wówczas dla danych funkcji określone są złożenia:

$$g \circ f = g(f(x)) = g(x^2 - 1) = 2(x^2 - 1) + 1 = 2x^2 - 2 + 1 = 2x^2 - 1$$

$$f \circ g = f(g(x)) = f(2x + 1) = (2x + 1)^2 - 1 = 4x^2 + 4x + 1 - 1 = 4x(x + 1)$$

Jak wynika z powyższego przykładu na ogół

$$g(f(x)) \neq f(g(x))$$

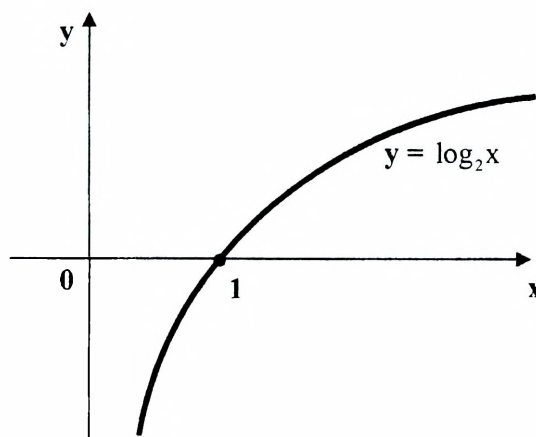
Mamy pewną funkcję $h(x)$ bardziej skomplikowaną i staramy się ją przedstawić jako złożenie funkcji prostszych.

Na przykład funkcję $h(x) = 10^{x^2-1}$ można przedstawić jako $h = g \circ f$ – złożenie funkcji wewnętrznej $f(x) = x^2-1$ i zewnętrznej $g(y) = 10^y$

Przykład 4

Dana jest funkcja $f(x) = \log_2 x$. Wyznaczyć funkcję odwrotną $f^{-1}(x)$ a następnie wyznaczyć złożenie funkcji $f \circ f^{-1}$ oraz $f^{-1} \circ f$

Mamy $f(x) = \log_2 x$



Dziedziną funkcji f jest zbiór \mathbf{R}_+ .

W swojej dziedzinie jest to funkcja różnowartościowa; istnieje, zatem funkcja odwrotna f^{-1}

Mamy $y = \log_2 x$, stąd wyznaczamy $x = 2^y$, zaś po zamianie zmiennych mamy

$$y = 2^x \quad \text{czyli} \quad f^{-1}(x) = 2^x$$

$$\text{Złożenie } f \circ f^{-1} = f(2^x) = \log_2 2^x = x \log_2 2 = x$$

$$\text{Natomiast złożenie } f^{-1} \circ f = f^{-1}(\log_2 x) = 2^{\log_2 x} = x^{(1)}$$

A zatem w przypadku złożenia funkcji f i funkcji odwrotnej f^{-1} zachodzi związek

$$f \circ f^{-1} = f^{-1} \circ f = x$$

¹ Słuszność tego łatwo wykonać logarytmując obie strony przy podstawie dwa.

2.5.

FUNKCJE ELEMENTARNE

W zbiorze wszystkich funkcji rzeczywistych wyróżniamy tak zwane funkcje elementarne.

Podstawowymi funkcjami elementarnymi są:

- | | | |
|------------------------|-----------------|--------------------|
| a) funkcja liniowa | $f(x) = ax + b$ | |
| b) funkcja potęgowa | $f(x) = x^a$ | $a \in \mathbb{R}$ |
| c) funkcja wykładnicza | $f(x) = a^x$ | $a > 0, a \neq 1$ |
| d) funkcja sinus | $f(x) = \sin x$ | |

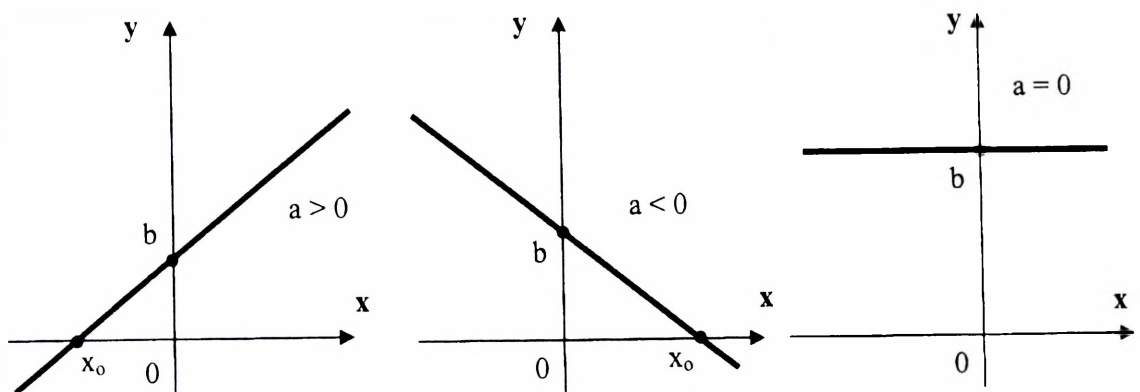
Wykorzystując operacje dodawania, odejmowania, mnożenia, dzielenia, złożenia i wyznaczania funkcji odwrotnej otrzymamy z powyższych wszystkie funkcje elementarne.

Obecnie omówione zostaną własności ważniejszych z tych funkcji.

a) funkcja liniowa

Wykresem funkcji liniowej $f(x) = ax + b, \quad x \in \mathbb{R}$ jest linia prosta.

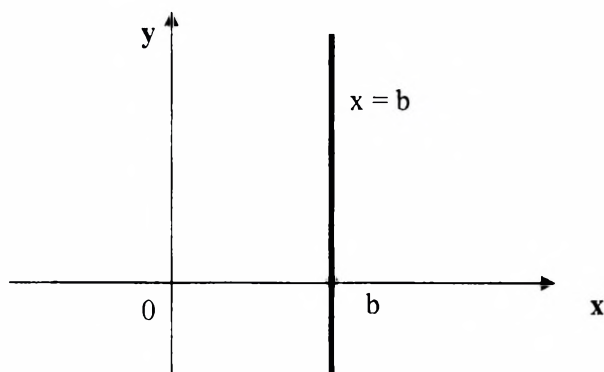
Rysunek 10. Wykres funkcji liniowej $y = ax + b$



Funkcja ta jest rosnąca - gdy $a > 0$, malejąca - gdy $a < 0$ oraz stała gdy $a = 0$. Jeśli $a \neq 0$ to funkcja liniowa ma dokładnie jedno miejsce zerowe $x_0 = -\frac{b}{a}$

Zwróćmy uwagę Czytelnika na fakt, że trzy możliwości położenia linii prostej na płaszczyźnie O_{xy} przedstawione na rysunku 10 nie wyczerpują wszystkich możliwości. Linia prosta może przebiegać jak na rysunku 11, gdzie prosta jest prostopadła do osi O_x .

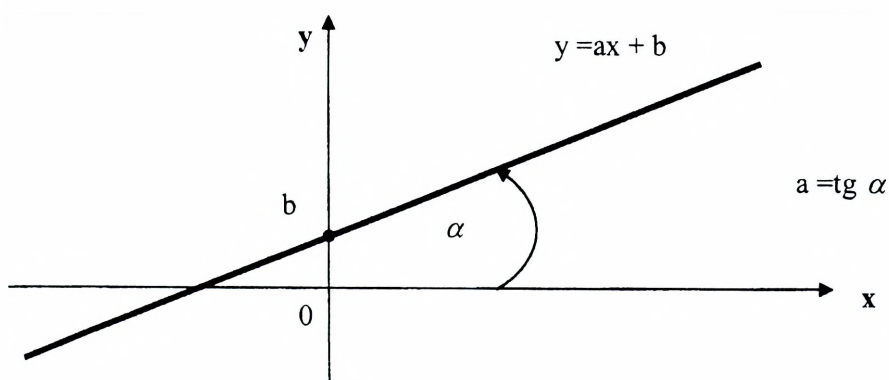
Rysunek 11. Wykres funkcji liniowej



Równanie tak położonej prostej opisane jest inną zależnością, a mianowicie $x = b$. Oznacza to, że w każdym punkcie tej prostej odcięta jest jednakowa i przybiera wartość b

Interpretacja parametrów a i b występujących we wzorze funkcji liniowej jest następująca:

Rysunek 12. Wykres funkcji liniowej



Parametr a informuje o tym o ile zmieni się wartość funkcji (Δy) jeżeli zmienną niezależną x zwiększymy o 1 jednostkę.

Parametr **b** mówi o tym jaka jest wartość zmiennej y jeżeli zmienna niezależna x przyjmuje wartość **0**.

Parametr **a** to tangens kąta, jaki prosta tworzy z osią 0_x ; parametr **b** to punkt w jakim wykres funkcji liniowej przecina oś 0_y .

b) funkcja kwadratowa

Funkcją kwadratową nazywamy funkcję postaci

$$f(x) = ax^2 + bx + c, \quad \text{jeśli } a \neq 0^{(2)}$$

Wyróżnik funkcji kwadratowej Δ wyrażony jest wzorem

$$\Delta = b^2 - 4ac$$

W zależności od Δ funkcja kwadratowa ma następujące miejsca zerowe

- jeśli $\Delta > 0$ - dwa miejsca zerowe

$$x_1 = \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a} \quad \text{i} \quad x_2 = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a}$$

- jeśli $\Delta = 0$ - jedno miejsce zerowe

$$x_0 = -\frac{b}{2a}$$

- jeśli $\Delta < 0$ - brak miejsc zerowych

Postać kanoniczna funkcji kwadratowej jest następująca

$$f(x) = a\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{\Delta}{4a}$$

W przypadku gdy $\Delta > 0$ funkcję kwadratową zapisać można w postaci iloczynowej:

$$ax^2 + bx + c = a(x - x_1)(x - x_2)$$

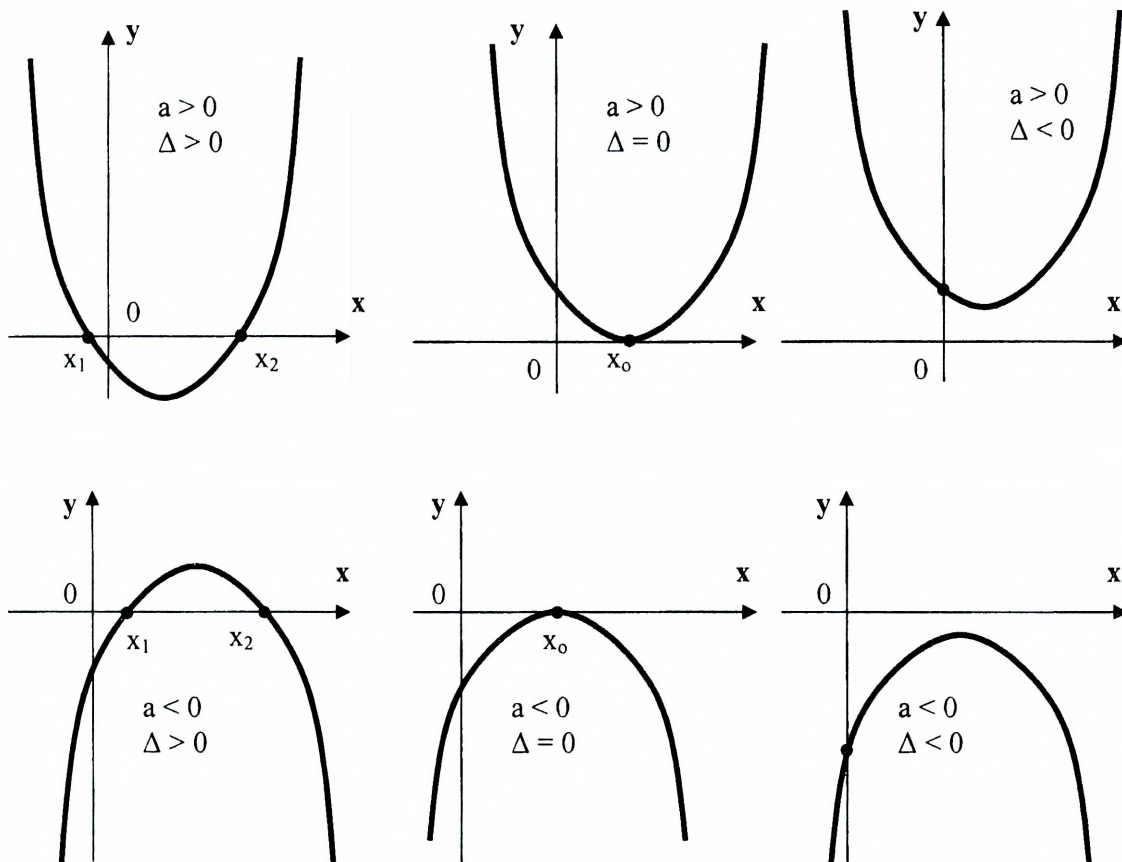
Wykresem funkcji kwadratowej jest parabola.

² Dla $a = 0$ mamy funkcję liniową $f(x) = bx + c$.

Współrzędne wierzchołka $W(-\frac{b}{a}, -\frac{\Delta}{4a})$

Ramiona paraboli skierowane są do góry jeśli $a > 0$ oraz w dół, gdy $a < 0$

Rysunek 13. Możliwe wykresy funkcji kwadratowej



Wyrażenie $f(x) = ax^2 + bx + c$ nazywamy inaczej trójmianem kwadratowym.

Definicja. Wielomianem nazywamy funkcję utworzoną z funkcji liniowych i kwadratowych przy użyciu operacji dodawania i mnożenia. Wielomian ma zatem postać

$$W(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_1 x + a_0$$

Przy czym przyjmujemy założenie, że $a_n \neq 0$

Liczbę n nazywamy stopniem wielomianu.

Dziedziną wielomianu jest zbiór liczb rzeczywistych \mathbf{R} . Wielomian stopnia nieparzystego ma zawsze miejsce zerowe. Ilość miejsc zerowych wielomianu nigdy nie jest większa od jego stopnia.

Definicja: Funkcją wymierną nazywamy iloraz dwóch wielomianów, czyli funkcję

$\frac{P(x)}{Q(x)}$, gdzie $P(x)$ i $Q(x)$ są wielomianami. Dziedziną funkcji wymiernej jest zbiór:

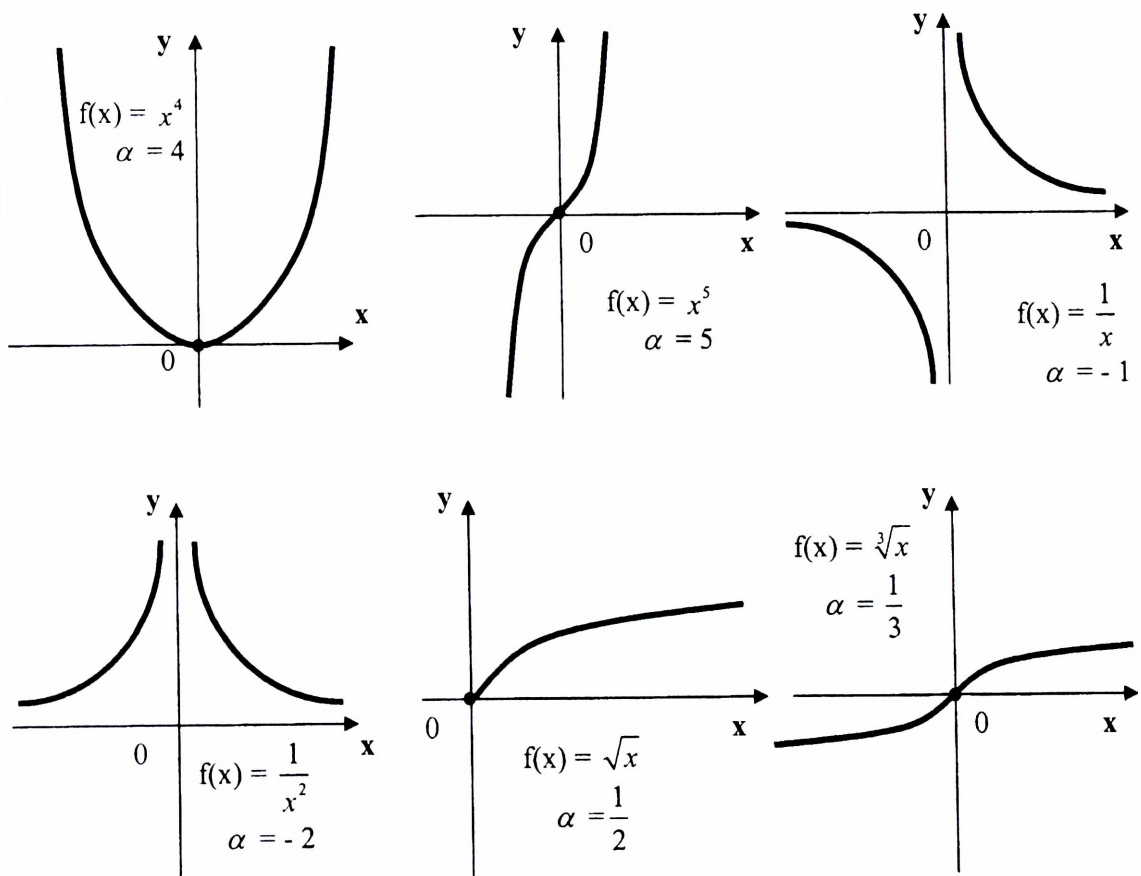
$$\{x \in \mathbf{R}; Q(x) \neq 0\}$$

c) funkcja potęgowa

Jest nią funkcja postaci $f(x) = x^\alpha$. Dziedzina tej funkcji zależy od α .

Jeśli α jest liczbą naturalną dziedziną funkcji potęgowej jest \mathbf{R} . Jeśli α jest liczbą całkowitą ujemną dziedziną jest $\mathbf{R} \setminus \{0\}$, natomiast gdy α jest liczbą niewymierną wówczas dziedziną jest zbiór $\{x \in \mathbf{R}; x > 0\}$

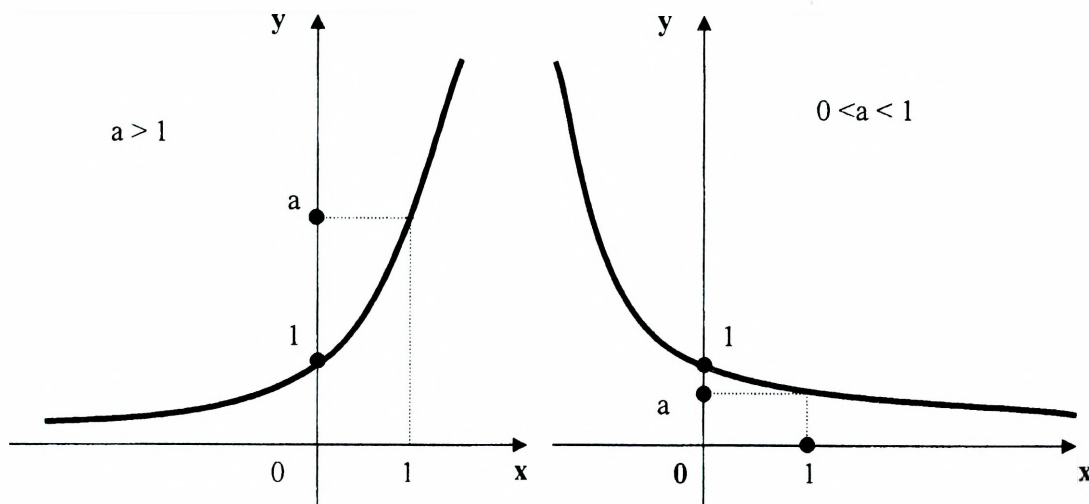
Rysunek 14. Przykładowe wykresy funkcji potęgowej



d) funkcja wykładnicza

Jest to funkcja postaci $f(x) = a^x$, gdzie $a > 0$ i $a \neq 1$. Dziedziną funkcji wykładniczej jest \mathbb{R} .

Rysunek 15. Przykładowe wykresy funkcji wykładniczej

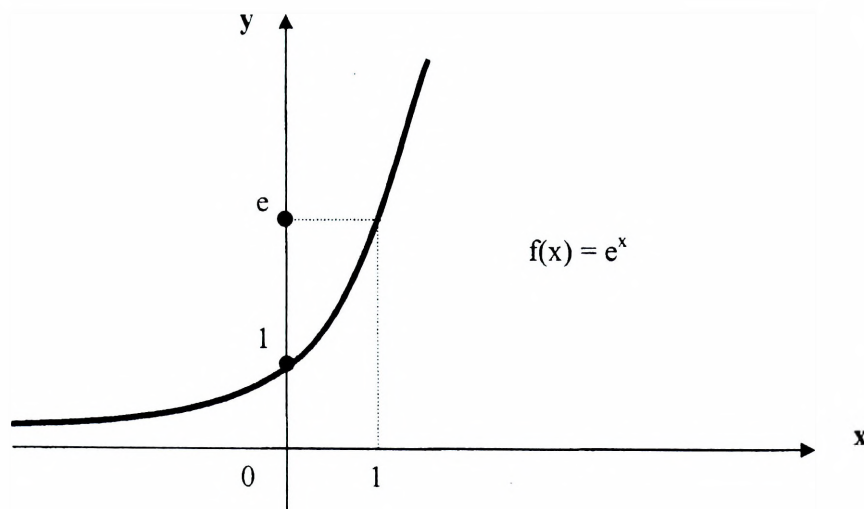


Funkcja wykładnicza jest rosnąca dla $a > 1$, natomiast jest malejąca dla $0 < a < 1$.

Jest to funkcja różnowartościowa.

Szczególnym, a zarazem ważnym przypadkiem funkcji wykładniczej jest funkcja $f(x) = e^x$ gdzie e oznacza liczbę Eulera⁽³⁾ ($e \approx 2,7182$)

Rysunek 16. Wykres funkcji $f(x) = e^x$

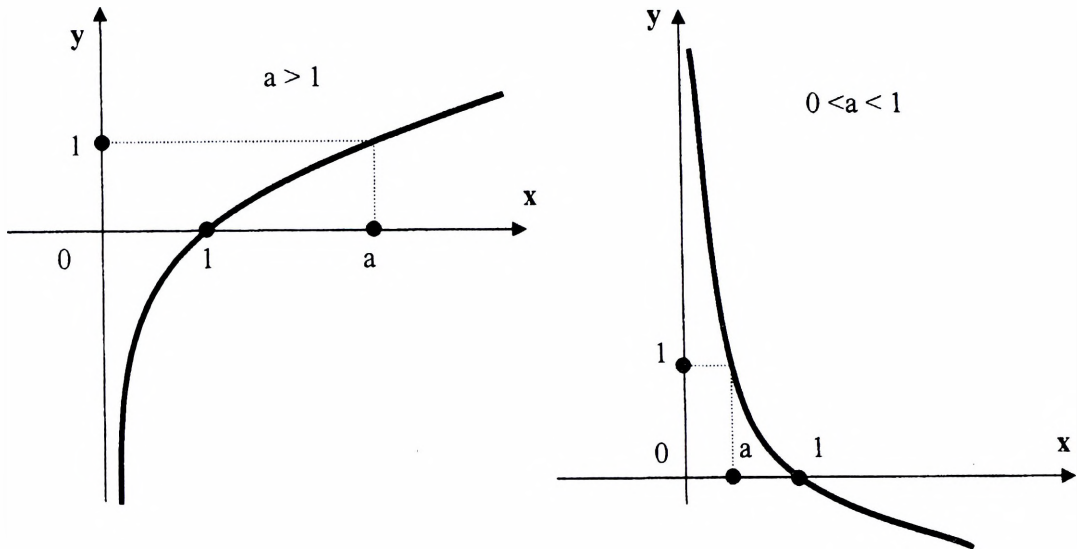


³ Więcej informacji na temat liczby e znajdzie Czytelnik w rozdziale 3.

e) funkcja logarytmiczna

Określana wzorem $f(x) = \log_a x$, gdzie $a > 0$ i $a \neq 1$. Dziedziną tej funkcji jest zbiór \mathbb{R}_+ . Jest to funkcja odwrotna do funkcji wykładniczej o podstawie a .

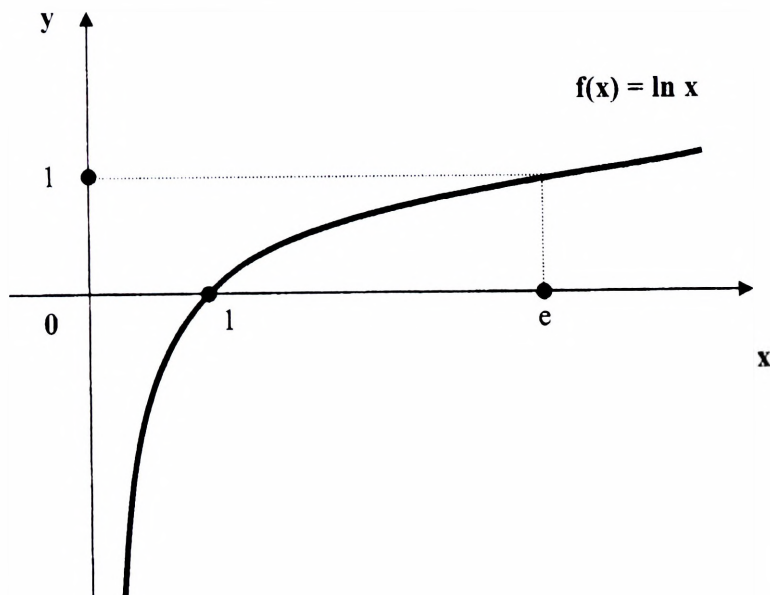
Rysunek 17. Wykresy funkcji logarytmicznej



Funkcja logarytmiczna jest funkcją rosnącą, gdy podstawą logarytmu $a > 1$, natomiast jest funkcją malejącą, gdy $0 < a < 1$.

Jeśli podstawą logarytmu jest liczba e , to funkcję $f(x) = \log_e x$ nazywamy logarytmem naturalnym i oznaczamy symbolem $f(x) = \ln x$.

Rysunek 18. Wykres funkcji logarytmicznej $f(x) = \ln x$



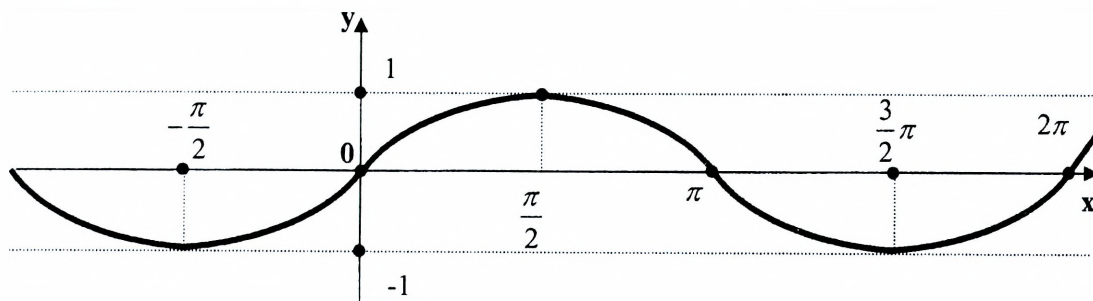
f) funkcje trygonometryczne

Funkcja $f(x) = \sin x, x \in \mathbb{R}$

Jest to funkcja nieparzysta, okresowa, o okresie $T = 2\pi$, posiadająca przeciwwziedzinę

$$D^{-1} : y \in \langle -1, 1 \rangle$$

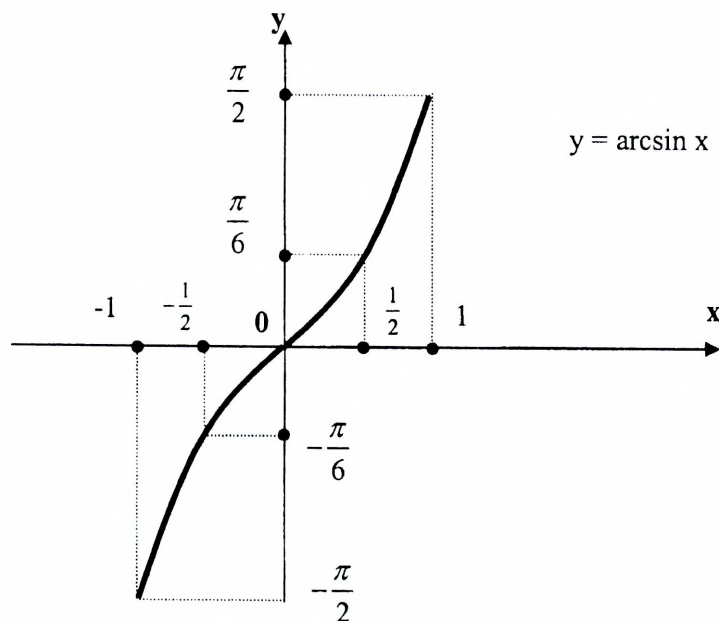
Rysunek 19. Wykres funkcji $f(x) = \sin x$



Funkcja $f(x) = \sin x$ nie jest różnowartościowa w całej dziedzinie. Jest natomiast różnowartościowa w dziedzinie $\langle -\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2} \rangle$ w którym ma przeciwwziedzinę $\langle -1; 1 \rangle$. W zbiorze tym określona jest funkcja odwrotna do funkcji $f(x) = \sin x$, która nosi nazwę arcus sinus (arcsin).

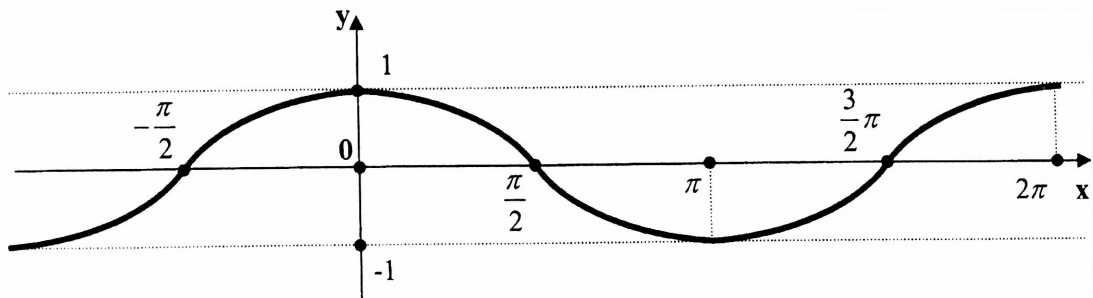
$$(y = \arcsin x) \Leftrightarrow (x = \sin y) \quad (x \in \langle -1; 1 \rangle, y \in \langle -\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2} \rangle)$$

Rysunek 20. Wykres funkcji $f(x) = \arcsin x$



Rysunek 21. Wykres funkcji $f(x) = \cos x$

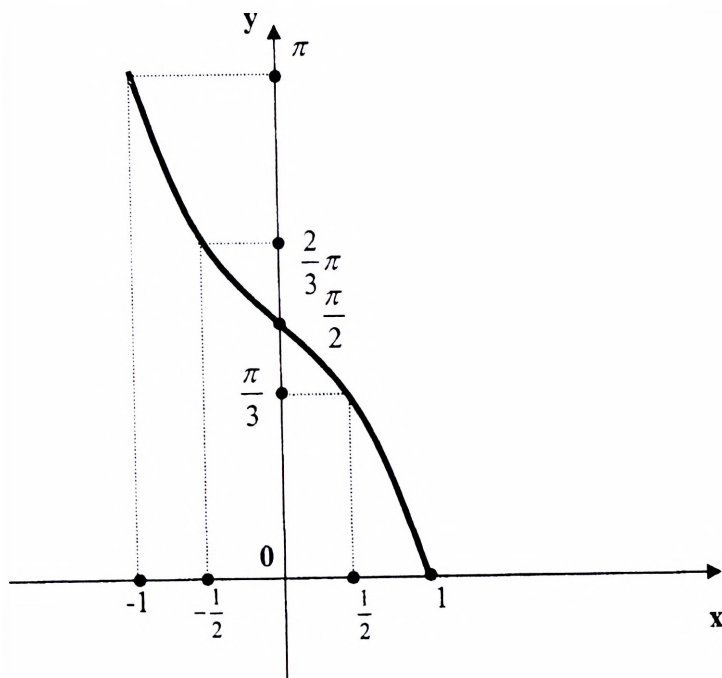
Funkcja $f(x) = \cos x$, $x \in \mathbb{R}$; Jest to funkcja parzysta, okresowa, o okresie 2π



Funkcja $f(x) = \cos x$ jest różnowartościowa w dziedzinie $\langle 0; \pi \rangle$ i ma przeciwdziedzinę $\langle -1; 1 \rangle$, $y \in \langle 0; \pi \rangle$. Funkcja odwrotna względem niej to funkcja o nazwie arcus cosinus (arccos). Mamy

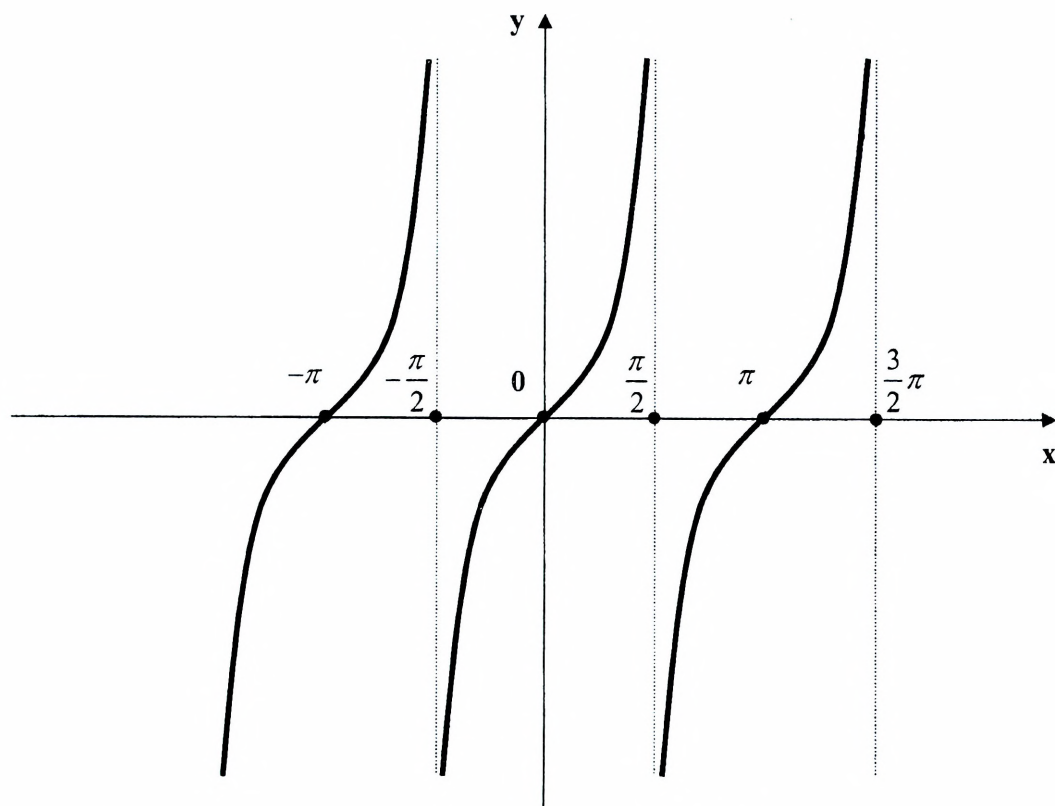
$$(y = \arccos x) \Leftrightarrow (x = \cos y) \quad (x \in \langle -1; 1 \rangle, y \in \langle 0; \pi \rangle)$$

Rysunek 22. Wykres funkcji $f(x) = \arccos x$



Funkcja $f(x) = \operatorname{tg} x$, $x \in \mathbb{R} \setminus \{(2k + 1) \frac{\pi}{2}\}$, $k \in \mathbb{C}$, ma okres $T = \pi$, jest nieparzysta i przedziałami rosnąca.

Rysunek 23. Wykres funkcji $f(x) = \operatorname{tg} x$

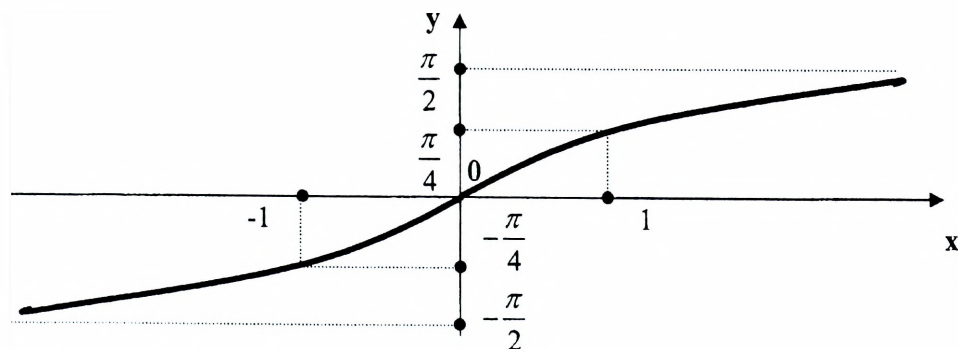


Funkcja $f(x) = \operatorname{tg} x$ jest różnowartościowa w dziedzinie $\left(-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right)$ i ma przeciwdziedzinę

$D^{-1}: y \in \mathbb{R}$. Funkcja odwrotna to arcus tangens (arctg). Mamy

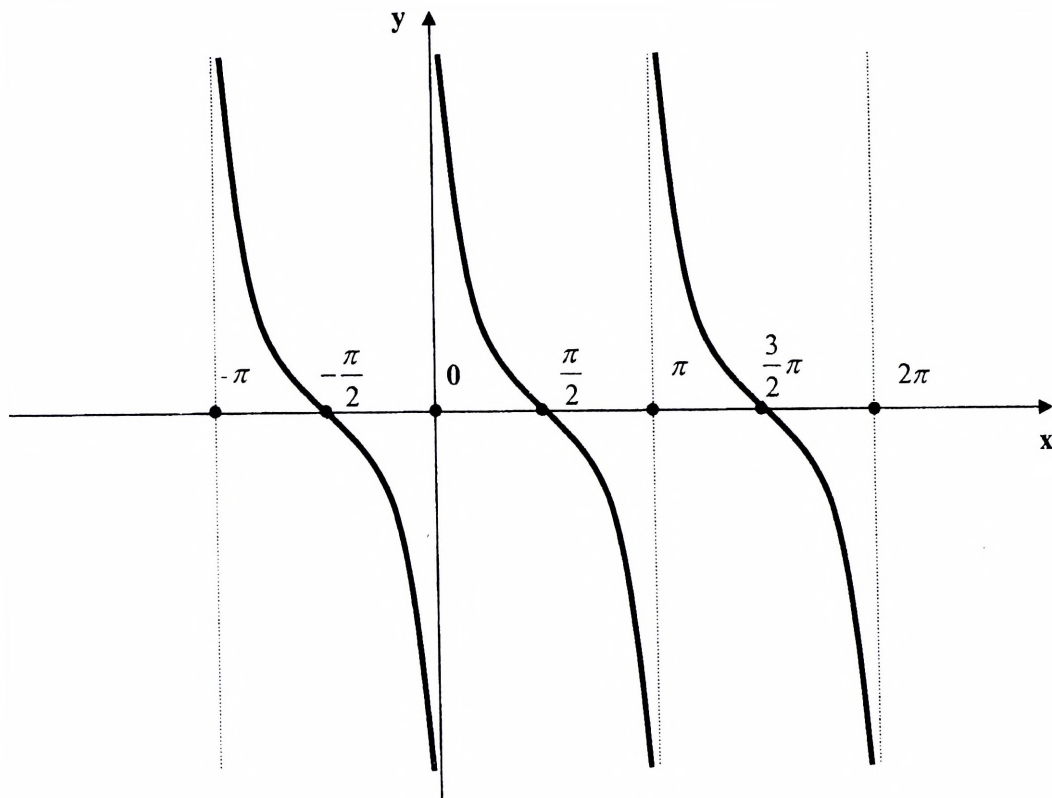
$$(y = \operatorname{arctg} x) \Leftrightarrow (x = \operatorname{tg} y) \quad \left(x \in \mathbb{R}, y \in \left(-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right)\right)$$

Rysunek 24. Wykres funkcji $f(x) = \operatorname{arctg} x$



Funkcja $f(x) = \operatorname{ctg} x$, $x \in \mathbb{R} \setminus \{k\pi\}$, $k \in \mathbb{C}$, podobnie jak tangens ma okres równy π ; jest nieparzysta i przedziałami malejąca.

Rysunek 25. Wykres funkcji $f(x) = \operatorname{ctg} x$

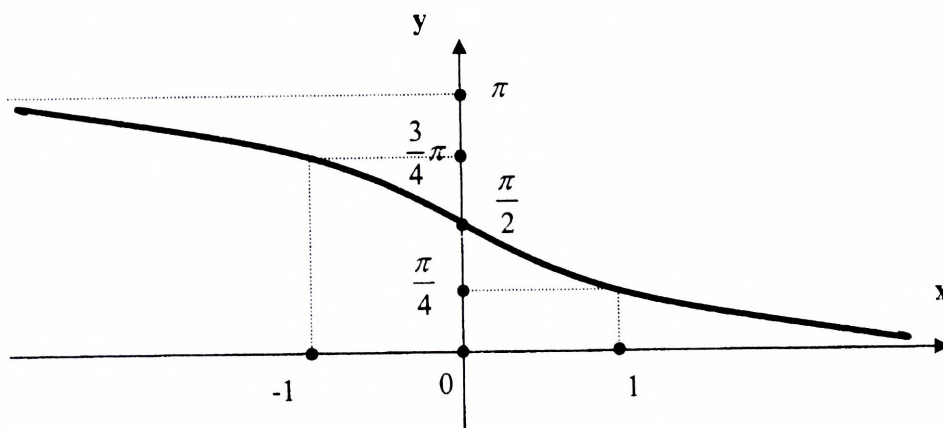


Funkcja $f(x) = \operatorname{ctg} x$ jest różnowartościowa w dziedzinie $(0, \pi)$ i ma przeciwdziedzinę $D^{-1}: y \in \mathbb{R}$.

Istnieje funkcja odwrotna o nazwie arcus cotangens ($\operatorname{arccotg}$).

$$(y = \operatorname{arccotg} x) \Leftrightarrow (x = \operatorname{ctg} y) \quad (x \in \mathbb{R}, y \in (0, \pi))$$

Rysunek 26. Wykres funkcji $f(x) = \operatorname{arccotg} x$



Zadania:

1. Wyznaczyć dziedzinę i miejsca zerowe funkcji

a) $f(x) = \frac{3x}{1-x^2}$

b) $f(x) = \sqrt{x^2 + 3x - 18}$

c) $f(x) = \log_2 \frac{1+x}{3x-1}$

d) $f(x) = \frac{3x}{\sqrt{1+x^2}}$

2. Zbadać, czy dane funkcje są różnowartościowe

a) $f(x) = 1 - 2^x$

b) $f(x) = x^3 - 4x$

c) $f(x) = \frac{1}{1+x^2}$

3. Sprawdzić, które z podanych funkcji są parzyste, które są nieparzyste, a które nie są ani parzyste, ani nieparzyste

a) $f(x) = 2 - |x|$

b) $f(x) = 3x^3 - 1$

c) $f(x) = \frac{|x|}{1-x^2}$

d) $f(x) = 3^{-x}$

e) $f(x) = \frac{1}{\sqrt{1+x^4}}$

f) $f(x) = \cos 2x$

4. Wyznaczyć funkcję odwrotną do danej funkcji oraz narysować wykresy funkcji $f(x)$ i $f^{-1}(x)$

a) $f(x) = 2 - \frac{2}{3}x$

b) $f(x) = x^3 + 1$

c) $f(x) = |x|$

d) $f(x) = 3^x$

e) $f(x) = \sqrt[3]{2x+1}$

5. Dane są funkcje

a) $f(x) = 3x - 1$ i $g(x) = x^3 - 1$

Wyznaczyć złożenie funkcji $f[g(x)]$ oraz $g[f(x)]$

b) $f(x) = x^2 + 2$ i $g(x) = 1 + 2x$

Wyznaczyć $f \circ g$ oraz $g[f(4)]$

c) $f(x) = 3^x$ i $g(x) = \log_3 x$

Wyznaczyć $f[g(x)]$ oraz $g[f(x)]$

6. Obliczyć

a) $\arccos 0$

b) $\arcsin 0$

c) $\operatorname{arctg} 0$

d) $\arccos \frac{1}{2}$

e) $\operatorname{arctg} (-1)$

f) $\operatorname{arctg} (-\sqrt{3})$

g) $\arcsin \left(\frac{-\sqrt{2}}{2} \right)$

3.

CIĄGI LICZBOWE

Definicja. Ciągiem liczbowym nazywamy dowolną funkcję

$$f: \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{R}$$

Wartość $a_n = f(n)$ nazywamy **n – tym** wyrazem ciągu. Ciągi oznaczamy symbolem (a_n) lub $\{a_n\}$, $n \in \mathbb{N}$. Dziedziną ciągu liczbowego jest zbiór liczb naturalnych - \mathbb{N} ; przeciwdziedziną zbiór $\mathbb{Z} \subset \mathbb{R}$. Ciąg jest funkcją określoną w dziedzinie liczb naturalnych \mathbb{N} . Do ciągu odnosi się wiele pojęć wprowadzonych przy omawianiu własności funkcji. Ciąg jest określony, jeśli znany jest wzór na **n – ty** wyraz, np.

$$a_n = 2n \quad a_n = \frac{1}{n} \quad a_n = \frac{1}{2^n}, \quad n \in \mathbb{N}$$

Ciąg może być **rosnący, malejący, ograniczony od dołu, ograniczony od góry.**

3.1.

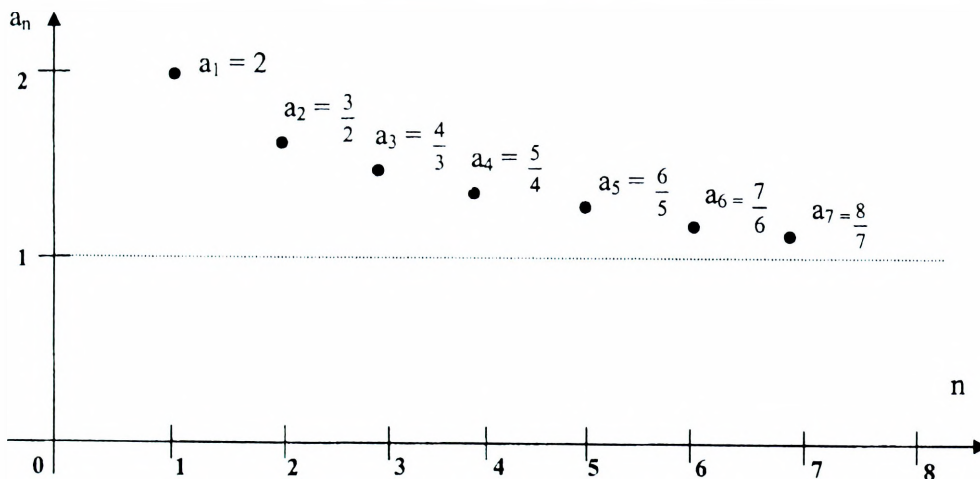
GRANICA CIĄGU

Rozważmy ciąg $\left(\frac{n+1}{n}\right)$

Jest to ciąg w którym $a_n = 1 + \frac{1}{n}$

Obliczmy kilka początkowych wyrazów tego ciągu. Mamy

$$a_1 = 2; \quad a_2 = \frac{3}{2}; \quad a_3 = \frac{4}{3}; \quad a_4 = \frac{5}{4}; \quad \dots$$



Zauważmy, że wyrazy tego ciągu różnią się od liczby 1 dowolnie mało, gdy ich numery są dostatecznie duże. Dowolnie mało tzn. mniej niż o dowolną liczbę dodatnią ε ; - dostatecznie duże, tzn. większe od pewnej liczby δ .

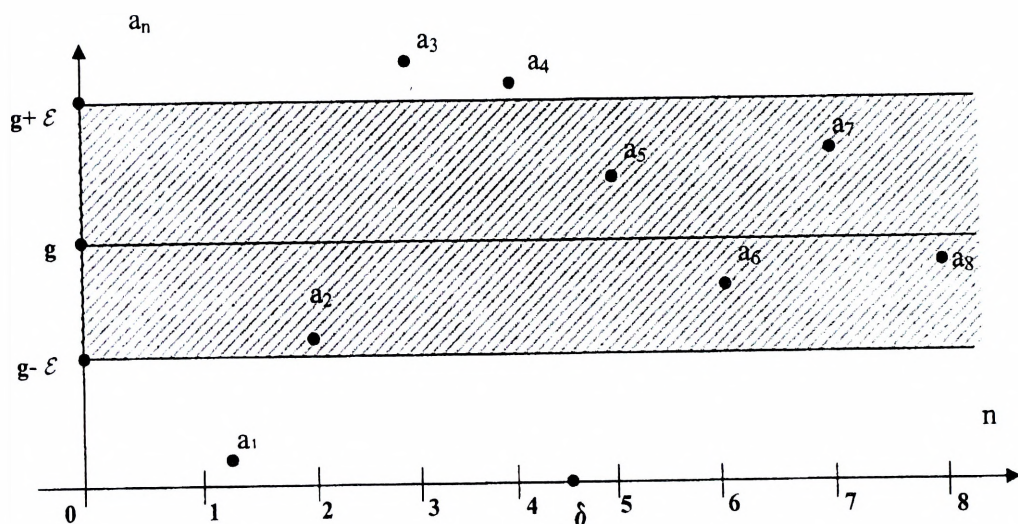
Definicja. Liczbę g nazywamy granicą ciągu (a_n) , jeżeli dla każdego $\varepsilon > 0$ istnieje taka liczba δ , że dla każdego $n > \delta$ spełniona jest nierówność

$$|a_n - g| < \varepsilon$$

Piszemy wówczas $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = g$

Twórcą powyższej definicji jest matematyk francuski A. L. Cauchy.

Rysunek 1. Interpretacja geometryczna granicy ciągu



Zwróćmy uwagę na fakt, że ε oznacza dowolną, z góry daną liczbę dodatnią, δ zaś oznacza liczbę dobraną do ε .

Powyższy rysunek ilustruje definicję granicy ciągu. Granicą ciągu (a_n) jest liczba g wtedy i tylko wtedy, gdy począwszy od pewnego miejsca wszystkie wyrazy ciągu leżą w zakreskowanym polu (w tzw. pasku epsilonowym).

Ciąg (a_n) , który ma granicę nazywamy zbieżnym.

Ciąg, który nie ma granicy, nazywamy rozbieżnym.

Wśród ciągów rozbieżnych wyróżniamy te, które są rozbieżne do $+\infty$ lub do $-\infty$. Mówimy wówczas o granicy niewłaściwej.

Ciąg stały (c), czyli ciąg $(c, c, c, c, \dots, c, c, \dots)$ gdzie c jest dowolną liczbą, jest zbieżny do granicy c .

Oto kilka przykładowych granic ciągu

$$\lim_{n \rightarrow \infty} 2n = 2 \lim_{x \rightarrow \infty} n = +\infty$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} = 0$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} 2^n = +\infty$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{2^n} = 0$$

Natomiast ciąg $((-1)^n)$ nie ma granicy⁽¹⁾. Jest to ciąg rozbieżny.

Ciąg $(1 - n^2)$ jest rozbieżny do $-\infty$.

Podajmy jeszcze dwie, przydatne do dalszych obliczeń granice.

Oto one

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{n} = 1 \quad (\text{przyjmując, że } \sqrt[1]{1} = 1)$$

oraz

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{a} = 1 \quad (\text{dla } a > 0)$$

3.2.

TWIERDZENIE O TRZECH CIĄGACH

Jeżeli mamy trzy ciągi (a_n) , (b_n) i (c_n) , takie, że począwszy od pewnej wartości n spełniona jest nierówność

$$a_n \leq b_n \leq c_n$$

i ponadto

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = g \quad \text{oraz}$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} c_n = g, \quad \text{to}$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} b_n = g$$

¹ Łatwo zauważyć, że ciąg $((-1)^n) = (-1, 1, -1, 1, -1, 1, \dots)$ składa się tylko z dwóch wartości -1 i 1 kolejno po sobie ustawionych.

Przykład 1

Obliczyć

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{3^n + 4^n}$$

Wykorzystujemy nierówność

$$4^n < 3^n + 4^n < 4^n + 4^n$$

$$4^n < 3^n + 4^n < 2 \cdot 4^n$$

$$\sqrt[n]{4^n} < \sqrt[n]{3^n + 4^n} < \sqrt[n]{2 \cdot 4^n}$$

$$4 < \sqrt[n]{3^n + 4^n} < 4\sqrt[n]{2}$$

a zatem ciąg $a_n = 4$, ciąg $c_n = 4\sqrt[n]{2}$

obliczmy

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \lim_{n \rightarrow \infty} 4 = 4$$

oraz

$$\lim_{n \rightarrow \infty} c_n = \lim_{n \rightarrow \infty} 4\sqrt[n]{2} = 4 \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{2} = 4 \cdot 1 = 4$$

a więc na podstawie twierdzenia o trzech ciągach mamy

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{3^n + 4^n} = 4$$

Przykład 2

Obliczyć

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{2^n + 4^n + 7^n}$$

Wychodząc od nierówności

$$7^n < 2^n + 4^n + 7^n < 7^n + 7^n + 7^n$$

czyli

$$7^n < 2^n + 4^n + 7^n < 3 \cdot 7^n$$

a zatem

$$\sqrt[n]{7^n} < \sqrt[n]{2^n + 4^n + 7^n} < \sqrt[n]{3 \cdot 7^n}$$

więc

$$7 < \sqrt[n]{2^n + 4^n + 7^n} < 7\sqrt[n]{3}$$

Przyjmujemy, zatem, że ciągi a_n , b_n i c_n określone są następująco

$$a_n = 7$$

$$b_n = \sqrt[n]{2^n + 4^n + 7^n}$$

$$c_n = 7\sqrt[n]{3}$$

Pamiętając, że $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{a} = 1$ ($a > 0$) mamy

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \lim_{n \rightarrow \infty} 7 = 7$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} c_n = \lim_{x \rightarrow \infty} 7\sqrt[n]{3} = 7 \lim_{x \rightarrow \infty} \sqrt[n]{3} = 7$$

$$\text{zatem } \lim_{x \rightarrow \infty} a_n = \lim_{x \rightarrow \infty} c_n = 7$$

$$\text{a stąd } \lim_{x \rightarrow \infty} \sqrt[n]{2^n + 4^n + 7^n} = 7$$

3.3.

MONOTONICZNOŚĆ CIĄGU

Ciąg monotoniczny to taki, który jest rosnący, lub który jest malejący.

Definicja. Mówimy, że ciąg (a_n) jest

- a) rosnący $\Leftrightarrow a_{n+1} > a_n$
- b) malejący $\Leftrightarrow a_{n+1} < a_n$
- c) nierosnący $\Leftrightarrow a_{n+1} \leq a_n$
- d) niemalejący $\Leftrightarrow a_{n+1} \geq a_n$

dla każdego $n \in \mathbb{N}$

Aby określić czy ciąg (a_n) jest ciągiem monotonicznym badamy zwykle różnice pomiędzy wyrazami a_{n+1} i a_n

Przykład 3

Zbadać monotoniczność ciągu o wyrazie ogólnym

$$a_n = 1 + \frac{1}{n}$$

utwórzmy wyraz a_{n+1}

$$a_{n+1} = 1 + \frac{1}{n+1}$$

a następnie różnicę $a_{n+1} - a_n$

$$a_{n+1} - a_n = 1 + \frac{1}{n+1} - \left(1 + \frac{1}{n}\right) = \frac{1}{n+1} - \frac{1}{n} = \frac{n - (n+1)}{n(n+1)} = \frac{-1}{n(n+1)} < 0$$

Zatem ciąg o wyrazie ogólnym $a_n = 1 + \frac{1}{n}$ jest malejący

Przykład 4

Sprawdzić, czy ciąg o wyrazie ogólnym

$$a_n = \left(-\frac{2}{3}\right)^{2n+1} \text{ jest ciągiem monotonicznym}$$

Mamy

$$a_{n+1} = \left(-\frac{2}{3}\right)^{2(n+1)+1} = \left(-\frac{2}{3}\right)^{2n+3}$$

$$\begin{aligned} a_{n+1} - a_n &= \left(-\frac{2}{3}\right)^{2n+3} - \left(-\frac{2}{3}\right)^{2n+1} = \left(-\frac{2}{3}\right)^{2n} \cdot \left(-\frac{2}{3}\right)^3 - \left(-\frac{2}{3}\right)^{2n} \cdot \left(-\frac{2}{3}\right)^1 = \\ &= \left(-\frac{2}{3}\right)^{2n} \cdot \left[\left(-\frac{2}{3}\right)^3 - \left(-\frac{2}{3}\right)^1\right] = \left[\left(-\frac{2}{3}\right)^2\right]^n \cdot \left[-\frac{8}{27} - \left(-\frac{2}{3}\right)\right] = \\ &= \left(\frac{4}{9}\right)^n \cdot \left(-\frac{8}{27} + \frac{2}{3}\right) = \left(\frac{4}{9}\right)^n \cdot \left(-\frac{8}{27} + \frac{18}{27}\right) = \frac{10}{27} \cdot \left(\frac{4}{9}\right)^n > 0 \end{aligned}$$

czyli badany ciąg jest ciągiem rosnącym.

3.4.

OBLICZANIE GRANIC CIĄGU

Sumą, różnicą, iloczynem oraz ilorazem ciągów (a_n) i (b_n) nazywamy odpowiednio ciągi

$$(a_n + b_n), \quad (a_n - b_n), \quad (a_n \cdot b_n) \quad \text{oraz} \quad \left(\frac{a_n}{b_n} \right)$$

w przypadku ilorazu zakładamy dodatkowo, że $b_n \neq 0$ dla każdego n .

Twierdzenie o działaniach arytmetycznych na granicach ciągów zbieżnych.

Jeżeli ciągi (a_n) i (b_n) są zbieżne,

$$\text{oraz} \quad \lim_{n \rightarrow \infty} a_n = a, \quad \lim_{n \rightarrow \infty} b_n = b,$$

to ciągi $(a_n + b_n)$, $(a_n - b_n)$, $(a_n \cdot b_n)$ oraz $\left(\frac{a_n}{b_n} \right)$ także są zbieżne,

przy czym

$$\lim_{n \rightarrow \infty} (a_n + b_n) = a + b$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} (a_n - b_n) = a - b$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} (a_n \cdot b_n) = a \cdot b$$

oraz przy dodatkowym założeniu, że $b_n \neq 0$ dla każdego n i $b \neq 0$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{a_n}{b_n} \right) = \frac{a}{b}$$

Twierdzenie. Jeżeli dla ciągu (a_n) , gdzie $a_n \neq 0$ dla każdego $n \in \mathbb{N}$ istnieje granica

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| = q < 1$$

to $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0$

Tabela 1

Jeżeli		to	
$\lim a_n = 0$	$a_n > 0$	$\lim \frac{1}{a_n} =$	$+\infty$
	$a_n < 0$		$-\infty$
$\lim a_n = +\infty$		$\lim \frac{1}{a_n} = 0$	
$\lim a_n = +\infty$	$b > 0$	$\lim (a_n \cdot b_n) =$	$+\infty$
$\lim b_n = b$	$b < 0$		$-\infty$
$\lim a_n = +\infty$ i $\lim b_n = 0$		$\lim (a_n \cdot b_n) = ?$	
$\lim a_n = \lim b_n = +\infty$		$\lim (a_n \cdot b_n) = +\infty$ $\lim (a_n - b_n) = ?$	
$\lim a_n = \lim b_n = -\infty$		$\lim \frac{a_n}{b_n} = ?$	
$ a_n < M$	$\lim b_n = 0$	$\lim (a_n \cdot b_n) = 0$	
	$\lim b_n = +\infty$	$\lim \frac{a_n}{b_n} = 0$	
$\lim a_n = \lim b_n = 0$		$\lim \frac{a_n}{b_n} = ?$	

Źródło: W. Żakowski, *Matematyka cz. I*, Wydawnictwa Naukowo Techniczne, Warszawa 1966, s. 94.

Tabela 1 wynika z podanych poprzednio określeń i twierdzeń. Często spotykamy się z zagadnieniem obliczenia granicy w takim przypadku, gdy z twierdzenia o działaniach arytmetycznych na ciągach zbieżnych nie można skorzystać bezpośrednio. Tablica 1 może w takich przypadkach ułatwić obliczenie granicy, lub pomoże stwierdzić, że badany ciąg jest rozbieżny⁽²⁾.

Przykład 5

Obliczyć granicę ciągu o wyrazie ogólnym

$$a_n = \frac{a^n}{n!}$$

² Znak zapytania postawiony w tabeli oznacza, że bez bardziej szczegółowych wiadomości o ciągach nic w tym przypadku nie można powiedzieć. Każdy z takich przypadków należy potraktować indywidualnie.

Mamy

$$a_{n+1} = \frac{a^{n+1}}{(n+1)!} = \frac{a^n \cdot a}{n!(n+1)}$$

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{\frac{a^n \cdot a}{n!(n+1)}}{\frac{a^n}{n!}} = \frac{a^n \cdot a \cdot n!}{a^n \cdot n!(n+1)} = \frac{a}{n+1}$$

stąd

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| = \lim_{x \rightarrow \infty} \left| \frac{a}{n+1} \right|$$

obliczamy

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| = \lim_{x \rightarrow \infty} \left| \frac{a}{n+1} \right| = \frac{\lim_{x \rightarrow \infty} |a|}{\lim_{x \rightarrow \infty} |n+1|} = 0$$

czyli

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a^n}{n!} = 0$$

Przykład 6

$$\text{a) } \lim_{n \rightarrow \infty} (\sqrt{n+1} - \sqrt{n}) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(\sqrt{n+1} - \sqrt{n})(\sqrt{n+1} + \sqrt{n})}{\sqrt{n+1} + \sqrt{n}} =$$

$$= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n+1-n}{\sqrt{n+1} + \sqrt{n}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{\sqrt{n+1} + \sqrt{n}} = \frac{1}{(\sqrt{n+1} + \sqrt{n})} = 0$$

$$\text{b) } \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sin \frac{n\pi}{2}}{2n} = \frac{\lim_{n \rightarrow \infty} \sin \frac{n\pi}{2}}{\lim_{n \rightarrow \infty} 2n} = 0$$

$$\text{c) } \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2n^4 - 3n + 1}{n^4 + 7n^3 - 3} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^4 \left(2 - \frac{3}{n^3} + \frac{1}{n^4} \right)}{n^4 \left(1 + \frac{7}{n} - \frac{3}{n^4} \right)} =$$

$$= \frac{\lim_{n \rightarrow \infty} 2 - \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{3}{n^3} + \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n^4}}{\lim_{n \rightarrow \infty} 1 + \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{7}{n} - \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{3}{n^4}} = \frac{2}{1} = 2$$

$$d) \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2n-3}{7n^2-n+5} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^2 \left(\frac{2}{n} - \frac{3}{n^2} \right)}{n^2 \left(7 - \frac{1}{n} + \frac{5}{n^2} \right)} = \frac{0}{7} = 0$$

3.5.
LICZBA e (STAŁA EULERA)

Ciąg o wyrazie ogólnym

$$a_n = \left(1 + \frac{1}{n} \right)^n$$

A więc ciąg $\left(2, \frac{9}{4}, \frac{64}{27}, \frac{625}{256}, \dots \right)$ jest rosnący i ograniczony z góry. Ciąg ten jest zbieżny, a jego granicę oznaczono liczbą e od nazwiska szwajcarskiego matematyka Leonarda EULERA (1707 – 1782).

Mamy zatem

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{n} \right)^n = e$$

$$e \approx 2,718281$$

Wystarczy zapamiętać, że $e \approx 2,72$. W praktyce liczne zastosowania mają logarytmy przy podstawie e , zwane logarytmami naturalnymi. Zamiast pisać $\log_e x$ piszemy zwykle $\ln x$ i czytamy: **logarytm naturalny z x** .

Twierdzenie.

$$\text{Jeżeli } \lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \pm\infty,$$

to

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{a_n} \right)^{a_n} = e$$

Przykład 7

Obliczyć

$$1. \quad \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{n}{n+1} \right)^n = \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{\frac{n+1}{n}} \right)^n = \frac{\lim 1^n}{\lim \left(\frac{n+1}{n} \right)^n} = \frac{1}{\lim \left(\frac{n+1}{n} \right)^n} = \frac{1}{e}$$

$$2. \quad \lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 - \frac{1}{n} \right)^n = \lim_{x \rightarrow \infty} \left[\left(1 + \frac{1}{-n} \right)^{-n} \right]^{-1} = e^{-1} = \frac{1}{e}$$

$$3. \quad \lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{5}{3n} \right)^{2n} = \lim_{x \rightarrow \infty} \left[\left(1 + \frac{1}{\frac{3n}{5}} \right)^{\frac{3n}{5}} \right]^{\frac{5}{3} \cdot 2} = e^{\frac{10}{3}}$$

Zadania:

1. Zbadać monotoniczność ciągu o wyrazie ogólnym

a) $a_n = \frac{n^2 + 1}{n^2}$

b) $a_n = (-2)^n$

c) $a_n = \frac{n+1}{n+2}$

d) $a_n = \frac{2}{n+3}$

e) $a_n = \frac{5n-1}{n+2}$

f) $a_n = n^2 + 6n$

g) $a_n = \frac{2^n}{n!}$

h) $a_n = n^2 - 10n + 9$

2. Obliczyć

a) $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{3^n + 2^n}$

b) $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{3^n - 2^n}$

- c) $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{3^n + 5^n + 7^n}$
- d) $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{2^n + 3 \cdot 4^n + 1}$
- e) $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{n+2}{n} \right)^{3n+1}$
- f) $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 - \frac{4}{9n} \right)^{3n}$
- g) $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{n+1}{n} \right)^{-5n}$
- h) $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 - \frac{3}{n} \right)^{2n}$
- i) $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(n+1)^{100}}{(n+2)^{101}}$
- j) $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\sqrt{n^2 + n + 1} - n \right)$
- k) $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\sqrt{n^2 + 1} - n \right)$
- l) $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2^n + 100}{3^n + 1}$
- m) $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\cos \frac{2n\pi}{3}}{3n-1}$
- n) $\lim_{x \rightarrow \infty} \sqrt{n} \left(\sqrt{n+2} - \sqrt{n+1} \right)$
- o) $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{16n+3}{2n-1} \right)^{\frac{1}{3}}$

4.

GRANICA I CIĄGŁOŚĆ FUNKCJI

4.1.

GRANICA FUNKCJI

Niech funkcja $f(x)$ będzie określona w pewnym sąsiedztwie S punktu x_0 . Wartość $f(x_0)$ nie musi być określona.

Definicja Heinego.

Liczbę g nazywamy granicą funkcji $f(x)$ w punkcie x_0 , jeżeli dla każdego ciągu (x_n) o wyrazach $x_n \in S$ zbieżnego do x_0 , ciąg $(f(x_n))$ jest zbieżny do g .

Jeżeli liczba g jest granicą funkcji $f(x)$ w punkcie x_0 , to zapisujemy

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = g \text{ lub } f(x) \xrightarrow{x \rightarrow x_0} g$$

co odczytać można następująco: wartość funkcji dąży do g , gdy x dąży do x_0 .

Definicja powyższa oparta na granicy ciągu liczbowego sformułowana została przez niemieckiego matematyka Edwarda Heinego (1821-1881).

Przykład 1

Rozważmy funkcję

$$f(x) = \frac{x^2 - 4}{x + 2}$$

Dziedzina tej funkcji określona jest $D: x \in \mathbb{R} \setminus \{-2\}$

co oznacza, że funkcja ta nie jest określona dla $x_0 = -2$, natomiast jest określona w każdym sąsiedztwie punktu $x_0 = -2$. Nietrudno wykazać, że

$$\lim_{x \rightarrow -2} \frac{x^2 - 4}{x + 2} = -4$$

Weźmy dowolny ciąg (x_n) , o wyrazach $x_n \neq -2$ i taki, że

$$\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = -2$$

Utwórzmy nowy ciąg $(f(x_n))$ określony następująco

$$f(x_n) = \frac{x_n^2 - 4}{x_n + 2}$$

Ponieważ $x_n \neq -2$, więc

$$f(x_n) = \frac{(x_n - 2)(x_n + 2)}{x_n + 2} = x_n - 2$$

Obliczmy

$$\lim_{n \rightarrow \infty} f(x_n) = \lim_{n \rightarrow \infty} (x_n - 2) = \lim_{n \rightarrow \infty} x_n - 2 = -2 - 2 = -4$$

Jeżeli funkcja $f(x)$ jest określona w punkcie x_0 , wówczas granica tej funkcji w punkcie x_0 jest równa wartości funkcji w tym punkcie

Oto kilka znanych granic

$$\lim_{x \rightarrow x_0} c = c$$

$$\lim_{x \rightarrow x_0} x = x_0$$

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \sqrt[n]{x} = \sqrt[n]{x_0} \quad (x_0 > 0, n \in \mathbb{N})$$

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \sin x = \sin x_0$$

Przy obliczaniu granic korzystamy z następujących twierdzeń

Jeżeli $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = g$ i $\lim_{x \rightarrow x_0} h(x) = p$, to

$$\lim_{x \rightarrow x_0} [f(x) + h(x)] = g + p$$

$$\lim_{x \rightarrow x_0} [f(x) - h(x)] = g - p$$

$$\lim_{x \rightarrow x_0} [f(x) \cdot h(x)] = g \cdot p$$

a przy dodatkowym założeniu $p \neq 0$

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x)}{h(x)} = \frac{g}{p}$$

4.2.

GRANICE NIEWŁAŚCIWE

Niech dana będzie funkcja $f(x)$ określona w pewnym sąsiedztwie S punktu x_0

Definicja Heinego.

Funkcja $f(x)$ posiada w punkcie x_0 granicę niewłaściwą

$$-\infty \qquad \qquad \qquad +\infty$$

jeżeli dla każdego ciągu (x_n) o wyrazach $x_n \in S$ zbieżnego do x_0 , ciąg $(f(x_n))$ jest rozbieżny odpowiednio do

$$-\infty \qquad \qquad \qquad +\infty$$

Przykład 2

Obliczyć

$$\lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{-1}{x^2} \right)$$

mamy

$$f(x) = \frac{-1}{x^2}$$

Bierzemy dowolny ciąg (x_n) o wyrazach $x_n \neq 0$ i taki, że

$$\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = 0$$

obliczamy

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{-1}{x_n^2} \right) = \frac{-1}{\lim_{n \rightarrow \infty} x_n^2} = -\infty$$

Analogicznie mamy $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{x^2} = +\infty$

Przykład 3

Obliczyć granicę funkcji $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{x}$

Weźmy ciąg $(x_n) = \left(\frac{1}{n} \right)$ zbieżny do zera $\left(\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{n} = 0 \right)$

wówczas
$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{x} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{\frac{1}{n}} = \lim_{n \rightarrow \infty} n = +\infty$$

W tym momencie można by wnioskować, że granicą funkcji jest plus nieskończoność. Lecz jeśli weźmiemy inny ciąg, którego granica również wynosi zero, a mianowicie

$$(x_n) = \left(-\frac{1}{n}\right), \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \left(-\frac{1}{n}\right) = 0, \text{ wówczas mamy}$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{x} = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{-\frac{1}{n}} \right) = \lim_{n \rightarrow \infty} (-n) = -\lim_{n \rightarrow \infty} n = -\infty$$

Ponieważ dla dwóch różnych ciągów obydwu zbieżnych do zera otrzymaliśmy dwa różne wyniki, zatem granica $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{x}$ nie istnieje.

Granice jednostronne

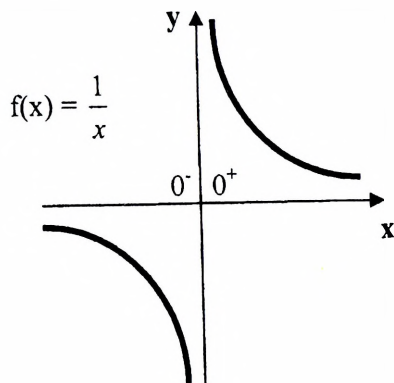
Ostatnio podany Czytelnikowi przykład świadczy o istnieniu granic jednostronnych. Skoro przy wykorzystaniu ciągu o wyrazie ogólnym $a_n = \frac{1}{n}$ otrzymaliśmy jako wynik granicy funkcji $f(x) = \frac{1}{x}$ w zerze plus nieskończoność, świadczy to o istnieniu granicy prawostronnej w zerze.

Jeżeli w określeniu granicy funkcji $f(x)$ w punkcie x_0 zastąpimy sąsiedztwo S punktu x_0 sąsiedztwem lewostronnym (albo sąsiedztwem prawostronnym) tego punktu, to otrzymamy definicje granicy lewostronnej funkcji $f(x)$ w punkcie x_0 , lub też odpowiednio definicję granicy prawostronnej funkcji $f(x)$ w punkcie x_0 . Granice te nazywamy granicami jednostronnymi i oznaczamy

$$\lim_{x \rightarrow x_0^-} f(x), \quad \lim_{x \rightarrow x_0^+} \frac{1}{x}$$

mamy zatem

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{1}{x} = +\infty, \quad \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{1}{x} = -\infty$$



$$\lim_{x \rightarrow 1^+} [x] = 1,^{(4)} \quad \lim_{x \rightarrow 1^-} [x] = 0$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \left(x + \frac{x}{|x|} \right) = 1, \quad \lim_{x \rightarrow 0^-} \left(x + \frac{x}{|x|} \right) = -1$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \operatorname{ctgx} = +\infty, \quad \lim_{x \rightarrow 0^-} \operatorname{ctgx} = -\infty$$

Jeżeli funkcja $f(x)$ posiada w punkcie x_0 jednakowe granice jednostronne, tzn. jeżeli

$$\lim_{x \rightarrow x_0^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow x_0^+} f(x)$$

wówczas funkcja $f(x)$ posiada granicę w punkcie x_0 .

Jeżeli którakolwiek z granic jednostronnych nie istnieje, lub obydwie istnieją lecz są różne, wówczas $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x)$ nie istnieje.

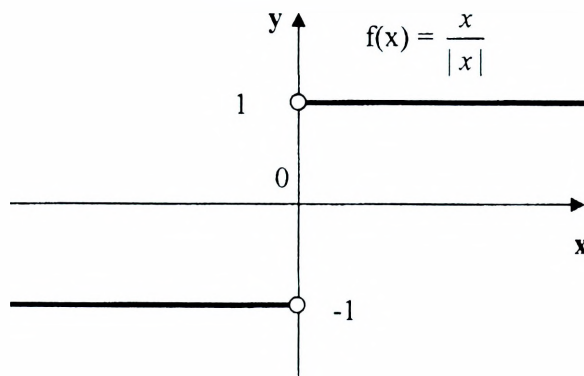
Granicę funkcji nazywamy granicą zwykłą lub granicą obustronną.

Przykład 4

$$a) \lim_{x \rightarrow 0^+} \left(\frac{1}{x^2} - \frac{1}{x} \right) = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{1-x}{x^2} = +\infty$$

$$b) \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{x}{|x|} = 1$$

$$c) \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{x}{|x|} = -1$$



$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \left(\frac{1}{\sin x} - \frac{1}{\operatorname{tg} x} \right) = \lim_{x \rightarrow 0^+} \left(\frac{1}{\sin x} - \frac{\cos x}{\sin x} \right) = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{1 - \cos x}{\sin x} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \operatorname{tg} \frac{x}{2} = 0$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} \left(\frac{1}{\sin x} + \frac{1}{\operatorname{tg} x} \right) = \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{1 + \cos x}{\sin x} = \lim_{x \rightarrow 0^-} \operatorname{ctg} \frac{x}{2} = -\infty$$

Granice funkcji w $-\infty$ lub $+\infty$

Niech dana będzie funkcja $f(x)$ określona w przedziale $(a; +\infty)$

¹ Funkcja $[x]$ oznacza część całkowitą liczby x

Definicja Heinego

Funkcja $f(x)$ posiada w $+\infty$

granicę g	granicę niewłaściwą $-\infty$	granicę niewłaściwą $+\infty$
-------------	----------------------------------	----------------------------------

jeżeli dla każdego ciągu (x_n) o wyrazach $x_n \in (-\infty; a)$, rozbieżnego do $-\infty$, ciąg $(f(x_n))$ jest odpowiednio

zbieżny do g	rozbieżny do $-\infty$	rozbieżny do $+\infty$
----------------	------------------------	------------------------

Zapisujemy wówczas

$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = g$	$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = -\infty$	$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = +\infty$
---	---	---

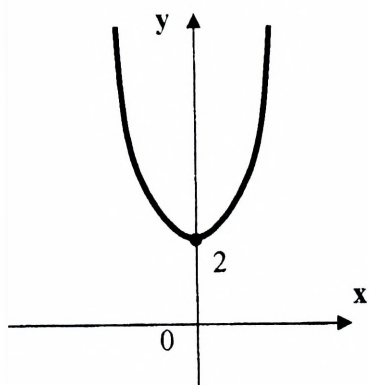
Przykład 5

a) $\lim_{x \rightarrow +\infty} (2 + x^2) = +\infty$

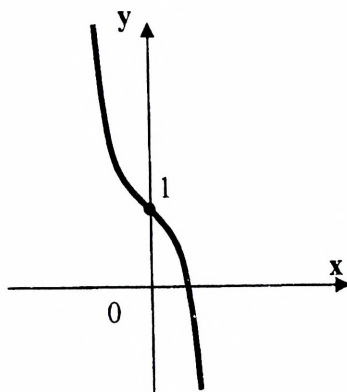
b) $\lim_{x \rightarrow +\infty} (1 - x^3) = -\infty$

c) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{3}{x} = 0$

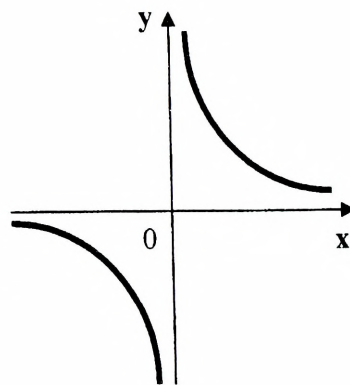
$f(x) = 2 + x^2$



$f(x) = 1 - x^3$

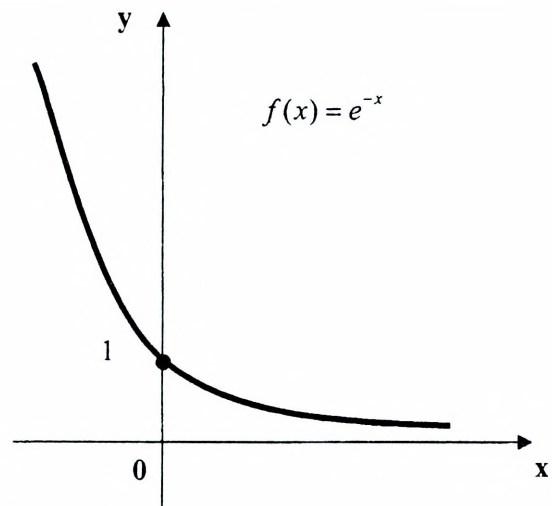
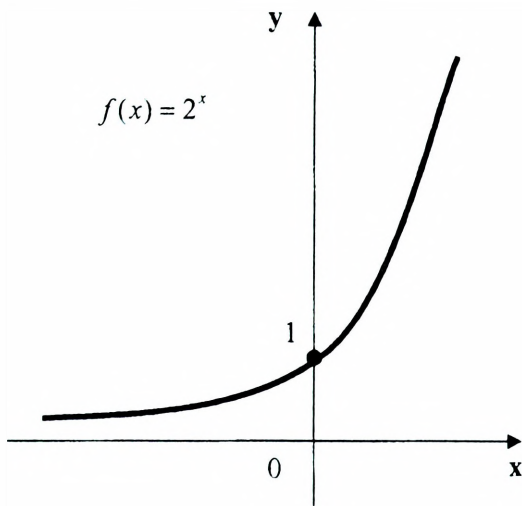


$f(x) = \frac{3}{x}$



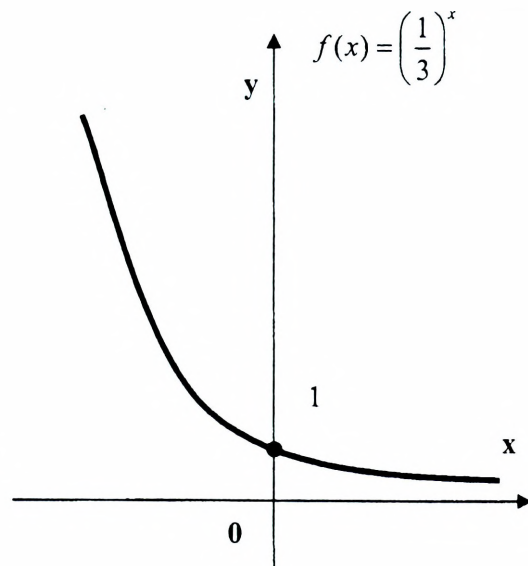
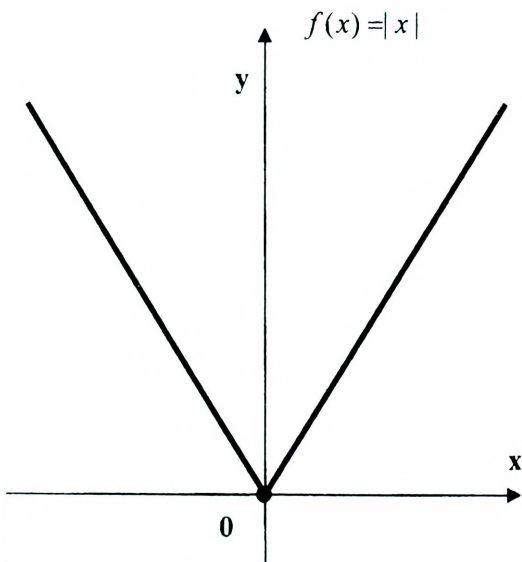
d) $\lim_{x \rightarrow +\infty} 2^x = +\infty$

e) $\lim_{x \rightarrow +\infty} e^{-x} = 0$



f) $\lim_{x \rightarrow -\infty} |x| = +\infty$

g) $\lim_{x \rightarrow -\infty} \left(\frac{1}{3}\right)^x = +\infty$



4.3.

CIĄGŁOŚĆ FUNKCJI

Niech funkcja $f(x)$ będzie określona w pewnym otoczeniu Q punktu x_0 .

Definicja

Funkcja $f(x)$ jest ciągła w punkcie x_0 wtedy i tylko wtedy gdy $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = f(x_0)$ ⁽²⁾

Znaczna większość funkcji z jakimi się spotykamy to funkcje ciągłe. Przykładami mogą być funkcje będące wielomianami $W_n(x)$, funkcje wykładnicze (np. 2^x), funkcje trygonometryczne typu $\sin x$ czy $\cos x$.

Wśród funkcji wyróżniamy funkcje wymierne.

Funkcję nazywamy wymierną, jeżeli można ją przedstawić w postaci ilorazu dwóch wielomianów.

Funkcja wymierna jest ciągła w każdym punkcie swojej dziedziny, z wyjątkiem pierwiastków wielomianu znajdującego się w mianowniku.

Przykładami funkcji wymiernych są funkcje

$$\text{a). } f(x) = \frac{x^3}{x-1} \quad \text{D: } x \in \mathbb{R} \setminus \{1\}$$

$$\text{b). } f(x) = \frac{x^2 - x + 2}{x^2 + 1} \quad \text{D: } x \in \mathbb{R}$$

$$\text{c). } f(x) = \frac{x^3 + 2x^2 + 3x - 1}{x^2 - x - 6} \quad \text{D: } x \in \mathbb{R} \setminus \{-2, 3\}$$

Definicja Funkcja $f(x)$ jest ciągła

prawostronnie

lewostronnie

 w punkcie x_0 , jeżeli spełniony jest odpowiednio warunek

$$\lim_{x \rightarrow x_0^+} f(x) = f(x_0)$$

$$\lim_{x \rightarrow x_0^-} f(x) = f(x_0)$$

² Zapis ten odczytujemy: granica funkcji w punkcie x_0 równa jest wartości funkcji w tym punkcie.

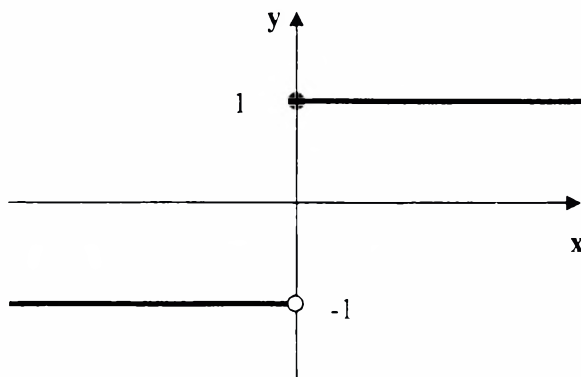
Przykład 6

Zbadać czy funkcja

$$f(x) = \begin{cases} 1 & \text{dla } x \geq 0 \\ -1 & \text{dla } x < 0 \end{cases}$$

jest ciągła ?

Wykres funkcji $f(x)$ wygląda następująco:



Z wykresu widać, że nieciągłość występuje dla $x = 0$.

Mamy $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = -1$, natomiast $f(0) = 1$

Ponieważ $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) \neq f(0)$

analizowana funkcja nie jest ciągła.

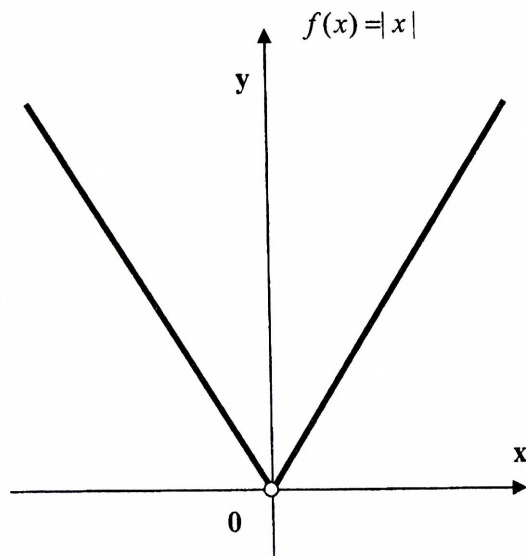
Przykład 7

Dana jest funkcja

$$f(x) = \begin{cases} |x| & \text{dla } x \neq 0 \\ a & \text{dla } x = 0 \end{cases}$$

Czy można dobrać parametr a tak aby $f(x)$ była ciągła?

Wykres funkcji $f(x)$ dla $x \neq 0$ przedstawiono na rysunku



Ponieważ $\lim_{x \rightarrow 0^+} |x| = 0$ oraz $\lim_{x \rightarrow 0^-} |x| = 0$ wynika stąd wniosek, że dana funkcja będzie ciągła tylko wtedy gdy jej wartość w zerze wynosić będzie 0.
mamy

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} |x| = 0 \quad f(0) = a$$

a zatem aby funkcja była prawostronnie ciągła spełniony powinien być warunek

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} |x| = f(0) \quad \Rightarrow \quad a = 0$$

natomiast, aby funkcja była w zerze lewostronnie ciągła zachodzić musi warunek

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} |x| = f(0) \quad \text{czyli} \quad a = 0$$

Reasumując: badana funkcja jest ciągła dla $a = 0$

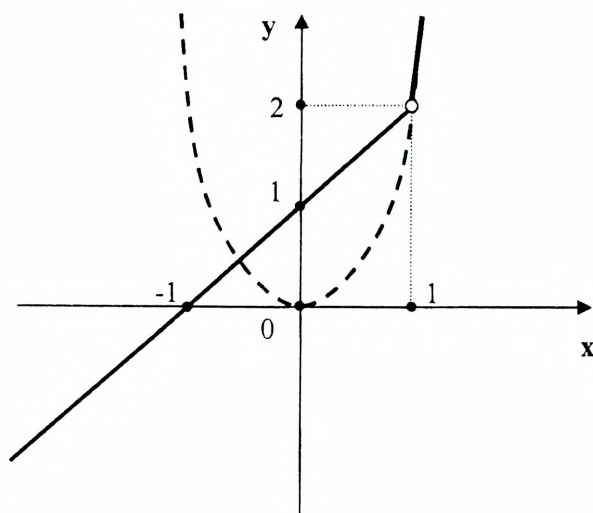
Przykład 8

Dana jest funkcja

$$f(x) = \begin{cases} x+1 & \text{dla } x < 1 \\ ax^2 & \text{dla } x \geq 1 \end{cases}$$

Tak dobrać parametr a , aby funkcja $f(x)$ była ciągła.

Poprzez odpowiednie dobranie parametru a można zlikwidować nieciągłość w punkcie $x_0 = 1$.



Mamy $\lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^-} (x+1) = 2$

Wartość funkcji $f(x)$ w punkcie $x_0 = 1$ wynosi $f(1) = a \cdot 1^2 = a$

Aby $f(x)$ była ciągła zachodzić musi warunek

$$\lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = f(1), \text{ a zatem } a = 2$$

$$\text{dla } x \geq 1 \quad f(x) = 2x^2$$

Jeżeli funkcja $f(x)$ nie jest ciągła w punkcie x_0 , to x_0 nazywamy punktem nieciągłości tej funkcji.

Wyróżniamy nieciągłości pierwszego rodzaju (wówczas, gdy w punkcie x_0 istnieją jednostronne granice właściwe) i nieciągłości drugiego rodzaju (wówczas, gdy któraś z granic $\lim_{x \rightarrow x_0^+} f(x)$ lub $\lim_{x \rightarrow x_0^-} f(x)$ jest typu $+\infty$ lub $-\infty$).

Przykładem nieciągłości pierwszego rodzaju funkcji

$$f(x) = \frac{x+2}{x+2} \quad \text{jest punkt } x_0 = -2, \text{ ponieważ}$$

$$\lim_{x \rightarrow -2^+} f(x) = 1 \quad \text{oraz} \quad \lim_{x \rightarrow -2^-} f(x) = 1$$

Przykładem nieciągłości drugiego rodzaju może być funkcja

$$f(x) = \operatorname{tg} x \quad \text{i} \quad \text{punkt } x_0 = \frac{\pi}{2}$$

$$\text{Mamy } \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}^+} \operatorname{tg} x = -\infty \quad \text{oraz} \quad \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}^-} \operatorname{tg} x = +\infty$$

Funkcja $f(x) = \frac{\sin x}{x}$ posiada dziedzinę $R \setminus \{0\}$.

W punkcie $x_0 = 0$ ma nieciągłość. Nieciągłość ta jest nieciągłością usuwalną, albowiem inna funkcja określona w sposób następujący

$$f(x) = \begin{cases} \frac{\sin x}{x} & \text{dla } x \neq 0 \\ 1 & \text{dla } x = 0 \end{cases}$$

jest ciągła w \mathbb{R} .

4.4.

WŁAŚCIWOŚCI FUNKCJI CIĄGLYCH

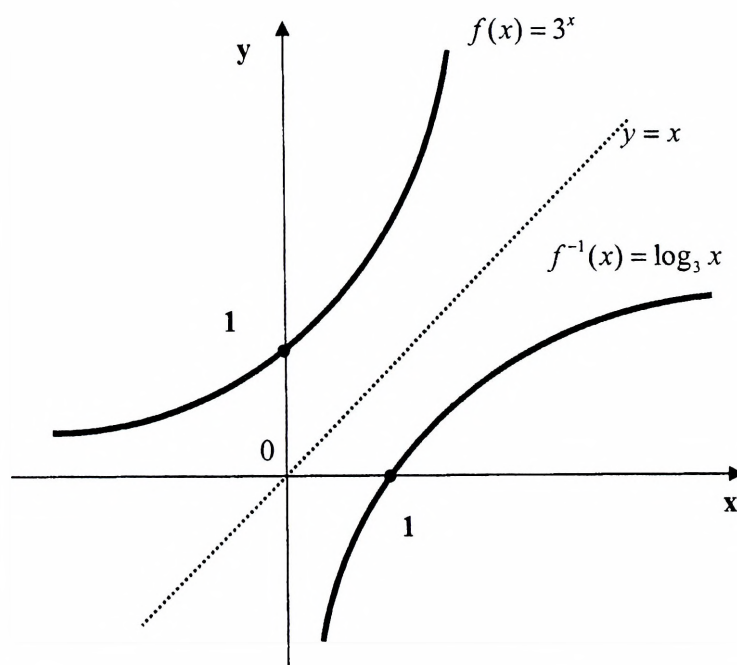
Podajmy bez przytaczania dowodów kilka twierdzeń o funkcjach ciągłych, z których wynikają własności tych funkcji.

Twierdzenie 1 (o ciągłości funkcji odwrotnej)

Funkcja odwrotna do funkcji ciągłej i rosnącej (malejącej) jest ciągła i rosnąca (malejąca).

Przykład 9

Funkcja $f(x) = 3^x$ posiada funkcję odwrotną $f^{-1}(x) = \log_3 x$.



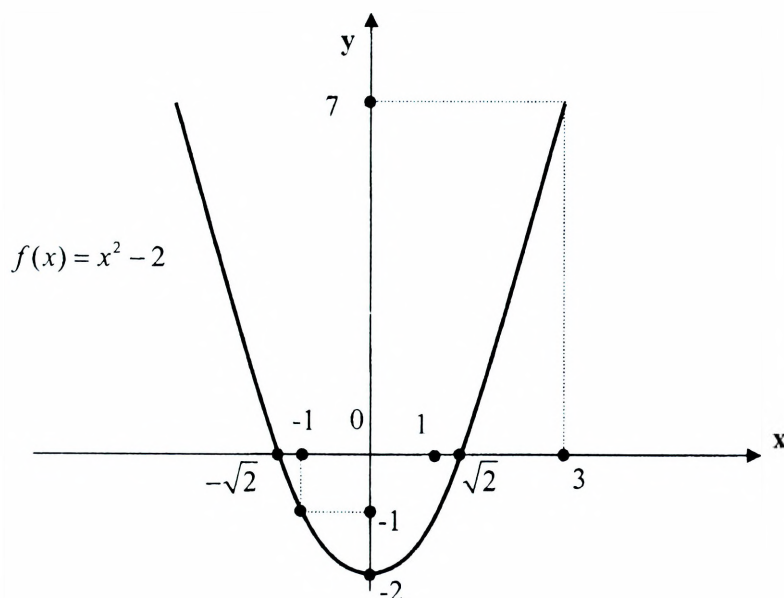
Twierdzenie 2 (Weierstrassa)

Jeżeli funkcja $f(x)$ jest ciągła w przedziale obustronnie domkniętym $\langle a, b \rangle$, to jest w nim ograniczona i istnieją w tym przedziale takie dwa punkty c_1, c_2 , że

$$f(c_1) = \inf_{\langle a, b \rangle} f(x)$$

$$f(c_2) = \sup_{\langle a, b \rangle} f(x) \quad (3)$$

Na przykład funkcja $f(x) = x^2 - 2$ ciągła w przedziale $\langle -1, 3 \rangle$ jest w tym przedziale ograniczona (od dołu przez -2 , od góry przez 7).



$$c_1 = 0 \quad f(c_1) = f(0) = -2 = \inf_{\langle -1, 3 \rangle} f(x)$$

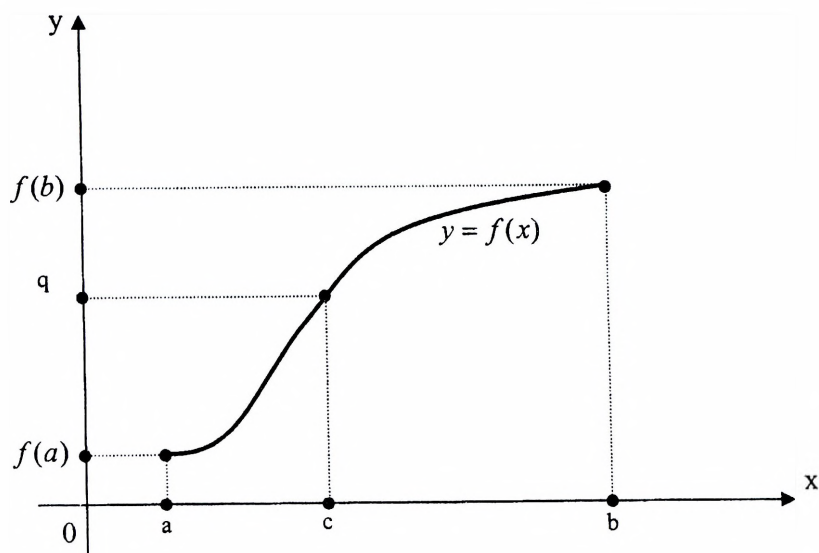
$$c_2 = 3 \quad f(c_2) = f(3) = 7 = \sup_{\langle -1, 3 \rangle} f(x)$$

Funkcja ciągła w przedziale domkniętym osiąga w tym przedziale kres dolny i kres górny zbioru swoich wartości.

Twierdzenie 3 (Darboux – twierdzenie o przyjmowaniu wartości pośrednich)

Jeżeli funkcja $f(x)$ jest ciągła w przedziale domkniętym $\langle a, b \rangle$, $f(a) \neq f(b)$ oraz liczba q zawarta jest między $f(a)$ i $f(b)$, to istnieje taki punkt $c \in (a, b)$, że $f(c) = q$

³ sup Z – kres górny zbioru Z; sup – supremum – najwyższe
 inf Z – kres dolny zbioru Z; inf – infimum – najniższe



Oznacza to, że funkcja $f(x)$ przyjmuje w przedziale $\langle a, b \rangle$ każdą wartość pośrednią między $f(a)$ i $f(b)$.

Właściwości tej może nie mieć funkcja nieciągła.

Wniosek wynikający z twierdzenia Darboux jest następujący:

Jeżeli funkcja $f(x)$ jest ciągła w przedziale $\langle a, b \rangle$, a ponadto,

$$f(a) \cdot f(b) < 0, \text{ to istnieje taki punkt } c \in \langle a, b \rangle, \text{ że } f(c) = 0$$

Przykład 10

Niech $f(x) = e^{2x^2+x} - \frac{2}{x}$ oraz $\langle a, b \rangle = \langle \frac{1}{2}, 1 \rangle$

obliczmy
$$f\left(\frac{1}{2}\right) = e^{2\left(\frac{1}{2}\right)^2 + \frac{1}{2}} - \frac{2}{\frac{1}{2}} = e - 4 < 0$$

$$f(1) = e^3 - 2 > 0$$

oznacza to, że w przedziale $\langle \frac{1}{2}, 1 \rangle$ istnieje taki punkt c , że $f(c) = 0$ ⁽⁴⁾

⁴ Oznacza to również, że równanie $e^{2c^2+c} - \frac{2}{c} = 0$ ma w przedziale $\langle \frac{1}{2}, 1 \rangle$ co najmniej jeden pierwiastek.

Zadania:

1. Obliczyć granicę

a) $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{3x^4 + 2x}{5x^4 - 8x^2}$

e) $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^2 + 3x}{4x^2 - 5}$

b) $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{3x + 2}{2x^2 - 5}$

f) $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{2x^3 - 4x}{5x^2 + 6}$

c) $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x^5}{2x^3 - 4x}$

g) $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2 - 2x + 1}{x^3 - x}$

d) $\lim_{x \rightarrow -1} \frac{x^2 - 1}{x + 1}$

2. Tak dobrać parametr a aby funkcja była ciągła

a) $f(x) = \begin{cases} \sin(x) + a & \text{dla } x \geq 0 \\ 2x + 1 & \text{dla } x < 0 \end{cases}$

b) $f(x) = \begin{cases} \log(x) & \text{dla } x > 1 \\ x - a & \text{dla } x \leq 1 \end{cases}$

3. Wyznaczyć punkty nieciągłości funkcji

a) $f(x) = \frac{3x}{x - |x|}$

b) $f(x) = \frac{\cos x}{|x|}$

c) $f(x) = \frac{2x}{x^3 - 1}$

4. Sprawdzić czy funkcja

a) $f(x) = \begin{cases} e^{-x} & \text{dla } x \leq 1 \\ x^2 - 1 & \text{dla } x > 1 \end{cases}$

b) $f(x) = \begin{cases} 4^{x+1} & \text{dla } x < 0 \\ 2|x - 2| & \text{dla } x \geq 0 \end{cases}$

5.

POCHODNA FUNKCJI

5.1.

OKREŚLENIE POJĘCIA POCHODNA FUNKCJI

Niech $f(x)$ będzie funkcją określoną w pewnym otoczeniu punktu x_0 .

Niech Δx oznacza przyrost zmiennej x w punkcie x_0

$$\Delta x = x - x_0$$

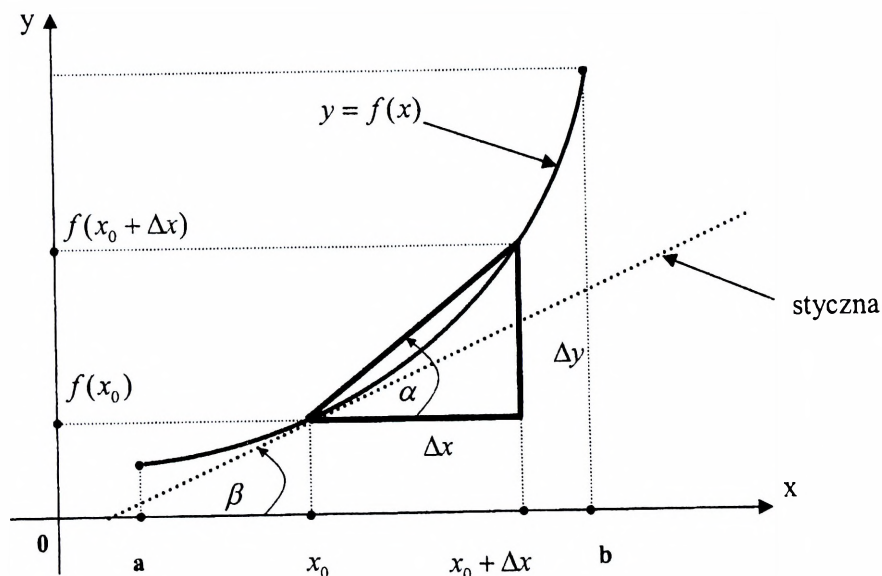
Przyrostowi Δx odpowiada przyrost wartości funkcji Δy

$$\Delta y = f(x_0 + \Delta x) - f(x_0) \qquad \Delta y = \Delta f$$

Iloraz różnicowy funkcji $f(x)$ w punkcie x_0 i dla przyrostu Δx zmiennej niezależnej to stosunek.

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x}$$

Rysunek 1. Interpretacja geometryczna ilorazu różnicowego



Definicja.

Pochodną funkcji $f(x)$ w punkcie x_0 nazywamy granicę ilorazu różnicowego, gdy $\Delta x \rightarrow 0$

$$f'(x_0) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x}$$

Pojęcie pochodnej wprowadził do matematyki Izaak Newton w drugiej połowie XVII w. Rachunek pochodnych zwany rachunkiem różniczkowym rozwinął niemiecki matematyk i filozof Gottfried Leibniz.

Rysunek 1 pozwala na dokonanie interpretacji geometrycznej pochodnej.

Zauważmy, że $\operatorname{tg} \alpha = \frac{\Delta y}{\Delta x}$; jeżeli Δx jest coraz mniejsze, wówczas kąt α jest w przybliżeniu równy kątowi β ⁽¹⁾.

$$f'(x_0) = \operatorname{tg} \beta$$

Przykład 1

Dana jest funkcja $f(x) = x^3$. Obliczyć na podstawie definicji wartość pochodnej tej funkcji w punkcie $x_0 = 2$.

$$\begin{aligned} f'(2) & \stackrel{df}{=} \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(2 + \Delta x) - f(2)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{(2 + \Delta x)^3 - 2^3}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{8 + 12\Delta x + 6\Delta x^2 + \Delta x^3 - 8}{\Delta x} = \\ & = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta x(12 + 6\Delta x + \Delta x^2)}{\Delta x} = 12 \end{aligned}$$

Należy odróżnić wartość pochodnej w pewnym ustalonym punkcie x_0 (jest to liczba), od funkcji $f'(x)$. Jeżeli bowiem pochodna funkcji $f(x)$ istnieje w każdym punkcie pewnego zbioru X , to każdej wartości $x_0 \in X$ przyporządkowana jest dokładnie jedna liczba $f'(x_0)$. A zatem w zbiorze X określona jest nowa funkcja, zwana funkcją pochodną funkcji $f(x)$ i oznaczona symbolem $f'(x)$.

Można mówić o pochodnej lewostronnej funkcji $f(x)$ w punkcie x_0 i oznaczamy ją symbolem $f'(x_0^-)$, oraz o pochodnej prawostronnej, którą oznaczamy symbolem $f'(x_0^+)$.

¹ β oznacza kąt nachylenia do osi O_x stycznej poprowadzonej do krzywej $y = f(x)$ w punkcie $(x_0, f(x_0))$.

Mamy

$$f'(x_0^-) \stackrel{df}{=} \lim_{\Delta x \rightarrow 0^-} \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x}$$

$$f'(x_0^+) \stackrel{df}{=} \lim_{\Delta x \rightarrow 0^+} \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x}$$

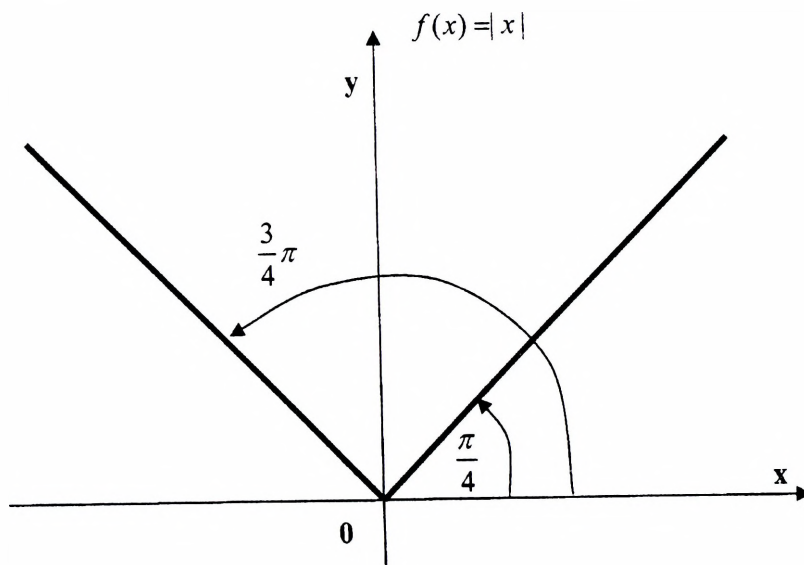
Wypada zaznaczyć, że pochodna $f'(x_0)$ istnieje tylko wówczas, gdy istnieją pochodne jednostronne i gdy one są równe.

Na przykład: funkcja $f(x) = |x|$ posiada w punkcie $x_0 = 0$ dwie pochodne jednostronne, a mianowicie:

$$f'(0^-) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0^-} \frac{|\Delta x| - 0}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0^-} \frac{-\Delta x}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0^-} (-1) = -1$$

$$f'(0^+) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0^+} \frac{|\Delta x| - 0}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0^+} \frac{\Delta x}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0^+} 1 = 1$$

Granice te są różne, zatem $f'(0)$ nie istnieje.



$$f'(0^-) = \operatorname{tg} \frac{3}{4} \pi = -1 \quad f'(0^+) = \operatorname{tg} \frac{\pi}{4} = 1$$

5.2.

OBLICZANIE POCHODNYCH

Tabela 1 zawiera pochodne niektórych funkcji

Lp.	funkcja	pochodna	uwagi
1.	$f(x) = c$	$f'(x) = 0$	funkcja stała
2.	$f(x) = x^n$	$f'(x) = nx^{n-1}$	n - liczba naturalna
3.	$f(x) = a^x$	$f'(x) = a^x \ln a$	$a > 0$
4.	$f(x) = e^x$	$f'(x) = e^x$	$e \approx 2,718$
5.	$f(x) = \sin x$	$f'(x) = \cos x$	
6.	$f(x) = \cos x$	$f'(x) = -\sin x$	
7.	$f(x) = \ln x$	$f'(x) = \frac{1}{x}$	$x > 0$
8.	$f(x) = \log_a x$	$f'(x) = \frac{1}{x \ln a}$	$a > 0, a \neq 1,$ $0 < x < +\infty$
9.	$f(x) = \arcsin x$	$f'(x) = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$	$-1 < x < +1$
10.	$f(x) = \arccos x$	$f'(x) = \frac{-1}{\sqrt{1-x^2}}$	$-1 < x < +1$
11.	$f(x) = \operatorname{arc} \operatorname{tg} x$	$f'(x) = \frac{1}{1+x^2}$	
12.	$f(x) = \operatorname{arc} \operatorname{ctg} x$	$f'(x) = \frac{-1}{1+x^2}$	

Podajmy jeszcze pewne wzory ogólne, które umożliwiają obliczanie pochodnych.

Jeżeli istnieją pochodne $f'(x)$ i $g'(x)$, to

$$[f(x) + g(x)]' = f'(x) + g'(x)$$

$$[f(x) - g(x)]' = f'(x) - g'(x)$$

$$[f(x) \cdot g(x)]' = f'(x) \cdot g(x) + f(x) \cdot g'(x)$$

a przy dodatkowym założeniu $g(x) \neq 0$

$$\left[\frac{f(x)}{g(x)} \right]' = \frac{f'(x) \cdot g(x) - f(x) \cdot g'(x)}{[g(x)]^2} \quad \text{uwaga! } [g(x)]^2 = g^2(x)$$

$$[a \cdot f(x)]' = a \cdot f'(x)$$

Przykład 2

$$f(x) = x^3 + \sin x + \operatorname{tg} \frac{\pi}{4}$$

$$f'(x) = 3x^2 + \cos x$$

$$f(x) = x^2 \cos x$$

$$f'(x) = 2x \cdot \cos x - x^2 \sin x$$

$$f(x) = \frac{1}{x}$$

$$f'(x) = \frac{1' \cdot x - 1 \cdot x'}{x^2} = \frac{-1}{x^2}$$

$$f(x) = \frac{x+2}{x^2-3}$$

$$f'(x) = \frac{x^2-3-(x+2) \cdot 2x}{(x^2-3)^2} = \frac{-x^2-4x-3}{(x^2-3)^2}$$

$$f(x) = \operatorname{tg} x$$

$$f'(x) = \left(\frac{\sin x}{\cos x} \right)' = \frac{\cos x \cdot \cos x - \sin x \cdot (-\sin x)}{\cos^2 x} = \frac{1}{\cos^2 x}$$

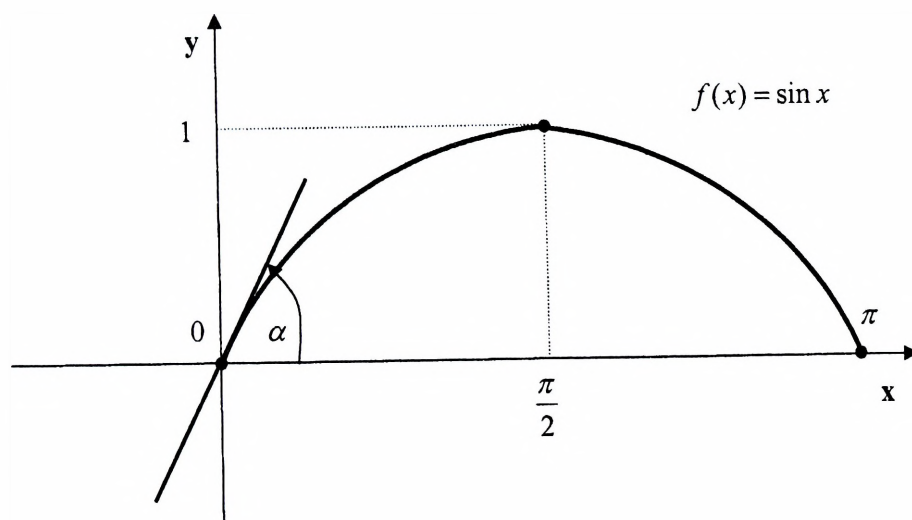
$$f(x) = \operatorname{ctg} x$$

$$f'(x) = \left(\frac{\cos x}{\sin x} \right)' = \frac{-\sin x \cdot \sin x - \cos x \cdot \cos x}{\sin^2 x} = \frac{-1}{\sin^2 x}$$

Przykład 3

Obliczyć kąt pod jakim wykres funkcji $f(x) = \sin x$ przecina oś 0_x w punkcie 0.

Wykonujemy odpowiedni rysunek



Szukany kąt jest to kąt pomiędzy osią 0_x , a styczną do wykresu funkcji $f(x) = \sin x$ poprowadzoną w punkcie $(0;0)$. Chodzi zatem o kąt α . Pamiętajmy, że $\operatorname{tg}\alpha = f'(x_0)$.

W naszym przypadku oczywiście mamy $f(x) = \sin x$, $f'(x) = \cos x$, $x_0 = 0$.

Zatem mamy

$$\operatorname{tg}\alpha = \cos 0 = 1,$$

a więc $\alpha = \frac{\pi}{4}$, lub $\alpha = 45^\circ$

Twierdzenie o pochodnej funkcji odwrotnej

Jeżeli funkcja $x = g(y)$ jest ściśle monotoniczna i posiada pochodną $g'(y) \neq 0$ to funkcja $y = f(x)$ odwrotna do niej posiada pochodną

$$f'(x) = \frac{1}{g'(y)}$$

przy czym $y = f(x)$

5.3.

POCHODNA FUNKCJI ZŁOŻONEJ

Jeżeli funkcja $u = h(x)$ ma pochodną $h'(x)$, natomiast funkcja $y = f(u)$ ma pochodną $f'(u)$, to funkcja złożona $y = f[h(x)]$ ma pochodną

$$y' = f'(u) \cdot h'(x)$$

przy czym w miejsce u należy podstawić $h(x)$.

Przykład 4

Obliczyć pochodną funkcji

a) $y = (7x+11)^{31}$

mamy $y = u^{31}$ gdzie $u = 7x+11$

$$y' = 31(7x+11)^{30} \cdot 7$$

b) $y = e^{\sin x}$ $y = e^u$ gdzie $u = \sin x$

$$y' = e^{\sin x} \cdot \cos x$$

c) $y = \sin^2(3x)$ $y = u^2$ $u = \sin v$ $v = 3x$, a zatem

$$y' = 2 \sin(3x) \cdot \cos(3x) \cdot 3 = 3 \cdot 2 \cdot \sin(3x) \cos(3x) = 3 \sin 6x$$

d) $y = \ln^2(3x-1)$ $y = u^2$ $u = \ln v$ $v = 3x-1$

$$y' = 2 \ln(3x-1) \cdot \frac{1}{3x-1} \cdot 3 = \frac{6}{3x-1} \cdot \ln(3x-1)$$

e) $y = \sqrt{x+\sqrt{x}}$ $y = \sqrt{u}$ $u = x + \sqrt{x}$

$$y' = \frac{1}{2\sqrt{x+\sqrt{x}}} \left(1 + \frac{1}{2\sqrt{x}} \right)$$

Pochodne wyższych rzędów

Jeżeli pochodna $f'(x)$ posiada pochodną, to nazywamy ją pochodną drugiego rzędu (drugą pochodną) funkcji $f(x)$ i oznaczamy symbolem $f''(x)$

$$f''(x) = \frac{df'}{dx} = [f'(x)]'$$

Przykład 5

$$y = \sin x \qquad y' = \cos x \qquad y'' = -\sin x$$

$$y = \cos^2 x \qquad y' = 2 \cos x \cdot (-\sin x) = -2 \sin x \cos x = -\sin 2x$$

$$y'' = -\cos 2x \cdot 2 = -2 \cos 2x$$

$$y = x^4 \qquad y' = 4x^3 \qquad y'' = 12x^2$$

Istnieje wzór rekurencyjny umożliwiający obliczanie pochodnych wyższych rzędów

$$f^{(n)}(x) = \frac{df^{(n-1)}}{dx} = [f^{(n-1)}(x)]'$$

Przykład 6

$$y = \frac{1}{x} \qquad y' = -\frac{1}{x^2} \qquad y'' = \frac{2}{x^3} \qquad y''' = -\frac{6}{x^4} \qquad \text{itd.}$$

$$y = 2x^4 \qquad y' = 8x^3 \qquad y'' = 24x^2 \qquad y''' = 48x \qquad y^{(4)} = 48 \qquad y^{(5)} = 0$$

5.4.

RÓŻNICZKA FUNKCJI

Definicja. Różniczką funkcji $f(x)$ w punkcie x_0 i dla przyrostu Δx zmiennej niezależnej x nazywamy iloczyn

$$f'(x_0) \cdot \Delta x$$

Różniczkę oznaczamy symbolem $df(x_0)$ lub krócej df lub dy . Mamy więc

$$df(x_0) = f'(x_0) \cdot \Delta x \quad \text{lub krócej} \quad dy = f'(x_0) \cdot \Delta x$$

$$df(x_0) = f'(x_0) \cdot dx$$

Dla praktycznych obliczeń przyrost funkcji Δy zastąpić można jej różniczką dy

$$\Delta y \approx dy$$

Popelniony przy tym błąd jest dowolnie mały, jeśli przyrost dx jest dostatecznie bliski zeru.

Przykład 7

$$y = x^2 \quad x_0 = 1 \quad dx = 0,02$$

obliczyć Δy i dy

$$\text{mamy: } \Delta y = (1,02)^2 - 1^2 = 0,0404$$

$$y' = 2x \quad y'(1) = 2 \cdot 1 = 2$$

$$dy = 2 \cdot 0,02 = 0,04$$

Jak widać nie popelniamy większego błędu przyjmując

$$\Delta y \approx dy$$

Przybliżoną wartość funkcji obliczać można korzystając ze wzoru:

$$f(x_0 + dx) \approx f(x_0) + f'(x_0) \cdot dx$$

Przykład 8

Korzystając z różniczki zupełnej obliczyć przybliżoną wartość $\sqrt{26}$ ⁽²⁾.

² $\sqrt{26}$ odczytamy z tablic = 5,099. Jak widać błąd jaki popelniamy korzystając z przybliżonych obliczeń jest niewielki.

mamy $f(x) = \sqrt{x}$ $x_0 = 25$ $dx = 1$

$$f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}} \quad f'(25) = \frac{1}{2\sqrt{25}} = \frac{1}{10}$$

$$f(x_0) = f(25) = \sqrt{25} = 5$$

a zatem

$$\sqrt{26} \approx 5 + \frac{1}{10} \cdot 1 = 5 + 0,1 = 5,1$$

Przykład 9

Korzystając z różniczki zupełnej obliczyć przybliżoną wartość $\ln(1,02)$

mamy

$$f(x) = \ln x \quad x_0 = 1 \quad dx = 0,02$$

$$f'(x) = \frac{1}{x} \quad f'(x_0) = f'(1) = \frac{1}{1} = 1$$

$$f(x_0) = f(1) = \ln 1 = 0$$

zatem $\ln(1,02) \approx 0 + 1 \cdot 0,02 = 0,02$

Wartość $\ln 1,02$ odczytana z tablic logarytmicznych wynosi 0,02.

5.5.

TWIERDZENIE ROLLE'A

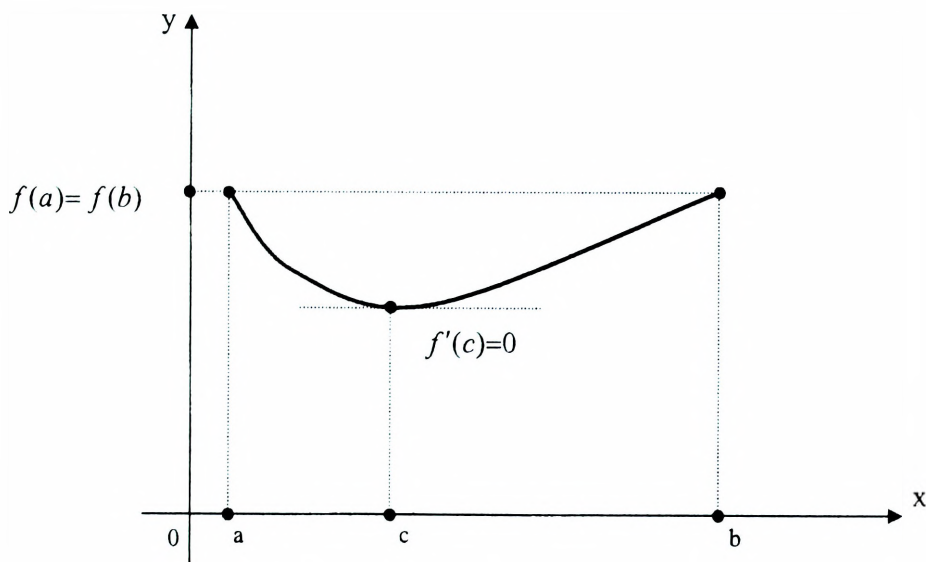
Twierdzenie Rolle'a

Jeżeli $f(x)$ jest funkcją określoną i ciągłą w przedziale $\langle a, b \rangle$, różniczkowalną w przedziale otwartym (a, b) i $f(a) = f(b)$, to istnieje przynajmniej jeden punkt $c \in (a, b)$ taki, że

$$f'(c) = 0$$

Rysunek 2 przedstawia interpretację geometryczną tego twierdzenia.

Rysunek 2. Interpretacja geometryczna twierdzenia Rolle'a



Styczna do wykresu funkcji w punkcie $(c, f(c))$ jest równoległa do osi 0_x .

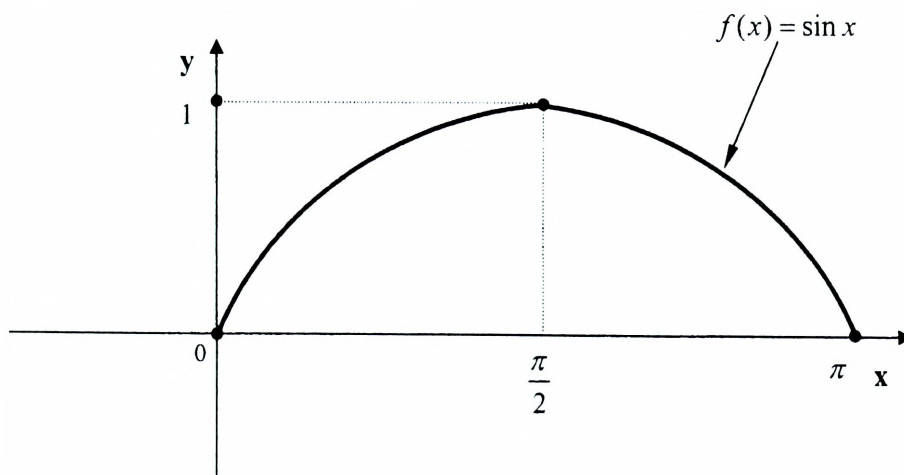
Takich punktów w przedziale (a, b) może być więcej. W szczególności może być nieskończenie wiele, jak to jest w przypadku funkcji stałej.

Przykładowo:

Funkcja $f(x) = \sin x$ spełnia założenia twierdzenia Rolle'a w przedziale $\langle 0, \pi \rangle$.

Mamy $f(0) = f(\pi) = 0$. Istnieje więc taki punkt c , że $f'(c) = 0$. Ponieważ

$$f'(x) = (\sin x)' = \cos x, \text{ łatwo stwierdzić, że } c = \frac{\pi}{2}.$$



Uogólnieniem twierdzenia Rolle'a jest bardzo ważne twierdzenie Lagrange'a.

Twierdzenie Lagrange'a

Jeżeli $f(x)$ jest funkcją ciągłą na przedziale $\langle a, b \rangle$ i różniczkowalną w przedziale (a, b) , to istnieje taki punkt $c \in (a, b)$, że:

$$f'(c) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}$$

Zauważmy, że twierdzenie Lagrange'a jest uogólnieniem twierdzenia Rolle'a. Jeśli bowiem dodatkowo założymy, że $f(b) = f(a)$ to otrzymamy związek

$$f'(c) = 0$$

5.6.

TWIERDZENIE DE L'HOSPITALA

Twierdzenie to zostało odkryte przez szwajcarskiego matematyka Jana Bernoulliego, natomiast ogłoszone drukiem przez jego ucznia, francuskiego matematyka Guillaume de L'Hospitala. Oddaje ono wielką rolę przy obliczaniu granic funkcji.

Twierdzenie de L'Hospitala

Jeżeli

1. funkcje $\frac{f(x)}{h(x)}$ i $\frac{f'(x)}{h'(x)}$ są określone w pewnym sąsiedztwie S punktu x_0 ,
2. a) $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = \lim_{x \rightarrow x_0} h(x) = 0$ albo
2. b) $\lim_{x \rightarrow x_0} h(x) = \infty$ ($-\infty$ lub $+\infty$)
3. istnieje granica $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f'(x)}{h'(x)}$ (właściwa albo niewłaściwa)

to istnieje także granica $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x)}{h(x)}$, przy czym

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x)}{h(x)} = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f'(x)}{h'(x)}$$

Przykład 10

$$a) \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^{20} - 1}{x - 1} \stackrel{0}{=} \lim_{H \text{ } x \rightarrow 1} \frac{20x^{19}}{1} = 20^{(3)}$$

$$b) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} \stackrel{0}{=} \lim_{H \text{ } x \rightarrow 0} \frac{\cos x}{1} = 1$$

$$c) \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^3}{e^x} \stackrel{\infty}{=} \lim_{H \text{ } x \rightarrow +\infty} \frac{3x^2}{e^x} \stackrel{\infty}{=} \lim_{H \text{ } x \rightarrow +\infty} \frac{6x}{e^x} \stackrel{\infty}{=} \lim_{H \text{ } x \rightarrow +\infty} \frac{6}{e^x} = 0$$

$$d) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - e^{-x} - 2x}{x^3} \stackrel{0}{=} \lim_{H \text{ } x \rightarrow 0} \frac{e^x + e^{-x} - 2}{3x^2} \stackrel{0}{=} \lim_{H \text{ } x \rightarrow 0} \frac{e^x - e^{-x}}{6x} \stackrel{0}{=} \lim_{H \text{ } x \rightarrow 0} \frac{e^x + e^{-x}}{6} = \frac{2}{6} = \frac{1}{3}$$

$$e) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln 3x}{\operatorname{ctgx}} \stackrel{\frac{\infty}{\infty}}{=} \lim_{H \text{ } x \rightarrow +\infty} \frac{\frac{1}{3x}}{\frac{1}{\sin^2 x}} \stackrel{\frac{\infty}{\infty}}{=} -\lim_{H \text{ } x \rightarrow 0^+} \frac{\sin^2 x}{x} \stackrel{\frac{0}{0}}{=} -\lim_{H \text{ } x \rightarrow 0^+} \frac{2 \sin x \cos x}{1} = -\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\sin 2x}{1} = 0$$

Twierdzenie de L'Hospitala można wykorzystać do obliczania granic typu symboli nieoznaczonych.

Symboly nieoznaczone to wyrażenia postaci

$$\frac{0}{0}; \quad \frac{\infty}{\infty}; \quad 0 \cdot \infty; \quad \infty - \infty; \quad 1^\infty; \quad \infty^0; \quad 0^0$$

Pierwsze dwa z nich (i granice związane z ich obliczaniem) zostały już przedstawione.

Przykład 11

$$a) \lim_{x \rightarrow 0^+} x \ln x \stackrel{0 \cdot \infty}{=} \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\ln x}{\frac{1}{x}} \stackrel{0}{=} \lim_{H \text{ } x \rightarrow 0^+} \frac{-x}{-\frac{1}{x^2}} = \lim_{x \rightarrow 0^+} (-x) = 0$$

$$b) \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{1}{x} - \frac{1}{\operatorname{tg} x} \right) \stackrel{\infty - \infty}{=} \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{\operatorname{tg} x - x}{x \operatorname{tg} x} \right) \stackrel{0}{=} \lim_{H \text{ } x \rightarrow 0} \left(\frac{\frac{1}{\cos^2 x} - 1}{\operatorname{tg} x + x \cdot \frac{1}{\cos^2 x}} \right) = \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{1 - \cos^2 x}{\sin x \cos x + x} \right)$$

$$\stackrel{0}{=} \lim_{H \text{ } x \rightarrow 0} \frac{2 \cos x \sin x}{\frac{1}{2} \cos 2x \cdot 2 + 1} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 2x}{\cos 2x + 1} = 0$$

³ Symbol H umieszczony pod znakiem równości oznacza „na mocy twierdzenia de L'Hospitala”; natomiast znak $\frac{0}{0}$ oznacza typ symbolu nieoznaczonego.

$$c) \lim_{x \rightarrow 0} (\cos x)^{\frac{1}{x^2}} = \lim_{x \rightarrow 0} e^{\ln(\cos x) \cdot \frac{1}{x^2}} \quad (4) = \lim_{x \rightarrow 0} e^{\frac{\ln(\cos x)}{x^2}} = e^{\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(\cos x)}{x^2}}$$

$$\text{obliczamy zatem } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(\cos x)}{x^2} \stackrel{0}{=} \lim_{H \rightarrow 0} \frac{-\operatorname{tg} x}{2x} \stackrel{0}{=} \lim_{H \rightarrow 0} \frac{-1}{2} = -\frac{1}{2},$$

$$\text{a zatem } e^{\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln \cos x}{x^2}} = e^{-\frac{1}{2}} = \frac{1}{\sqrt{e}}$$

$$d) \lim_{x \rightarrow +\infty} x^{\frac{1}{\sqrt{x}}} = \lim_{x \rightarrow +\infty} e^{\ln x \cdot \frac{1}{\sqrt{x}}} = \lim_{x \rightarrow +\infty} e^{\frac{\ln x}{\sqrt{x}}} = \lim_{x \rightarrow +\infty} e^{\frac{\ln x}{\sqrt{x}}}$$

$$\text{obliczamy zatem } \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln x}{\sqrt{x}} \stackrel{\frac{\infty}{\infty}}{=} \lim_{H \rightarrow +\infty} \frac{\frac{1}{x}}{\frac{1}{2\sqrt{x}}} \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2}{\sqrt{x}} = 0,$$

$$\text{a zatem } \lim_{x \rightarrow +\infty} x^{\frac{1}{\sqrt{x}}} = e^0 = 1$$

$$e) \lim_{x \rightarrow 0^+} x^{\sqrt{x}} = \lim_{x \rightarrow 0^+} e^{\ln x \cdot \sqrt{x}} = \lim_{x \rightarrow 0^+} e^{\sqrt{x} \ln x} = e^{\lim_{x \rightarrow 0^+} \sqrt{x} \ln x}$$

$$\text{obliczamy } \lim_{x \rightarrow 0^+} \sqrt{x} \ln x \stackrel{0 \cdot \infty}{=} \lim_{H \rightarrow 0^+} \frac{\ln x}{\frac{1}{\sqrt{x}}} \stackrel{0}{=} \lim_{H \rightarrow 0^+} \frac{\frac{1}{x}}{\frac{-1}{2\sqrt{x^3}}} = \lim_{x \rightarrow 0^+} (-2\sqrt{x}) = 0,$$

$$\text{a więc } \lim_{x \rightarrow 0^+} x^{\sqrt{x}} = e^0 = 1$$

Reasumując stwierdzić można, że z twierdzenia de L'Hospitala korzystamy przy obliczaniu:

- granicy ilorazu $\frac{f(x)}{h(x)}$, gdy dzielna i dzielnik dążą w danym przejściu granicznym ($x \rightarrow x_0$, $x \rightarrow x_0^-$, $x \rightarrow x_0^+$, $x \rightarrow +\infty$, $x \rightarrow -\infty$) do zera albo do nieskończoności;
- granicy różnicy $f(x) - h(x)$, gdy odjemna i odjemnik jednocześnie dążą do $+\infty$ albo $-\infty$;
- granicy iloczynu $f(x) \cdot h(x)$, gdy jeden czynnik dąży do zera, a drugi do nieskończoności;
- granicy potęgi $[f(x)]^{h(x)}$ gdy

⁴ Korzystaliśmy z zależności $x = e^{\ln x}$

- podstawa i wykładnik dążą jednocześnie do zera (0^0),
- podstawa dąży do nieskończoności, a wykładnik dąży do zera (symbol nieoznaczony typu ∞^0),
- podstawa dąży do jedności, a wykładnik do nieskończoności (1^∞).

Zadania:

1. Obliczyć pochodne funkcji

a) $y = \sqrt[3]{5x-7}$

b) $y = \sqrt{x + \sqrt[3]{x + \sqrt{x}}}$

c) $y = e^{3x} \cdot \cos 2x$

d) $y = e^{\frac{1-x^2}{2x}}$

e) $y = \ln \sqrt{5x}$

f) $y = \cos \frac{2x}{\log 5x}$

g) $y = \frac{\operatorname{tg} 2x}{e^x + e^{-x}}$

h) $y = \arcsin \frac{2x-1}{2}$

i) $y = \frac{1}{\cos 5x}$

j) $y = xe^{-x^2}$

2. Korzystając z twierdzenia de L'Hospitala obliczyć granicę:

a) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln x}{2x}$

l) $\lim_{x \rightarrow 0} x^{\sin 2x}$

b) $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{\ln x}{x-1}$

m) $\lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{1}{x^2} \right)^{\operatorname{tg} x}$

c) $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^5 - 32}{2x - 4}$

n) $\lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{\operatorname{tg} x}{x} \right)^{\frac{1}{x^2}}$

d) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^{0,1x}}{x^3}$

o) $\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{4}} \frac{\cos x - \sin x}{\cos 2x}$

e) $\lim_{x \rightarrow -1} \frac{x^3 + 1}{x + 1}$

p) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\operatorname{tg} x - \sin x}{x^3}$

f) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{3x^3}{2x - 1}$

r) $\lim_{x \rightarrow 0^+} (\cos x)^{\frac{1}{\sin x}}$

g) $\lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{x}{1 - \cos x}$

s) $\lim_{x \rightarrow 0} (1 + \sin x)^{\frac{1}{\sin x}}$

h) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos x - 1 + \frac{1}{2}x^2}{x^4}$

t) $\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} \frac{\operatorname{tg} 3x}{\operatorname{tg} 5x}$

i) $\lim_{x \rightarrow +\infty} x^{\frac{1}{x}}$

u) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(2+x) - \ln 2}{x}$

j) $\lim_{x \rightarrow 1} x^{\frac{1}{x-1}}$

w) $\lim_{x \rightarrow -1} \frac{x^3 + 1}{\arcsin(x+1)}$

k) $\lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{\sin x}{x} \right)^{\frac{1}{x^2}}$

z) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\operatorname{tg} x - \sin x}{x - \sin x}$

3. Obliczyć kąt pod jakim wykres funkcji $f(x) = \operatorname{tg} x$ przecina oś O_x

4. Obliczyć kąt pod jakim wykres funkcji $f(x) = \ln x$ przecina oś O_x

5. Korzystając z różniczki zupełnej obliczyć przybliżoną wartość

a) $e^{0,03}$

b) $\cos 61^\circ$

c) $\sqrt[3]{26}$

6.

BADANIE PRZEBIEGU ZMIENNOŚCI FUNKCJI

Rachunek różniczkowy funkcji jednej zmiennej wykorzystywany jest do badania przebiegu zmienności funkcji. W pierwszej części tego rozdziału Czytelnik znajdzie informacje dotyczące wyznaczania asymptot, ekstremów funkcji i przedziałów monotoniczności a także wyznaczania punktów przegięcia oraz przedziałów, w których funkcja jest wypukła, a w których jest wklęsła.

W drugiej zaś przedstawiony zostanie schemat badania przebiegu zmienności funkcji wraz z przykładami.

6.1.

ASYMPTOTY

Asymptota to prosta do której wykres funkcji dąży, ale której nie osiąga. Wyróżniamy asymptoty pionowe i ukośne. Szczególnym przypadkiem asymptoty ukośnej jest asymptota pozioma.

Asymptota pionowa

Definicja. Prosta o równaniu $x = c$ nazywamy asymptotą pionową lewostronną wykresu funkcji $y = f(x)$ jeżeli $\lim_{x \rightarrow c^-} f(x) = +\infty$ lub $\lim_{x \rightarrow c^-} f(x) = -\infty$

Definicja. Prosta o równaniu $x = c$ nazywamy asymptotą pionową prawostronną wykresu funkcji $y = f(x)$ jeżeli $\lim_{x \rightarrow c^+} f(x) = +\infty$ lub $\lim_{x \rightarrow c^+} f(x) = -\infty$

Prostą o równaniu $x = c$ nazywamy asymptotą pionową obustronną wykresu funkcji $y = f(x)$, jeżeli jest ona asymptotą lewostronną jak i prawostronną jednocześnie.

Przykład 1

Wyznaczyć asymptotę pionową wykresu funkcji

$$f(x) = \frac{1}{x+1}$$

Dziedziną tej funkcji jest zbiór $R \setminus \{-1\}$

Prosta o równaniu $x = -1$ jest asymptotą pionową wykresu badanej funkcji

Obliczamy dwie granice

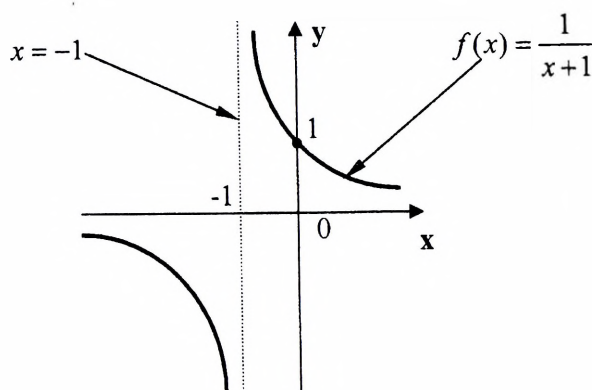
$$\lim_{x \rightarrow -1^-} \frac{1}{x+1} = -\infty$$

oraz

$$\lim_{x \rightarrow -1^+} \frac{1}{x+1} = +\infty$$

Z obliczonych granic wynika, że prosta o równaniu $x = -1$ jest asymptotą pionową obustronną wykresu funkcji $f(x) = \frac{1}{x+1}$

Rysunek 1. Wykres funkcji $f(x) = \frac{1}{x+1}$



Przykład 2

Niech $f(x) = e^{\frac{1}{x}}$

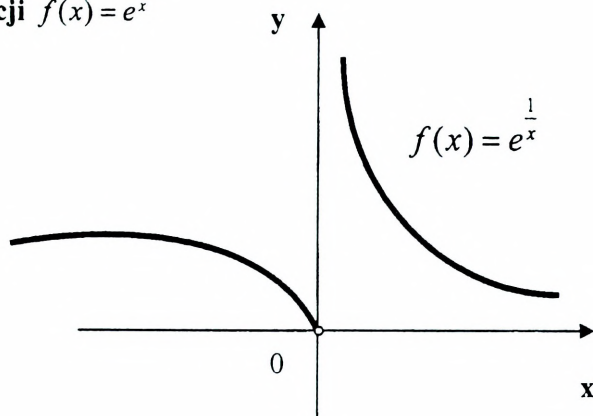
$$D: x \in R \setminus \{0\}$$

Aby przekonać się, jaka istnieje asymptota pionowa wykresu tej funkcji obliczamy dwie granice

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} e^{\frac{1}{x}} = +\infty \quad \text{oraz} \quad \lim_{x \rightarrow 0^-} e^{\frac{1}{x}} = 0$$

Z obliczonych granic wynika, że prosta o równaniu $x = 0$ jest asymptotą pionową prawostronną wykresu funkcji $f(x) = e^{\frac{1}{x}}$

Rysunek 2. Wykres funkcji $f(x) = e^{\frac{1}{x}}$



Przykład 3

Niech $f(x) = \ln(x-1)$

D: $x > 1$

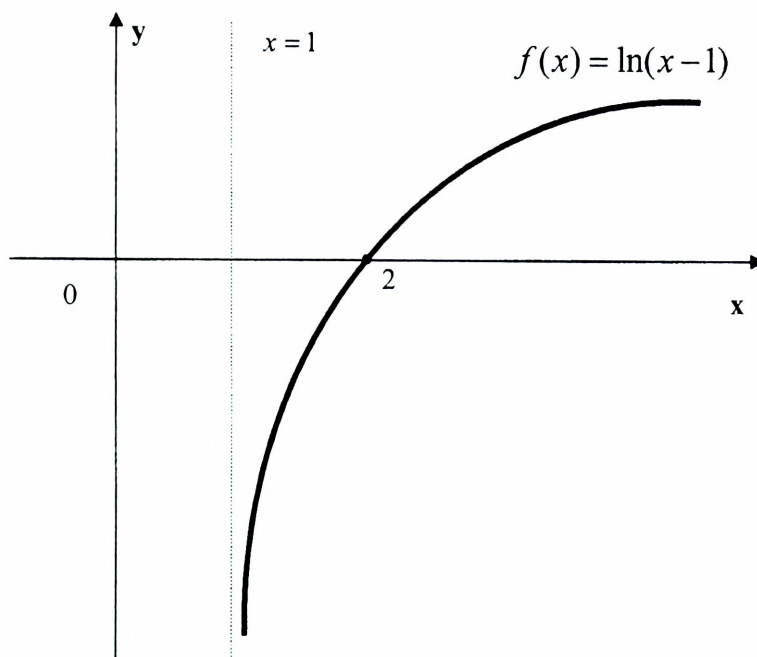
Obliczamy granicę

$$\lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^+} \ln(x-1) = -\infty$$

Granica lewostronna $x \rightarrow 1^-$ oczywiście nie istnieje.

Zatem prosta o równaniu $x=1$ jest asymptotą pionową prawostronną wykresu funkcji $f(x) = \ln(x-1)$

Rysunek 3. Wykres funkcji $f(x) = \ln(x-1)$



asymptoty ukośne

Definicja. Prosta o równaniu $y = mx + k$ nazywamy asymptotą ukośną (pochyłą) lewostronną dla ($m \neq 0$) wykresu funkcji $y = f(x)$, jeżeli

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} [f(x) - (mx + k)] = 0$$

Definicja. Prosta o równaniu $y = mx + k$ nazywamy asymptotą ukośną prawostronną (dla $m \neq 0$) wykresu funkcji $y = f(x)$, jeżeli

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} [f(x) - (mx + k)] = 0$$

Prostą o równaniu $y = mx + k$ nazywamy asymptotą ukośną obustronną wykresu funkcji $y = f(x)$, jeżeli jest asymptotą ukośną lewostronną i prawostronną jednocześnie.

W przypadku gdy $m = 0$ występuje asymptota pozioma.

Jeżeli wykres funkcji $y = f(x)$ ma asymptotę ukośną o równaniu $y = mx + k$, to

$$m = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{f(x)}{x} \text{ oraz } k = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} [f(x) - mx]$$

Dwie ostatnie granice należy obliczać dla $x \rightarrow -\infty$ w przypadku asymptoty lewostronnej oraz dla $x \rightarrow +\infty$ w przypadku asymptoty prawostronnej.

Przykład 4

Wyznaczyć asymptotę ukośną wykresu funkcji

$$f(x) = \frac{x^2}{x+1} \quad D: x \in \mathbb{R} \setminus \{-1\}$$

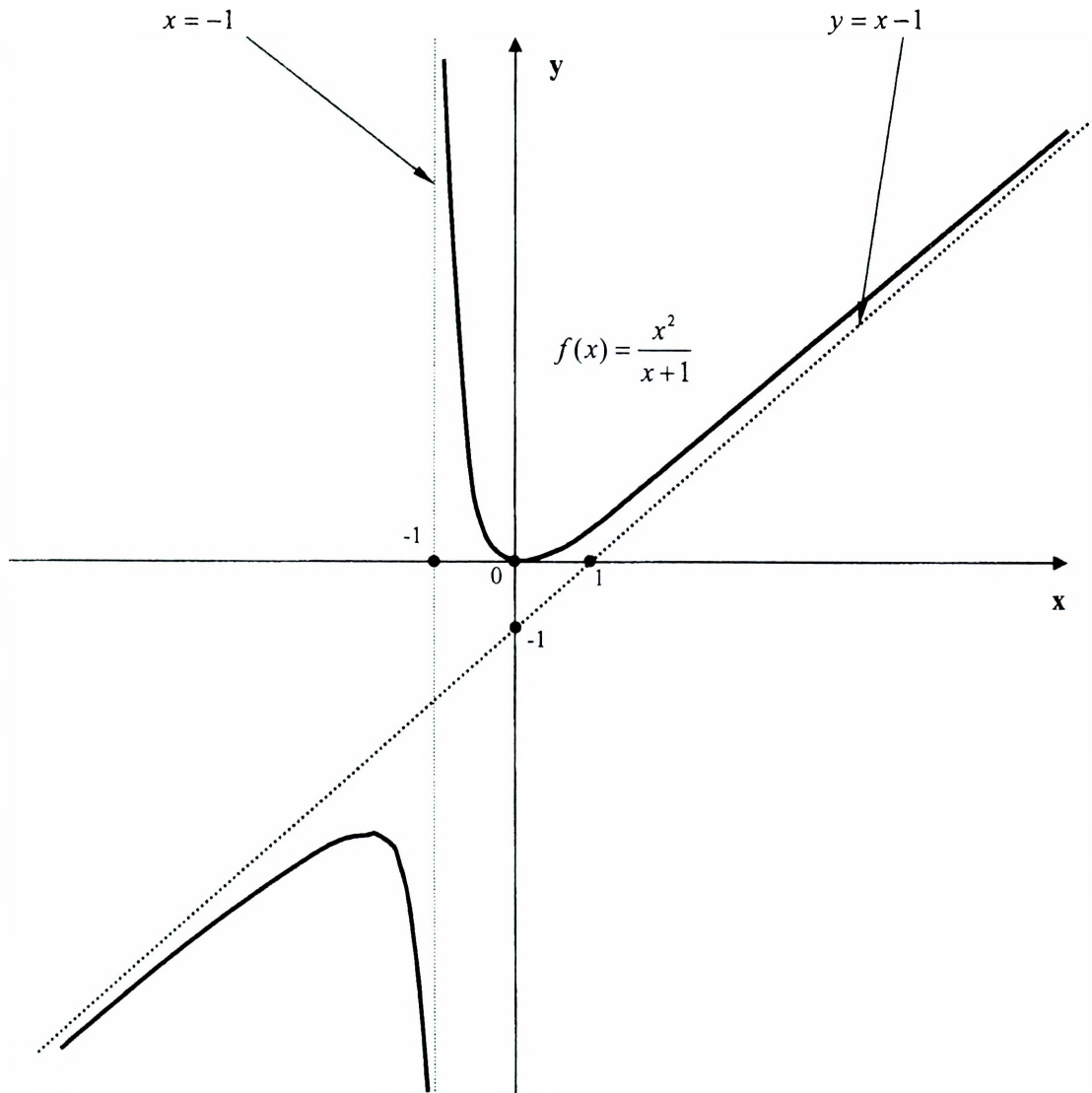
obliczamy

$$m = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\frac{x^2}{x+1}}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^2}{x^2 + x} = 1$$

$$k = \lim_{x \rightarrow +\infty} [f(x) - mx] = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left[\frac{x^2}{x+1} - x \right] = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^2 - x(x+1)}{x+1} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{-x}{x+1} = -1$$

Zatem prosta o równaniu $y = x - 1$ jest asymptotą ukośną obustronną wykresu funkcji $f(x) = \frac{x^2}{x+1}$. Łatwo sprawdzić, że prosta o równaniu $x = -1$ jest asymptotą pionową obustronną.

Rysunek 4. Wykres funkcji $f(x) = \frac{x^2}{x+1}$



Przykład 5

Niech $f(x) = \frac{x-1}{x+3}$

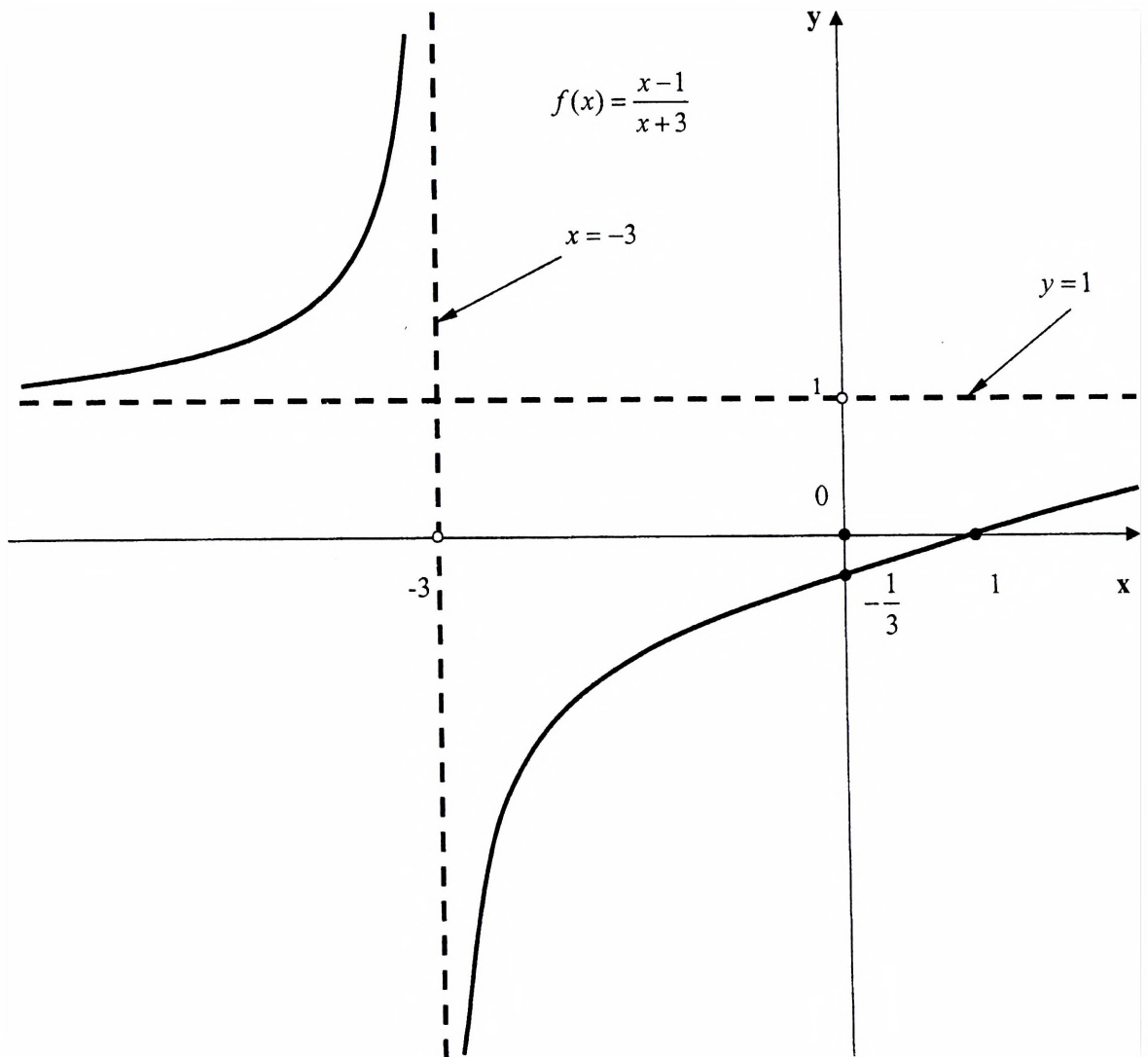
$D: x \in \mathbb{R} \setminus \{-3\}$

$$m = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x-1}{x+3} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x-1}{x^2+3x} = 0$$

$$k = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x-1}{x+3} = 1$$

Zatem prosta o równaniu $y=1$ jest asymptotą poziomą obustronną wykresu funkcji

$$f(x) = \frac{x-1}{x+3}.$$



Przykład 6

Niech $f(x) = \frac{x-|x|}{2} + e^x$

$D: x \in R$

Zgodnie z definicją funkcji $y = |x|$

dla $x \geq 0$ mamy $f(x) = \frac{x-x}{2} + e^x = e^x$, natomiast

dla $x < 0$ mamy $f(x) = \frac{x-(-x)}{2} - e^x = x + e^x$

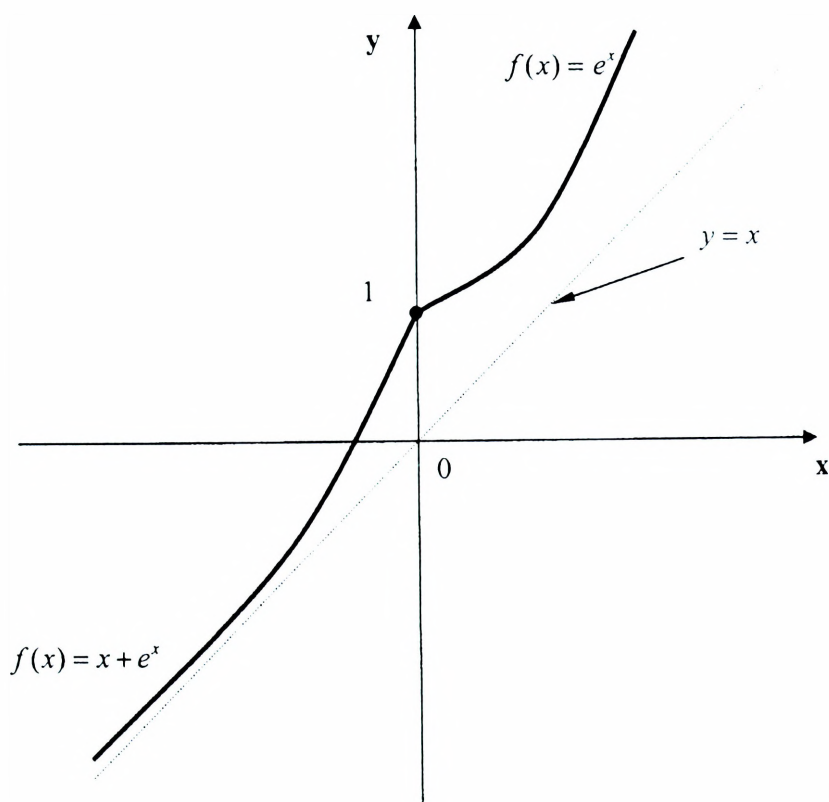
a zatem

$$m = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^x}{x} \stackrel{\frac{\infty}{\infty}}{=} \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^x}{1} = +\infty$$

Granica ta świadczy o braku asymptoty ukośnej prawostronnej.

$$m = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x+e^x}{x} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \left(1 + \frac{e^x}{x} \right) = 1 + \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{e^x}{x} = 1$$

$k = \lim_{x \rightarrow -\infty} [x + e^x - x] = \lim_{x \rightarrow -\infty} e^x = 0$ czyli prosta $y = x$ jest asymptotą ukośną lewostronną.



6.2.

MONOTONICZNOŚĆ I EKSTREMA

Zarówno monotoniczność funkcji $f(x)$, jak i jej ekstrema wyznaczamy na podstawie analizy pierwszej pochodnej $f'(x)$. Monotoniczność funkcji $f(x)$ określamy na podstawie poniższych związków:

Jeżeli funkcja jest różniczkowalna w przedziale $(a;b)$ i jej pochodna jest w tym przedziale dodatnia, to funkcja jest w tym przedziale rosnąca.

Jeżeli funkcja jest różniczkowalna w przedziale $(a;b)$ i jej pochodna jest w tym przedziale ujemna, to funkcja jest w tym przedziale malejąca.

Przykład 7

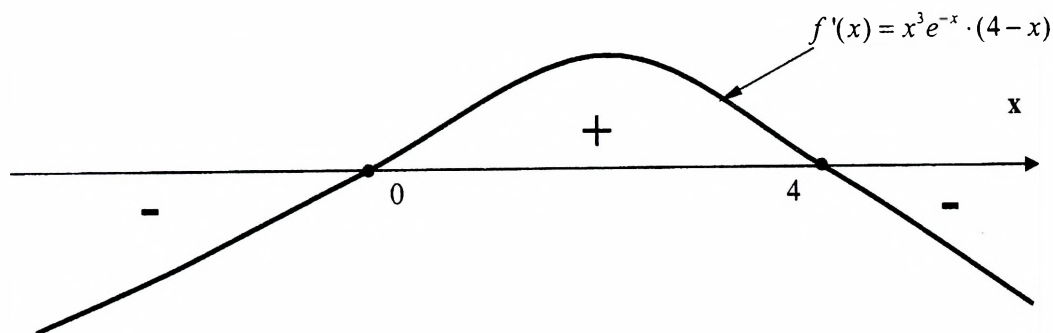
Zbadać monotoniczność funkcji $f(x) = x^4 \cdot e^{-x}$

mamy $D: x \in R$

$$f'(x) = 4x^3 e^{-x} + x^4 \cdot e^{-x} \cdot (-1) = x^3 e^{-x} (4 - x)$$

Przyrównujemy $f'(x)$ do zera. Mamy równanie

$$x^3 e^{-x} (4 - x) = 0 \Rightarrow x_1 = 0, x_2 = 4$$



Rysujemy przybliżony wykres funkcji $f'(x)$, skąd otrzymujemy

$$f(x) \nearrow \text{ dla } x \in (0; 4);$$

$$f(x) \searrow \text{ dla } x \in (-\infty; 0) \cup (4; +\infty)$$

Przykład 8

Zbadać monotoniczność funkcji

$$f(x) = \ln^2 x - 2 \ln x$$

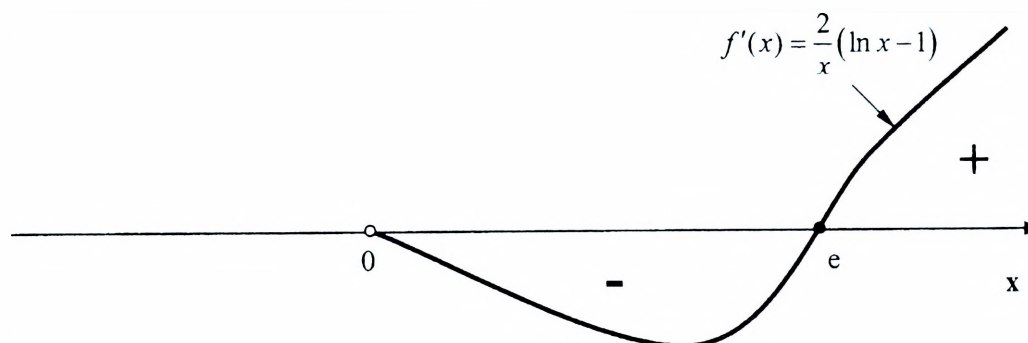
$$D: x \in R_+$$

$$f'(x) = 2 \ln x \cdot \frac{1}{x} - 2 \cdot \frac{1}{x} = \frac{2}{x} (\ln x - 1)$$

$$f'(x) = 0 \Rightarrow \ln x = 1, x = e$$

$$f(x) \nearrow \text{ dla } x > e;$$

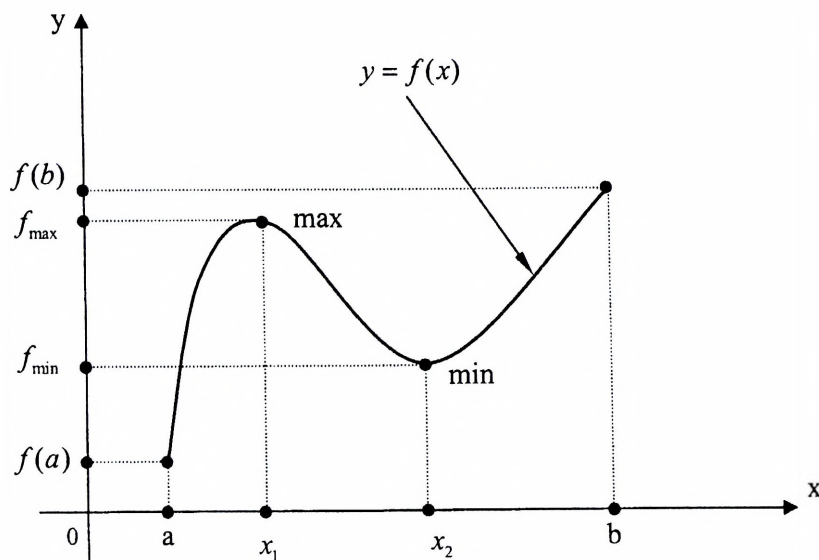
$$f(x) \searrow \text{ dla } x \in (0; e)$$



Pod pojęciem ekstremum rozumiemy maksimum lub minimum.

Mówimy, że funkcja $f(x)$ ma w punkcie x_0 maksimum, jeżeli w pewnym sąsiedztwie punktu x_0 , przyjmuje wartości mniejsze niż w punkcie x_0 .

Analogicznie: mówimy, że funkcja $f(x)$ ma w punkcie x_0 minimum, jeżeli w pewnym sąsiedztwie punktu x_0 przyjmuje wartości większe niż w punkcie x_0 .

Rysunek 5. Ekstrema funkcji $f(x)$


Funkcja przedstawiona na rysunku 1 ma w przedziale $(a; b)$ maksimum dla $x = x_1$ oraz minimum w punkcie x_2 .

Dodać można, że jest ona rosnąca w przedziałach $x \in (a, x_1) \cup x \in (x_2, b)$ oraz malejąca dla $x \in (x_1, x_2)$. Maksimum wynosi f_{\max} , minimum f_{\min} . Ekstrema te noszą nazwę ekstremów lokalnych. Warto zwrócić uwagę Czytelnika na fakt, że ani wartość największa $f(b)$ nie równa jest maksimum tej funkcji, ani jej wartość najmniejsza $f(a)$ też nie jest równa minimum funkcji.

Warunek konieczny ekstremum

Jeżeli funkcja $f(x)$ jest różniczkowalna i ma w punkcie x_0 ekstremum, to $f'(x_0) = 0$

Punkty w których pochodna się zeruje noszą nazwę punktów stacjonarnych. Jedynie w takich punktach funkcja $f(x)$ może mieć ekstrema.

Przykład 9

Niech $f(x) = x^3 - 6x^2 + 12x - 1$.

Obliczamy pochodną $f'(x)$.

Mamy

$$f'(x) = 3x^2 - 12x + 12 = 3(x^2 - 4x + 4) = 3(x-2)^2.$$

Rozwiązując równanie $f'(x) = 0$ mamy

$$3(x-2)^2 = 0 \quad \Rightarrow \quad x_1 = 2$$

czyli punktem stacjonarnym jest punkt $x = 2$.

Funkcja może mieć ekstremum tylko w tym punkcie.

O tym czy ekstremum istnieje jest czy do niego ma w punkcie stacjonarnym decyduje spełnienie warunku wystarczającego ekstremum. Przedstawimy Czytelnikowi dwa warunki wystarczające, za pomocą których dokonać można takiego rozstrzygnięcia.

Pierwszy warunek wystarczający ekstremum

Jeżeli $f'(x_0) = 0$, a ponadto

$$f'(x) < 0 \text{ dla } x < x_0 \quad \text{i} \quad f'(x) > 0 \text{ dla } x > x_0$$

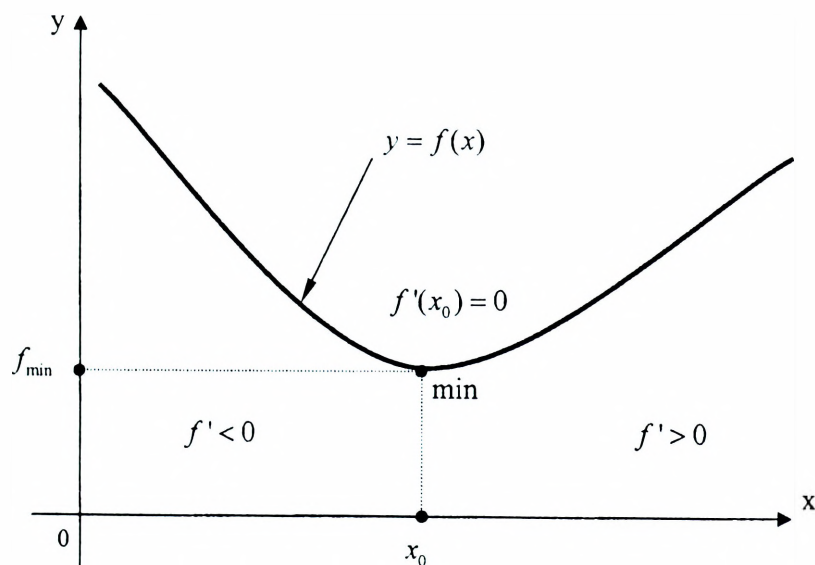
to funkcja ma w punkcie x_0 minimum właściwe; jeżeli zaś

$$f'(x) > 0 \text{ dla } x < x_0 \quad \text{i} \quad f'(x) < 0 \text{ dla } x > x_0$$

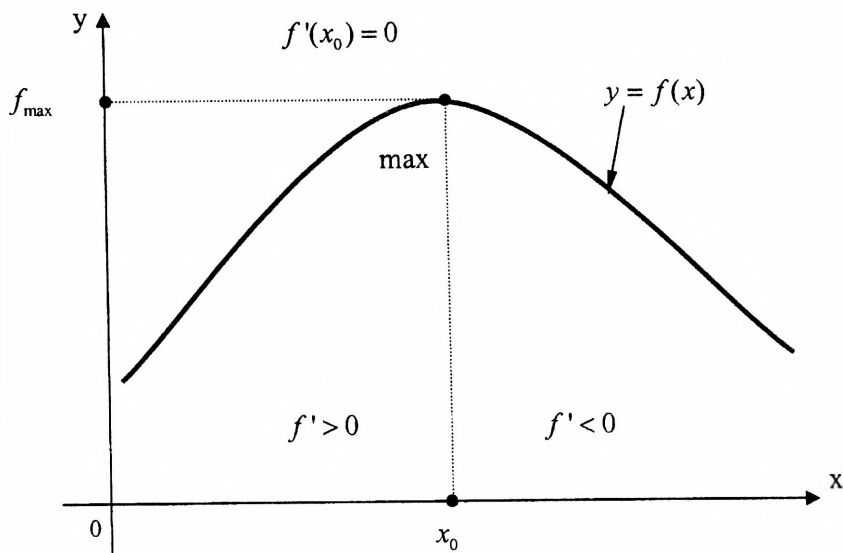
to funkcja ma w punkcie x_0 maksimum właściwe.

Te dwie sytuacje schematycznie przedstawiają rysunki 6 i 7

Rysunek 6. Ekstremum funkcji (minimum)

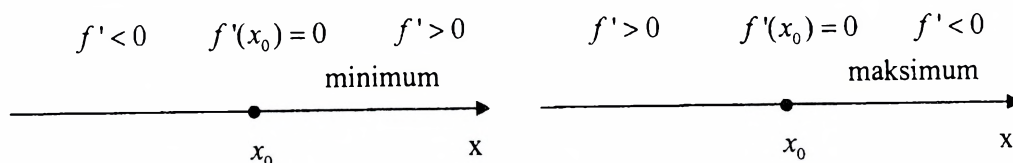


Rysunek 7. Ekstremum funkcji (maksimum)



Mówimy zwykle, że funkcja ma w punkcie x_0 minimum, jeżeli jej pochodna $f'(x)$ zmienia znak przy przejściu przez punkt x_0 z ujemnego na dodatni oraz, że funkcja ma w punkcie x_0 maksimum, jeżeli pochodna $f'(x)$ zmienia znak przy przejściu przez punkt x_0 z dodatniego na ujemny.

Dodajmy, że jeżeli przy przejściu przez punkt x_0 pochodna $f'(x)$ znaku nie zmienia, to w punkcie x_0 - brak ekstremum.



Drugi warunek wystarczającego ekstremum

Korzystając z tego warunku ustalamy ekstremum funkcji na podstawie drugiej pochodnej $f''(x)$.

Jeżeli $f'(x_0) = 0$ oraz $f''(x_0) < 0$, to funkcja $f(x)$ ma w punkcie x_0 maksimum, natomiast

Jeżeli $f'(x_0) = 0$ oraz $f''(x_0) > 0$, to funkcja $f(x)$ ma w punkcie x_0 minimum.

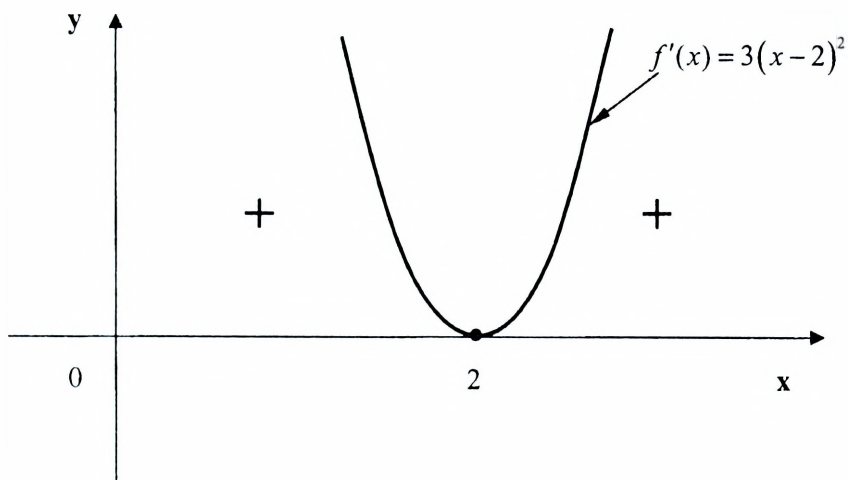
W przypadku gdy $f'(x_0) = 0$ oraz $f''(x_0) = 0$ - ekstremum brak.

Mamy zatem do dyspozycji dwa warunki wystarczające – pozwalające ustalić czy w punkcie stacjonarnym występuje ekstremum. Pierwszy opiera się na ocenie czy pochodna $f'(x)$ zmienia znak przy przejściu przez punkt x_0 ; druga na określeniu znaku drugiej pochodnej $f''(x_0)$.

Trudno jednoznacznie stwierdzić, który z tych warunków jest łatwiejszy do zastosowania.

I tak gdyby w przykładzie 9 interesowały nas ekstrema funkcji wówczas po obliczeniu pochodnej $f'(x) = 3(x-2)^2$ i wyznaczeniu punktu stacjonarnego mamy dwie możliwości działania, albo:

- a) skorzystamy z pierwszego warunku wystarczającego ekstremum, wówczas rysujemy przybliżony wykres pochodnej $f'(x)$ i dochodzimy do wniosku, że przy przejściu przez punkt $x_0 = 2$ pochodna znaku nie zmienia, więc w jedynym punkcie stacjonarnym funkcji $f(x) = x^3 - 6x^2 + 12x - 1$ ekstremum brak.



- b) gdybyśmy skorzystali z drugiego warunku wystarczającego ekstremum, wówczas obliczamy drugą pochodną funkcji $f''(x) = 6(x-2)$ i obliczamy jej wartość dla $x_0 = 2$. Mamy $f''(2) = 0$, a zatem również wyciągamy wniosek, że w punkcie $x_0 = 2$ brak ekstremum.

Przykład 10

Wyznaczyć ekstrema funkcji

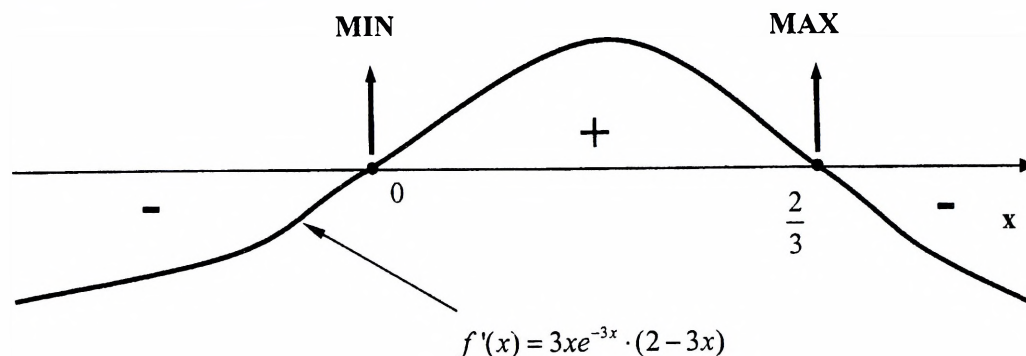
$$f(x) = 3x^2 \cdot e^{-3x} \quad \text{dziedzina funkcji } D: x \in \mathbb{R}$$

$$f'(x) = 6xe^{-3x} + 3x^2 e^{-3x} \cdot (-3) = 3xe^{-3x}(2-3x)$$

$$f'(x) = 0 \text{ czyli } 3xe^{-3x}(2-3x) = 0, \text{ a zatem mamy}$$

dwa punkty stacjonarne $x_1 = 0$ i $x_2 = \frac{2}{3}$.

Rysujemy przybliżony wykres funkcji $f'(x)$ i mamy



Łatwo zauważyć, że przy przejściu przez punkt $x_1 = 0$ pochodna zmienia znak z ujemnego na dodatni - jest w nim minimum, zaś przy przejściu przez punkt $x_2 = \frac{2}{3}$ pochodna również zmienia znak, ale z dodatniego na ujemny, a zatem w tym punkcie występuje maksimum. Aby obliczyć ile wynoszą odpowiednio minimum i maksimum - obliczamy:

$$f_{\min} = f(0) = 0$$

$$f_{\max} = f\left(\frac{2}{3}\right) = 3 \cdot \left(\frac{2}{3}\right)^2 \cdot e^{-3 \cdot \frac{2}{3}} = 3 \cdot \frac{4}{9} \cdot e^{-2} = \frac{4}{3e^2}$$

Przykład 11

Wyznaczyć ekstrema funkcji

$$f(x) = 3 \ln x - \ln^2 x \quad D: x > 0$$

$$f'(x) = 3 \cdot \frac{1}{x} - 2 \ln x \cdot \frac{1}{x} = \frac{1}{x}(3 - 2 \ln x)$$

$$f'(x) = 0 \text{ czyli } \frac{1}{x}(3 - 2 \ln x) = 0, \quad 2 \ln x = 3, \quad \ln x = \frac{3}{2}, \quad x_1 = e^{\frac{3}{2}}$$

Korzystając z drugiego warunku wystarczającego ekstremum obliczamy wartość drugiej pochodnej $f''(x)$ w punkcie stacjonarnym $x_1 = e^{\frac{3}{2}}$

mamy

$$f''(x) = -\frac{1}{x^2}(3 - 2 \ln x) + \frac{1}{x} \cdot \frac{(-2)}{x} = -\frac{1}{x^2}(3 - 2 \ln x + 2) = -\frac{1}{x^2}(5 - 2 \ln x),$$

a zatem

$$f''\left(e^{\frac{3}{2}}\right) = \frac{-1}{\left(e^{\frac{3}{2}}\right)^2} \cdot (5 - 2 \ln e^{\frac{3}{2}}) = \frac{-2}{e^3} < 0$$

$$f_{\max} = f\left(e^{\frac{3}{2}}\right) = 3 \ln e^{\frac{3}{2}} - \ln^2 e^{\frac{3}{2}} = \frac{9}{2} - \left(\frac{3}{2}\right)^2 = \frac{9}{2} - \frac{9}{4} = \frac{18-9}{4} = \frac{9}{4}$$

6.3.

WKŁĘSŁOŚĆ I WYPUKŁOŚĆ KRZYWEJ. PUNKTY PRZEGIĘCIA

Przedziały, w których funkcja $f(x)$ jest wypukła, a w których jest wklęsła ustalamy na podstawie analizy drugiej pochodnej $f''(x)$.

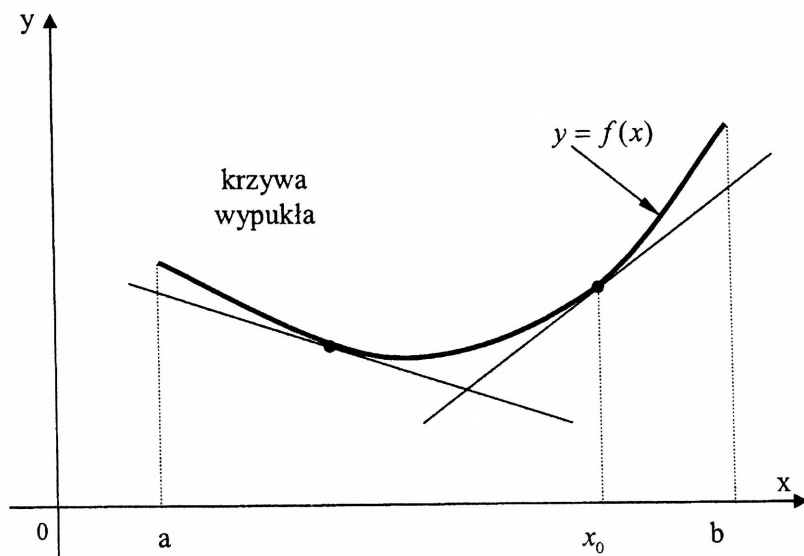
Definicja

Krzywą będącą wykresem funkcji $y = f(x)$ nazywamy wypukłą w przedziale (a, b) , jeżeli dla każdego $x_0 \in (a, b)$ styczna do tej krzywej poprowadzona w punkcie o odciętej x_0 leży pod tą krzywą.

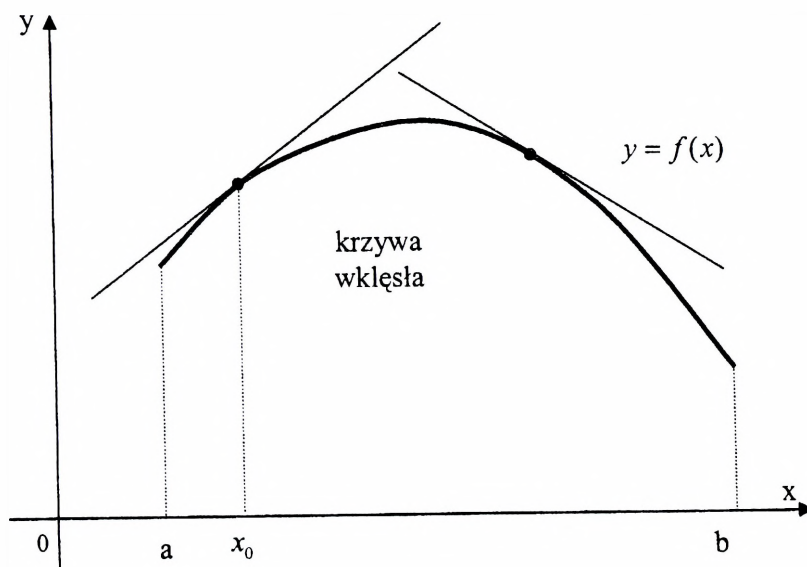
Krzywą będącą wykresem funkcji $y = f(x)$ nazywamy wklęsłą w przedziale (a, b) , jeżeli dla każdego $x_0 \in (a, b)$ styczna do tej krzywej poprowadzona w punkcie o odciętej x_0 leży nad tą krzywą.

Rysunek 8. Wykresy krzywej wypukłej i wklęsłej

a)



b)



Punkt, w którym zmienia się charakter krzywej z wklęsłej na wypukłą (lub odwrotnie) nazywamy punktem przegięcia.

Warunkiem wystarczającym na to, aby krzywa będąca wykresem funkcji $y = f(x)$ była w przedziale (a, b) wypukła jest

$$f''(x) > 0 \text{ dla każdego } x \in (a, b).$$

Warunkiem wystarczającym na to, aby krzywa będąca wykresem funkcji $y = f(x)$ była w przedziale (a, b) wklęsła jest

$$f''(x) < 0 \text{ dla każdego } x \in (a, b).$$

Warunkiem koniecznym na to, aby punkt $P(x_0; f(x_0))$, $x_0 \in (a, b)$ był punktem przegięcia wykresu funkcji $y = f(x)$ jest

$$f''(x_0) = 0$$

Warunkiem wystarczającym na to, aby punkt $P(x_0; f(x_0))$, $x_0 \in (a, b)$ był punktem przegięcia wykresu funkcji $y = f(x)$ jest

$$f''(x) < 0 \text{ dla } x < x_0; \quad f''(x_0) = 0; \quad f''(x) > 0 \text{ dla } x > x_0$$

albo

$$f''(x) > 0 \text{ dla } x < x_0; \quad f''(x_0) = 0; \quad f''(x) < 0 \text{ dla } x > x_0$$

Przykład 12

Dana jest funkcja

$$f(x) = e^{-x^2}$$

Wyznaczyć przedziały, w których funkcja jest wklęsła, a w których jest wypukła oraz punkty przegięcia

$$D: x \in R$$

$$f'(x) = e^{-x^2} \cdot (-2x) = -2xe^{-x^2}$$

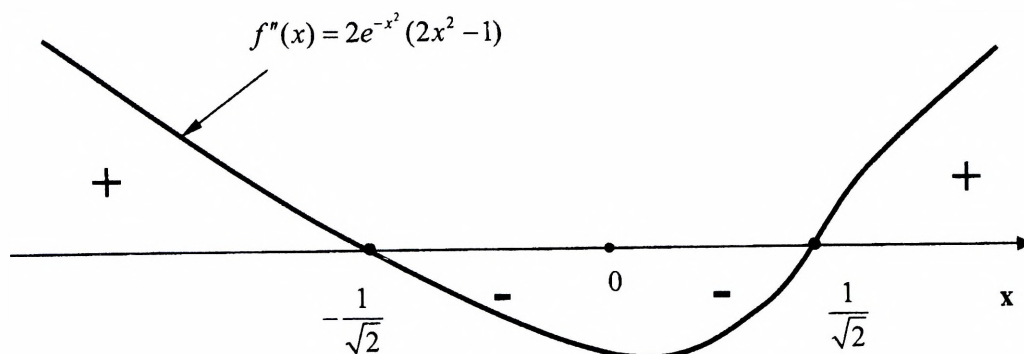
$$f''(x) = -2e^{-x^2} - 2xe^{-x^2} \cdot (-2x) = -2e^{-x^2} + 4x^2e^{-x^2} = 2e^{-x^2}(2x^2 - 1)$$

Rozwiązujemy równanie $f''(x) = 0$, czyli $2x^2 - 1 = 0$

Otrzymujemy

$$x_1 = \frac{1}{\sqrt{2}}, \quad x_2 = -\frac{1}{\sqrt{2}}$$

rysujemy wykres przybliżony drugiej pochodnej



$$f(x) \text{ jest wklęsła dla } x \in \left(-\frac{1}{\sqrt{2}}; \frac{1}{\sqrt{2}}\right);$$

$$f(x) \text{ jest wypukła dla } x \in \left(-\infty; -\frac{1}{\sqrt{2}}\right) \cup \left(\frac{1}{\sqrt{2}}; +\infty\right).$$

Ponieważ w obydwu punktach $-\frac{1}{\sqrt{2}}; \frac{1}{\sqrt{2}}$ druga pochodna zmienia znak, punkty o tych

odciętych są punktami przegięcia wykresu funkcji $f(x) = e^{-x^2}$.

$$f\left(-\frac{1}{\sqrt{2}}\right) = e^{-\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^2} = e^{-\frac{1}{2}} = \frac{1}{\sqrt{e}}$$

$$f\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right) = e^{-\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^2} = e^{-\frac{1}{2}} = \frac{1}{\sqrt{e}}$$

Zatem wykres funkcji ma dwa punkty przegięcia

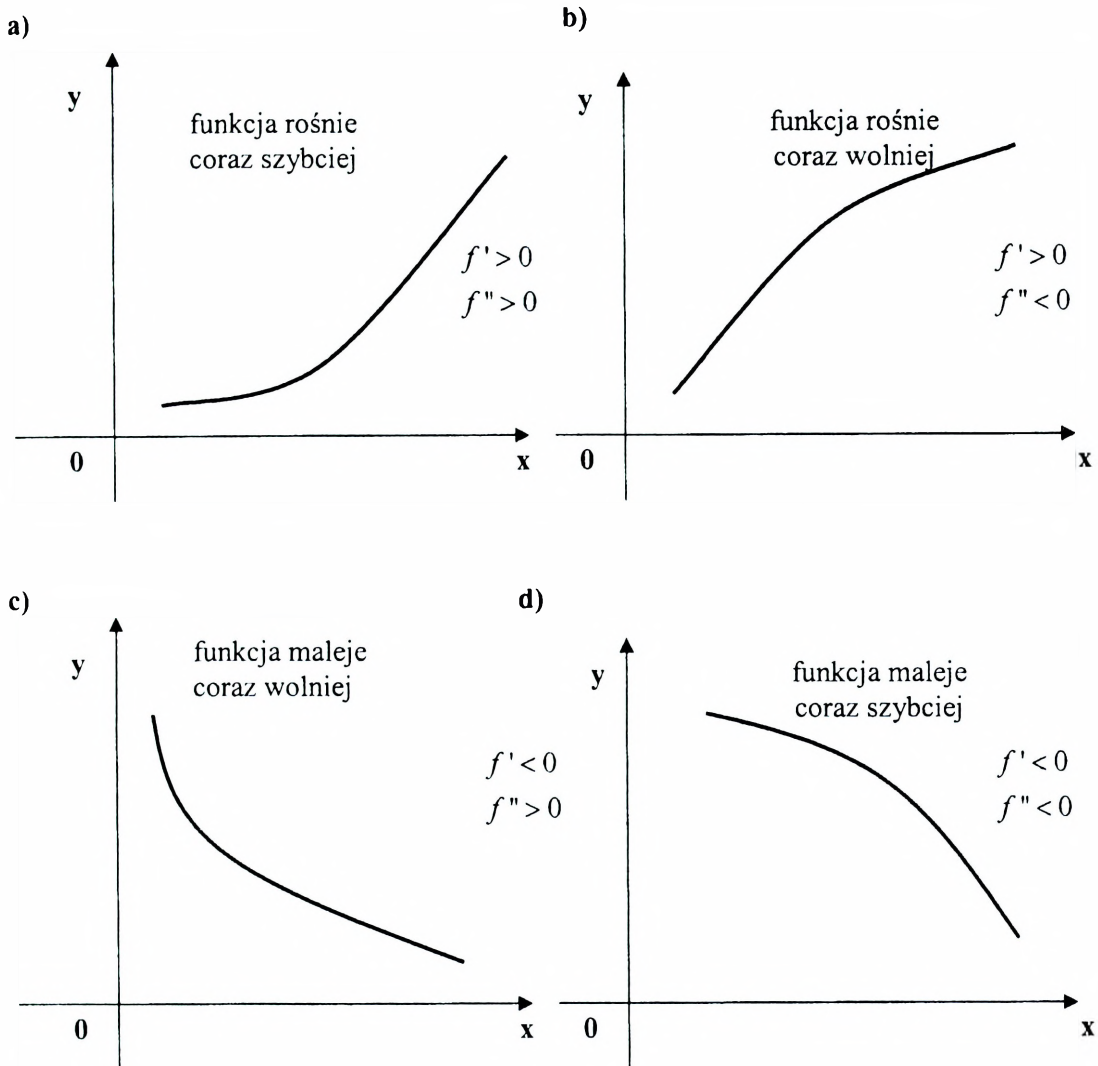
$$P_1\left(-\frac{1}{\sqrt{2}}; \frac{1}{\sqrt{e}}\right) \quad \text{oraz} \quad P_2\left(\frac{1}{\sqrt{2}}; \frac{1}{\sqrt{e}}\right)$$

6.4.

TEMPO ZMIAN WARTOŚCI FUNKCJI

Pierwsza pochodna $f'(x)$ informuje nas o tym, czy funkcja rośnie, czy maleje; druga pochodna mówi o tym czy owe zmiany są coraz szybsze, czy też coraz wolniejsze. Możliwe są cztery następujące sytuacje modelowe.

Rysunek 9. Tempo zmian funkcji



Przykład 13

Wyznaczyć tempo zmian funkcji

$$f(x) = x^3 + 3x^2 - 9x - 2$$

mamy

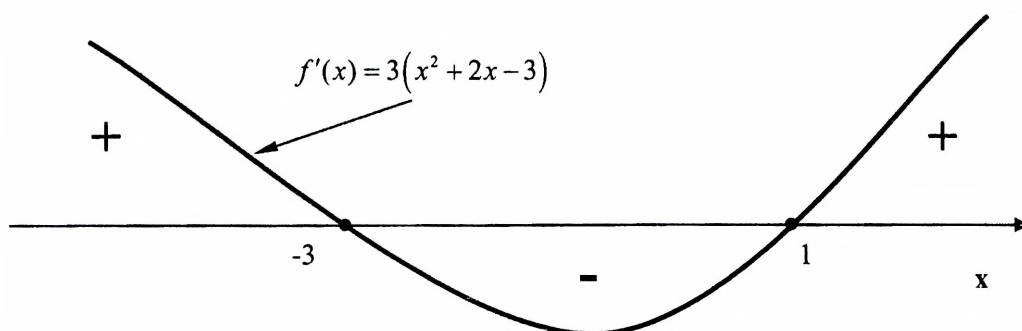
$$f'(x) = 3x^2 + 6x - 9 = 3(x^2 + 2x - 3)$$

$$f'(x) = 0 \text{ gdy } x^2 + 2x - 3 = 0$$

$$x^2 + 2x - 3 = (x-1)(x+3) = 0$$

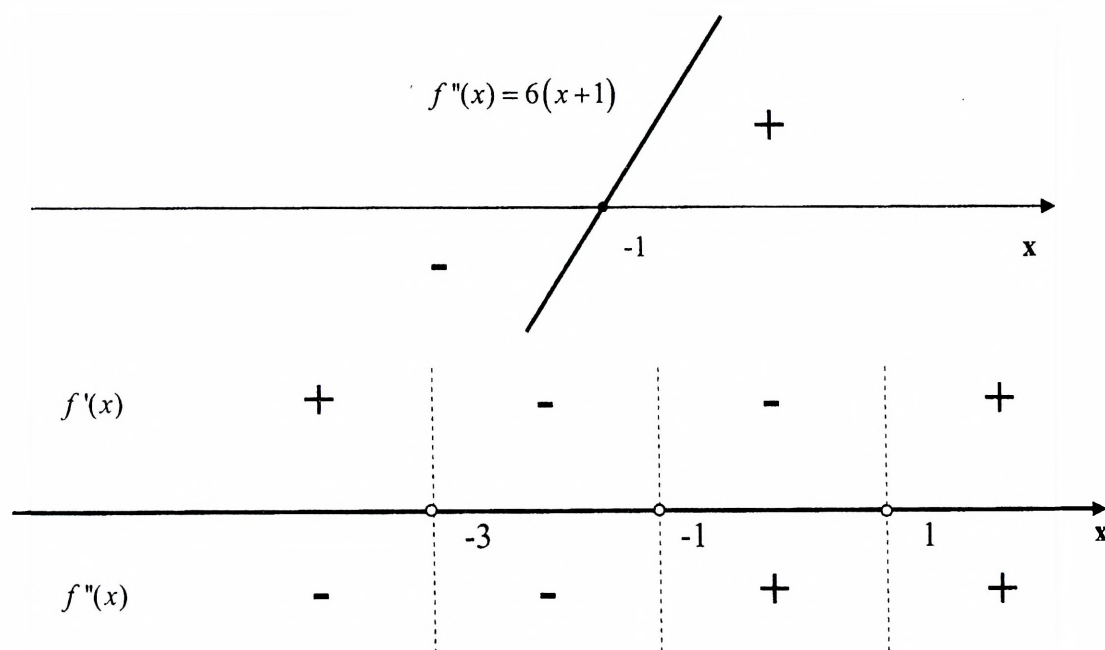
$$x_1 = 1$$

$$x_2 = -3$$



$$f''(x) = 6x + 6 = 6(x+1)$$

$$f''(x) = 0 \quad \text{dla} \quad x = -1$$



a zatem:

- a) funkcja rośnie coraz szybciej dla $x > 1$
- b) funkcja rośnie coraz wolniej dla $x < -3$
- c) funkcja maleje coraz wolniej dla $x \in (-1; 1)$
- d) funkcja maleje coraz szybciej dla $x \in (-3; -1)$

6.5.

SCHEMAT BADANIA PRZEBIEGU ZMIENNOŚCI FUNKCJI

Badanie zmienności funkcji ma na celu uzyskanie podstawowych informacji dotyczących danej funkcji, sporządzenie tabeli zmienności oraz wykresu funkcji.

Zalecany schemat badania funkcji jest następujący:

1. Wyznaczenie dziedziny funkcji.
2. Obliczenie granic funkcji na końcach przedziałów określoności; wyznaczenie asymptot.
3. Wyznaczenie miejsc zerowych funkcji.
4. Określenie przedziałów monotoniczności oraz ekstremów funkcji (analiza pierwszej pochodnej).
5. Wyznaczanie przedziałów wypukłości i wklęsłości funkcji oraz punktów przegięcia (analiza drugiej pochodnej).
6. Sporządzenie tabeli zmienności funkcji.
7. Naszkicowanie wykresu funkcji.

Przykład 14

Zbadać przebieg zmienności funkcji

$$f(x) = x - \frac{4}{x^2}$$

1. Dziedzina funkcji $D: x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$
2. $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$ $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = -\infty$
 $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = -\infty$ $\lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = -\infty$

$$m = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{x - \frac{4}{x^2}}{x} = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \left(1 - \frac{4}{x^3}\right) = 1$$

$$k = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} [f(x) - mx] = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \left[x - \frac{4}{x^2} - x\right] = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \left(-\frac{4}{x^2}\right) = 0$$

Prosta o równaniu $y = x$ jest asymptotą ukośną obustronną

3. $f(x) = 0$ czyli

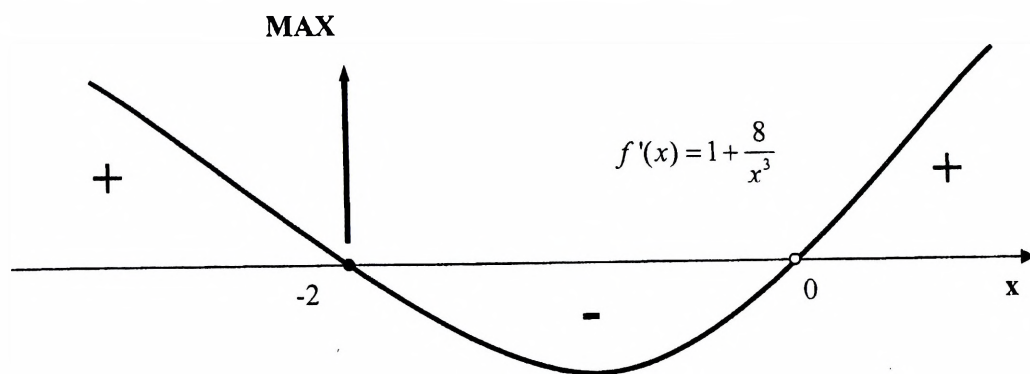
$$x - \frac{4}{x^2} = 0 \Rightarrow x = \frac{4}{x^2} \Rightarrow x^3 = 4 \Rightarrow x_1 = \sqrt[3]{4}$$

Istnieje jedno miejsce zerowe funkcji $x_1 = \sqrt[3]{4}$

4. $f'(x) = 1 - \frac{-4 \cdot 2x}{x^4} = 1 + \frac{8}{x^3}$

$$f'(x) = 0 \quad 1 + \frac{8}{x^3} = 0 \Rightarrow \frac{8}{x^3} = -1 \Rightarrow x^3 = -8 \Rightarrow x = -2$$

Sporządzamy wykres $f'(x)$



$$f(x) \nearrow \quad \text{dla} \quad x \in (-\infty, -2) \cup (0, +\infty)$$

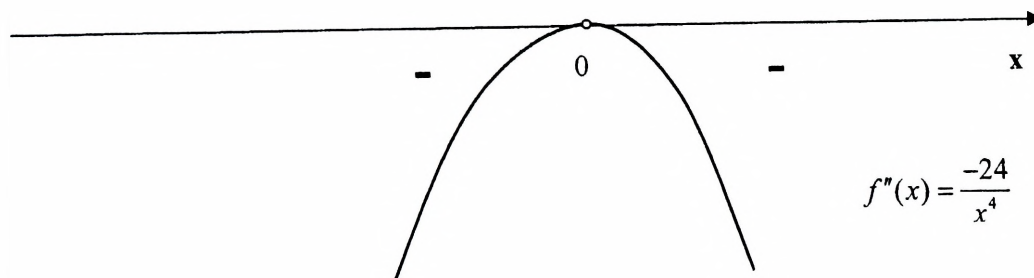
$$f(x) \searrow \quad \text{dla} \quad x \in (-2, 0)$$

$$f_{\max} = f(-2) = -2 - \frac{4}{(-2)^2} = -2 - 1 = -3$$

5. $f''(x) = \frac{-8 \cdot 3x^2}{x^6} = \frac{-24}{x^4}$

$$f''(x) = 0 \quad \text{nie ma pierwiastków}$$

Rysujemy wykres $f''(x)$

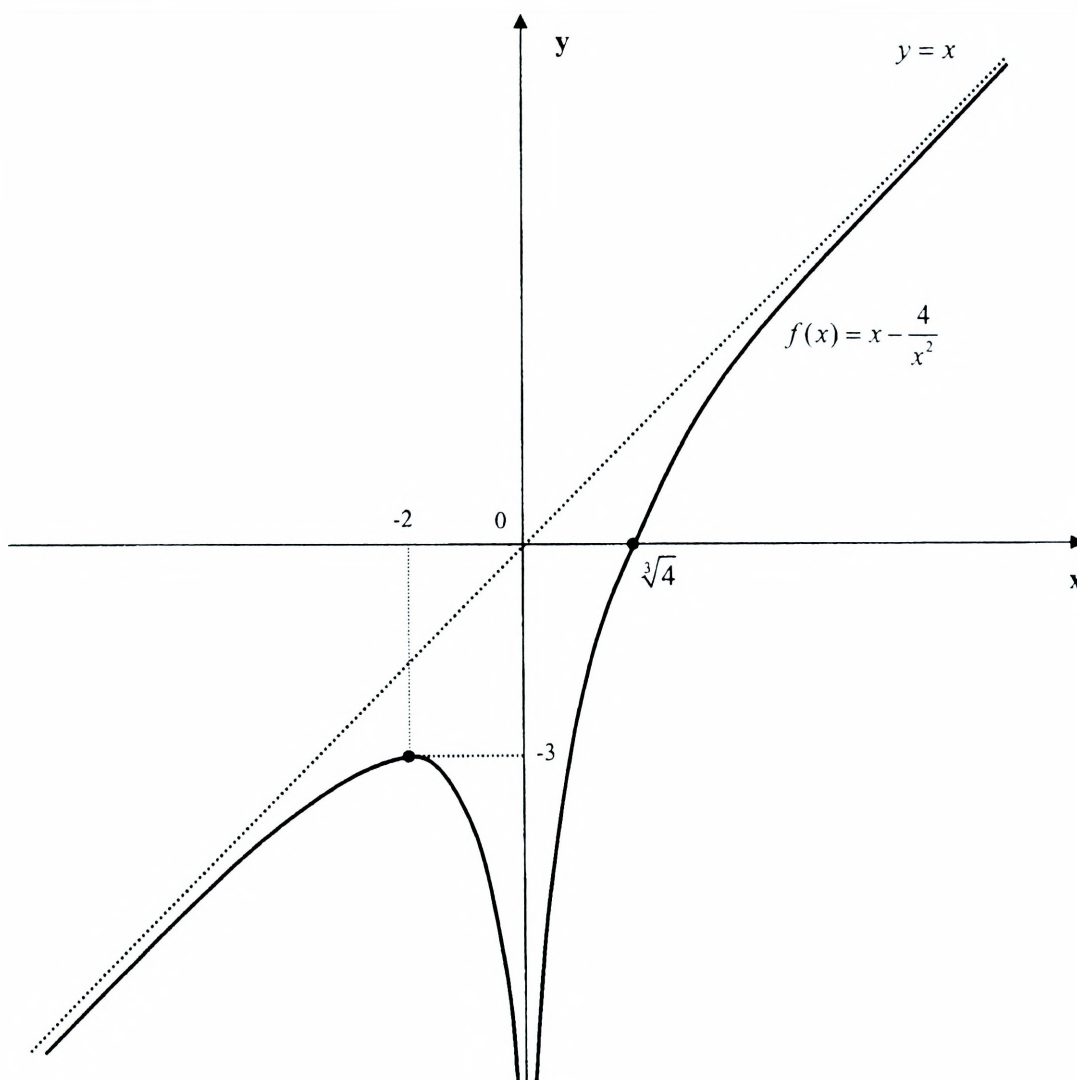


$$f(x) \text{ wklęsła dla } x \in (-\infty, 0) \cup (0, +\infty)$$

6.

x	$-\infty$	\nearrow	-2	\nearrow	0	\nearrow	$\sqrt[3]{4}$	\nearrow	$+\infty$	
$f'(x)$		$+$	0	$-$		$+$		$+$		
$f''(x)$		$-$	$-$	$-$		$-$	$-$	$-$		
$f(x)$	$-\infty$	\nearrow	-3 MAX	\searrow	$-\infty$	$-\infty$	\nearrow	0	\nearrow	$+\infty$

7.



Przykład 15

Zbadać przebieg zmienności funkcji

$$f(x) = x^2 \ln x$$

1. Dziedzina funkcji $D: x \in \mathbb{R}_+$

2. $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} x^2 \ln x \stackrel{0 \cdot \infty}{=} \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\ln x}{\frac{1}{x^2}} \stackrel{H}{=} \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\frac{1}{x}}{-2} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{-x^2}{2} = 0$$

$$m = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^2 \ln x}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} x \ln x = +\infty$$

Asymptot brak

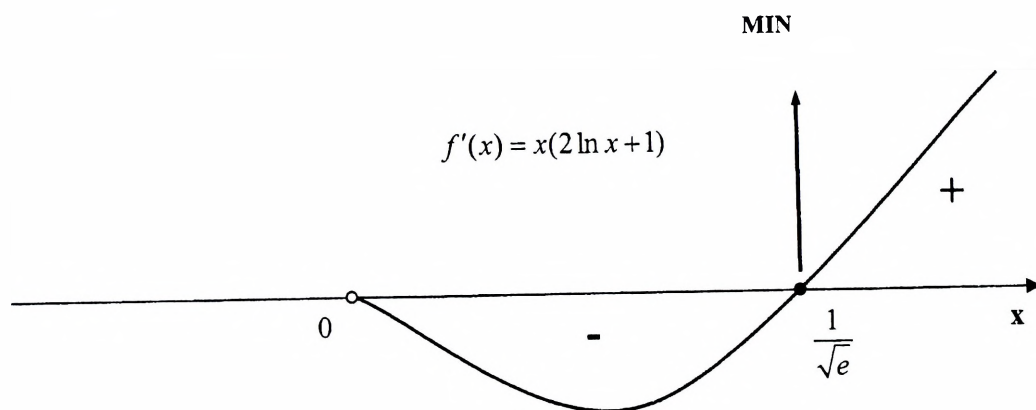
3. $f(x) = 0$ dla $x^2 \ln x = 0 \Rightarrow x = 0$ odrzucamy $\notin D \cup \ln x = 0 \Rightarrow x = 1$

Istnieje jedno miejsce zerowe funkcji $x = 1$

4. $f'(x) = 2x \ln x + x^2 \cdot \frac{1}{x} = 2x \ln x + x = x(2 \ln x + 1)$

$$f'(x) = 0 \quad \text{dla} \quad 2 \ln x + 1 = 0 \quad \ln x = -\frac{1}{2} \quad x = e^{-\frac{1}{2}} = \frac{1}{\sqrt{e}}$$

Sporządzamy wykres $f'(x)$



$$f(x) \nearrow \quad \text{dla} \quad x \in \left(\frac{1}{\sqrt{e}}, +\infty\right),$$

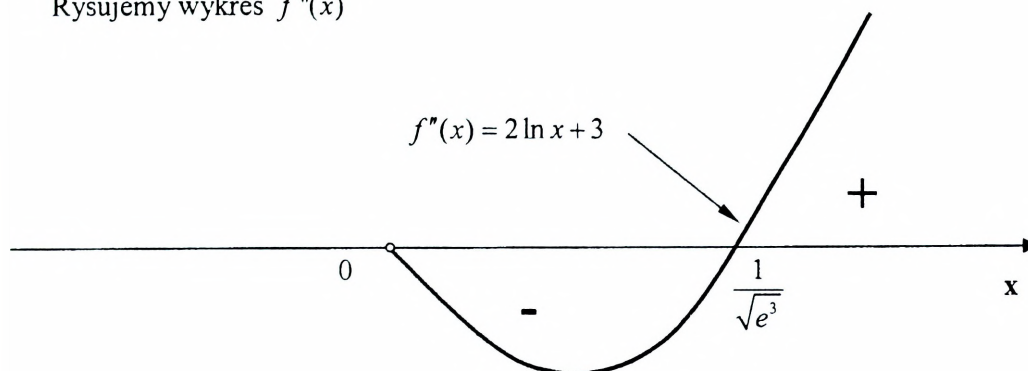
$$f(x) \searrow \quad \text{dla} \quad x \in \left(0, \frac{1}{\sqrt{e}}\right)$$

$$f_{\min} = f\left(\frac{1}{\sqrt{e}}\right) = \left(\frac{1}{\sqrt{e}}\right)^2 \ln\left(\frac{1}{\sqrt{e}}\right) = \frac{1}{e} \ln e^{-\frac{1}{2}} = -\frac{1}{2e}$$

5. $f''(x) = 2 \ln x + 1 + x \cdot 2 \cdot \frac{1}{x} = 2 \ln x + 1 + 2 = 2 \ln x + 3$

$$f''(x) = 0 \quad \text{dla} \quad 2 \ln x + 3 = 0 \quad \ln x = -\frac{3}{2} \quad x = \frac{1}{\sqrt{e^3}}$$

Rysujemy wykres $f''(x)$



Istnieje punkt przegięcia o odciętej $x = \frac{1}{\sqrt{e^3}}$

$$f\left(\frac{1}{\sqrt{e^3}}\right) = \left(e^{-\frac{3}{2}}\right)^2 \ln\left(e^{-\frac{3}{2}}\right) = e^{-3} \cdot \left(-\frac{3}{2}\right) = -\frac{3}{2e^3}$$

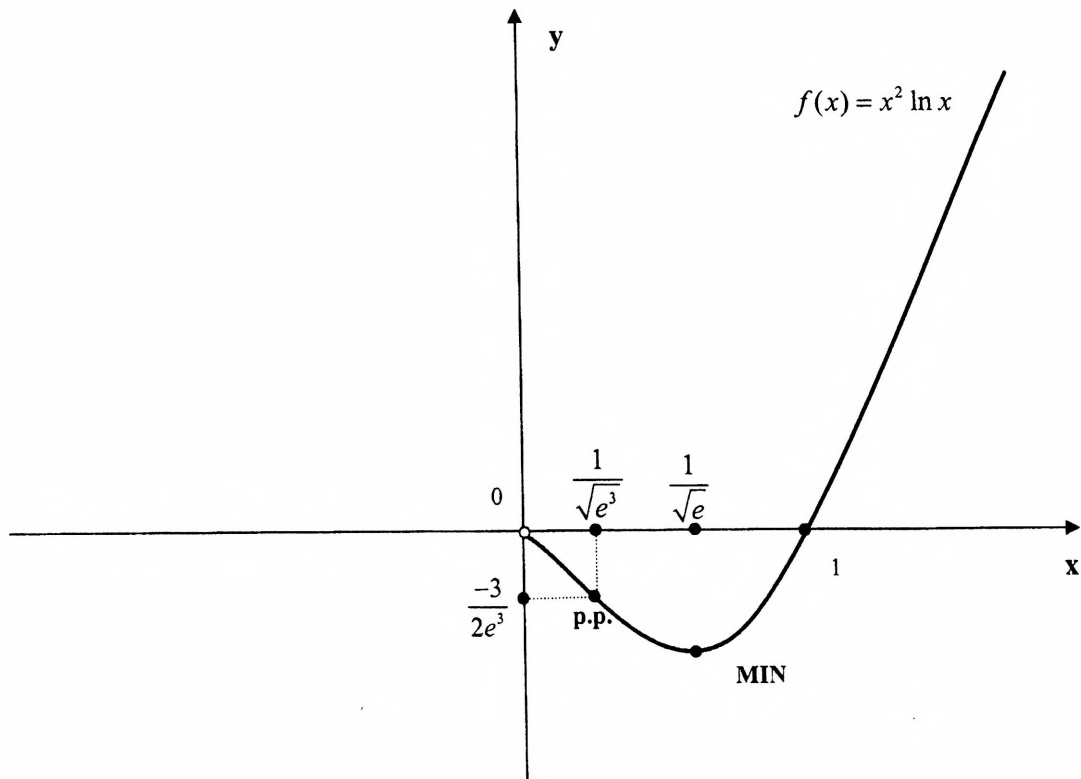
P.p. $\left(\frac{1}{\sqrt{e^3}}, -\frac{3}{2e^3}\right)$

$f(x)$ wklęsła dla $x \in \left(0, \frac{1}{\sqrt{e^3}}\right)$; $f(x)$ wypukła dla $x > \frac{1}{\sqrt{e^3}}$

6.

x	0	\nearrow	$\frac{1}{\sqrt{e^3}}$	\nearrow	$\frac{1}{\sqrt{e}}$	\nearrow	1	\nearrow	$+\infty$
$f'(x)$		-		-	0	+		+	
$f''(x)$		-	0	+		+		+	
$f(x)$	0	\searrow	$-\frac{3}{2e^3}$	\searrow	$-\frac{1}{2e}$	\nearrow	0	\nearrow	$+\infty$
					MIN				

7.



Przykład 16

Z badać przebieg zmienności funkcji

$$f(x) = \frac{e^{-x}}{1-x}$$

1. Dziedzina funkcji $D: x \in \mathbb{R} \setminus \{1\}$

2. $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^{-x}}{1-x} = 0$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{e^{-x}}{1-x} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{-e^{-x}}{-1} = \lim_{x \rightarrow -\infty} e^{-x} = +\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{e^{-x}}{1-x} = +\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{e^{-x}}{1-x} = -\infty$$

Dwie ostatnie granice świadczą o istnieniu asymptoty pionowej. Jest nią prosta o równaniu $x = 1$. Pierwsza granica mówi nam o tym, że prosta o równaniu $y = 0$ (oś O_x) jest

asymptotą poziomą prawostronną. Sprawdzamy czy istnieje asymptota ukośna lewostronna.

Policzmy granicę

$$m = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{e^{-x}}{1-x} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{e^{-x}}{x-x^2} \stackrel{\frac{\infty}{H}}{=} \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{-e^{-x}}{1-2x} \stackrel{\frac{\infty}{H}}{=} \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{e^{-x}}{-2} = +\infty$$

Wynik ten świadczy o tym, że nie ma asymptoty ukośnej (ani poziomej) lewostronnej.

$$3. \quad f(x) = 0 \Rightarrow \frac{e^{-x}}{1-x} = 0 \Rightarrow e^{-x} = 0 \quad \text{brak rozwiązań}$$

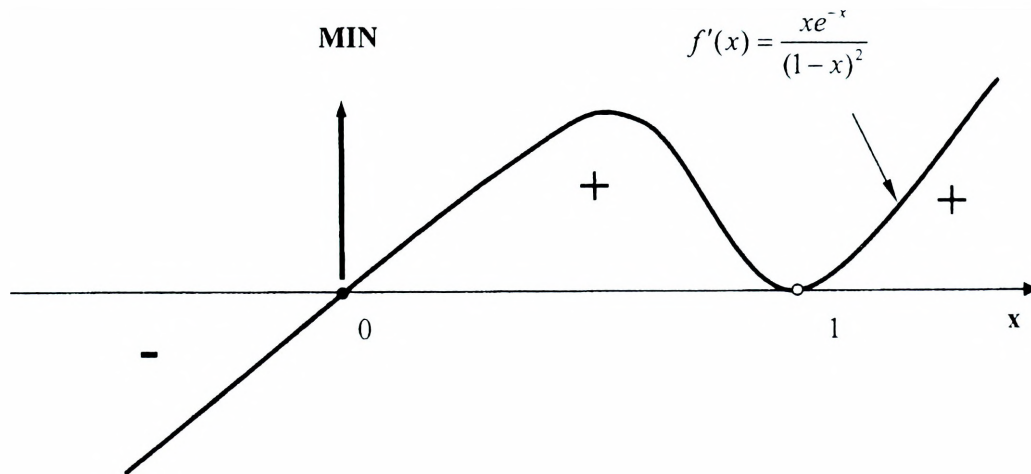
Miejsc zerowych - brak

$$4. \quad f'(x) = \frac{-e^{-x}(1-x) - e^{-x} \cdot (-1)}{(1-x)^2} = \frac{-e^{-x} + xe^{-x} + e^{-x}}{(1-x)^2} = \frac{xe^{-x}}{(1-x)^2}$$

$$D: f'(x) = D f(x) = R \setminus \{1\}$$

$$f'(x) = 0 \Rightarrow \frac{xe^{-x}}{(1-x)^2} = 0 \Rightarrow xe^{-x} = 0 \Rightarrow x_1 = 0$$

Rysujemy wykres pierwszej pochodnej



$$f(x) \nearrow \quad \text{dla} \quad x \in (0, 1) \cup (1, +\infty),$$

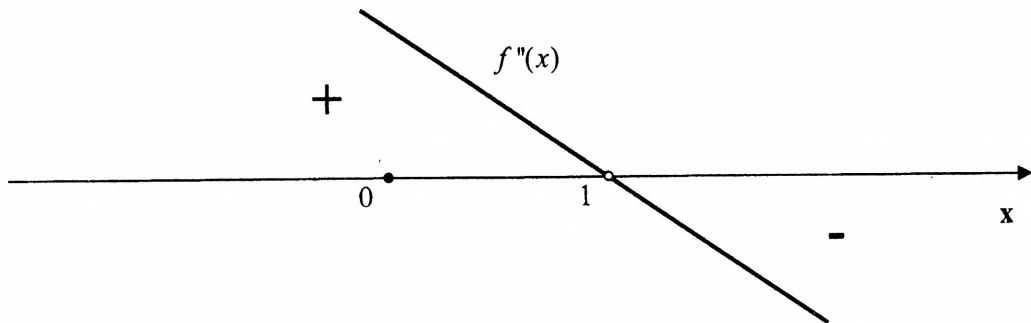
$$f(x) \searrow \quad \text{dla} \quad x \in (-\infty, 0)$$

dla $x_1 = 0$ funkcja $f(x)$ ma minimum

$$f \min = f(0) = \frac{e^0}{1} = 1$$

$$\begin{aligned}
 5. \quad f''(x) &= \left(\frac{xe^{-x}}{(1-x)^2} \right)' = \frac{[e^{-x} + xe^{-x} \cdot (-1)](1-x^2) - xe^{-x} \cdot 2(1-x) \cdot (-1)}{(1-x)^4} = \\
 &= \frac{e^{-x}(1-x)(1-x^2) + 2xe^{-x}(1-x)}{(1-x)^4} = \frac{(1-x)e^{-x}[(1-x^2) + 2x]}{(1-x)^4} = \\
 &= \frac{e^{-x}(1-2x+x^2+2x)}{(1-x)^3} = \frac{(x^2+1)e^{-x}}{(1-x)^3} \\
 f''(x) = 0 &\Rightarrow \frac{(x^2+1)e^{-x}}{(1-x)^3} = 0 \Rightarrow (x^2+1)e^{-x} = 0, \quad \text{brak pierwiastków}
 \end{aligned}$$

Rysujemy przybliżony wykres $f''(x)$



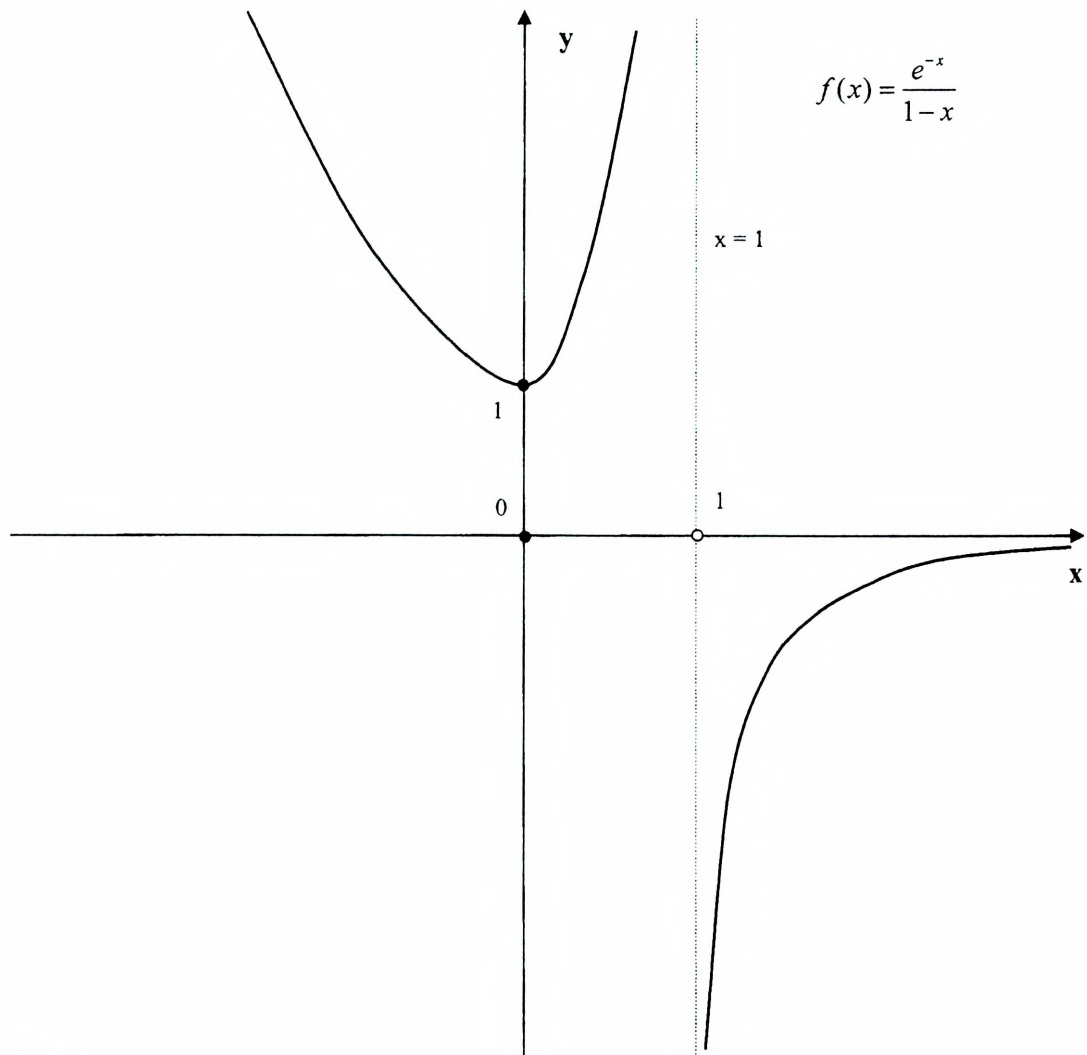
$f(x)$ wypukła dla $x \in (-\infty, 1)$, $f(x)$ wklęsła dla $x \in (1, +\infty)$

Punktów przegięcia brak

6.

x	$-\infty$	\nearrow	0	\nearrow	1	\nearrow	$+\infty$
$f'(x)$		-	0	+		+	
$f''(x)$		+		+		-	
$f(x)$	$+\infty$	\searrow	MIN 1	\nearrow	$+\infty$	$-\infty$	\nearrow 0

7.



Zadania:

1. Wyznaczyć wszystkie asymptoty wykresu funkcji

a) $f(x) = \frac{-x^2 + 3x + 8}{2x^2 + 9x - 5}$

b) $f(x) = \frac{x^3}{3(x^2 - x - 2)}$

c) $f(x) = \frac{2x^2 - x + 5}{x + 3}$

d) $f(x) = \frac{2x}{1 + x^2}$

e) $f(x) = \frac{x-1}{\sqrt{x}}$

f) $f(x) = xe^{\frac{1}{x}}$

g) $f(x) = \frac{x^2 - 9}{x^5}$

h) $f(x) = \frac{x^5}{x^2 - 9}$

i) $f(x) = \frac{x^3 - x}{x^2 + x}$

j) $f(x) = \sqrt{\frac{1-x}{1+x}}$

k) $f(x) = \sqrt{x^2 - 1}$

l) $f(x) = x + \ln x$

2. Wyznaczyć przedziały monotoniczności funkcji

a) $f(x) = x^4 - \frac{5}{4}x^2 + \frac{1}{4}$

b) $f(x) = \frac{1}{1+x^2}$

c) $f(x) = 4 \ln x^2 - \ln^2 x$

d) $f(x) = e^{\frac{3x}{2x-1}}$

e) $f(x) = (x-3) \cdot e^{\frac{1}{x}}$

f) $f(x) = x + \frac{1}{2x}$

g) $f(x) = x^2 - \frac{2}{x}$

h) $f(x) = \ln \frac{2x-1}{x^2+4}$

i) $f(x) = \ln \frac{2x}{x^2+4}$

j) $f(x) = 6 - 3x^2 \ln x^3$

3. Wyznaczyć ekstrema funkcji

a) $f(x) = e^{\frac{x^2}{x-1}}$

- b) $f(x) = x^3 \ln x$
- c) $f(x) = \ln^2 x - 3 \ln x$
- d) $f(x) = x e^{\frac{-(x-2)}{2}}$
- e) $f(x) = \frac{x^2 e^x}{x-7}$
- f) $f(x) = x e^x$
- g) $f(x) = x e^{\frac{-x^2}{2}}$
- h) $f(x) = 1 - x^3 \ln x^3$
- i) $f(x) = 2 \ln(6 + x^2)$
- j) $f(x) = \ln \frac{x}{x^2 + 9}$

4. Wyznaczyć przedziały wypukłości i wklęsłości funkcji

- a) $f(x) = x^4 + x^2 + 16x + 8$
- b) $f(x) = 3 \ln x - \ln^2 x$
- c) $f(x) = x e^{-x}$
- d) $f(x) = x^4 + e^x$
- e) $f(x) = \ln(1 + x^2)$
- f) $f(x) = (x - 2)\sqrt{x + 5}$
- g) $f(x) = (2x - 1)e^{3x}$
- h) $f(x) = 2x e^{(1-x^2)}$
- i) $f(x) = -x^3 e^{-4x} + 5x$
- j) $f(x) = 4x^2 e^{-3x}$

5. Wyznaczyć punkty przegięcia wykresu funkcji

- a) $f(x) = \frac{x}{1+x^2}$

b) $f(x) = x^3 - x^2 - x$

c) $f(x) = x^2 e^{\frac{1}{x}}$

d) $f(x) = \frac{x^3}{2(x-1)^2}$

e) $f(x) = (\ln x)^2 - 2 \ln x$

f) $f(x) = 3x^2 - x^3$

g) $f(x) = (2 - x^2)e^{-x}$

h) $f(x) = 4 \ln x^2 - \ln^2 x$

i) $f(x) = x e^{\frac{(x-2)^2}{2}}$

j) $f(x) = (x-3)e^{\frac{1}{x}}$

6. Zbadać przebieg zmienności funkcji

a) $f(x) = \frac{x}{1+x^2}$

b) $f(x) = \frac{(x-1)^3}{(x+1)^2}$

c) $f(x) = \frac{x^2}{x^2+4}$

d) $f(x) = \ln^2 x - 3 \ln x$

e) $f(x) = \frac{x^2 - 5x + 6}{x^2 - 1}$

f) $f(x) = \frac{1}{1 - e^x}$

g) $f(x) = \frac{x}{\ln x}$

h) $f(x) = \frac{x^3}{x^2 - x - 2}$

i) $f(x) = \frac{2x-5}{x+1}$

j) $f(x) = \frac{x^2 - 3}{x - 2}$

k) $f(x) = 3x \cdot e^x$

l) $f(x) = xe^{\frac{x^2}{2}}$

m) $f(x) = (x + 2)e^{-x}$

n) $f(x) = \frac{x^3}{2(x-1)^2}$

o) $f(x) = x^3 \ln x$

7. Wyznaczyć tempo zmian funkcji

a) $f(x) = \frac{x}{x+2}$

b) $f(x) = \frac{x^2}{x^2 - 4}$

c) $f(x) = \frac{1}{1+x^2}$

d) $f(x) = x^2 e^x$

e) $f(x) = \frac{1}{x} - x^2$

f) $f(x) = xe^{-x}$

g) $f(x) = (\ln x)^2 - 2 \ln x$

h) $f(x) = \frac{x}{\ln x}$

7.

RACHUNEK CAŁKOWY FUNKCJI JEDNEJ ZMIENNEJ

7.1.

FUNKCJA PIERWOTNA

Niech $f(x)$ będzie funkcją określoną w przedziale (a, b) , skończonym lub nieskończonym.

Definicja.

Funkcję $F(x)$ nazywamy funkcją pierwotną funkcji $f(x)$, jeżeli dla każdego $x \in (a, b)$ spełniony jest warunek

$$F'(x) = f(x)$$

Przykładowo:

Funkcja $F(x) = \frac{1}{3}x^3$ jest funkcją pierwotną funkcji $f(x) = x^2$ w przedziale $(-\infty, +\infty)$

ponieważ

$$F'(x) = \left(\frac{1}{3}x^3\right)' = \frac{1}{3} \cdot 3x^2 = x^2$$

dla każdego $x \in (-\infty, +\infty)$

Zauważyć można, że funkcja $F(x) = \frac{1}{3}x^3 + 1$ jest także funkcją pierwotną funkcji $f(x) = x^2$.

Obliczanie funkcji pierwotnych jest działaniem odwrotnym względem obliczania pochodnej funkcji.

Funkcję pierwotną nazywamy całką, a jej obliczanie – całkowaniem. Zauważmy, że jeżeli funkcja $f(x)$ posiada w pewnym przedziale funkcję pierwotną $F(x)$, to posiada ona w tym przedziale nieskończenie wiele funkcji pierwotnych, przy czym mają one postać

$$F(x) + C, \quad \text{gdzie } C \text{ jest dowolną stałą.}$$

Definicja funkcji pierwotnej nie wskazuje, w jaki sposób należy taką funkcję wyznaczać. Jesteśmy bowiem w obliczu sytuacji, że mamy pochodną $f(x)$ pewnej funkcji, której nie znamy i staramy się ją wyznaczyć.

Istotne jest **twierdzenie o istnieniu funkcji pierwotnej**:

Jeżeli funkcja $f(x)$ jest ciągła w przedziale (a,b) , to posiada w tym przedziale funkcję pierwotną.

Zwrócić należy uwagę na fakt, że problem istnienia funkcji pierwotnej i problem wyznaczania całki to odmienne zagadnienia; z tego, że wiemy, że istnieje funkcja pierwotna $F(x)$ nie wynikają żadne wskazówki jak tę funkcję wyznaczyć.

Definicja

Całką nieoznaczoną funkcji $f(x)$ w przedziale (a,b) nazywamy zbiór wszystkich funkcji pierwotnych funkcji $f(x)$ w tym przedziale i oznaczamy symbolem

$$\int f(x)dx$$

Symbol \int wprowadzony został przez Leibniza.

Mamy

$$\int f(x)dx = F(x) + C$$

gdzie $F(x)$ jest jakąkolwiek funkcją pierwotną funkcji $f(x)$, C - dowolną stałą, zwaną stałą całkowania.

Pamiętać należy, że różniczkowanie jest działaniem odwrotnym względem całkowania i prawdziwe są zależności:

$$F'(x) = f(x)$$

lub

$$dF(x) = f(x)dx$$

Można również zapisać powyższe równości następująco:

$$\left(\int f(x)dx\right)' = f(x) \quad \text{lub} \quad \frac{d}{dx} \int f(x)dx = f(x)$$

7.2.

WZORY PODSTAWOWE

Każdy wzór rachunku różniczkowego orzekający, że pochodną funkcji F jest funkcja f , prowadzi do odpowiedniego wzoru rachunku całkowego.

Na podstawie wzorów, według których wyznaczamy pochodne, powstały wzory rachunku całkowego.

1. $\int 0 dx = C$
2. $\int 1 dx = \int dx = x + C$
3. $\int x^n dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} + C$ (dla $n \neq -1$)
4. $\int \frac{1}{x} dx = \ln|x| + C$
5. $\int a^x dx = \frac{a^x}{\ln a} + C$ ($a > 0, a \neq 1$)
6. $\int e^x dx = e^x + C$
7. $\int \sin x dx = -\cos x + C$
8. $\int \cos x dx = \sin x + C$
9. $\int \frac{1}{1+x^2} dx = \arctg x + C$
10. $\int \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} dx = \arcsin x + C$
11. $\int \frac{1}{\sin^2 x} dx = -ctgx + C$
12. $\int \frac{1}{\cos^2 x} dx = tgx + C$

Wzory 1 – 12 są prawdziwe w każdym przedziale ciągłości odpowiedniej funkcji podcałkowej.

Oprócz powyższych wzorów pozwalających na obliczanie całek konkretnych funkcji istnieją wzory ogólne (zwane niekiedy regułami całkowania)

- jeżeli A jest stałą różną od zera, to

$$\int A \cdot f(x) dx = A \cdot \int f(x) dx$$

- całka sumy (różnicy) dwóch funkcji jest równa sumie (różnicy) całek

$$\int [f(x) \pm g(x)] dx = \int f(x) dx \pm \int g(x) dx$$

Nie istnieją wzory na całkę iloczynu dwóch funkcji ani na całkę ilorazu funkcji. W przypadku ilorazu w szczególnym przypadku gdy licznik jest pochodną mianownika istnieje wzór;

$$\int \frac{f'(x)}{f(x)} dx = \ln|f(x)| + C$$

Ostatni ze wzorów może być wykorzystany do obliczenia całki z tangensa x , w sposób następujący:

$$\int \operatorname{tg} x dx = \int \frac{\sin x}{\cos x} dx = - \int \frac{-\sin x}{\cos x} dx = -\ln|\cos x| + C$$

W podobny sposób wyprowadzić można wzór

$$\int \operatorname{ctg} x dx = \ln|\sin x| + C$$

7.3.

CAŁKOWANIE PRZEZ CZĘŚCI

Niech f i g oznaczają funkcję mające ciągłe pochodne f' i g' w odpowiednim przedziale.

Wówczas na mocy reguł różniczkowania, mamy

$$(fg)' = f'g + fg' \Leftrightarrow fg' = (fg)' - f'g$$

Całkując ostatnią równość stronami, otrzymujemy

$$\int fg' dx = \int (fg)' dx - \int f'g dx, \quad \text{czyli}$$

$$\int f(x) \cdot g'(x) dx = f(x)g(x) - \int f'(x)g(x) dx \quad (\alpha)$$

Wzór (α) jest wzorem na całkowanie przez części.

Przykład 1

Obliczyć

$$\text{a) } \int x e^x dx = \left. \begin{array}{l} f(x) = x \quad f'(x) = 1 \\ g'(x) = e^x \quad g(x) = e^x \end{array} \right\} = x e^x - \int 1 e^x dx = x e^x - e^x + C = (x-1)e^x + C$$

$$\text{b) } \int x^2 \cos x dx = \left. \begin{array}{l} f(x) = x^2 \quad f'(x) = 2x \\ g'(x) = \cos x \quad g(x) = \sin x \end{array} \right\} = x^2 \sin x - \int 2x \sin x dx =$$

$$= \left. \begin{array}{l} f(x) = x \quad f'(x) = 1 \\ g'(x) = \sin x \quad g(x) = -\cos x \end{array} \right\} = x^2 \sin x - 2 \left[-x \cos x - \int 1 \cdot (-\cos x) dx \right] =$$

$$= x^2 \sin x + 2x \cos x - 2 \int \cos x dx = x^2 \sin x + 2x \cos x - 2 \sin x + C$$

$$\text{c) } \int x \ln x dx = \left. \begin{array}{l} f(x) = \ln x \quad f'(x) = \frac{1}{x} \\ g'(x) = x \quad g(x) = \frac{x^2}{2} \end{array} \right\} = \frac{x^2}{2} \ln x - \int \frac{1}{x} \cdot \frac{x^2}{2} dx =$$

$$= \frac{1}{2} x^2 \ln x - \int \frac{1}{2} x dx = \frac{1}{2} x^2 \ln x - \frac{1}{4} x^2 + C = \frac{1}{4} x^2 (2 \ln x - 1) + C$$

$$\text{d) } \int \sin^2 x dx = \left. \begin{array}{l} f(x) = \sin x \quad f'(x) = \cos x \\ g'(x) = \sin x \quad g(x) = -\cos x \end{array} \right\} =$$

$$= -\sin x \cos x - \int \cos x \cdot (-\cos x) dx = -\sin x \cos x + \int \cos^2 x dx =$$

$$= -\sin x \cos x + \int (1 - \sin^2 x) dx = -\sin x \cos x + \int 1 dx - \int \sin^2 x dx =$$

$$= -\sin x \cos x + x - \int \sin^2 x dx$$

Przenosząc ostatnią z całek na lewą stronę mamy

$$2 \int \sin^2 x dx = x - \sin x \cos x \quad | :2$$

$$\int \sin^2 x dx = \frac{1}{2} x - \frac{1}{2} \sin x \cos x + C \quad \text{lub}$$

$$\int \sin^2 x dx = \frac{1}{2} x - \frac{1}{4} \sin 2x + C$$

$$\begin{aligned} \text{e) } \int e^{-x} \cos x dx &= \left. \begin{array}{l} f(x) = e^{-x} \quad f'(x) = -e^{-x} \\ g'(x) = \cos x \quad g(x) = \sin x \end{array} \right\} = \\ &= e^{-x} \sin x + \int e^{-x} \sin x dx = \left. \begin{array}{l} f(x) = e^{-x} \quad f'(x) = -e^{-x} \\ g'(x) = \sin x \quad g(x) = -\cos x \end{array} \right\} = \\ &= e^{-x} \sin x - e^{-x} \cos x - \int e^{-x} \cos x dx \end{aligned}$$

Mamy zatem

$$2 \int e^{-x} \cos x dx = e^{-x} (\sin x - \cos x), \quad \text{czyli}$$

$$\int e^{-x} \cos x dx = \frac{1}{2} e^{-x} (\sin x - \cos x) + C$$

7.4.

CAŁKOWANIE PRZEZ PODSTAWIENIE

Metoda całkowania przez podstawienie lub zamianę zmiennej jest podstawowym sposobem całkowania. Wykorzystywana jest zależność

$$\int f[g(x)] \cdot g'(x) dx = \int f(t) dt \quad \text{gdzie } t = g(x)$$

Przykład 2

$$\text{a) } \int e^{5x} dx = \left. \begin{array}{l} 5x = t \\ 5 dx = dt \\ dx = \frac{1}{5} dt \end{array} \right\} = \int e^t \cdot \frac{1}{5} dt = \frac{1}{5} \int e^t dt = \frac{1}{5} e^t + C = \frac{1}{5} e^{5x} + C$$

$$\text{b) } \int x\sqrt{x^2+1}dx = \left. \begin{array}{l} x^2+1=t \\ 2xdx=dt \\ xdx=\frac{1}{2}dt \end{array} \right\} = \int \sqrt{t} \frac{1}{2} dt = \frac{1}{2} \int t^{\frac{1}{2}} dt = \frac{1}{2} \frac{t^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}} = \frac{1}{3} \sqrt{t^3} = \frac{1}{3} \sqrt{(x^2+1)^3} + C$$

$$\text{c) } \int \frac{x}{\sqrt{x+1}} dx = \left. \begin{array}{l} x+1=t \\ dx=dt \\ x=t-1 \end{array} \right\} = \int \frac{t-1}{\sqrt{t}} dt = \int \frac{t}{\sqrt{t}} dt - \int \frac{1}{\sqrt{t}} dt =$$

$$= \int t^{\frac{1}{2}} dt - \int t^{-\frac{1}{2}} dt = \frac{t^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}} - \frac{t^{\frac{1}{2}}}{\frac{1}{2}} = \frac{2}{3} \sqrt{t^3} - 2\sqrt{t} = \frac{2}{3} \sqrt{(x+1)^3} - 2\sqrt{x+1} + C$$

$$\text{d) } \int \sin x e^{\cos x} dx = \left. \begin{array}{l} \cos x = t \\ -\sin x dx = dt \\ \sin x dx = -dt \end{array} \right\} = - \int e^t dt = -e^t + C = -e^{\cos x} + C$$

$$\text{e) } \int \frac{1}{x \ln^3 x} dx = \left. \begin{array}{l} \ln x = t \\ \frac{1}{x} dx = dt \end{array} \right\} = \int \frac{1}{t^3} dt = \int t^{-3} dt = \frac{t^{-2}}{-2} = \frac{-1}{2t^2} = \frac{-1}{2 \ln^2 x} + C$$

Podkreślmy, że można sprawdzić, czy otrzymany wynik jest poprawny. W tym celu obliczmy pochodną funkcji stanowiącej uzyskany rezultat. Mamy:

$$\left(\frac{-1}{2 \ln^2 x} + C \right)' = -\frac{1}{2} \left(\frac{1}{\ln^2 x} \right)' = -\frac{1}{2} \frac{-2 \ln x \cdot \frac{1}{x}}{\ln^4 x} = \frac{1}{x \ln^3 x}$$

Ponieważ otrzymaliśmy funkcję podcałkową świadczy to o poprawności obliczeń.

7.5.

CAŁKOWANIE NIEKTÓRYCH FUNKCJI WYMIERNYCH

W podrozdziale omówione zostanie obliczanie całek z wybranych funkcji wymiernych, tj. funkcji typu $\frac{P(x)}{Q(x)}$, gdzie $Q(x)$ jest wielomianem stopnia drugiego, zaś $P(x)$ - stałą bądź funkcją liniową. Technikę całkowania tego typu funkcji wyjaśnimy na przykładach⁽¹⁾.

- a) pierwszy przypadek jest typu: licznik stopnia pierwszego, zaś mianownik stopnia drugiego, który rozkłada się na czynniki

Przykład 3

Obliczyć $\int \frac{3x+2}{x^2+2x-8} dx$

Funkcję podcałkową rozkładamy na ułamki proste.

Mamy:

$$\begin{aligned} \frac{3x+2}{x^2+2x-8} &= \frac{3x+2}{(x-2)(x+4)} = \frac{A}{x-2} + \frac{B}{x+4} = \frac{A(x+4) + B(x-2)}{(x-2)(x+4)} = \\ &= \frac{Ax + 4A + Bx - 2B}{(x-2)(x+4)} = \frac{(A+B)x + 4A - 2B}{(x-2)(x+4)} \end{aligned}$$

Mamy zatem

$$\begin{cases} A+B=3 & / \cdot 2 \\ 4A-2B=2 \end{cases}$$

$$2A+2B=6$$

$$4A-2B=2$$

$$6A=8 \Rightarrow A=\frac{4}{3}, B=3-A=3-\frac{4}{3}=\frac{5}{3}$$

¹ Informacje dotyczące teorii tego zagadnienia znajdzie Czytelnik np. [w:] J. Łaszuk, Matematyka – studium podstawowe, wyd. SGH, Warszawa 1996, s. 147-149; lub [w:] J. Piszczala, Matematyka i jej zastosowanie w naukach ekonomicznych, wyd. AE w Poznaniu, Poznań 1998, s. 124-128.

a zatem

$$\frac{3x+2}{x^2+2x-8} = \frac{\frac{4}{3}}{x-2} + \frac{\frac{5}{3}}{x+4}$$

Wracamy do obliczanej całki i otrzymujemy

$$\begin{aligned} \int \frac{3x+2}{x^2+2x-8} dx &= \int \left(\frac{\frac{4}{3}}{x-2} + \frac{\frac{5}{3}}{x+4} \right) dx = \\ &= \frac{4}{3} \int \frac{1}{x-2} dx + \frac{5}{3} \int \frac{1}{x+4} dx = \frac{4}{3} \ln|x-2| + \frac{5}{3} \ln|x+4| + C \end{aligned}$$

- b) drugi przypadek jest następujący: w liczniku jest stała, mianownik drugiego stopnia i rozkłada się na czynniki.

Przykład 4

Obliczyć $\int \frac{5}{x^2+7x+12} dx$

Mamy

$$\begin{aligned} \frac{5}{x^2+7x+12} &= \frac{5}{(x+3)(x+4)} = \frac{A}{x+3} + \frac{B}{x+4} = \frac{A(x+4)+B(x+3)}{(x+3)(x+4)} = \\ &= \frac{Ax+4A+Bx+3B}{(x+3)(x+4)} = \frac{(A+B)x+4A+3B}{(x+3)(x+4)} \end{aligned}$$

mamy dwa równania i dwie niewiadome A i B

$$\begin{cases} A+B=0 \Rightarrow A=-B \\ 4A+3B=5 \quad -4B+3B=5 \Rightarrow -B=5 \Rightarrow B=-5, A=5 \end{cases}$$

mamy zatem ułamek $\frac{5}{x^2+7x+12}$ przedstawiony w postaci sumy dwóch ułamków prostych

$$\frac{5}{x^2+7x+12} = \frac{5}{x+3} - \frac{5}{x+4} \quad \text{a zatem}$$

$$\begin{aligned} & \int \frac{5}{x^2 + 7x + 12} dx - \int \left(\frac{5}{x+3} - \frac{5}{x+4} \right) dx = \int \frac{5}{x+3} dx - \int \frac{5}{x+4} dx = \\ & = 5 \int \frac{1}{x+3} dx - 5 \int \frac{1}{x+4} dx = 5 \left(\int \frac{1}{x+3} dx - \int \frac{1}{x+4} dx \right) = \\ & = 5(\ln|x+3| - \ln|x+4|) = 5 \ln \left| \frac{x+3}{x+4} \right| + C \end{aligned}$$

- c) trzeci przypadek: licznik stopnia zerowego (stała), mianownik stopnia drugiego i nie rozkłada się na czynniki

Przykład 5

Obliczyć $\int \frac{3}{x^2 - 3x + 5} dx$

Mamy

$$\begin{aligned} \int \frac{3}{x^2 - 3x + 5} dx &= \int \frac{3}{x^2 - 2 \cdot \frac{3}{2}x + \frac{9}{4} - \frac{9}{4} + 5} dx = \int \frac{3dx}{\left(x - \frac{3}{2}\right)^2 + \frac{11}{4}} = \\ &= \frac{12}{11} \int \frac{dx}{\left[\frac{2}{\sqrt{11}}\left(x - \frac{3}{2}\right)\right]^2 + 1} = \left\{ \begin{array}{l} \frac{2}{\sqrt{11}}\left(x - \frac{3}{2}\right) = t \\ \frac{2}{\sqrt{11}} dx = dt \\ dx = \frac{\sqrt{11}}{2} dt \end{array} \right\} = \end{aligned}$$

$$= \frac{12}{11} \int \frac{\frac{\sqrt{11}}{2} dt}{t^2 + 1} = \frac{6}{\sqrt{11}} \operatorname{arctgt} = \frac{6}{\sqrt{11}} \operatorname{arctg} \left[\frac{2}{\sqrt{11}} \left(x - \frac{3}{2}\right) \right] + C$$

- d) czwarty i ostatni z tej serii przypadek jest następujący: licznik stopnia pierwszego a mianownik stopnia drugiego i nie rozkłada się na czynniki.

Przykład 6

$$\begin{aligned} \int \frac{5x-7}{x^2+x+3} dx & \stackrel{(2)}{=} \int \frac{\frac{5}{2}(2x+1) - \frac{19}{2}}{x^2+x+3} dx = \\ & = \frac{5}{2} \int \frac{2x+1}{x^2+x+3} dx = -\frac{19}{2} \int \frac{1}{x^2+x+3} dx = \\ & = \frac{5}{2} \ln|x^2+x+3| - \frac{19}{2} \phi \quad \text{gdzie } \phi = \int \frac{1}{x^2+x+3} dx \end{aligned}$$

Zauważmy, że ϕ jest całką analogiczną jak omówiona w przypadku c)

$$\begin{aligned} \phi & = \int \frac{1}{x^2+x+3} dx = \int \frac{1}{x^2+2 \cdot \frac{1}{2}x + \frac{1}{4} - \frac{1}{4} + 3} dx = \\ & = \int \frac{1}{\left(x + \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{11}{4}} dx = \int \frac{1}{\frac{11}{4} \left(\frac{\left(x + \frac{1}{2}\right)^2}{\left(\frac{\sqrt{11}}{2}\right)^2} + 1 \right)} dx = \frac{4}{11} \int \frac{1}{\left[\frac{2}{\sqrt{11}} \left(x + \frac{1}{2}\right) \right]^2 + 1} dx = \left. \begin{array}{l} \frac{2}{\sqrt{11}} \left(x + \frac{1}{2}\right) = t \\ \frac{2}{\sqrt{11}} dx = dt \\ dx = \frac{\sqrt{11}}{2} dt \end{array} \right\} = \\ & = \frac{4}{11} \int \frac{\frac{\sqrt{11}}{2} dt}{t^2 + 1} = \frac{4\sqrt{11}}{2 \cdot 11} \int \frac{1}{t^2 + 1} dt = \frac{2\sqrt{11}}{11} \operatorname{arctgt} = \\ & = \frac{2\sqrt{11}}{11} \operatorname{arctg} \left[\frac{2}{\sqrt{11}} \left(x + \frac{1}{2}\right) \right] + C \end{aligned}$$

ostatecznie otrzymujemy

$$\int \frac{5x-7}{x^2+x+3} dx = \frac{5}{2} \ln|x^2+x+3| - \frac{19\sqrt{11}}{11} \operatorname{arctg} \left[\frac{2}{\sqrt{11}} \left(x + \frac{1}{2}\right) \right] + C$$

² W liczniku pojawia się wyrażenie będące pochodną mianownika $(x^2+x+3)' = 2x+1$

Niektóre całki nieoznaczone obliczamy stosując kilka reguł całkowania.

Przykład 7

Na przykład aby obliczyć:

$$\int \frac{e^x - 1}{e^x + 1} dx \quad \text{najpierw zamienimy ją na dwie całki; później zastosujemy całkowanie}$$

przez podstawienie a także rozkładanie funkcji wymiernej na ułamki proste.

Mamy zatem

$$\begin{aligned} \int \frac{e^x - 1}{e^x + 1} dx &= \int \frac{e^x - 1 + 1 - 1}{e^x + 1} dx = \int \frac{e^x + 1 - 2}{e^x + 1} dx = \\ &= \int \left(\frac{e^x + 1}{e^x + 1} - \frac{2}{e^x + 1} \right) dx = \int \left(1 - \frac{2}{e^x + 1} \right) dx = \int 1 dx - 2 \int \frac{1}{e^x + 1} dx = x - 2\phi \end{aligned}$$

$$\text{gdzie } \phi = \int \frac{dx}{e^x + 1}$$

$$\phi = \int \frac{1}{e^x + 1} dx = \left. \begin{array}{l} e^x + 1 = t \\ e^x dx = dt \\ e^x = t - 1 \\ dx = \frac{dt}{t - 1} \end{array} \right\} = \int \frac{dt}{t} = \int \frac{1}{(t - 1)t} dt$$

Ponieważ

$$\frac{1}{(t - 1)t} = \frac{A}{t - 1} + \frac{B}{t} = \frac{At + B(t - 1)}{(t - 1)t} = \frac{(A + B)t - B}{(t - 1)t}$$

mamy

$$\begin{cases} A + B = 0 \Rightarrow B = 1, A = -1, \\ -B = 1 \end{cases} \quad \text{zatem}$$

$$\begin{aligned} \int \frac{1}{(t - 1)t} dt &= \int \frac{-1}{t - 1} dt + \int \frac{1}{t} dt = -\ln |t - 1| + \ln |t| = \\ &= \ln \left| \frac{t}{t - 1} \right| = \ln \left| \frac{e^x + 1}{e^x} \right| = \ln \left| 1 + \frac{1}{e^x} \right| = \ln |1 + e^{-x}| + C \end{aligned}$$

a zatem

$$\phi = \ln |1 + e^{-x}| + C, \quad \text{zaś ostatecznie}$$

$$\int \frac{e^x - 1}{e^x + 1} dx = x - 2 \ln |1 + e^{-x}| + C$$

sprawdźmy otrzymany wynik obliczając pochodną. Mamy

$$\begin{aligned}
 (x - 2 \ln |1 + e^{-x}| + C)' &= 1 - 2 \frac{1}{1 + e^{-x}} \cdot e^{-x} = 1 - \frac{2e^{-x}}{1 + e^{-x}} = \\
 &= \frac{1 + e^{-x} - 2e^{-x}}{1 + e^{-x}} = \frac{1 - e^{-x}}{1 + e^{-x}} = \frac{1 - \frac{1}{e^x}}{1 + \frac{1}{e^x}} = \frac{\frac{e^x - 1}{e^x}}{\frac{e^x + 1}{e^x}} = \frac{e^x - 1}{e^x + 1}
 \end{aligned}$$

Ponieważ otrzymaliśmy funkcję podcałkową, świadczy to o prawidłowości wcześniejszych obliczeń.

Przykład 8

Obliczając całkę $\int x \sin(2x - 3) dx$ najpierw zastosujemy podstawienie $2x - 3 = t$, a następnie wykorzystamy regułę całkowania przez części.

Mamy

$$\int x \sin(2x - 3) dx = \left. \begin{array}{l} 2x - 3 = t \\ 2dx = dt \\ dx = \frac{1}{2} dt \\ 2x = t + 3 \\ x = \frac{1}{2}(t + 3) \end{array} \right\} = \int \frac{1}{2}(t + 3) \sin t \cdot \frac{1}{2} dt =$$

$$= \frac{1}{4} \int (t + 3) \sin t dt = \frac{1}{4} \int (t \sin t + 3 \sin t) dt =$$

$$= \frac{1}{4} \int t \sin t dt + \frac{3}{4} \int \sin t dt = \frac{1}{4} \phi - \frac{3}{4} \cos t =$$

$$= \frac{1}{4} \phi - \frac{3}{4} \cos(2x - 3) + C, \quad \text{gdzie}$$

$$\phi = \int t \sin t dt = \left. \begin{array}{l} f = t \quad f' = 1 \\ g' = \sin t \quad g = -\cos t \end{array} \right\} = -t \cos t + \int \cos t dt =$$

$$= -t \cos t + \sin t = -(2x - 3) \cos(2x - 3) + \sin(2x - 3) + C$$

A więc ostatecznie otrzymujemy

$$\int x \sin(2x - 3) dx = -\frac{1}{4}(2x - 3) \cos(2x - 3) + \frac{1}{4} \sin(2x - 3) - \frac{3}{4} \cos(2x - 3) + C$$

Interesująca z dydaktycznego punktu widzenia jest $\int \frac{\sqrt{x}}{1 + \sqrt[3]{x}} dx$

Należy zastosować podstawienie $x = t^6$, stąd

$$\sqrt{x} = t^3, \quad \sqrt[3]{x} = t^2 \quad dx = 6t^5 dt$$

Mamy

$$\int \frac{\sqrt{x}}{1+\sqrt[3]{x}} dx = \left\{ \begin{array}{l} x = t^6 \\ dx = 6t^5 dt \end{array} \right\} = \int \frac{t^3}{1+t^2} \cdot 6t^5 dt = \int \frac{6t^8}{1+t^2} dt = \text{(3)}$$

$$6 \int \left(t^6 - t^4 + t^2 - 1 + \frac{1}{1+t^2} \right) dt = 6 \left(\frac{t^7}{7} - \frac{t^5}{5} + \frac{t^3}{3} - t + \arctgt \right) + C =$$

$$= \frac{6}{7} x^{\frac{7}{6}} \sqrt{x} - \frac{6}{5} \sqrt[6]{x^5} + 2\sqrt{x} - 6\sqrt[6]{x} + 6\arctg\sqrt[6]{x} + C$$

7.6.

CAŁKA OZNACZONA

Symbol całki oznaczonej jest następujący

$$\int_b^a f(x) dx$$

gdzie

$[a, b]$ - przedział całkowania

a - dolna granica całkowania

b - górna granica całkowania

$f(x)$ funkcja podcałkowa

Definicja. $\int_a^b f(x) dx = F(b) - F(a)$

³ Wykorzystujemy dzielenie $t^8 : (t^2 + 1) = t^6 - t^4 + t^2 - 1 \quad \text{R1}$

$$\begin{array}{r} t^8 + t^6 \\ -t^6 \\ \hline -t^6 - t^4 \\ -t^4 \\ \hline t^4 + t^2 \\ -t^2 \\ \hline -t^2 - 1 \end{array}$$

Całką oznaczoną funkcji f w przedziale $\langle a, b \rangle$ nazywamy różnicę wartości funkcji pierwotnej $F(x)$ w końcach przedziału całkowania.

$$\text{Niekiedy można spotkać zapis } \int_a^b f(x) dx = [F(x)]_a^b$$

W odróżnieniu od całki nieoznaczonej, która jest funkcją, całka oznaczona jest liczbą.

7.6. a)

WŁAŚCIWOŚCI CAŁKI OZNACZONEJ

W przypadku całki oznaczonej prawdziwe są wzory:

$$1. \quad \int_a^b [f(x) \pm g(x)] dx = \int_a^b f(x) dx \pm \int_a^b g(x) dx$$

$$2. \quad \int_a^b A \cdot f(x) dx = A \cdot \int_a^b f(x) dx \quad \text{gdzie } A - \text{dowolna stała}$$

$$3. \quad \int_a^b f(x) dx = \int_a^c f(x) dx + \int_c^b f(x) dx, \quad \text{jeżeli } c \in (a, b)$$

$$4. \quad \int_a^a f(x) dx = 0$$

$$5. \quad \int_a^b f(x) dx = - \int_b^a f(x) dx$$

Przykład 9

$$a) \quad \int_1^0 x^2 dx = - \int_0^1 x^2 dx = - \left[\frac{x^3}{3} \Big|_0^1 \right] = - \frac{1}{3} (x^3 \Big|_0^1) = - \frac{1}{3} (1 - 0) = - \frac{1}{3}$$

$$b) \quad \int_0^\pi \sin x dx = - \cos x \Big|_0^\pi = -(\cos \pi - \cos 0) = -(-1 - 1) = 2$$

$$c) \quad \int_{-1}^2 (x - x^3) dx = \int_{-1}^2 x dx - \int_{-1}^2 x^3 dx = \frac{1}{2} x^2 \Big|_{-1}^2 - \frac{1}{4} x^4 \Big|_{-1}^2 = \\ = \frac{1}{2} (2^2 - (-1)^2) - \frac{1}{4} (2^4 - (-1)^4) = \frac{1}{2} (4 - 1) - \frac{1}{4} (16 - 1) =$$

$$= \frac{1}{2} \cdot 3 - \frac{1}{4} \cdot 15 = \frac{3}{2} - \frac{15}{4} = \frac{6-15}{4} = -\frac{9}{4}$$

$$d) \int_0^1 \frac{x dx}{1+x^2} = \frac{1}{2} \int_0^1 \frac{2x dx}{1+x^2} = \frac{1}{2} \ln(1+x^2) \Big|_0^1 = \frac{1}{2} (\ln 2 - \ln 1) = \frac{1}{2} \ln 2$$

$$e) \int_2^0 e^{-x} dx = -e^{-x} \Big|_2^0 = -(e^0 - e^{-2}) = -(1 - \frac{1}{e^2}) = \frac{1}{e^2} - 1$$

W przypadku całkowania przez części korzystamy ze wzoru

$$\int_a^b f(x)g'(x)dx = f(b) \cdot g(b) - f(a) \cdot g(a) - \int_a^b f'(x)g(x)dx$$

Przykład 10

$$a) \int_0^\pi x \cos x dx = \left\{ \begin{array}{l} f(x) = x \quad f'(x) = 1 \\ g'(x) = \cos x \quad g(x) = \sin x \end{array} \right\} = x \sin x \Big|_0^\pi - \int_0^\pi \sin x dx =$$

$$= \pi \sin \pi - 0 \sin 0 - (-\cos x) \Big|_0^\pi = 0 - 0 + \cos x \Big|_0^\pi = \cos \pi - \cos 0 = -1 - 1 = -2$$

$$b) \int_1^e \ln x dx = \left\{ \begin{array}{l} f(x) = \ln x \quad f'(x) = \frac{1}{x} \\ g'(x) = 1 \quad g(x) = x \end{array} \right\} = x \ln x \Big|_1^e - \int_1^e \frac{1}{x} \cdot x dx =$$

$$= e \ln e - 1 \ln 1 - x \Big|_1^e = e - (e - 1) = e - e + 1 = 1$$

W przypadku całkowania przez podstawianie pamiętać należy, że wraz z wprowadzeniem nowej zmiennej t należy również zmienić granice całkowania.

Oto stosowny przykład

Przykład 11

Obliczyć $\int_0^\pi \sin^3 x dx$

Mamy

$$\int_0^\pi \sin^3 x dx = \int_0^\pi \sin^2 x \cdot \sin x dx = \int_0^\pi (1 - \cos^2 x) \sin x dx =$$

$$= \int_0^\pi \sin x dx - \int_0^\pi \cos^2 x \sin x dx = P - Q \quad \text{gdzie}$$

$$P = \int_0^\pi \sin x dx = -\cos x \Big|_0^\pi = -(\cos \pi - \cos 0) = -(-1 - 1) = 2 \quad \text{zaś}$$

$$Q = \int_0^{\pi} \cos^2 x \sin x dx = \left. \begin{array}{l} \cos x = t \\ -\sin x dx = dt \\ \sin x dx = -dt \end{array} \right\} = - \int_1^{-1} t^2 dt = \int_{-1}^1 t^2 dt =$$

x	0	π
t	1	-1

$$= \frac{1}{3} t^3 \Big|_{-1}^1 = \frac{1}{3} (1^3 - (-1)^3) = \frac{1}{3} (1+1) = \frac{2}{3}$$

Ostatecznie

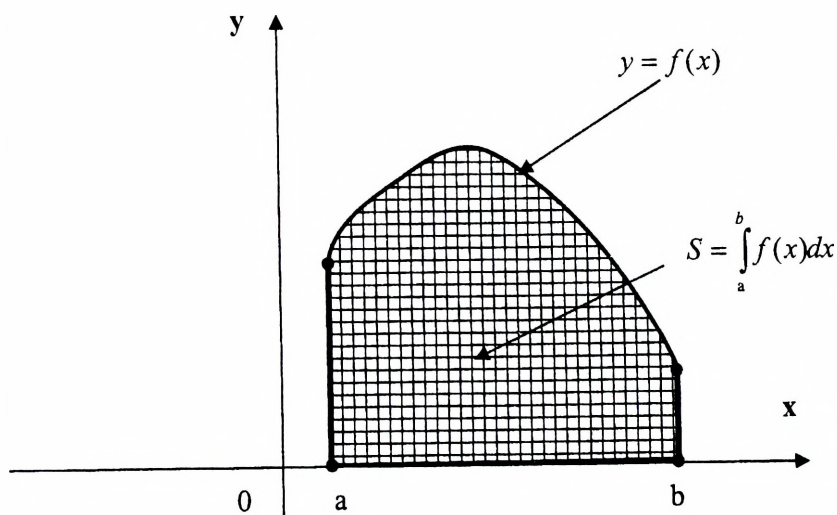
$$\int_0^{\pi} \sin^3 x dx = 2 - \frac{2}{3} = \frac{4}{3}$$

7.6. b)

INTERPRETACJA GEOMETRYCZNA

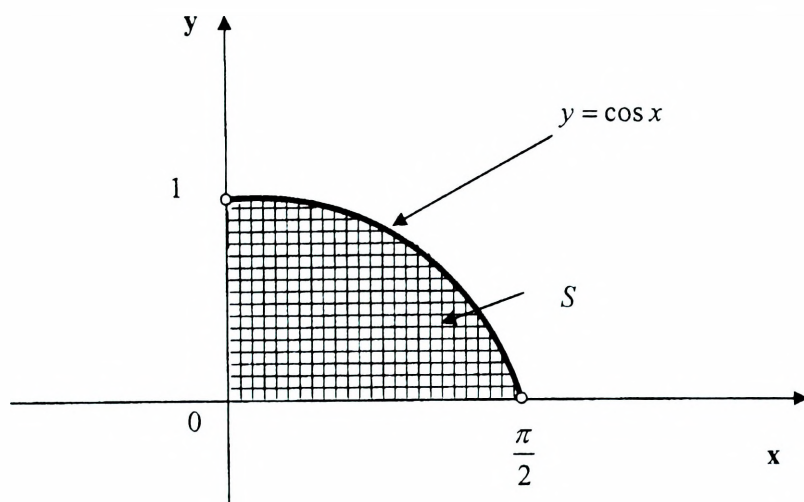
Przypuśćmy, że funkcja $f(x)$ jest nieujemna w przedziale $\langle a, b \rangle$. Oznacza to, że jej wykres leży powyżej osi O_x . Całka oznaczona z funkcji $f(x)$ od a do b jest równa polu figury ograniczonej wykresem funkcji, osią O_x , prostą o równaniu $x = a$ oraz prostą o równaniu $x = b$.

Rysunek 1. Interpretacja geometryczna całki oznaczonej



Przykład 12

Obliczyć pole powierzchni zawartej pod wykresem funkcji $y = \cos x$ w przedziale $\langle 0, \frac{\pi}{2} \rangle$

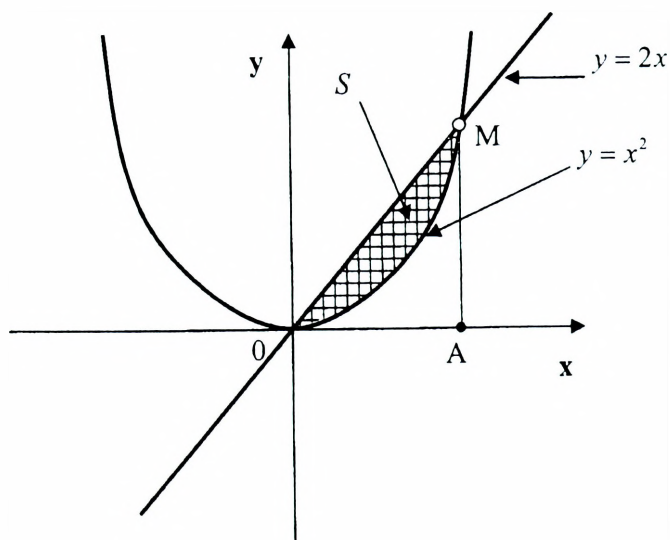


Szukane pole

$$S = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos x dx = \sin x \Big|_0^{\frac{\pi}{2}} = \sin \frac{\pi}{2} - \sin 0 = 1$$

Przykład 13

Obliczyć pole powierzchni zawartej pomiędzy wykresem funkcji $y = x^2$ oraz prostą o równaniu $y = 2x$



Pole które mamy wyznaczyć jest różnicą dwóch pól: pola trójkąta $0AM$ oraz pola zawartego pod łukiem paraboli. Należy wyznaczyć współrzędne punktu przecięcia M wykresów funkcji.

Rozwiązujemy równanie

$$x^2 = 2x$$

$$x^2 - 2x = 0$$

$$x(x-2) = 0 \Rightarrow x_1 = 0 \cup x_2 = 2$$

A zatem wykresy funkcji przecinają się w dwóch punktach $0(0,0)$ oraz $M(2,4)$.

Granice całkowania są odpowiednio $a = 0$ oraz $b = 2$.

$$S = S_1 - S_2$$

$$S_1 = \frac{1}{2} \cdot 2 \cdot 4 = 4$$

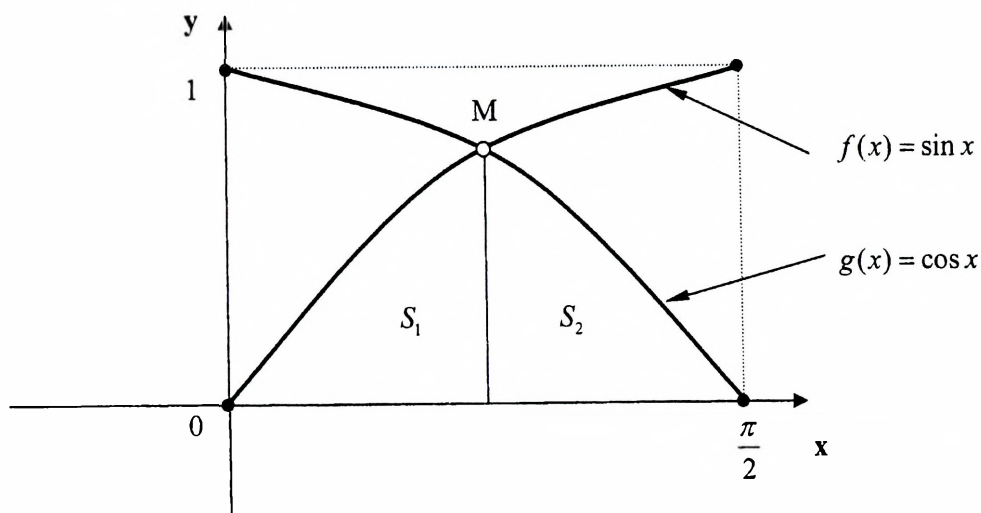
$$S_2 = \int_0^2 x^2 dx = \frac{1}{3} x^3 \Big|_0^2 = \frac{1}{3} (2^3 - 0) = \frac{8}{3}$$

$$S = 4 - \frac{8}{3} = \frac{12-8}{3} = \frac{4}{3}$$

Przykład 14

Wyznaczyć pole powierzchni zawartej pomiędzy wykresami funkcji $f(x) = \sin x$ oraz

$g(x) = \cos x$ w przedziale $\langle 0, \frac{\pi}{2} \rangle$



Tym razem szukane pole S jest równe sumie dwóch pól S_1 i S_2 , czyli $S = S_1 + S_2$

Wyznaczymy punkt przecięcia wykresów funkcji

$$\sin x = \cos x / : \cos x$$

$$\operatorname{tg} x = 1$$

$$x = \frac{\pi}{4}$$

zatem

$$S_1 = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \sin x dx = -\cos x \Big|_0^{\frac{\pi}{4}} = -(\cos \frac{\pi}{4} - \cos 0) = -(\frac{\sqrt{2}}{2} - 1) = 1 - \frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$S_2 = \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} \cos x dx = \sin x \Big|_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} = \sin \frac{\pi}{2} - \sin \frac{\pi}{4} = 1 - \frac{\sqrt{2}}{2}$$

zatem

$$S = 1 - \frac{\sqrt{2}}{2} + 1 - \frac{\sqrt{2}}{2} = 2 - \frac{2\sqrt{2}}{2} = 2 - \sqrt{2}$$

W przypadku gdy krzywa $f(x)$ położona jest pod osią Ox aby obliczyć pole powierzchni możemy postąpić dwojako:

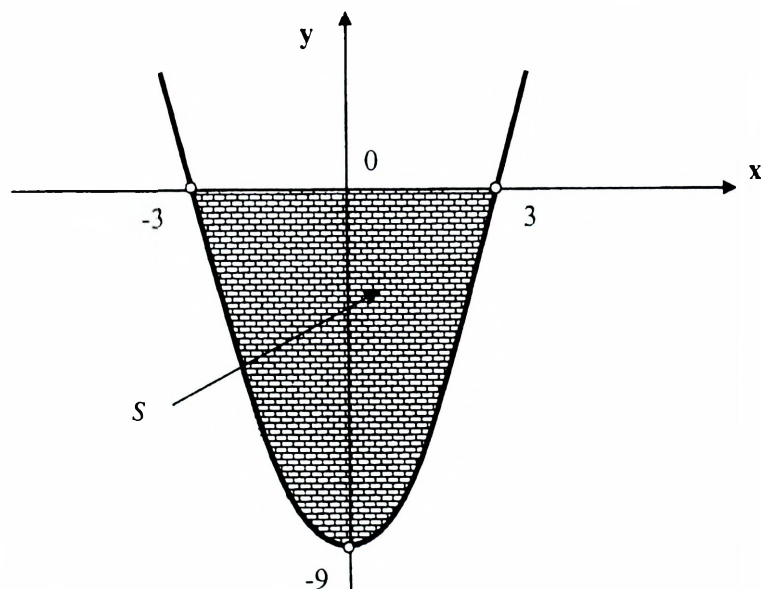
a) albo zastosować wzór $S = \left| \int_a^b f(x) dx \right|$ albo

b) zmienić granice całkowania, całkowanie prowadzić od b do a i wówczas

$$S = \int_b^a f(x) dx$$

Przykład 15

Obliczyć pole powierzchni zawartej pomiędzy wykresem funkcji $y = x^2 - 9$ a osią Ox



Ponieważ pole powierzchni położone jest pod osią $0x$ mamy

$$\begin{aligned} S &= \left| \int_{-3}^3 (x^2 - 9) dx \right| = \left| \int_{-3}^3 x^2 dx - \int_{-3}^3 9 dx \right| = \\ &= \left| \frac{1}{3} x^3 \Big|_{-3}^3 - 9x \Big|_{-3}^3 \right| = \left| \frac{1}{3} (3^3 - (-3)^3) - 9(3 - (-3)) \right| = \\ &= \left| \frac{1}{3} (27 - (-27)) - 9 \cdot 6 \right| = \left| \frac{1}{3} \cdot 54 - 54 \right| = \left| 18 - 54 \right| = \left| -36 \right| = 36 \end{aligned}$$

Gdybyśmy obliczenia prowadzili według punktu b) wówczas

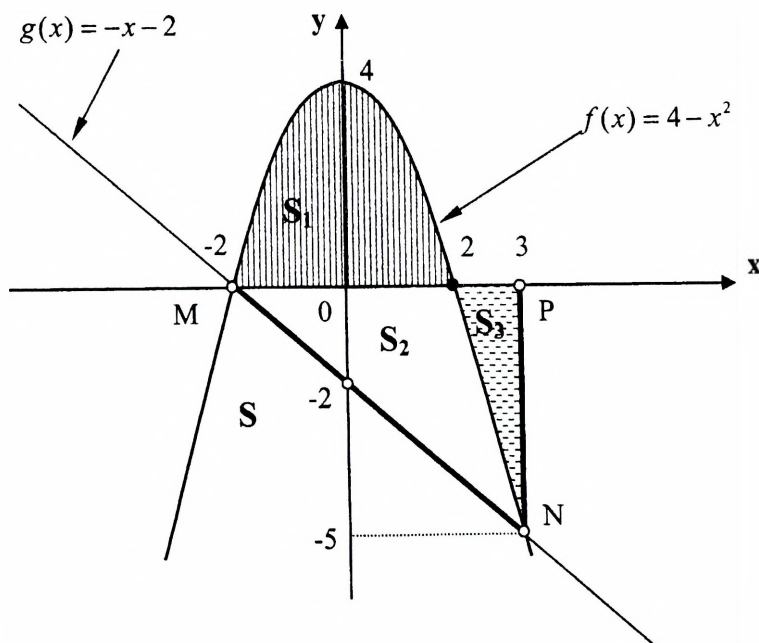
$$\begin{aligned} S &= \int_{-3}^3 (x^2 - 9) dx = \frac{1}{3} x^3 \Big|_{-3}^3 - 9x \Big|_{-3}^3 = \frac{1}{3} (-3)^3 - 3^3 - 9(-3 - 3) = \\ &= \frac{1}{3} (-27 - 27) - 9 \cdot (-6) = \frac{1}{3} \cdot (-54) + 54 = -18 + 54 = 36 \end{aligned}$$

Przykład 16

Obliczyć pole powierzchni zawartej pomiędzy wykresami funkcji $f(x) = 4 - x^2$ i

$$g(x) = -x - 2$$

Aby przekonać się jak szukane pole położone jest względem osi $0x$ wykonujemy odpowiedni rysunek



Rozwiązując równanie $4 - x^2 = -x - 2$ wyznaczamy współrzędne punktów przecięcia wykresów funkcji

mamy

$$x^2 - x - 6 = 0$$

$$\Delta = 1 + 24 = 25 \quad \sqrt{\Delta} = 5$$

$$x_1 = \frac{1-5}{2} = -2 \quad x_2 = \frac{1+5}{2} = 3$$

Mamy dwa punkty przecięcia wykresów funkcji M(-2,0) oraz N(3,-5)

Szukane pole

$$S = S_1 + (S_2 - S_3) \quad \text{gdzie}$$

S_1 - część pola położonego nad osią Ox

S_2 - pole trójkąta MPN

S_3 - pole między ramieniem paraboli, osią Ox i prostą $x = 3$

Mamy zatem

$$\begin{aligned} S_1 &= \int_{-2}^2 (4 - x^2) dx = \int_{-2}^2 4 dx - \int_{-2}^2 x^2 dx = 4x \Big|_{-2}^2 - \frac{1}{3} x^3 \Big|_{-2}^2 = \\ &= 4(2 - (-2)) - \frac{1}{3}(2^3 - (-2)^3) = 4 \cdot 4 - \frac{1}{3}(8 + 8) = 16 - \frac{16}{3} = \frac{32}{3} = 10 \frac{2}{3} \end{aligned}$$

$$S_2 = \frac{1}{2} \cdot 5 \cdot 5 = \frac{25}{2} = 12 \frac{1}{2}$$

$$S_3 = \int_3^2 (4 - x^2) dx = 4x \Big|_3^2 - \frac{1}{3} x^3 \Big|_3^2 = 4(2 - 3) - \frac{1}{3}(8 - 27) = -4 + \frac{19}{3} = \frac{7}{3}$$

$$S = S_1 + (S_2 - S_3) = \frac{32}{3} + \frac{25}{2} - \frac{7}{3} = \frac{25}{3} + \frac{25}{2} = 8 \frac{1}{3} + 12 \frac{1}{2} = 20 \frac{5}{6}$$

7.7.

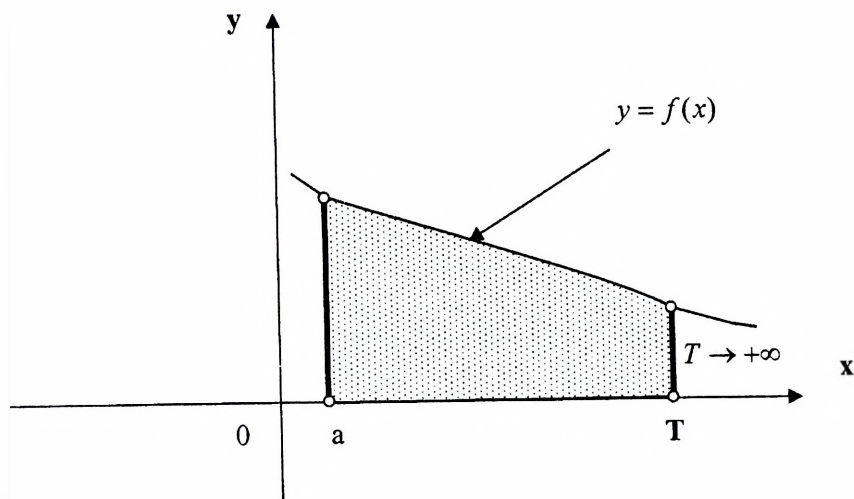
CAŁKA NIEWŁAŚCIWA W PRZEDZIALE NIESKOŃCZONYM

Jeżeli przedział całkowania jest typu $\langle a, +\infty \rangle$ lub $\langle -\infty, b \rangle$, to całką obliczaną w tego typu przedziałach nazywamy całką niewłaściwą. Są to zatem całki typu

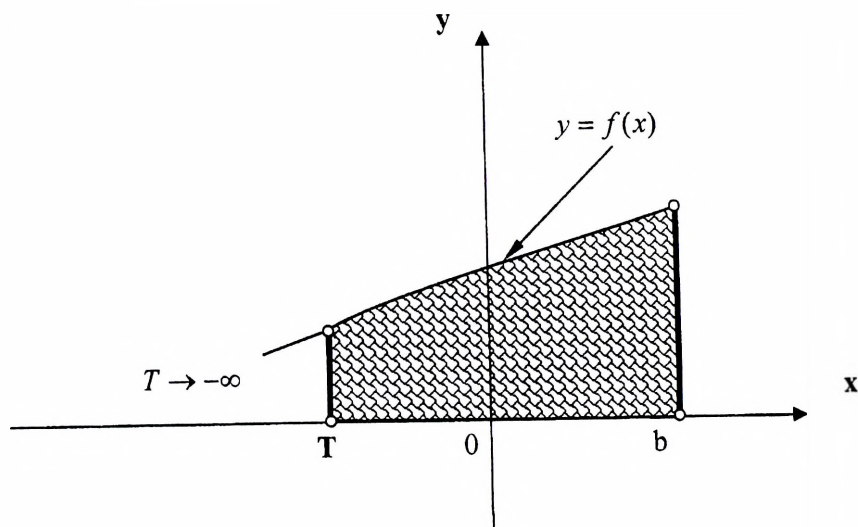
$$\int_a^{+\infty} f(x) dx \quad \text{lub} \quad \int_{-\infty}^b f(x) dx, \quad \text{zaś}$$

obliczenia prowadzimy według wzorów:

$$\int_a^{+\infty} f(x) dx \stackrel{df}{=} \lim_{T \rightarrow +\infty} \int_a^T f(x) dx$$

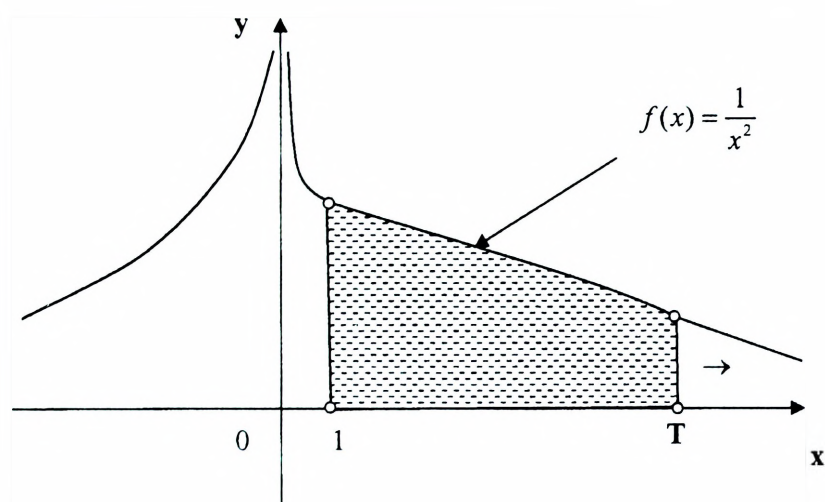


oraz
$$\int_{-\infty}^b f(x) dx \stackrel{df}{=} \lim_{T \rightarrow -\infty} \int_T^b f(x) dx$$



Przykład 17

Obliczyć $\int_1^{+\infty} \frac{1}{x^2} dx$

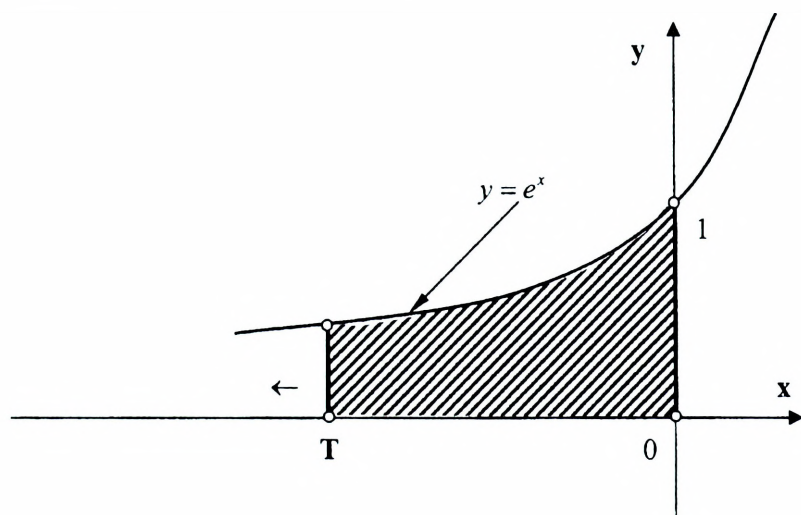


Mamy

$$\begin{aligned} \int_1^{+\infty} \frac{1}{x^2} dx &= \lim_{T \rightarrow +\infty} \int_1^T \frac{1}{x^2} dx = \lim_{T \rightarrow +\infty} \int_1^T x^{-2} dx = \lim_{T \rightarrow +\infty} \left. \frac{x^{-1}}{-1} \right|_1^T = \lim_{T \rightarrow +\infty} \left(-\frac{1}{x} \right) \Big|_1^T = \lim_{T \rightarrow +\infty} \left(-\left(\frac{1}{T} - \frac{1}{1} \right) \right) = \\ &= \lim_{T \rightarrow +\infty} \left(1 - \frac{1}{T} \right) = \lim_{T \rightarrow +\infty} 1 - \lim_{T \rightarrow +\infty} \frac{1}{T} = 1 \end{aligned}$$

Przykład 18

Obliczyć $\int_{-\infty}^0 e^x dx$



$$\int_{-\infty}^0 e^x dx = \lim_{T \rightarrow -\infty} \int_T^0 e^x dx = \lim_{T \rightarrow -\infty} \left(e^x \right) \Big|_T^0 = \lim_{T \rightarrow -\infty} (e^0 - e^T) = \lim_{T \rightarrow -\infty} (1 - e^T) = 1 - \lim_{T \rightarrow -\infty} e^T = 1$$

Przykład 19

Obliczyć $\int_2^{+\infty} \frac{1}{x \ln x} dx$

Mamy:

$$\int_2^{+\infty} \frac{1}{x \ln x} dx = \lim_{T \rightarrow +\infty} \int_2^T \frac{1}{x \ln x} dx = \left. \begin{array}{l} \ln x = t \\ \frac{1}{x} dx = dt \end{array} \right\}$$

x	2	T
t	ln2	lnT

$$= \lim_{T \rightarrow +\infty} \int_{\ln 2}^{\ln T} \frac{1}{t} dt = \lim_{T \rightarrow +\infty} \left(\ln t \Big|_{\ln 2}^{\ln T} \right) = \lim_{T \rightarrow +\infty} (\ln \ln T - \ln \ln 2) = +\infty$$

Przykład 20

Obliczyć $\int_1^{+\infty} x e^{-x} dx$

$$\int_1^{+\infty} x e^{-x} dx = \lim_{T \rightarrow +\infty} \int_1^T x e^{-x} dx = \left. \begin{array}{l} f(x) = x \quad f'(x) = 1 \\ g'(x) = e^{-x} \quad g(x) = -e^{-x} \end{array} \right\} =$$

$$= \lim_{T \rightarrow +\infty} \left(-x e^{-x} \Big|_1^T + \int_1^T e^{-x} dx \right) = \lim_{T \rightarrow +\infty} \left(-T e^{-T} + \frac{1}{e} - e^{-x} \Big|_1^T \right) = \lim_{T \rightarrow +\infty} \left(-T e^{-T} + \frac{1}{e} - (e^{-T} - \frac{1}{e}) \right) =$$

$$= \lim_{T \rightarrow +\infty} \left(-T e^{-T} + \frac{1}{e} - \frac{1}{e^T} + \frac{1}{e} \right) = \frac{2}{e} - \lim_{T \rightarrow +\infty} \frac{1}{e^T} - \lim_{T \rightarrow +\infty} \frac{T}{e^T} = \frac{2}{e} \text{ gdyż}$$

$$\lim_{T \rightarrow +\infty} \frac{1}{e^T} = 0, \text{ zaś}$$

$$\lim_{T \rightarrow +\infty} \frac{T}{e^T} \stackrel{\infty}{=} \lim_{H \rightarrow +\infty} \frac{1}{e^H} = 0$$

Jeżeli któraś z granic przedziału, w którym odbywa się całkowanie jest typu plus lub minus nieskończoność ($+\infty$), to taką całkę nazywamy całką niewłaściwą pierwszego rodzaju.

Całka niewłaściwa drugiego rodzaju występuje wówczas, gdy całkowanie odbywa się w przedziale skończonym $\langle a, b \rangle$, natomiast funkcja $f(x)$ na jednym z krańców przedziału

dąży do plus lub minus nieskończoności. Mamy zatem dwa następujące wzory do obliczania tego typu całek

$$\int_a^b f(x) dx = \lim_{c \rightarrow b^-} \int_a^c f(x) dx$$

lub
$$\int_a^b f(x) dx = \lim_{c \rightarrow a^+} \int_c^b f(x) dx$$

Przykład 21

Obliczyć: $\int_0^1 \frac{1}{x} dx$

Mamy:

$$\int_0^1 \frac{1}{x} dx = \lim_{c \rightarrow 0^+} \int_c^1 \frac{1}{x} dx = \lim_{c \rightarrow 0^+} (\ln|x| \Big|_c^1) = \lim_{c \rightarrow 0^+} (\ln 1 - \ln c) = 0 - \lim_{c \rightarrow 0^+} \ln c = +\infty$$

Przykład 22

Obliczyć: $\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{1-x}}$ $\lim_{c \rightarrow 1^-} \int_0^c \frac{dx}{\sqrt{1-x}} = \int_0^c \frac{dx}{\sqrt{1-x}}$

$\left. \begin{array}{l} 1-x=t \\ -dx=dt \\ dx=-dt \end{array} \right\}$

x	0	c
t	1	1-c

$$\lim_{c \rightarrow 1^-} \left(- \int_1^{1-c} \frac{dt}{\sqrt{t}} \right) = \lim_{c \rightarrow 1^-} \int_{1-c}^1 t^{-\frac{1}{2}} dt = \lim_{c \rightarrow 1^-} \left(\frac{t^{\frac{1}{2}}}{\frac{1}{2}} \Big|_{1-c}^1 \right) = \lim_{c \rightarrow 1^-} (2\sqrt{t} \Big|_{1-c}^1) = \lim_{c \rightarrow 1^-} (2(1 - \sqrt{1-c})) =$$

$$= \lim_{c \rightarrow 1^-} (2 - 2\sqrt{1-c}) = 2 - 2 \lim_{c \rightarrow 1^-} \sqrt{1-c} = 2$$

Zadania:

1. Obliczyć całkę nieoznaczoną:

a) $\int \left(x^5 - 3x^2 + \sqrt{2x} - \frac{1}{x} \right) dx$

b) $\int \frac{3x^3 - x + 1}{2x} dx$

c) $\int \left(\sqrt[3]{5x} + \frac{1}{\sqrt{x}} - \operatorname{tg} \frac{\pi}{4} \right) dx$

d) $\int x^3 e^x dx$

e) $\int \sin(5x - 3) dx$

f) $\int \frac{x+1}{x-1} dx$

g) $\int e^{-5x} dx$

h) $\int \ln x dx$

i) $\int x \sin x^2 dx$

j) $\int \sin 5x dx$

k) $\int x e^{-x^2} dx$

l) $\int (2x + 3)^6 dx$

m) $\int \frac{e^{2x}}{e^x - 1} dx$

n) $\int \frac{e^x - 1}{e^{2x}} dx$

o) $\int \frac{3x + 4}{2x^2 - x + 1} dx$

p) $\int \frac{3x - 2}{2x^2 - x - 1} dx$

r) $\int x \ln(3x + 2) dx$

s) $\int \cos^2 x dx$

t) $\int \operatorname{tg}^2 x dx$

u) $\int (x-1)e^{\frac{-x^2}{2}+x} dx$

w) $\int x^2 \cos x^3 dx$

2. Obliczyć całkę oznaczoną:

a) $\int_0^2 x \sqrt[3]{3x+2} dx$

b) $\int_0^4 2\sqrt{2x+1} dx$

c) $\int_1^e x^2 \ln x dx$

d) $\int_{-\pi}^0 \cos(2x+3) dx$

e) $\int_0^1 (t^3 - t^2 + \sqrt{t}) dt$

f) $\int_2^0 e^{-x} dx$

g) $\int_1^2 (x - x^3) dx$

h) $\int_0^2 x^2 \sqrt{4-x^2} dx$

i) $\int_0^4 \frac{dx}{1+\sqrt{x}}$

j) $\int_1^e \frac{\sin(\ln x)}{x} dx$

k) $\int_{-1}^1 \frac{z^5}{z+2} dz$

l) $\int_0^2 \frac{dx}{\sqrt{x}(1+\sqrt[3]{x})}$

m) $\int_0^{\pi} e^x \sin x dx$

3. Obliczyć pole powierzchni zawartej pomiędzy wykresami funkcji

- | | | |
|--------------------------|---|--------------------------------|
| a) $f(x) = x^3$ | i | $g(x) = 4x$ |
| b) $f(x) = x^2$ | i | $g(x) = \sqrt{x}$ |
| c) $f(x) = x^2$ | i | prostą $x = 1$ oraz osią 0_x |
| d) $f(x) = x^2$ | i | $g(x) = 9$ |
| e) $f(x) = -x^2 + 4$ | i | $g(x) = x^2$ |
| f) $y = -x^2$, a prostą | | $y = 3x$ |
| g) $y = x^2 - 7x + 10$ | | $y = 5 - x$ |
| h) $f(x) = (x - 1)^2$ | | $g(x) = -x + 1$ |

4. Obliczyć pole powierzchni ograniczonej łukiem krzywej $y = 2 - x^2$ i osią 0_x .

5. Obliczyć pole powierzchni zawartej pomiędzy krzywymi $y = x^3$; $y = \frac{1}{x}$ osią 0_x i prostą

o równaniu $x = e$

6. Obliczyć pole figury płaskiej określonej nierównościami

$$\begin{cases} 1 \leq x \leq 10 \\ 0 \leq y \leq \ln x \end{cases}$$

7. Obliczyć pole powierzchni zawartej pomiędzy wykresem funkcji $f(x) = e^x$, $y = e$ oraz osią 0_y .

8. Obliczyć całki niewłaściwe

- a) $\int_{-\infty}^{-1} x^{-3} dx$
- b) $\int_1^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{x}} dx$
- c) $\int_0^{+\infty} x e^{-x^2} dx$
- d) $\int_0^{+\infty} 5e^{-2x} dx$
- e) $\int_{-\infty}^2 x e^{2-x} dx$
- f) $\int_0^{+\infty} e^{-100x} dx$

8.

MACIERZE, WYZNACZNIKI, OPERACJE ELEMENTARNE

8.1.

MACIERZE I DZIAŁANIA NA MACIERZACH

Definicja

Macierzą o m wierszach i n kolumnach nazywamy tablicą postaci

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & & & \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{bmatrix}$$

gdzie dla każdego $i = 1, 2, \dots, m$ oraz $j = 1, 2, \dots, n$ symbole a_{ij} oznaczają liczby

Macierze oznaczamy dużymi literami np. A, B, C , a macierz $A_{m \times n}$ ma m wierszy, n kolumn i składa się z $m \cdot n$ elementów.

Na macierzach możemy wykonywać następujące operacje:

a) transponowanie

Macierzą transponowaną macierzy A nazywamy macierz oznaczoną A^T , której kolejne wiersze są kolejnymi kolumnami macierzy A .

Operacja transponowania polega na zapisaniu kolumn macierzy A jako wierszy macierzy A^T .

Jeśli $A_{m \times n}$ to $A^T_{n \times m}$

Przykład 1

Niech

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & -1 \end{bmatrix} \quad \text{wówczas} \quad A^T = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 1 \\ 3 & -1 \end{bmatrix}$$

b) mnożenie macierzy przez liczbę

Operacja ta odbywa się w taki sposób, że każdy element macierzy A zostaje pomnożony przez stałą.

Jeżeli macierz A jest o wymiarach $m \times n$, $c \in \mathbb{R}$, to możemy utworzyć macierz $c \cdot A$

$$c \cdot A = [c \cdot a_{ij}]_{m \times n} \quad \text{gdzie} \quad \begin{array}{l} i = 1, 2, \dots, m \\ j = 1, 2, \dots, n \end{array}$$

Przykład 2

Niech

$$A = \begin{bmatrix} 3 & -1 \\ 2 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \text{ oraz } c = 3, \text{ wówczas}$$

$$c \cdot A = 3A = 3 \cdot \begin{bmatrix} 3 & -1 \\ 2 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 9 & -3 \\ 6 & 0 \\ 3 & 3 \end{bmatrix}$$

Mnożenie macierzy przez liczbę spełnia warunki:

$$(c+e)A = cA + eA$$

$$c(A+B) = cA + cB$$

c) dodawanie macierzy

Dodawanie macierzy jest wykonalne tylko wtedy, gdy macierze A i B są jednakowych wymiarów.

Jeżeli macierze A i B są macierzami o wymiarach $m \times n$, to możemy utworzyć macierz

$$C = A + B = [c_{ij}] \text{ gdzie } c_{ij} = a_{ij} + b_{ij} \text{ dla}$$

$$i = 1, 2, \dots, m$$

$$j = 1, 2, \dots, n$$

Przykład 3

Niech

$$A = \begin{bmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 1 & 2 & 3 \end{bmatrix}$$

$$B = \begin{bmatrix} 2 & 4 & -1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 2 \end{bmatrix} \text{ wówczas } C = A + B = \begin{bmatrix} 5 & 6 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 3 & 3 & 5 \end{bmatrix}$$

d) mnożenie macierzy przez macierz

Mnożenie macierzy przez macierz także nie zawsze jest wykonalne. Wykonalne jest tylko wówczas, gdy ilość kolumn macierzy A jest równa ilości wierszy macierzy B .

Jeśli macierz A jest macierzą o wymiarach $m \times n$, zaś macierz B jest macierzą o wymiarach $n \times k$, to możemy utworzyć macierz

$$A \cdot B = C = [c_{ij}] \quad \begin{array}{l} i = 1, 2, \dots, m \\ j = 1, 2, \dots, k \end{array} \quad \text{gdzie}$$

$$c_{ij} = a_{i1} \cdot b_{1j} + a_{i2} \cdot b_{2j} + \dots + a_{in} \cdot b_{nj}$$

Inaczej mówiąc c_{ij} jest iloczynem skalarnym i -tej wiersza macierzy A i j -tej kolumny macierzy B .

Przykład 4

Niech

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & -1 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ -2 & -1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$$

wówczas iloczyn $A \cdot B$ będzie macierzą o wymiarach 2×2 .

Mamy

$$c_{11} = 1 \cdot 3 + 2 \cdot (-2) + 3 \cdot 1 = 3 - 4 + 3 = 2$$

$$c_{12} = 1 \cdot 1 + 2 \cdot (-1) + 3 \cdot 2 = 1 - 2 + 6 = 5$$

$$c_{21} = 0 \cdot 3 + 1 \cdot (-1) + (-1) \cdot 2 = -1 - 2 = -3$$

$$c_{22} = 0 \cdot 1 + 1 \cdot (-1) + (-1) \cdot 2 = -1 - 2 = -3$$

zatem

$$AB = \begin{bmatrix} 2 & 5 \\ -3 & -3 \end{bmatrix}$$

Iloczyn macierzy nie jest przemienny, tzn. ogólnie

$$AB \neq BA$$

Natomiast prawdziwa jest rozdzielność mnożenia macierzy względem dodawania, czyli

$$(A + B)C = AC + BC$$

oraz

$$A(B + C) = AB + AC$$

Macierz mającą n wierszy i n kolumn nazywamy **macierzą kwadratową** stopnia n .
 Układ jej współczynników $a_{11}, a_{22}, \dots, a_{nn}$ nazywamy **główną przekątną**.

Wśród macierzy kwadratowych wyróżnia się:

- **macierz symetryczną** – gdy $a_{ij} = a_{ji}$ dla $i \neq j$ ($i, j = 1, 2, \dots, n$)

(macierz symetryczna jest to taka macierz kwadratowa, dla której $A^T = A$)

- **macierz jednostkową** I_n , jest to taka macierz, która ma na głównej przekątnej jedynki, a pozostałe elementy to same zera

na przykład

$$I_2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad I_3 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

a zatem macierz A nazywamy macierzą jednostkową, gdy

$$a_{ij} = \begin{cases} 0 & \text{dla } i \neq j \\ 1 & \text{dla } i = j \end{cases} \quad i, j = 1, 2, \dots, n$$

- **macierz diagonalną** – wówczas, gdy wszystkie jej współczynniki poza główną przekątną są równe zero. Macierz jednostkowa jest szczególnym przypadkiem macierzy diagonalnej, a macierz diagonalna jest szczególnym przypadkiem macierzy symetrycznej.

Macierz o wymiarach $m \times 1$, czyli macierz o jednej kolumnie nazywamy **wektorem kolumnowym** lub wektorem. Macierz o wymiarach $1 \times n$ (czyli macierz o jednym wierszu) nazywamy **wektorem wierszowym**. Wektory oznaczamy małymi literami alfabetu, np.

$$a = \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_m \end{bmatrix} \quad \text{lub} \quad b = [b_1 \quad b_2 \quad \dots \quad b_n]$$

8.2.

WYZNACZNIK MACIERZY KWADRATOWEJ

Zdefiniujemy pewną liczbę przypisaną macierzy kwadratowej A zwaną **wyznacznikiem**.

W skrócie oznacza się ją „ $\det A$ ” lub „ $|A|$ ”.

1° Jeżeli $A_{1 \times 1} = [a_{11}]$ to $\det A = a_{11}$

2° Jeżeli $A_{2 \times 2} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix}$ to $\det A = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}$

3° Jeżeli $A_{3 \times 3} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix}$ to

$$\det A = a_{11}a_{22}a_{33} + a_{13}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32} - a_{13}a_{22}a_{31} - a_{11}a_{23}a_{32} - a_{12}a_{21}a_{33}$$

Przykład 5

Obliczyć wyznacznik macierzy $A = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 5 & 4 \end{bmatrix}$

$$\det A = \det \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 5 & 4 \end{bmatrix} = 2 \cdot 4 - 3 \cdot 5 = -7$$

Przykład 6

Obliczyć wyznacznik macierzy $A = \begin{bmatrix} 2 & 3 & -1 \\ 5 & 4 & 2 \\ 1 & 2 & 1 \end{bmatrix}$

Zgodnie ze wzorem za pomocą którego obliczamy wyznacznik macierzy stopnia trzeciego mamy

$$\begin{aligned} \det A &= \det \begin{bmatrix} 2 & 3 & -1 \\ 5 & 4 & 2 \\ 1 & 2 & 1 \end{bmatrix} = 2 \cdot 4 \cdot 1 + 3 \cdot 2 \cdot 1 + (-1) \cdot 5 \cdot 2 - (-1) \cdot 4 \cdot 1 - 2 \cdot 2 \cdot 2 - 3 \cdot 5 \cdot 1 = \\ &= 8 + 6 - 10 + 4 - 8 - 15 = -15 \end{aligned}$$

W przypadku macierzy stopnia trzeciego wzór za pomocą którego obliczyliśmy wyznacznik nie jest prosty do zapamiętania. Istnieje prostszy (graficzny) schemat, według którego łatwiej taki wyznacznik obliczyć. Schemat ten dotyczy tylko wyznacznika stopnia trzeciego i zwany jest *metodą Sarrusa*.

W przypadku stosowania tej metody sposób postępowania jest następujący.

1. Do macierzy z prawej strony dopisujemy dwie pierwsze kolumny.
2. Rysujemy trzy równoległe linie ukośne od lewego górnego rogu do prawego dolnego oraz trzy równoległe linie ukośne od prawego górnego elementu do lewego dolnego (jak na poniższym rysunku).

$$\det A = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{31} & a_{32} \end{vmatrix} =$$

3. Mnożymy przez siebie współczynniki na liniach ukośnych i wyniki bierzemy ze znakiem plus w przypadku linii ciągłych i ze znakiem minus dla linii przerywanych.
4. Dodajemy do siebie sześć liczb uzyskanych w p. 3.

Przykład 7

Niech

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -2 & 3 \\ 2 & 0 & 1 \\ -2 & 4 & 5 \end{bmatrix} \quad \text{Obliczyć } \det A$$

$$\det A = \begin{vmatrix} 1 & -2 & 3 & 1 & -2 \\ 2 & 0 & 1 & 2 & 0 \\ -2 & 4 & 5 & -2 & 4 \end{vmatrix} =$$

$$= 1 \cdot 0 \cdot 5 + (-2) \cdot 1 \cdot (-2) + 3 \cdot 2 \cdot 4 - 3 \cdot 0 \cdot (-2) - 1 \cdot 1 \cdot 4 - (-2) \cdot 2 \cdot 5 = 4 + 24 - 4 + 20 = 44$$

Aby obliczyć wyznacznik macierzy stopnia wyższego niż trzeci wykorzystujemy **wzór**

Laplace'a

$$\det A = \sum_{j=1}^n (-1)^{ij} a_{ij} \det A_{ij}$$

lub równoznaczny

$$\det A = \sum_{i=1}^n (-1)^{ij} a_{ij} \det A_{ij}$$

Pierwszy z nich jest rozwinięciem względem i – tego wiersza, drugi rozwinięciem względem j – tej kolumny. Niezależnie od wyboru wiersza lub kolumny rozwinięcie Laplace'a zawsze daje taki sam wynik.

Występujący we wzorze Laplace'a czynnik

$$(-1)^{ij} \det A_{ij}$$

nazywamy dopełnieniem algebraicznym wyrazu a_{ij} macierzy kwadratowej A i oznaczamy symbolem a_{ij}^D

zatem

$$a_{ij}^D = (-1)^{i+j} \det A_{ij}$$

gdzie A_{ij} oznacza macierz powstałą z macierzy A poprzez wykreślenie i -tego

wiersza i j -tej kolumny

Przykład 8

Obliczyć wyznacznik macierzy $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 0 \\ 3 & 2 & 4 & -2 \\ 1 & 0 & 2 & 3 \\ 3 & 2 & 2 & 0 \end{bmatrix}$

Według wzoru Laplace'a dokonamy rozwinięcia wyznacznika według czwartej kolumny (wybieramy taki wiersz lub kolumnę, w której występuje jak największa liczba zer).

Mamy:

$$\begin{aligned} \det A &= 0 \cdot (-1)^{1+4} \cdot \begin{vmatrix} 3 & 2 & 4 \\ 1 & 0 & 2 \\ 3 & 2 & 2 \end{vmatrix} - 2 \cdot (-1)^{2+4} \cdot \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 0 & 2 \\ 3 & 2 & 2 \end{vmatrix} + 3 \cdot (-1)^{3+4} \cdot \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 2 & 4 \\ 3 & 2 & 2 \end{vmatrix} + \\ &+ 0 \cdot (-1)^{4+4} \cdot \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 2 & 4 \\ 1 & 0 & 2 \end{vmatrix} = -2 \cdot 10 - 3 \cdot 8 = -20 - 24 = -44 \end{aligned}$$

Własności wyznaczników

1. $\det A^T = \det A$
2. Jeżeli macierz kwadratowa ma w pewnym wierszu (kolumnie) same zera, to $\det A = 0$
3. Jeżeli dwa wiersze (kolumny) macierzy A są proporcjonalne, to $\det A = 0$
4. $\det(A \cdot B) = \det A \cdot \det B$
5. Wyznacznik macierzy jednostkowej dowolnego stopnia jest równy jeden $\det I = 1$
6. Jeżeli macierz kwadratową A stopnia n pomnożymy przez stałą α , to $\det(\alpha A) = \alpha^n \det A$

Macierz kwadratową A nazywamy **osobliwą**, jeżeli $\det A = 0$.

Macierz kwadratową A nazywamy **niosobliwą**, jeżeli $\det A \neq 0$.

8.3.

MACIERZ ODWROTNA

Macierz odwrotną do macierzy kwadratowej A nazywamy macierz A^{-1} spełniającą warunek

$$A \cdot A^{-1} = A^{-1} \cdot A = I$$

Macierz odwrotna istnieje tylko wtedy, gdy macierz A jest nieosobliwa.

Wyznaczenie macierzy odwrotnej przebiega według następującego schematu:

- 1°. Obliczamy $\det A$, aby przekonać się czy istnieje macierz odwrotna
- 2°. Wyznaczamy macierz dopełnień algebraicznych

$$A^D = \begin{bmatrix} d_{11} & d_{12} & \dots & d_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \dots & \dots & \dots \\ d_{n1} & d_{n2} & \dots & d_{nn} \end{bmatrix} \quad \text{gdzie } d_{ij} = (-1)^{i+j} \cdot \det A_{ji}$$

- 3°. Dokonujemy transponowania macierzy dopełnień algebraicznych. Tworzymy $[A^D]^T$

- 4°. Korzystamy ze wzoru $A^{-1} = \frac{1}{\det A} \cdot [A^D]^T$

Przykład 9

Wyznaczyć macierz odwrotną do macierzy $A = \begin{bmatrix} 2 & 4 \\ -1 & 3 \end{bmatrix}$ i sprawdzić otrzymany wynik

- 1°. Obliczamy $\det A = \begin{vmatrix} 2 & 4 \\ -1 & 3 \end{vmatrix} = 6 - (-4) = 10$

$$2°. \quad \begin{aligned} d_{11} &= (-1)^{1+1} \cdot 3 = 3 & d_{12} &= (-1)^{1+2} \cdot (-1) = 1 \\ d_{21} &= (-1)^{2+1} \cdot 4 = -4 & d_{22} &= (-1)^{2+2} \cdot 2 = 2 \end{aligned}$$

Zatem

$$A^D = \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ -4 & 2 \end{bmatrix}$$

- 3°. $[A^D]^T = \begin{bmatrix} 3 & -4 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$

$$4^{\circ} \quad A^{-1} = \frac{1}{10} \begin{bmatrix} 3 & -4 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{3}{10} & \frac{-4}{10} \\ \frac{1}{10} & \frac{2}{10} \end{bmatrix}$$

Aby sprawdzić otrzymany wynik wykonujemy mnożenie

$$A \cdot A^{-1} = \begin{bmatrix} 2 & 4 \\ -1 & 3 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \frac{3}{10} & \frac{-4}{10} \\ \frac{1}{10} & \frac{2}{10} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{6}{10} + \frac{4}{10} & \frac{-8}{10} + \frac{8}{10} \\ \frac{-3}{10} + \frac{3}{10} & \frac{4}{10} + \frac{6}{10} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Otrzymany rezultat świadczy o prawidłowości wcześniejszych obliczeń.

Przykład 10

Wyznaczyć macierz odwrotną do macierzy $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & -1 & -2 \\ 2 & 1 & 3 \end{bmatrix}$ i sprawdzić otrzymany wynik

$$1^{\circ} \quad \det A = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & -1 & -2 \\ 2 & 1 & 3 \end{vmatrix} = -3 - 8 + 6 + 6 - 12 = -9$$

$$2^{\circ} \quad d_{11} = (-1)^2 \cdot \begin{vmatrix} -1 & -2 \\ 1 & 3 \end{vmatrix} = -3 + 2 = -1 \qquad d_{23} = (-1)^5 \cdot \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} = -(1 - 4) = 3$$

$$d_{12} = (-1)^3 \cdot \begin{vmatrix} 2 & -2 \\ 1 & 3 \end{vmatrix} = -(6 + 4) = -10 \qquad d_{31} = (-1)^4 \cdot \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ -1 & -2 \end{vmatrix} = -4 + 3 = -1$$

$$d_{13} = (-1)^4 \cdot \begin{vmatrix} 2 & -1 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} = 2 + 2 = 4 \qquad d_{32} = (-1)^5 \cdot \begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 2 & -2 \end{vmatrix} = -(-2 - 6) = 8$$

$$d_{21} = (-1)^3 \cdot \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 3 \end{vmatrix} = -(6 - 3) = -3 \qquad d_{33} = (-1)^6 \cdot \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 2 & -1 \end{vmatrix} = -1 - 4 = -5$$

$$d_{22} = (-1)^4 \cdot \begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 3 \end{vmatrix} = 3 - 6 = -3$$

Mamy zatem

$$A^D = \begin{bmatrix} -1 & -10 & 4 \\ -3 & -3 & 3 \\ -1 & 8 & -5 \end{bmatrix}$$

$$3^{\circ}. \quad [A^D]^{-T} = \begin{bmatrix} -1 & -3 & -1 \\ -10 & -3 & 8 \\ 4 & 3 & -5 \end{bmatrix}$$

$$4^{\circ}. \quad A^{-1} = -\frac{1}{9} \begin{bmatrix} -1 & -3 & -1 \\ -10 & -3 & 8 \\ 4 & 3 & -5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{9} & \frac{3}{9} & \frac{1}{9} \\ \frac{10}{9} & \frac{3}{9} & \frac{-8}{9} \\ \frac{-4}{9} & \frac{-3}{9} & \frac{5}{9} \end{bmatrix}$$

Sprawdzenie otrzymanego rezultatu

$$A \cdot A^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & -1 & -2 \\ 2 & 1 & 3 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \frac{1}{9} & \frac{3}{9} & \frac{1}{9} \\ \frac{10}{9} & \frac{3}{9} & \frac{-8}{9} \\ \frac{-4}{9} & \frac{-3}{9} & \frac{5}{9} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Macierz odwrotna posiada następujące własności

$$1^{\circ}. \quad [A^{-1}]^{-1} = A$$

$$2^{\circ}. \quad [AB]^{-1} = B^{-1} \cdot A^{-1}$$

$$3^{\circ}. \quad [A^T]^{-1} = [A^{-1}]^T$$

$$4^{\circ}. \quad \det A^{-1} = \frac{1}{\det A}$$

8.4.

OPERACJE ELEMENTARNE

Operacje elementarne⁽¹⁾ wykonywane są na wierszach macierzy. Są trzy typy takich operacji:

1. zamiana miejscami dwóch wierszy,
2. mnożenie wybranego wiersza przez liczbę różną od zera,
3. dodanie do wybranego wiersza innego jej wiersza pomnożonego przez liczbę różną od zera.

¹ Więcej informacji dotyczących operacji elementarnych znajdzie Czytelnik [w:] Matematyka, praca zbiorowa; J. Kłopotowski, W. Marcinkowska – Lewandowska, M. Nykowska, I. Nykowski, wyd. SGH, Warszawa 1999, rozdział V.

W wyniku wykonywania operacji elementarnych uzyskujemy macierze równoważne, co zapisujemy $A \sim B$.

Celem operacji elementarnych jest przekształcenie wybranej kolumny w odpowiedni wektor jednostkowy zwany wersorem.

Posiadają one postać:

$$e_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}; \quad e_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}; \quad \dots \dots \dots e_n = \begin{bmatrix} 0 \\ \vdots \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

Postać bazowa (kanoniczną) macierzy A nazywamy jej macierz równoważną o maksymalnej liczbie kolumn, będących różnymi wektorami jednostkowymi.

Maksymalną liczbę różnych wektorów jednostkowych występujących jako kolumny w postaci bazowej macierzy A nazywamy **rzędem macierzy A** i oznaczamy rz A .

Przykład 11.

Dana jest macierz:

$$A = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 3 & 2 \\ -1 & 2 & 0 & 3 \\ 2 & 1 & -1 & 2 \end{bmatrix}$$

Wyznaczyć postać bazową i rząd macierzy A .

Korzystamy z przekształceń elementarnych.

$$\begin{bmatrix} 2 & -1 & 3 & 2 \\ -1 & 2 & 0 & 3 \\ 2 & 1 & -1 & 2 \end{bmatrix} \begin{matrix} w_1 := w_2 \\ w_2 := w_1 \\ \sim \end{matrix} \begin{bmatrix} -1 & 2 & 0 & 3 \\ 2 & -1 & 3 & 2 \\ 2 & 1 & -1 & 2 \end{bmatrix} \begin{matrix} w_1 := -w_1 \\ \sim \\ w_3 := w_3 - 2w_1 \end{matrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & -2 & 0 & -3 \\ 2 & -1 & 3 & 2 \\ 2 & 1 & -1 & 2 \end{bmatrix} \begin{matrix} \sim \\ w_2 := w_2 - 2w_1 \\ w_3 := w_3 - 2w_1 \end{matrix}$$

$$\sim \begin{bmatrix} 1 & -2 & 0 & -3 \\ 0 & 3 & 3 & 8 \\ 0 & 5 & -1 & 8 \end{bmatrix} \begin{matrix} \sim \\ w_2 := 2w_2 \\ \sim \end{matrix} \begin{bmatrix} 1 & -2 & 0 & -3 \\ 0 & 6 & 6 & 16 \\ 0 & 5 & -1 & 8 \end{bmatrix} \begin{matrix} \sim \\ w_2 := w_2 - w_3 \end{matrix}$$

$$\sim \begin{bmatrix} 1 & -2 & 0 & -3 \\ 0 & 1 & 7 & 8 \\ 0 & 5 & -1 & 8 \end{bmatrix} \begin{matrix} w_1 := w_1 + 2w_2 \\ \sim \\ w_3 := w_3 - 5w_2 \end{matrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 14 & 13 \\ 0 & 1 & 7 & 8 \\ 0 & 0 & -36 & -32 \end{bmatrix} \begin{matrix} \sim \\ w_3 := -\frac{1}{36}w_3 \end{matrix}$$

$$\sim \begin{bmatrix} 1 & 0 & 14 & 13 \\ 0 & 1 & 7 & 8 \\ 0 & 0 & 1 & \frac{8}{9} \end{bmatrix} \begin{array}{l} w_1 := w_1 - 14w_3 \\ w_2 := w_2 - 7w_3 \\ \sim \end{array} \begin{array}{l} \boxed{\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}} \begin{array}{l} \frac{8}{9} \\ \frac{16}{9} \\ \frac{8}{9} \end{array} \\ \uparrow \\ \text{baza} \end{array}$$

Przekształciliśmy w ten sposób macierz A do postaci bazowej. Rząd macierzy A jest równy 3 gdyż otrzymaliśmy trzy różne wersory e_1, e_2 i e_3 , co zapisujemy rz $A = 3$.

Przykład 12.

Za pomocą przekształceń elementarnych wyznaczyć macierz odwrotną do danej macierzy A

$$A = \begin{bmatrix} 3 & -1 & 2 \\ -1 & 0 & 4 \\ 2 & 2 & 3 \end{bmatrix}$$

W tym celu tworzymy macierz rozszerzoną $[A|I]$ o macierz jednostkową i za pomocą przekształceń elementarnych dokonujemy jej przekształcenia w taki sposób, aby po lewej stronie otrzymać macierz jednostkową, wówczas po prawej stronie będzie macierz odwrotna A^{-1} .

$$[A|I] = \underbrace{\begin{bmatrix} 3 & -1 & 2 \\ -1 & 0 & 4 \\ 2 & 2 & 3 \end{bmatrix}}_A \underbrace{\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}}_I \begin{array}{l} w_1 := w_2 \\ w_2 := w_1 \\ \sim \end{array} \begin{array}{l} \left[\begin{array}{ccc|ccc} -1 & 0 & 4 & 0 & 1 & 0 \\ 3 & -1 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 3 & 2 & 3 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right] w_1 := -w_1 \\ \sim \end{array}$$

$$\left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & -4 & 0 & -1 & 0 \\ 3 & -1 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 3 & 2 & 3 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right] \begin{array}{l} w_2 := w_2 - 3w_1 \\ w_3 := w_3 - 2w_1 \\ \sim \end{array} \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & -4 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 14 & 1 & 3 & 0 \\ 0 & 2 & 11 & 0 & 2 & 1 \end{array} \right] w_2 := w_2$$

$$\left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & -4 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -14 & -1 & -3 & 0 \\ 0 & 2 & 11 & 0 & 2 & 1 \end{array} \right] w_3 := w_3 - 2w_2 \sim \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & -4 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -14 & -1 & -3 & 0 \\ 0 & 0 & 39 & 2 & 8 & 1 \end{array} \right] w_3 := \frac{1}{39}w_3$$

$$\left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & -4 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -14 & -1 & -3 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \frac{2}{39} & \frac{8}{39} & \frac{1}{39} \end{array} \right] \begin{array}{l} w_1 := w_1 + 4w_3 \\ w_2 := w_2 + 14w_3 \\ \sim \end{array} \underbrace{\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}}_I \underbrace{\begin{bmatrix} \frac{8}{39} & -\frac{7}{39} & \frac{4}{39} \\ -\frac{11}{39} & -\frac{5}{39} & \frac{14}{39} \\ \frac{2}{39} & \frac{8}{39} & \frac{1}{39} \end{bmatrix}}_{A^{-1}}$$

otrzymaliśmy $A^{-1} = \begin{bmatrix} \frac{8}{39} & -\frac{7}{39} & \frac{4}{39} \\ -\frac{11}{39} & -\frac{5}{39} & \frac{14}{39} \\ \frac{2}{39} & \frac{8}{39} & \frac{1}{39} \end{bmatrix}$

Czytelnikowi pozostawiamy sprawdzenie mnożenia $A \cdot A^{-1}$.

8.5.

UKŁADY RÓWNAŃ LINIOWYCH

Rozpatrzmy ogólny przypadek m równań liniowych z n niewiadomymi

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \vdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \dots + a_{mn}x_n = b_m \end{cases}$$

Powyższy układ równań zapisać można w postaci równania macierzowego

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m1} & \dots & a_{mn} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{bmatrix}$$

Oznaczając

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m1} & \dots & a_{mn} \end{bmatrix} \quad X = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} \quad \text{oraz } b = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{bmatrix}$$

mamy równanie

$$A \cdot X = b$$

A - macierz główna (macierz współczynników) układu

b - wektor wyrazów wolnych

X - wektor niewiadomych

Przyjmijmy określenia:

Układ równań liniowych $AX = b$ który ma rozwiązania, nazywamy układem zgodnym (niesprzecznym).

Układ równań liniowych $AX = b$, dla którego nie istnieje ani jedno rozwiązanie, nazywamy układem sprzecznym.

Układ równań, w którym wektor wyrazów wolnych jest zerowym wektorem nazywamy układem jednorodnym, wówczas $AX = 0$.

Układ równań, w którym wektor wyrazów wolnych jest różny od wektora zerowego nazywamy układem niejednorodnym.

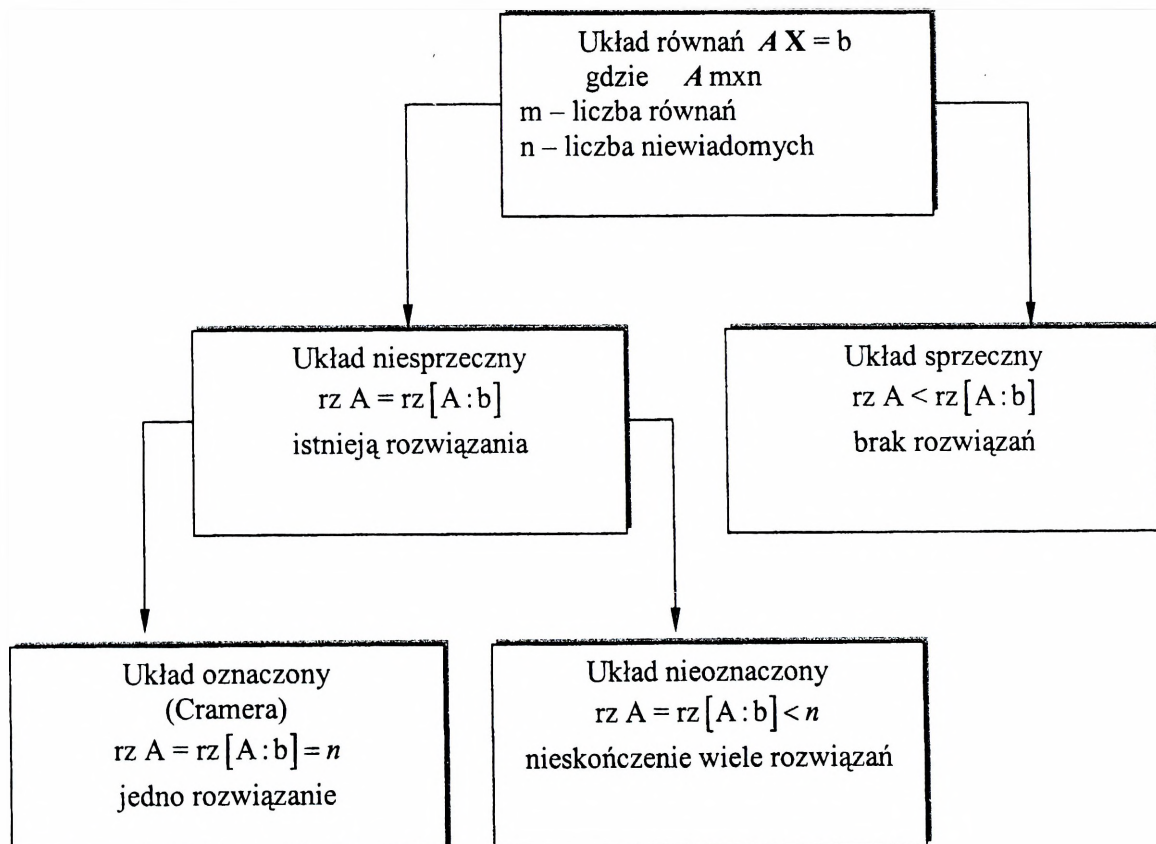
Macierz $[A : b]$ nazywamy macierzą rozszerzoną układu równań liniowych.

Układ $AX = b$ jest zgodny wtedy i tylko wtedy, gdy $\text{rz} [A : b] = \text{rz} A$.

Układ $AX = b$ jest spreczny, gdy $\text{rz} [A : b] > \text{rz} A$.

Rysunek 1 przedstawia różne przypadki dotyczące rozwiązalności układu równań liniowych.

Rysunek 1. Algorytm rozwiązalności układu równań liniowych



Źródło: Matematyka, praca zb., J. Kłopotowski, W. Marcinkowska-Lewandowska, M. Nykowska, I. Nykowski, SGH, Warszawa 1999, s. 184.

Przykład 13

Rozwiązać układ równań

$$\begin{cases} 2x_1 - x_3 = -1 \\ x_1 + 2x_2 + 3x_3 = 8 \\ -x_1 + 2x_2 - 2x_3 = -9 \end{cases}$$

Mamy:

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 0 & -1 \\ 1 & 2 & 3 \\ -1 & 2 & -2 \end{bmatrix} \quad X = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} \quad b = \begin{bmatrix} -1 \\ 8 \\ -9 \end{bmatrix}$$

$$m = 3; \quad n = 3$$

Układ równań zapisany w postaci równania macierzowego ma postać:

$$\begin{bmatrix} 2 & 0 & -1 \\ 1 & 2 & 3 \\ -1 & 2 & -2 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 \\ 8 \\ -9 \end{bmatrix}$$

$$[A:b] = \left[\begin{array}{ccc|c} 2 & 0 & -1 & -1 \\ 1 & 2 & 3 & 8 \\ -1 & 2 & -2 & -9 \end{array} \right]$$

Sprawdzamy, jaki jest rząd macierzy A oraz jaki jest rząd [A:b].

Mamy:

$$[A:b] = \left[\begin{array}{ccc|c} 2 & 0 & -1 & -1 \\ 1 & 2 & 3 & 8 \\ -1 & 2 & -2 & -9 \end{array} \right] \begin{matrix} w_1 := w_2 \\ w_2 := w_1 \\ \sim \end{matrix} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 3 & 8 \\ 2 & 0 & -1 & -1 \\ -1 & 2 & -2 & -9 \end{array} \right] \begin{matrix} \sim \\ w_2 := w_2 - 2w_1 \\ w_3 := w_3 + w_1 \end{matrix}$$

$$\sim \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 3 & 8 \\ 0 & -4 & -7 & -17 \\ 0 & 4 & 1 & -1 \end{array} \right] \begin{matrix} \sim \\ w_2 := -\frac{1}{4}w_2 \\ \sim \end{matrix} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 3 & 8 \\ 0 & -4 & \frac{7}{4} & \frac{17}{4} \\ 0 & 4 & 1 & -1 \end{array} \right] \begin{matrix} w_1 := w_1 - 2w_2 \\ \sim \\ w_3 := w_3 - 4w_2 \end{matrix}$$

$$\sim \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ 0 & 1 & \frac{7}{4} & \frac{17}{4} \\ 0 & 0 & -6 & -18 \end{array} \right] \begin{matrix} \sim \\ w_3 := -\frac{1}{6}w_3 \\ \sim \end{matrix} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ 0 & 1 & \frac{7}{4} & \frac{17}{4} \\ 0 & 0 & 1 & 3 \end{array} \right] \begin{matrix} w_1 := w_1 + \frac{1}{2}w_3 \\ w_2 := w_2 - \frac{7}{4}w_3 \end{matrix}$$

$$\sim \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \end{array} \right]$$

Zatem $\text{rz } A = 3$, $\text{rz } [A : b] = 3$, $n = 3$, mamy przypadek $\text{rz } A = \text{rz } [A : b] = n$, czyli układ równań jest układem Cramera i ma dokładnie jedno rozwiązanie

$$x_1 = 1, \quad x_2 = -1, \quad x_3 = 3.$$

W przypadku, gdy układ równań jest układem Cramera mamy jeszcze dwa inne sposoby rozwiązania go.

Sposób 2 (z wykorzystaniem wzorów Cramera)

Aby zastosować wzory Cramera tworzymy trzy macierze A_1 , A_2 i A_3 które powstają na bazie macierzy A w taki sposób, że

- w przypadku macierzy A_1 pierwszą kolumnę macierzy A zamieniamy na wektor b ;
- w przypadku macierzy A_2 - drugą kolumnę macierzy A zamieniamy na wektor b ;
- w przypadku macierzy A_3 - trzecią kolumnę macierzy A zamieniamy na wektor b ;

Następnie obliczamy cztery wyznaczniki, a mianowicie: $\det A$, $\det A_1$, $\det A_2$ oraz $\det A_3$.

Wzory Cramera stosujemy, gdy $\det A \neq 0$.

Są one następujące:

$$x_1 = \frac{\det A_1}{\det A}$$

$$x_2 = \frac{\det A_2}{\det A}$$

$$x_3 = \frac{\det A_3}{\det A}$$

W naszym przypadku mamy

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 0 & -1 \\ 1 & 2 & 3 \\ -1 & 2 & -2 \end{bmatrix} \quad A_1 = \begin{bmatrix} -1 & 0 & -1 \\ 8 & 2 & 3 \\ -9 & 2 & -2 \end{bmatrix} \quad A_2 = \begin{bmatrix} 2 & -1 & -1 \\ 1 & 8 & 3 \\ -1 & -9 & -2 \end{bmatrix} \quad A_3 = \begin{bmatrix} 2 & 0 & -1 \\ 1 & 2 & 8 \\ -1 & 2 & -9 \end{bmatrix}$$

$$\text{Mamy zatem } \det A = \begin{vmatrix} 2 & 0 & -1 \\ 1 & 2 & 3 \\ -1 & 2 & -2 \end{vmatrix} = -24$$

$$\det A_1 = \begin{vmatrix} -1 & 0 & -1 \\ 8 & 2 & 3 \\ -9 & 2 & -2 \end{vmatrix} = -24 \quad \det A_2 = \begin{vmatrix} 2 & -1 & -1 \\ 1 & 8 & 3 \\ -1 & -9 & -2 \end{vmatrix} = 24$$

$$\text{oraz } \det A_3 = \begin{vmatrix} 2 & 0 & -1 \\ 1 & 2 & 8 \\ -1 & 2 & -9 \end{vmatrix} = -72$$

Mamy zatem:

$$x_1 = \frac{-24}{-24} = 1 \quad x_2 = \frac{24}{-24} = -1 \quad x_3 = \frac{-72}{-24} = 3$$

Sposób 3 rozwiązania układu równań liniowych, który jest układem Cramera (gdy $\det A \neq 0$) – to sposób wykorzystujący macierz odwrotną A^{-1} .

W tym celu wyznaczamy macierz odwrotną A^{-1} , a następnie wykonujemy mnożenie $A^{-1} \cdot b$ i otrzymujemy rozwiązanie układu równań. Bazujemy na zależności $A \cdot A^{-1} = I$, a zatem układ równań

$$AX = b$$

mnożymy obustronnie przez A^{-1} i mamy

$$A^{-1} \cdot AX = A^{-1}b, \quad \text{stąd otrzymujemy}$$

$$X = A^{-1}b$$

W naszym przykładzie mamy

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 0 & -1 \\ 1 & 2 & 3 \\ -1 & 2 & -2 \end{bmatrix} \quad \det A = -24$$

$$A^D = \begin{bmatrix} -10 & -1 & 1 \\ -2 & -5 & -4 \\ 2 & -7 & 4 \end{bmatrix} \quad [A^D]^T = \begin{bmatrix} -10 & -2 & 1 \\ -1 & -5 & -7 \\ 4 & -4 & 4 \end{bmatrix}$$

$$\text{oraz } A^{-1} = \begin{bmatrix} \frac{10}{24} & \frac{2}{24} & -\frac{2}{24} \\ \frac{1}{24} & \frac{5}{24} & \frac{7}{24} \\ -\frac{4}{24} & \frac{4}{24} & -\frac{4}{24} \end{bmatrix}$$

$$\text{mamy } A^{-1} \cdot b = \begin{bmatrix} \frac{10}{24} & \frac{2}{24} & -\frac{2}{24} \\ \frac{1}{24} & \frac{5}{24} & \frac{7}{24} \\ -\frac{4}{24} & \frac{4}{24} & -\frac{4}{24} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1 \\ 8 \\ -9 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{-10+16+18}{24} \\ \frac{-1+40-63}{24} \\ \frac{4+32+36}{24} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 3 \end{bmatrix}$$

Odpowiedź: $x_1 = 1$, $x_2 = -1$, $x_3 = 3$.

Przykład 14

Rozwiązać układ równań:

$$\begin{cases} 3x_1 - x_2 + 2x_3 = 5 \\ 2x_1 + 3x_2 - x_3 = -2 \\ x_1 - 4x_2 + 3x_3 = 6 \end{cases}$$

$$[A:b] = \left[\begin{array}{ccc|c} 3 & -1 & 2 & 5 \\ 2 & 3 & -1 & -2 \\ 1 & -4 & 3 & 6 \end{array} \right] \begin{array}{l} w_1 := w_3 \\ \sim \\ w_3 := w_1 \end{array} \quad \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & -4 & 3 & 6 \\ 2 & 3 & -1 & -2 \\ 3 & -1 & 2 & 5 \end{array} \right] \begin{array}{l} \sim \\ w_2 := w_2 - 2w_1 \\ w_3 := w_3 - 3w_1 \end{array}$$

$$\sim \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & -4 & 3 & 6 \\ 0 & 11 & -7 & -14 \\ 0 & 11 & -7 & -13 \end{array} \right] \begin{array}{l} \sim \\ w_3 := w_3 - w_2 \end{array} \quad \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & -4 & 3 & 6 \\ 0 & 11 & -7 & -14 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right] \begin{array}{l} w_1 := w_1 - 6w_3 \\ w_2 := w_2 + 14w_3 \\ \sim \end{array}$$

$$\sim \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & -4 & 3 & 0 \\ 0 & 11 & -7 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right] \begin{array}{l} w_2 := \frac{1}{11} w_2 \\ \sim \end{array} \quad \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & -4 & 3 & 0 \\ 0 & 1 & -\frac{7}{11} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right] \begin{array}{l} w_1 := w_1 + 4w_2 \\ \sim \end{array}$$

$$\sim \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & \frac{5}{11} & 0 \\ 0 & 1 & -\frac{7}{11} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right]$$

Z powyższego wynika, że $\text{rz } A = 2$, natomiast $\text{rz } [A:b] = 3$, a więc mamy $\text{rz } A < \text{rz } [A:b]$, czyli układ równań jest sprzeczny i nie posiada rozwiązań.

Przykład 15

Rozwiązać układ równań:

$$\begin{cases} 2x_1 - x_2 + 3x_3 + x_4 = 2 \\ 3x_1 + 2x_2 - x_3 + 2x_4 = -2 \\ -x_1 + 3x_2 + 2x_3 - x_4 = 5 \end{cases}$$

$$[A:b] = \left[\begin{array}{cccc|c} 2 & -1 & 3 & 1 & 2 \\ 3 & 2 & -1 & 2 & -2 \\ -1 & 3 & 2 & -1 & 5 \end{array} \right] \begin{array}{l} w_1 := w_3 \\ \sim \\ w_3 := w_1 \end{array} \quad \left[\begin{array}{cccc|c} -1 & 3 & 2 & -1 & 5 \\ 3 & 2 & -1 & 2 & -2 \\ 2 & -1 & 3 & 1 & 2 \end{array} \right] \begin{array}{l} w_1 := -w_1 \\ \sim \end{array}$$

$$\sim \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & -3 & -2 & 1 & -5 \\ 3 & 2 & -1 & 2 & -2 \\ 2 & -1 & 3 & 1 & 2 \end{array} \right] \begin{array}{l} \sim \\ w_2 := w_2 - 3w_1 \\ w_3 := w_3 - 2w_1 \end{array} \quad \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & -3 & -2 & 1 & -5 \\ 0 & 11 & 5 & -1 & 13 \\ 0 & 5 & 7 & -1 & 12 \end{array} \right] \begin{array}{l} \sim \\ w_3 := 2w_3 \end{array}$$

$$\sim \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & -3 & -2 & 1 & -5 \\ 0 & 11 & 5 & -1 & 13 \\ 0 & 10 & 14 & -2 & 24 \end{array} \right] \begin{array}{l} \sim \\ w_2 := w_2 - w_3 \end{array} \quad \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & -3 & -2 & 1 & -5 \\ 0 & 1 & -9 & 1 & -11 \\ 0 & 10 & 14 & -2 & 24 \end{array} \right] \begin{array}{l} w_1 := w_1 + 3w_2 \\ \sim \\ w_3 := w_3 - 10w_2 \end{array}$$

$$\sim \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & -29 & 4 & -38 \\ 0 & 1 & -9 & 1 & -11 \\ 0 & 0 & 104 & -12 & 134 \end{array} \right] \begin{array}{l} \sim \\ w_3 := -\frac{1}{12}w_3 \end{array} \quad \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & -29 & 4 & -38 \\ 0 & 1 & -9 & 1 & -11 \\ 0 & 0 & -\frac{26}{3} & 1 & -\frac{67}{6} \end{array} \right] \begin{array}{l} w_1 := w_1 - 4w_3 \\ w_2 := w_2 - w_3 \end{array}$$

$$\sim \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & \frac{17}{3} & 0 & \frac{20}{3} \\ 0 & 1 & -\frac{1}{3} & 0 & \frac{1}{6} \\ 0 & 0 & -\frac{26}{3} & 1 & -\frac{67}{6} \end{array} \right]$$

Z dotychczasowych przekształceń wynika, że $\text{rz } A = 3$, $\text{rz } [A : b] = 3$, $n = 4$, a zatem układ jest układem nieoznaczonym i ma nieskończenie wiele rozwiązań.

W tego typu przypadku rozwiązanie układu równań polega na wyznaczeniu rozwiązania ogólnego, na podstawie, którego wyznaczyć można rozwiązania bazowe.

Aby wyznaczyć rozwiązanie ogólne postępujemy następująco:

$$\begin{array}{cccc} x_1 & x_2 & x_3 & x_4 \\ \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow \\ \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & \frac{17}{3} & 0 & \frac{20}{3} \\ 0 & 1 & -\frac{1}{3} & 0 & \frac{1}{6} \\ 0 & 0 & -\frac{26}{3} & 1 & -\frac{67}{6} \end{array} \right] \end{array}$$

Pierwsza kolumna macierzy związana jest ze zmienną x_1 , druga – ze zmienną x_2 , trzecia – ze zmienną x_3 zaś czwarta ze zmienną x_4 .

Macierz wynikową możemy rozwiązać i zapisać w postaci trzech następujących równań:

$$1x_1 + 0x_2 + \frac{17}{3}x_3 + 0x_4 = \frac{20}{3}$$

$$0x_1 + 1x_2 - \frac{1}{3}x_3 + 0x_4 = \frac{1}{6}$$

$$0x_1 + 0x_2 - \frac{26}{3}x_3 + 1x_4 = -\frac{67}{6}$$

Dla kolumny nr 4 mamy $\frac{-67}{6} + \frac{52}{6}t = 0 \Rightarrow t = \frac{67}{52}$, $x_3 = \frac{67}{52}$

$$x_1 = \frac{20}{3} - \frac{17}{3} \cdot \frac{67}{52} = \frac{-33}{52} \quad \text{zaś} \quad x_2 = \frac{1}{6} + \frac{1}{3} \cdot \frac{67}{52} = \frac{93}{156} = \frac{31}{52}$$

Przykład 16

Rozwiązać układ równań:

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 - x_3 + 3x_4 = 5 \\ 3x_1 - x_2 + 2x_3 - x_4 = -2 \end{cases}$$

Znaleźć rozwiązanie ogólne oraz wszystkie możliwe rozwiązania bazowe.

Mamy $m = 2$, $n = 4$

$$\begin{aligned} [A:b] &= \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & -1 & 3 & 5 \\ 3 & -1 & 2 & -1 & -2 \end{array} \right] w_2 := w_2 - 3w_1 \sim \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & -1 & 3 & 5 \\ 0 & -7 & 5 & -10 & -17 \end{array} \right] w_2 := \frac{1}{5}w_2 \\ &\sim \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & -1 & 3 & 5 \\ 0 & -\frac{7}{5} & 1 & -2 & -\frac{17}{5} \end{array} \right] w_1 := w_1 + w_2 \sim \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & \frac{3}{5} & 0 & 1 & \frac{8}{5} \\ 0 & -\frac{7}{5} & 1 & -2 & -\frac{17}{5} \end{array} \right] \end{aligned}$$

mamy zatem $\text{rz } A = 2$ $\text{rz } [A:b] = 2$ $n = 4$, zatem mamy dwa stopnie swobody,

2 zmienne bazowe oraz 2 zmienne niebazowe

zmienne bazowe x_1, x_3

zmienne niebazowe x_2, x_4

Podstawiając $x_2 = t$, $x_4 = s$ mamy

$$x_1 = \frac{8}{5} - \frac{3}{5}t - s \quad \begin{array}{l} t \in R \\ s \in R \end{array}$$

$$x_2 = t$$

$$x_3 = \frac{-17}{5} + \frac{7}{5}t + 2s$$

$$x_4 = s$$

Otrzymaliśmy rozwiązanie ogólne układu równań. Aby wyznaczyć wszystkie możliwe rozwiązania bazowe ustalmy na początku ich liczbę. Ponieważ były cztery niewiadome, z czego dwie są niebazowe, ustalamy, że można je wybrać na $\binom{4}{2}$ czyli na 6 różnych sposobów. Wyznaczamy najpierw jedno z nich tzn. takie, w których jako zmienne niebazowe przyjęto x_2 oraz x_4 podstawiając $t = 0$, $s = 0$.

Mamy wówczas:

$$x_1 = \frac{8}{5}$$

$$x_2 = 0$$

$$x_3 = \frac{-17}{5}$$

$$x_4 = 0$$

Postać tabeli, w której zamieszczamy wszystkie możliwe kombinacja jest następująca:

x_1	0	0	0	$-\frac{1}{10}$	$\frac{8}{5}$	$\frac{1}{7}$
$x_2 = t$	0	1	$\frac{8}{3}$	0	0	$\frac{17}{7}$
x_3	$-\frac{1}{5}$	0	$\frac{1}{3}$	0	$-\frac{17}{5}$	0
$x_4 = s$	$\frac{8}{5}$	1	0	$\frac{17}{10}$	0	0

Do tej tabelicy w każdej kolumnie najpierw wpisujemy (według pewnego klucza) po dwa zera. Otrzymane rozwiązanie bazowe $x_2 = 0$ oraz $x_4 = 0$ znajduje się w kolumnie nr 5. Pozostałe kolumny wypełniamy według podobnego rozumowania jak w przykładzie 15. Gdyby nas interesowało takie rozwiązanie bazowe, w którym baza została utworzona została na zmiennych x_1 i x_4 , to oznaczaloby, że zmiennymi niebazowymi są x_2 oraz x_3 i nadajemy im wartości zero (czwarta kolumna naszej tabeli).

$$\text{Mamy } x_2 = 0 \Rightarrow t = 0, \quad x_3 = 0 \Rightarrow \frac{-17}{5} + \frac{7}{5}t + 2s = 0,$$

$$\text{ale ponieważ } t = 0 \text{ mamy } \frac{-17}{5} + 2s = 0 \Rightarrow 2s = \frac{17}{5} \Rightarrow s = \frac{17}{10}, \text{ zatem } x_4 = \frac{17}{10}$$

$$x_1 \text{ wyliczamy ze wzoru } x_1 = \frac{8}{5} - \frac{3}{5}t - s$$

$$x_1 = \frac{8}{5} - \frac{17}{10} = \frac{-1}{10}$$

W podobny sposób uzupełniamy wszystkie brakujące elementy w tabelicy. Gdyby pytanie dotyczyło wyznaczania nieujemnych rozwiązań bazowych, należałoby odrzucić te rozwiązania, w których chociaż jedna niewiadoma przyjąłaby wartość ujemną. Pozostały by rozwiązania zawarte w kolumnach: drugiej, trzeciej i szóstej.

Baza została utworzona (rozpoczeta) na zmiennych x_1 , x_2 oraz x_4 . I te zmienne są zmiennymi bazowymi. Zmienna niebazowa – zmienna x_3 . Rozwiązanie ogólne wyznaczamy podstawiając za zmienną niebazową parametr t , czyli mamy $x_3 = t$. Pozostałe niewiadome zależą od tego parametru. Mamy, zatem następujące trzy równania:

$$\begin{cases} x_1 + \frac{17}{3}t = \frac{20}{3} \\ x_2 - \frac{1}{3}t = \frac{1}{6} \\ -\frac{26}{3} + x_4 = \frac{-67}{6} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_1 = \frac{20}{3} - \frac{17}{3}t \\ x_2 = \frac{1}{6} + \frac{1}{3}t \\ x_3 = t \\ x_4 = \frac{-67}{6} + \frac{26}{3}t \end{cases} \quad \text{gdzie} \quad t \in R$$

Ostatnie rozwiązanie nosi nazwę **rozwiązania ogólnego układu równań**. Warto zauważyć, że można dokonać sprawdzenia, czy uzyskane rozwiązanie jest prawidłowe. Podstawiając do rozwiązywanego układu równań otrzymane niewiadome mamy:

- dla pierwszego równania:

$$L = 2 \left(\frac{20}{3} - \frac{17}{3}t \right) - \left(\frac{1}{6} + \frac{1}{3}t \right) + 3t + \left(\frac{-67}{6} + \frac{23}{3}t \right) = \frac{40}{3} - \frac{34}{3}t - \frac{1}{6} - \frac{1}{3}t + 3t - \frac{67}{6} + \frac{26}{3}t = 2$$

$P = 2 \qquad L = P$

- dla drugiego równania mamy

$$L = 3 \left(\frac{20}{3} - \frac{17}{3}t \right) + 2 \left(\frac{1}{6} + \frac{1}{3}t \right) - t + 2 \left(\frac{-67}{6} + \frac{26}{3}t \right) = 20 - 17t + \frac{1}{3} + \frac{2}{3}t - t - \frac{67}{3} + \frac{52}{3}t = -2$$

$P = -2 \qquad L = P$

- dla równania trzeciego

$$L = - \left(\frac{20}{3} - L = \frac{17}{3}t \right) + 3 \left(\frac{1}{6} + \frac{1}{3}t \right) + 2t - \left(\frac{-67}{6} + \frac{26}{3}t \right) = \frac{-20}{3} + \frac{17}{3}t + \frac{1}{2} + t + 2t + \frac{67}{6} - \frac{26}{3}t = 5$$

$P = 5 \qquad L = P$

Obliczenia powyższe świadczą o prawidłowości wyniku.

Na podstawie rozwiązania ogólnego układu równań tworzymy rozwiązanie **bazowe**. Powstaje ono w taki sposób, że zmienne niebazowe, w miejsce, których podstawiliśmy parametr przyjmują wartość zero.

W naszym przypadku rozwiązanie bazowe otrzymujemy kładąc $t = 0$ mamy

$$x_1 = \frac{20}{3}$$

$$x_2 = \frac{1}{6}$$

$$x_3 = 0$$

$$x_4 = \frac{-67}{6}$$

Jest to jedno z możliwych rozwiązań bazowych. Baza została utworzona na zmiennych x_1, x_2 i x_4 , ale przekształcenia elementarne mogą zmierzać w kierunku utworzenia bazy na innych zmiennych. W przypadku, gdy mamy cztery zmienne, spośród których jedna jest zmienną niebazową teoretycznie możliwe są cztery przypadki rozwiązań bazowych. Przypadki te podane zostały w poniższej tabeli

x_1	0	$\frac{57}{6}$	$\frac{20}{3}$	$-\frac{33}{52}$
x_2	$\frac{19}{34}$	0	$\frac{1}{6}$	$\frac{31}{52}$
x_3	$\frac{20}{17}$	$-\frac{1}{2}$	0	$\frac{67}{52}$
x_4	$-\frac{33}{34}$	$-\frac{93}{6}$	$-\frac{67}{6}$	0

Aby wypełnić np. pierwszą kolumnę korzystamy z rozwiązania ogólnego, z którego wynika

$$x_1 = \frac{20}{3} - \frac{17}{3}t = 0 \Rightarrow \frac{20}{3} = \frac{17}{3}t \Rightarrow t = \frac{20}{17}, \quad \text{czyli} \quad x_3 = \frac{20}{17}, \quad \text{następnie, gdy znamy}$$

wartość t ustalamy
$$x_2 = \frac{1}{6} + \frac{1}{3}t = \frac{1}{6} + \frac{1}{3} \cdot \frac{20}{17} = \frac{1}{6} + \frac{20}{51} = \frac{19}{34} \quad \text{oraz}$$

$$x_4 = \frac{-67}{6} + \frac{26}{3} \cdot \frac{20}{17} = \frac{-67}{6} + \frac{520}{51} = \frac{-1139 + 1040}{102} = \frac{-99}{102} = \frac{-33}{34}$$

W podobny sposób wypełniamy kolumny 2 i 4.

W przypadku kolumny nr 2 rozpoczynamy od

$$x_2 = \frac{1}{6} + \frac{1}{3}t = 0 \Rightarrow \frac{1}{3}t = -\frac{1}{6} \Rightarrow t = -\frac{1}{2}, \quad \text{czyli} \quad x_3 = -\frac{1}{2}$$

$$x_1 = \frac{20}{3} - \frac{17}{3} \cdot \left(-\frac{1}{2}\right) = \frac{20}{3} + \frac{17}{6} = \frac{40 + 17}{6} = \frac{57}{6}$$

$$x_4 = \frac{-67}{6} + \frac{26}{3} \cdot \left(-\frac{1}{2}\right) = \frac{-67}{6} - \frac{26}{6} = \frac{-93}{6}$$

Dla kolumny nr 4 mamy $\frac{-67}{6} + \frac{52}{6}t = 0 \Rightarrow t = \frac{67}{52}$, $x_3 = \frac{67}{52}$

$$x_1 = \frac{20}{3} - \frac{17}{3} \cdot \frac{67}{52} = \frac{-33}{52} \quad \text{zaś} \quad x_2 = \frac{1}{6} + \frac{1}{3} \cdot \frac{67}{52} = \frac{93}{156} = \frac{31}{52}$$

Przykład 16

Rozwiązać układ równań:

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 - x_3 + 3x_4 = 5 \\ 3x_1 - x_2 + 2x_3 - x_4 = -2 \end{cases}$$

Znaleźć rozwiązanie ogólne oraz wszystkie możliwe rozwiązania bazowe.

Mamy $m = 2$, $n = 4$

$$\begin{aligned} [A : b] &= \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & -1 & 3 & 5 \\ 3 & -1 & 2 & -1 & -2 \end{array} \right] \begin{array}{l} w_2 := w_2 - 3w_1 \\ \end{array} \sim \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & -1 & 3 & 5 \\ 0 & -7 & 5 & -10 & -17 \end{array} \right] \begin{array}{l} w_2 := \frac{1}{5}w_2 \\ \end{array} \\ &\sim \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & -1 & 3 & 5 \\ 0 & -\frac{7}{5} & 1 & -2 & -\frac{17}{5} \end{array} \right] \begin{array}{l} w_1 := w_1 + w_2 \\ \end{array} \sim \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & \frac{3}{5} & 0 & 1 & \frac{8}{5} \\ 0 & -\frac{7}{5} & 1 & -2 & -\frac{17}{5} \end{array} \right] \end{aligned}$$

mamy zatem $\text{rz } A = 2$ $\text{rz } [A : b] = 2$ $n = 4$, zatem mamy dwa stopnie swobody,

2 zmienne bazowe oraz 2 zmienne niebazowe

zmienne bazowe x_1, x_3

zmienne niebazowe x_2, x_4

Podstawiając $x_2 = t$, $x_4 = s$ mamy

$$x_1 = \frac{8}{5} - \frac{3}{5}t - s \quad \begin{array}{l} t \in R \\ s \in R \end{array}$$

$$x_2 = t$$

$$x_3 = -\frac{17}{5} + \frac{7}{5}t + 2s$$

$$x_4 = s$$

Otrzymaliśmy rozwiązanie ogólne układu równań. Aby wyznaczyć wszystkie możliwe rozwiązania bazowe ustalmy na początku ich liczbę. Ponieważ były cztery niewiadome, z czego dwie są niebazowe, ustalamy, że można je wybrać na $\binom{4}{2}$ czyli na 6 różnych sposobów. Wyznaczamy najpierw jedno z nich tzn. takie, w których jako zmienne niebazowe przyjęto x_2 oraz x_4 podstawiając $t = 0$, $s = 0$.

Mamy wówczas:

$$x_1 = \frac{8}{5}$$

$$x_2 = 0$$

$$x_3 = \frac{-17}{5}$$

$$x_4 = 0$$

Postać tabeli, w której zamieszczamy wszystkie możliwe kombinacja jest następująca:

x_1	0	0	0	$-\frac{1}{10}$	$\frac{8}{5}$	$\frac{1}{7}$
$x_2 = t$	0	1	$\frac{8}{3}$	0	0	$\frac{17}{7}$
x_3	$-\frac{1}{5}$	0	$\frac{1}{3}$	0	$-\frac{17}{5}$	0
$x_4 = s$	$\frac{8}{5}$	1	0	$\frac{17}{10}$	0	0

Do tej tablicy w każdej kolumnie najpierw wpisujemy (według pewnego klucza) po dwa zera. Otrzymane rozwiązanie bazowe $x_2 = 0$ oraz $x_4 = 0$ znajduje się w kolumnie nr 5. Pozostałe kolumny wypełniamy według podobnego rozumowania jak w przykładzie 15. Gdyby nas interesowało takie rozwiązanie bazowe, w którym baza została utworzona została na zmiennych x_1 i x_4 , to oznaczaloby, że zmiennymi niebazowymi są x_2 oraz x_3 i nadajemy im wartości zero (czwarta kolumna naszej tabeli).

$$\text{Mamy } x_2 = 0 \Rightarrow t = 0, \quad x_3 = 0 \Rightarrow \frac{-17}{5} + \frac{7}{5}t + 2s = 0,$$

$$\text{ale ponieważ } t = 0 \text{ mamy } \frac{-17}{5} + 2s = 0 \Rightarrow 2s = \frac{17}{5} \Rightarrow s = \frac{17}{10}, \text{ zatem } x_4 = \frac{17}{10}$$

$$x_1 \text{ wyliczamy ze wzoru } x_1 = \frac{8}{5} - \frac{3}{5}t - s$$

$$x_1 = \frac{8}{5} - \frac{17}{10} = \frac{-1}{10}$$

W podobny sposób uzupełniamy wszystkie brakujące elementy w tablicy. Gdyby pytanie dotyczyło wyznaczania nieujemnych rozwiązań bazowych, należałoby odrzucić te rozwiązania, w których chociaż jedna niewiadoma przyjęłaby wartość ujemną. Pozostały by rozwiązania zawarte w kolumnach: drugiej, trzeciej i szóstej.

Zadania:

1. Niech $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{bmatrix}$ $B = \begin{bmatrix} 2 & -3 \\ 4 & -5 \\ 6 & -7 \end{bmatrix}$ $C = \begin{bmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 3 & 4 & 3 \\ 6 & 7 & 8 \end{bmatrix}$

Podać, które z poniższych działań są wykonalne i wykonać je

- a) $A \cdot B^T$ b) $A^T B^T$ c) AC d) BA^T e) CA
 f) AC^T g) ABC h) $(AB+C)^T$

2. Dane są macierze

$$A = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 3 & -1 \end{bmatrix} \quad B = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ -3 & -2 & -1 & 0 \\ 2 & 1 & -1 & 1 \end{bmatrix} \quad C = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ -1 & 1 & 5 \end{bmatrix}$$

Wykonaj działania

- a) $A^T - (B^T - C)^T \cdot A$
 b) $2AB^T C^T$

o ile są wykonalne. Jeśli nie są wykonalne uzasadnij ich niewykonalność.

3. Obliczyć wyznacznik

a) $\begin{vmatrix} \sin x & \cos x \\ \cos x & \sin x \end{vmatrix}$ b) $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 3 & 2 & -2 \end{vmatrix}$ c) $\begin{vmatrix} 3 & 2 & 1 & -1 \\ 0 & -2 & 4 & 0 \\ 1 & 2 & 3 & 4 \\ 3 & -2 & 1 & -1 \end{vmatrix}$

4. Wyznaczyć rząd macierzy

a) $A = \begin{bmatrix} -3 & 2 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & 2 & -1 \\ 2 & -1 & 1 & 2 \end{bmatrix}$ b) $A = \begin{bmatrix} 2 & 1 & -1 & 0 & 2 \\ -1 & -2 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & -3 & -1 & 2 & 4 \end{bmatrix}$

5. Niech $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$ i $B = \begin{bmatrix} 2 & 1 & -1 \\ -1 & 2 & 1 \\ 1 & 3 & 0 \end{bmatrix}$

Wyznaczyć rząd macierzy B , AB i BA .

6. Wyznaczyć macierz $X = 2A - B^T C^{-1}$, gdy

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 2 \end{bmatrix}, \quad C = \begin{bmatrix} 4 & 2 \\ 3 & 2 \end{bmatrix}$$

7. Obliczyć macierz odwrotną do danej macierzy i sprawdzić otrzymany wynik

$$\text{a) } A = \begin{bmatrix} 2 & 3 & 4 \\ 2 & 1 & 2 \\ 3 & -2 & 1 \end{bmatrix} \quad \text{b) } \begin{bmatrix} 1 & -2 & 1 \\ 3 & 1 & -3 \\ -2 & 2 & -1 \end{bmatrix}$$

8. Dla jakich $m \in R$ macierz B jest nieosobliwa.

$$B = \begin{bmatrix} 3 & -m & 2m \\ 2 & -m & -1 \\ 1 & 2 & 2 \end{bmatrix}$$

9. Dla jakich $k \in R$ macierz C jest osobliwa.

$$C = \begin{bmatrix} k & 1 & -2 \\ 4 & 2 & -1 \\ 2k & k & 3 \end{bmatrix}$$

10. Dla jakich x macierz

$$\text{a) } A = \begin{bmatrix} 3x & 2 \\ x-1 & x+1 \end{bmatrix} \quad \text{jest osobliwa}$$

$$\text{b) } B = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -x \\ 2 & 1 & 3 \\ 0 & 3 & x \end{bmatrix} \quad \text{jest nieosobliwa}$$

11. Dany jest układ równań

$$\begin{cases} x - 2y + z = 9 \\ 3x + y - 3z = -5 \\ -2x + 2y - z = -11 \end{cases}$$

Rozwiązać go za pomocą:

- a) wzorów Cramera
- b) macierzy odwrotnej

c) przekształceń elementarnych

12. Rozwiązać układ równań

$$\begin{cases} 3x_1 - x_2 + 2x_3 = 5 \\ 2x_1 + 3x_2 - x_3 = -2 \\ x_1 - 4x_2 + 3x_3 = 6 \end{cases}$$

13. Wyznaczyć rozwiązanie ogólne układu równań

$$\text{a) } \begin{cases} x_1 - 4x_2 + 2x_3 - 2x_4 = 12 \\ 2x_1 + 3x_2 - x_3 + 9x_4 = -3 \\ 2x_2 + x_4 = 4 \end{cases}$$

$$\text{b) } \begin{cases} x_2 + 2x_3 - x_4 = 3 \\ 2x_1 - x_2 - x_3 + 3x_4 = -1 \\ -3x_1 + 2x_2 + x_3 = 0 \end{cases}$$

14. Wyznaczyć nieujemne rozwiązania bazowe układu równań

$$\text{a) } \begin{cases} -2x_1 + 4x_2 + x_3 + 2x_4 = -3 \\ x_1 + 2x_2 - 3x_4 = 1 \\ -x_2 - x_3 + 2x_4 = -2 \end{cases}$$

$$\text{b) } \begin{cases} 3x_1 + 3x_2 + 4x_3 + x_4 = 12 \\ 2x_2 + x_3 = 2 \end{cases}$$

15. Dla układu równań liniowych

$$\begin{aligned} x_1 + x_2 - x_3 + x_4 &= 1 \\ 2x_1 - x_2 + 4x_3 + x_4 &= 0 \end{aligned}$$

- podać jego zapis macierzowy
- wyznaczyć rozwiązanie ogólne
- jakie jest rozwiązanie bazowe względem zmiennych x_1 i x_3

16. Przeprowadzić dyskusję rozwiązalności układu równań w zależności od parametru k

$$\begin{cases} kx_1 - x_2 = 2 \\ x_1 - 2x_2 + x_3 = -k \\ 2x_1 - 2x_2 - x_3 = 1 \end{cases}$$

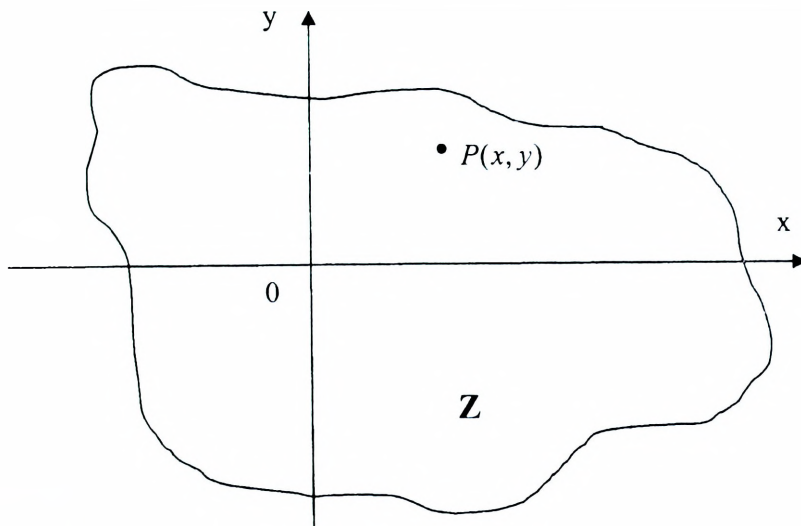
9.

FUNKCJE WIELU ZMIENNYCH

9.1.

DEFINICJA, DZIEDZINA, WARSTWICE

Niech Z oznacza zbiór punktów $P(x, y)$ płaszczyzny, na której wprowadzono prostokątny układ współrzędnych Oxy .



Definicja

Funkcja dwóch zmiennych x i y określona w zbiorze Z jest to przyporządkowanie każdemu punktowi $P(x, y) \in Z$ dokładnie jednej liczby z .

Piszemy zwykle $z = f(x, y)$ dla $(x, y) \in Z$, gdzie

- x i y - zmienne niezależne
- z - zmienna zależna
- f - symbol przyporządkowania

Zbiór Z nazywamy dziedziną funkcji $f(x, y)$.

Jeżeli funkcja dwóch zmiennych jest określona wzorem, a zmienne x i y nie zostały konkretnie sprecyzowane, to należy przyjąć, że dziedzinę stanowi zbiór wszystkich par $(x : y)$ dla których wzór ten ma sens.

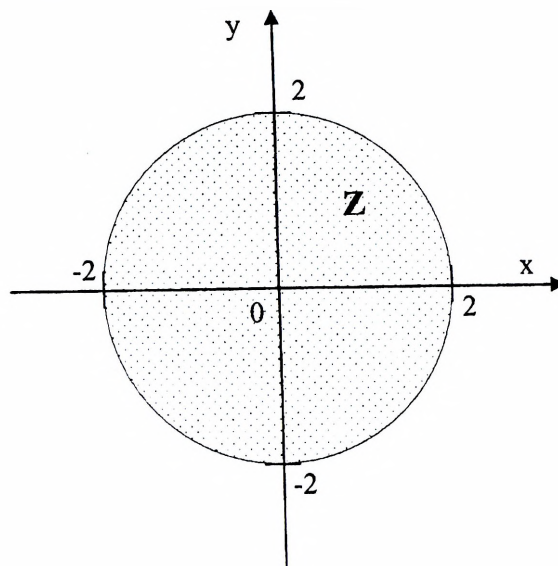
Przykładowo, jeśli funkcja

$$f(x, y) = \sqrt{4 - x^2 - y^2},$$

to dziedziną tej funkcji są wszystkie pary liczb x, y dla których zachodzi nierówność

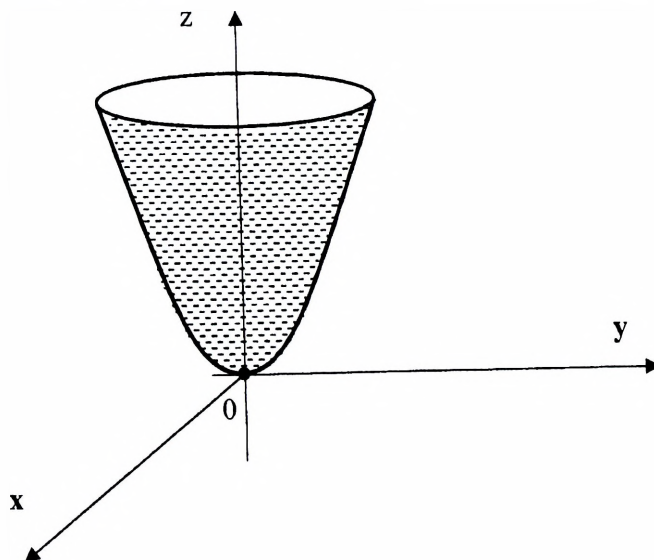
$$4 - x^2 - y^2 \geq 0 \quad \text{czyli}$$

$$x^2 + y^2 \leq 4$$



Wykresem funkcji dwóch zmiennych jest pewna powierzchnia o równaniu $z = f(x, y)$. Wykres tworzy zbiór wszystkich punktów o współrzędnych $(x, y, f(x, y))$, gdzie $(x, y) \in Z$. Wykres powstaje w przestrzeni $Oxyz$ (układ trójwymiarowy) i tylko w prostych przypadkach jest możliwy do narysowania i czytelnym. Na przykład wykresem funkcji $f(x, y) = x^2 + y^2$ jest powierzchnia zwana paraboloidą

Rysunek 1. Wykres funkcji $z = x^2 + y^2$



Praktyczny pożytek z tego rodzaju wykresów jest znikomy. W praktyce korzystamy z interpretacji geometrycznej opartej na pojęciu **warstwicy** (poziomiczy bądź izohipsy).

Warstwicą powierzchni $z = f(x, y)$ nazywamy rzut na płaszczyznę Oxy linii, wzdłuż której płaszczyzna $z = z_0 = \text{const.}$ przecina tę powierzchnię.

Przykład 1

Niech $z = xy$

Sporządzić plan warstwicowy funkcji $z = xy$ dla

$$z_1 = -2, \quad z_2 = -1, \quad z_3 = 0, \quad z_4 = 1 \quad \text{oraz} \quad z_5 = 2$$

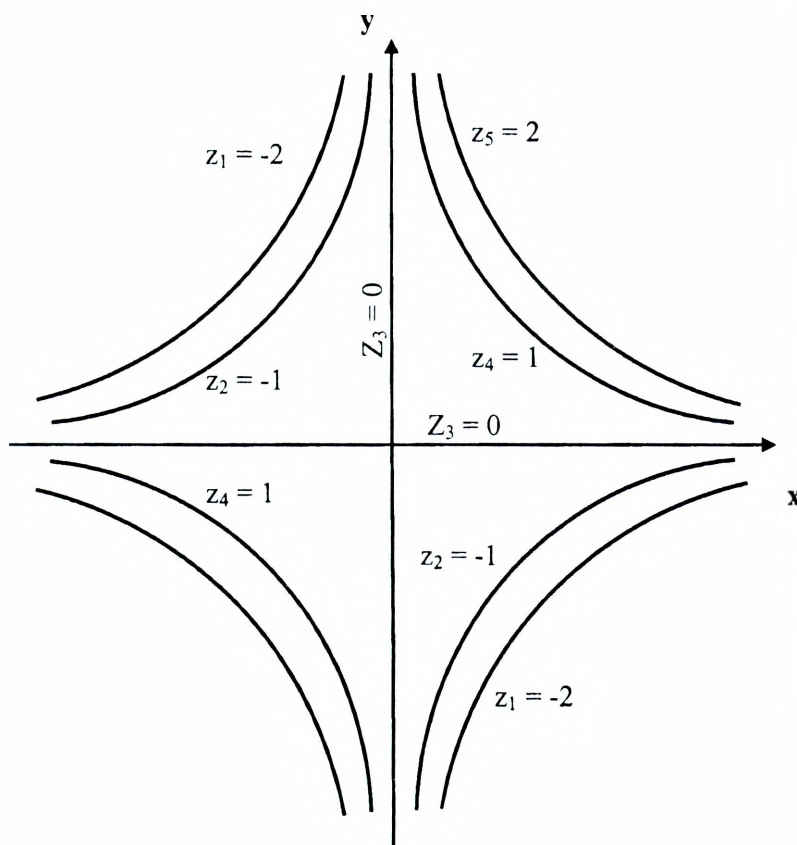
dla $z_1 = -2$ mamy $xy = -2$, czyli $y = -\frac{2}{x}$

dla $z_2 = -1$ mamy $xy = -1$, czyli $y = -\frac{1}{x}$

dla $z_3 = 0$ mamy $xy = 0$, czyli $x = 0 \cup y = 0$

dla $z_4 = 1$ mamy $xy = 1$, czyli $y = \frac{1}{x}$

oraz dla $z_5 = 2$ mamy $xy = 2$, czyli $y = \frac{2}{x}$



Przykład 2

Niech $f(x, y) = y - x^2$

Wyznaczyć warstwie dla $c_1 = -4$, $c_2 = -1$, $c_3 = 0$, $c_4 = 1$ i $c_5 = 2$

dla $c_1 = -4$ mamy $y = x^2 - 4$

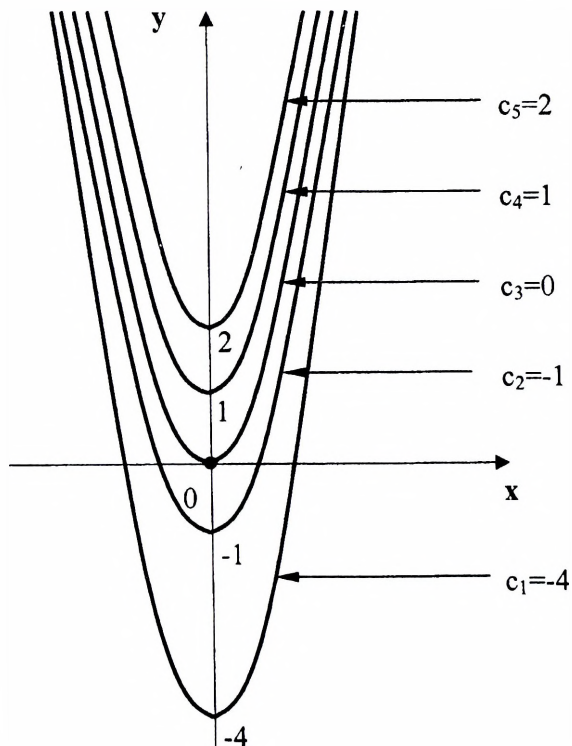
dla $c_2 = -1$ mamy $y = x^2 - 1$

dla $c_3 = 0$ mamy $y = x^2$

dla $c_4 = 1$ mamy $y = x^2 + 1$

oraz

dla $c_5 = 2$ mamy $y = x^2 + 2$



9.2.

POCHODNE CZĄSTKOWE, PRZYRÓST I RÓŻNICZKA FUNKCJI

W przypadku funkcji dwóch zmiennych $f(x, y)$ wyróżniamy pochodną cząstkową względem zmiennej x oraz pochodną cząstkową względem zmiennej y .

Pochodną cząstkową względem zmiennej x oznaczamy symbolem $\frac{\partial f}{\partial x}$ lub f'_x , zaś pochodną cząstkową względem zmiennej y odpowiednio symbolem $\frac{\partial f}{\partial y}$ lub f'_y .

Istnieją zatem dwie pochodne cząstkowe pierwszego rzędu. Pochodna cząstkowa jest funkcją, natomiast pochodna cząstkowa w punkcie jest liczbą.

Wyróżnić można cztery pochodne cząstkowe drugiego rzędu oznaczone symbolami

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} \text{ lub } f''_{xx}, \quad \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} \text{ lub } f''_{xy}, \quad \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} \text{ lub } f''_{yx} \quad \text{oraz} \quad \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} \text{ lub } f''_{yy}$$

Pochodną cząstkową względem zmiennej x obliczamy traktując pozostałe zmienne jako stałe.

Przykład 3

Niech $f(x, y) = 3x^2y - x^3 - 2y$

Obliczyć pochodne cząstkowe pierwszego i drugiego rzędu.

Mamy zatem

$$\begin{aligned} f'_x &= 6xy - 3x^2 & f'_y &= 3x^2 - 2 \\ f''_{xx} &= 6y - 6x & f''_{xy} &= 6x & f''_{yx} &= 6x & f''_{yy} &= 0 \end{aligned}$$

Pochodne cząstkowe f''_{xy} i f''_{yx} różniące się tylko kolejnością różniczkowania nazywamy pochodnymi mieszanymi drugiego rzędu. Łatwo zauważyć, że w przypadku badanej funkcji zachodzi równość

$$f''_{xy} = f''_{yx}$$

Okazuje się że ta równość nie jest przypadkowa, albowiem prawdziwe jest twierdzenie Schwarz'a, z którego wynika że pochodne mieszane drugiego rzędu funkcji dwóch zmiennych są równe

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} \quad \text{lub} \quad f''_{xy} = f''_{yx}$$

Istnieją również pochodne cząstkowe trzeciego rzędu funkcji dwóch zmiennych $z = f(x, y)$. Jest 8 takich pochodnych, lecz różnych tylko cztery. Pochodne mieszane

$$f'''_{xyx}, \quad f'''_{yxx} \quad \text{oraz} \quad f'''_{yxx}$$

tak jak zachodzi równość

$$f_{xxy}''' = f_{xyx}''' = f_{yxx}'''$$

Jeżeli mamy funkcję dwóch zmiennych $f(x, y)$ oraz punkt $P_0(x_0, y_0)$, można obliczyć wartość pochodnych cząstkowych pierwszego rzędu $f'_x(P_0)$ oraz $f'_y(P_0)$.

Niech

Δx - oznacza przyrost zmiennej x

Δy - oznacza przyrost zmiennej y

oraz Δf - oznacza przyrost wartości funkcji

$$\Delta f - \text{obliczyć można na podstawie wzoru } \Delta f = f(x_0 + \Delta x, y_0 + \Delta y) - f(x_0, y_0)$$

Do praktycznych obliczeń stosowany jest wzór przybliżony

$df \approx f'_x(P_0) \cdot \Delta x + f'_y(P_0) \cdot \Delta y$, który zapisujemy w postaci różniczki zupełnej zastępując $\Delta x \rightarrow dx, \Delta y \rightarrow dy$ oraz Δf przez df .

Mamy wzór

$$df \approx f'_x \cdot dx + f'_y \cdot dy$$

Przykład 4

Obliczyć różniczkę zupełną funkcji

$$f(x, y) = x^3 - xy \quad \text{w punkcie } P_0(1, -2)$$

Mamy

$$f'_x = 3x^2 - y \quad f'_x(P_0) = 3 \cdot 1^2 - (-2) = 5$$

$$f'_y = -x \quad f'_y(P_0) = -1, \quad \text{zatem}$$

$$df(P_0) = 5dx - dy$$

Przykład 5

Korzystając z różniczki zupełnej obliczyć przybliżoną wartość wyrażenia $\sqrt{3,01 \cdot 11,98}$

Mamy

$$f(x, y) = \sqrt{xy} \quad P_0(3, 12), \quad \text{zatem } x_0 = 3, y_0 = 12, \Delta x = 0,01, \Delta y = -0,02$$

$$\Delta f = f(x_0 + \Delta x, y_0 + \Delta y) - f(x_0, y_0)$$

Mamy

$$f(x_0 + \Delta x, y_0 + \Delta y) = f(x_0, y_0) + \Delta f$$

gdzie Δf obliczamy ze wzoru $\Delta f = f'_x \cdot dx + f'_y \cdot dy$.

Mamy zatem

$$f(x_0, y_0) = f(3, 12) = \sqrt{3 \cdot 12} = \sqrt{36} = 6$$

$$f'_x = \frac{1 \cdot y}{2\sqrt{xy}} \quad f'_x(P_0) = \frac{12}{2\sqrt{3 \cdot 12}} = \frac{12}{2\sqrt{36}} = 1$$

$$f'_y = \frac{1 \cdot x}{2\sqrt{xy}} \quad f'_y(P_0) = \frac{3}{2\sqrt{3 \cdot 12}} = \frac{3}{2\sqrt{36}} = \frac{1}{4} = 0,25$$

Mamy zatem

$$\Delta f(P_0) = 1 \cdot 0,01 + 0,25 \cdot (-0,02) = 0,005$$

czyli $\sqrt{3,01 \cdot 11,98} \approx 6 + 0,005 = 6,005$

9.3.

GRADIENT FUNKCJI

Wektor $f'_x(P_0)i + f'_y(P_0)j$ nazywamy **gradientem funkcji** $f(x, y)$ w punkcie $P_0(x_0; y_0)$ i oznaczamy symbolem $grad f(P_0)$

Mamy więc

$$grad f(P_0) = f'_x(P_0)i + f'_y(P_0)j$$

gdzie i oraz j oznaczają wektory jednostkowe (wersory) osi Ox i Oy

Przykład 6

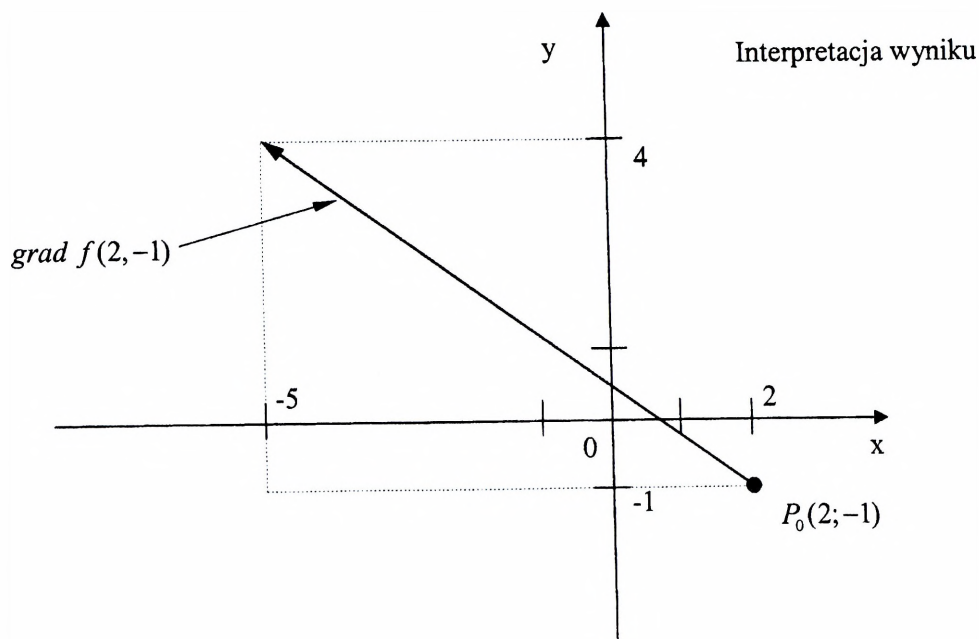
Dana jest funkcja $f(x, y) = x^2y - 3x + y - 1$ oraz punkt $P_0(2; -1)$. Wyznaczyć $grad f(P_0)$

Mamy

$$f'_x = 2xy - 3 \quad f'_x(P_0) = f'_x(2, -1) = -7$$

$$f'_y = x^2 + 1 \quad f'_y(P_0) = f'_y(2, -1) = 5$$

zatem $grad f(2, -1) = -7i + 5j$



Gradient funkcji opisuje kierunek najszybszego wzrostu funkcji.

Związek pomiędzy gradientem a warstwicą jest następujący: gradient jest prostopadły do warstwicy.

Przykład 7

Niech $f(x, y) = 2y - x^2$

Wyznaczyć warstwicę przechodzącą przez punkt $P_0(2, 1)$ oraz gradient funkcji w tym punkcie

Podstawiając do równania $2y - x^2 = c$ wartość $x = 2, y = 1$ otrzymujemy $2 \cdot 1 - 2^2 = c$,

czyli $c = -2$,

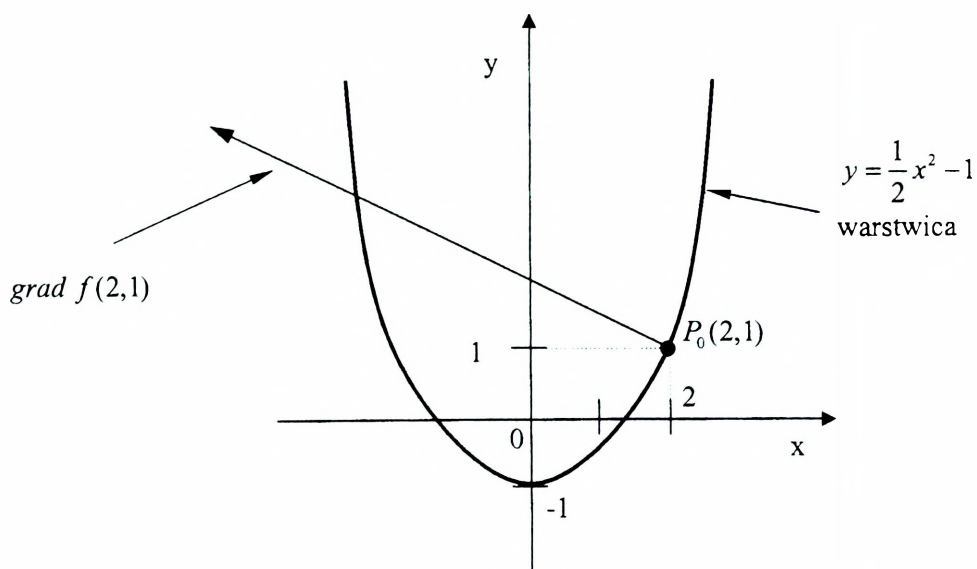
zatem warstwica przechodząca przez punkt $(2; 1)$ to parabola o równaniu

$$2y - x^2 = -2 \Rightarrow y = \frac{1}{2}x^2 - 1$$

$$f'_x = -2x \qquad f'_x(2, 1) = -4$$

$$f'_y = 2 \qquad f'_y(2, 1) = 2$$

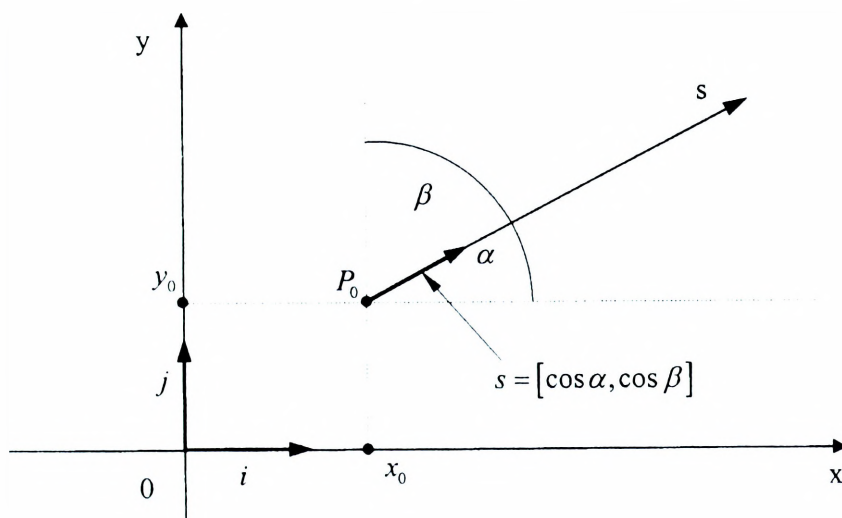
zatem $\text{grad } f(2, 1) = -4i + 2j$



Pochodna kierunkowa funkcji f w kierunku półosi P_0s w punkcie P_0

$$f'_s(P_0) = f'_x(P_0) \cdot \cos \alpha + f'_y(P_0) \cdot \cos \beta$$

gdzie α i β są odpowiednio kątami jakie półoś P_0s tworzy z osiami $0x$ i $0y$



Przykład 8

Obliczyć pochodną funkcji $f(x, y) = xy^2$ w kierunku półosi P_0s w punkcie $P_0(2, 1)$, jeżeli kąty, jakie tworzy wektor tej półosi z wektorami i oraz j osi układu współrzędnych wynoszą

$$\text{odpowiednio } \alpha = \frac{\pi}{3} \text{ i } \beta = \frac{\pi}{6}$$

Mamy

$$f'_x = y^2 \quad f'_x(P_0) = f'_x(2,1) = 1$$

$$f'_y = 2xy \quad f'_y(P_0) = f'_y(2,1) = 4$$

$$\alpha = \frac{\pi}{3} \quad \text{czyli} \quad \cos \alpha = \cos \frac{\pi}{3} = \frac{1}{2}$$

$$\beta = \frac{\pi}{6} \quad \text{czyli} \quad \cos \beta = \cos \frac{\pi}{6} = \frac{\sqrt{3}}{2}, \quad \text{zatem}$$

$$f'_s(2,1) = 1 \cdot \frac{1}{2} + 4 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{1}{2} + 2\sqrt{3}$$

W przypadku funkcji trzech zmiennych $f(x, y, z)$ pochodna kierunkowa tej funkcji w kierunku półprostej l wychodzącej z punktu P_0 o wersorze kierunkowym $[\cos \alpha, \cos \beta, \cos \gamma]$ wyrażona jest wzorem

$$f'_l(P_0) = f'_x(P_0) \cos \alpha + f'_y(P_0) \cos \beta + f'_z(P_0) \cos \gamma$$

α, β, γ - to kąty jakie tworzy wersor półprostej P_0l z wersorami osi Ox, Oy i Oz

Przykład 9

Znaleźć pochodną kierunkową funkcji $f(x, y, z) = xy + yz + xz$ w punkcie $P_0(1, 2, 3)$ w kierunku wektora $[1, 1, 1]$

Wyznaczamy kosinusy odpowiednich kątów α, β i γ korzystając ze wzorów:

$$\cos \alpha_x = \frac{a_x}{\sqrt{a_x^2 + a_y^2 + a_z^2}} \quad \cos \beta_y = \frac{a_y}{\sqrt{a_x^2 + a_y^2 + a_z^2}} \quad \cos \gamma_z = \frac{a_z}{\sqrt{a_x^2 + a_y^2 + a_z^2}}$$

spełniona jest przy tym zależność:

$$\cos^2 \alpha_x + \cos^2 \beta_y + \cos^2 \gamma_z = 1$$

W omawianym przypadku mamy

$$a_x = 1, a_y = 1, a_z = 1 \quad \sqrt{a_x^2 + a_y^2 + a_z^2} = \sqrt{1^2 + 1^2 + 1^2} = \sqrt{3}$$

Mamy zatem:

$$\cos \alpha_x = \frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3}}{3} = \frac{\sqrt{3}}{3}, \quad \cos \beta_y = \frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3}}{3}, \quad \cos \gamma_z = \frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3}}{3}$$

$$f'_x = y + z \quad f'_x(1, 2, 3) = 5$$

$$f'_y = x + z \quad f'_y(1, 2, 3) = 4$$

$$f'_z = x + y \quad f'_z(1, 2, 3) = 3$$

zatem

$$f'_i(1, 2, 3) = \frac{5\sqrt{3}}{3} + \frac{4\sqrt{3}}{3} + \frac{3\sqrt{3}}{3} = \frac{12\sqrt{3}}{3} = 4\sqrt{3}$$

9.4.

ELASTYCZNOŚCI CZĄSTKOWE

W przypadku funkcji dwóch zmiennych $f(x, y)$ można obliczać elastyczność względem zmiennej x oraz względem zmiennej y . Określamy je jako **elastyczności cząstkowe** i oznaczamy odpowiednio $E_x f(x, y)$ oraz $E_y f(x, y)$

Elastyczność obliczamy korzystając ze wzorów

$$E_x f = \frac{x \cdot f'_x}{f} \quad E_y f = \frac{y \cdot f'_y}{f}$$

Elastyczność funkcji $f(x, y)$ w punkcie $P_0(x_0, y_0)$ wyrażone są wzorami

$$E_x f(x_0, y_0) = \frac{x_0 \cdot f'_x(x_0, y_0)}{f(x_0, y_0)} \quad \text{oraz} \quad E_y f(x_0, y_0) = \frac{y_0 \cdot f'_y(x_0, y_0)}{f(x_0, y_0)}$$

Elastyczność cząstkowa oznacza procentową zmianę funkcji f przy przyroście wybranej zmiennej o jeden procent i niezmiennych pozostałych zmiennych.

Przykład 10

Wyznaczyć elastyczności cząstkowe funkcji

$$f(x, y) = 0,5x^2 - xy \quad \text{w punkcie} \quad P_0(3, 1)$$

względem zmiennej x oraz względem zmiennej y oraz zinterpretować otrzymane rezultaty.

Mamy

$$f'_x = x - y \quad f'_x(3, 1) = 2 \quad f(P_0) = f(3, 1) = 0,5 \cdot 3^2 - 3 \cdot 1 = \frac{9}{2} - 3 = \frac{3}{2}$$

$$f'_y = -x \quad f'_y(3, 1) = -3$$

$$x_0 = 3, \quad y_0 = 1, \quad \text{zatem}$$

$$E_x f(3,1) = \frac{3 \cdot 2}{\frac{3}{2}} = \frac{12}{3} = 4$$

oraz

$$E_y f(3,1) = \frac{1 \cdot (-3)}{\frac{3}{2}} = -2$$

Interpretacja wyników jest następująca:

1. Jeżeli wartość $x = 3$ zwiększymy o 1%, przy niezmienionej wartości $y = 1$, to wartość funkcji wzrośnie o 4%.
2. Jeżeli wartość $y = 1$ zwiększymy o 1%, nie zmieniając wartości $x = 3$, to wartość funkcji zmaleje o 2%.

Przykład 11

Wyznaczyć elastyczność funkcji dwóch zmiennych

$$V(K, L) = \gamma K^\alpha L^\beta \quad \text{względem kapitału oraz względem zatrudnienia}$$

gdzie

- α, β, γ - dodatnie współczynniki
- V - wartość produkcji zakładu
- K - kapitał zakładu
- L - zatrudnienie

Mamy

$$V'_K = \gamma \alpha K^{\alpha-1} L^\beta$$

$$V'_L = \gamma K^\alpha \beta L^{\beta-1}$$

zatem

$$E_K V = \frac{L \cdot V'_K}{V} = \frac{K \cdot \gamma \alpha K^{\alpha-1} L^\beta}{\gamma K^\alpha L^\beta} = \frac{\gamma \alpha K^\alpha L^\beta}{\gamma K^\alpha L^\beta} = \alpha$$

$$E_L V = \frac{L \cdot V'_L}{V} = \frac{L \cdot \gamma K^\alpha \beta L^{\beta-1}}{\gamma K^\alpha L^\beta} = \frac{\gamma \beta K^\alpha L^\beta}{\gamma K^\alpha L^\beta} = \beta$$

Funkcja $V = \gamma K^\alpha L^\beta$ nosi nazwę funkcji Cobba – Douglasa. Jak wynika z przeprowadzonych obliczeń elastyczność nie zależy od punktu P_0 i jest równa odpowiednio wykładnikom potęg, czyli współczynnikom α i β .

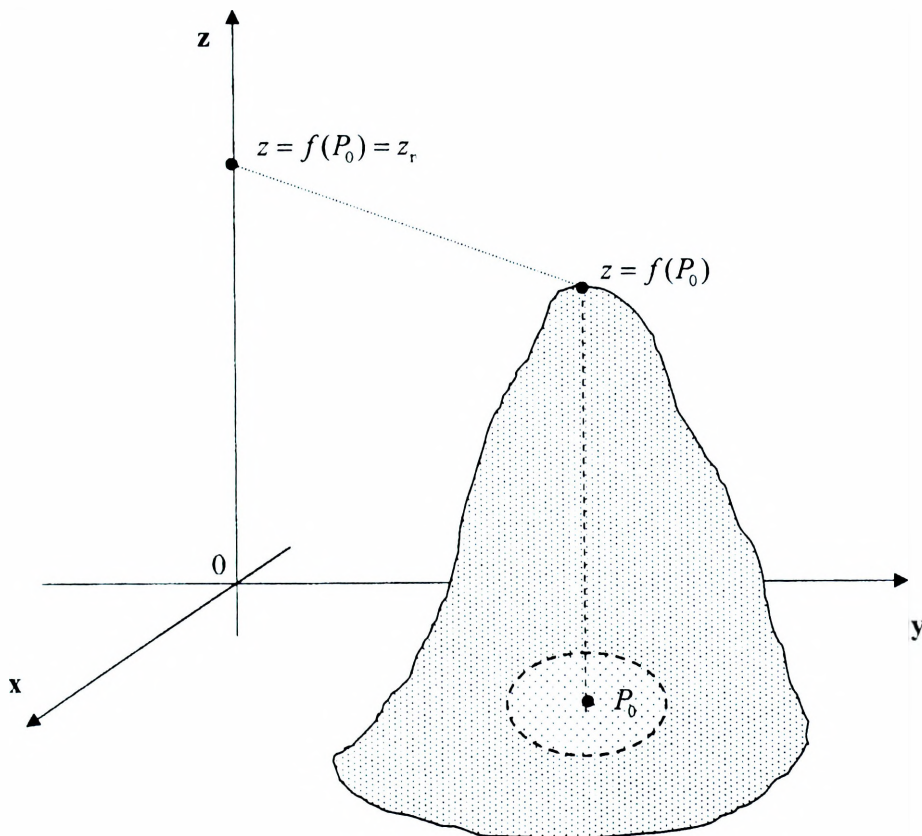
9.5.

EKSTREMUM FUNKCJI DWÓCH ZMIENNYCH

Mówimy, że funkcja $z = f(x, y)$ ma w punkcie $P_0(x_0, y_0)$ ekstremum lokalne, jeżeli w sąsiedztwie S punktu P_0 spełniona jest nierówność

$$f(P) < f(P_0) \quad \text{dla maksimum}$$

$$f(P) > f(P_0) \quad \text{dla minimum}$$



Warunek konieczny istnienia ekstremum.

Jeżeli funkcja $f(x, y)$ ma punkcie $P_0(x_0, y_0)$ ekstremum, to

$$f'_x(x_0, y_0) = 0 \quad \text{i} \quad f'_y(x_0, y_0) = 0$$

Punkt $P_0(x_0, y_0)$, w którym spełnione są równocześnie powyższe dwa warunki nazywamy punktem stacjonarnym. Spełnienie tego warunku oznacza, że funkcja może mieć ekstremum jedynie w tych punktach, które są stacjonarnymi.

Na przykład funkcja

$$f(x, y) = x^2 + y^2 - 4x + 6y - 1$$

posiada pochodne cząstkowe pierwszego rzędu

$$f'_x = 2x - 4 \quad \text{oraz} \quad f'_y = 2y + 6$$

Przyrównując je do zera otrzymujemy

$$\begin{cases} 2x - 4 = 0 \\ 2y + 6 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 2 \\ y = -3 \end{cases}$$

A zatem mamy jeden punkt stacjonarny $P_0(2, -3)$.

I tylko w tym punkcie funkcja dwóch zmiennych może mieć ekstremum.

Warunek wystarczający istnienia ekstremum.

Jeżeli funkcja $f(x, y)$ ma w pewnym otoczeniu punktu $P_0(x_0, y_0)$ pochodne cząstkowe drugiego rzędu, przy czym:

$$1^\circ f'_x(x, y) = 0 \quad \text{i} \quad f'_y(x, y) = 0$$

$$2^\circ W(x_0, y_0) \equiv f''_{xx}(x_0, y_0) \cdot f''_{yy}(x_0, y_0) - [f''_{xy}(x_0, y_0)]^2 > 0,$$

to funkcja $f(x, y)$ ma w punkcie $P_0(x_0, y_0)$

- maksimum właściwe, gdy $f''_{xx}(x_0, y_0) < 0$
- minimum właściwe, gdy $f''_{xx}(x_0, y_0) > 0$

Przykład 12.

Wyznaczyć ekstrema funkcji

$$f(x, y) = x^2 + y^2 - 2x + 4y + 5$$

Mamy

$$f'_x = 2x - 2 \quad \text{i} \quad f'_y = 2y + 4$$

$$\begin{cases} f'_x = 0 \\ f'_y = 0 \end{cases} \quad \text{czyli} \quad \begin{cases} 2x - 2 = 0 \\ 2y + 4 = 0 \end{cases} \Rightarrow P_0(1, -2) \text{ - punkt stacjonarny}$$

$$f''_{xx} = 2 \quad f''_{xx}(P_0) = f''_{xx}(1, -2) = 2$$

$$f''_{yy} = 2 \quad f''_{yy}(P_0) = f''_{yy}(1, -2) = 2$$

$$f''_{xy} = 0 \quad f''_{xy}(P_0) = f''_{xy}(1, -2) = 0$$

$W(1, -2) = 2 \cdot 2 - 0 = 4 > 0$ czyli funkcja dwóch zmiennych ma w punkcie $P_0(1, -2)$ ekstreum.

Ponieważ $f''_{xx}(1, -2) = 2 > 0$ jest to minimum.

zatem $f_{\min} = f(1, -2) = 1^2 + (-2)^2 - 2 \cdot 1 + 4 \cdot (-2) + 5 = 1 + 4 - 2 - 8 + 5 = 0$

Przykład 13.

Zbadać istnienie ekstremów funkcji ⁽¹⁾

$$f(x, y) = e^{-x}(x + y^2)$$

Mamy

$$f'_x(x, y) = e^{-x} \cdot (-1)(x + y^2) + e^{-x} = e^{-x} \cdot (1 - x - y^2)$$

$$f'_y = e^{-x} \cdot 2y$$

$$\begin{cases} e^{-x}(1 - x - y^2) = 0 & \Rightarrow x = 1 - y^2 \\ e^{-x} \cdot 2y = 0 & \Rightarrow x = 1 \end{cases}$$

zatem mamy jeden punkt stacjonarny $P_0(1, 0)$

$$f''_{xx} = e^{-x} \cdot (-1)(1 - x - y^2) + e^{-x} \cdot (-1) = -e^{-x}(2 - x - y^2)$$

¹ Przykład ten zaczerpnięty został od W. Żakowski, Matematyka, cz. II, Warszawa 1970, s.78.

$$f(x, y) = e^{-x}(x + y^2)$$

$$f'_x = e^{-x} \cdot (-1)(x + y^2) + e^{-x} = e^{-x}(-x - y^2 + 1) = e^{-x}(1 - x - y^2)$$

$$f'_y = e^{-x} \cdot 2y = 2ye^{-x}$$

Mamy

$$\begin{cases} e^{-x} \cdot (1 - x - y^2) = 0 & \Rightarrow 1 - x - y^2 = 0 & \Rightarrow x = 1 - y^2 \\ 2ye^{-x} = 0 & \Rightarrow y = 0 & \Rightarrow x = 1 \end{cases}$$

mamy zatem jeden punkt stacjonarny $P_0(1, 0)$

Obliczamy kolejno

$$f''_x = e^{-x} \cdot (-1)(1 - x - y^2) + e^{-x} \cdot (-1) = -e^{-x}(2 - x - y^2)$$

$$f''_{xx}(P_0) = f''_{xx}(1, 0) = -e^{-1}(2 - 1) = -e^{-1} = -\frac{1}{e}$$

$$f''_{yy} = 2e^{-x}$$

$$f''_{yy}(P_0) = f''_{yy}(1, 0) = 2e^{-1} = \frac{2}{e}$$

$$f''_{xy} = -2ye^{-x}$$

$$f''_{xy}(P_0) = f''_{xy}(1, 0) = 0$$

$$W(P_0) = W(1, 0) = -\frac{1}{e} \cdot \frac{2}{e} - 0^2 = -\frac{2}{e^2} < 0$$

a zatem badana funkcja nie ma ekstremów.

Przykład 14

Wyznaczyć ekstrema funkcji dwóch zmiennych

$$f(x, y) = x^2 - 6xy + y^3 + 3x + 6y$$

$$f'_x = 2x - 6y + 3 \quad f'_y = -6x + 3y^2 + 6$$

Mamy

$$\begin{cases} 2x - 6y + 3 = 0 & / \cdot 3 \\ -6x + 3y^2 + 6 = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 6x - 18y + 9 = 0 \\ -6x + 3y^2 + 6 = 0 \end{cases}$$

$$3y^2 - 18y + 15 = 0 \quad /:3$$

$$y^2 - 6y + 5 = 0$$

$$\Delta = 36 - 20 = 16 \quad \sqrt{\Delta} = 4 \quad y_1 = 1 \quad y_2 = 5$$

$$2x - 6y + 3 = 0 \quad \text{czyli } x = 3y - \frac{3}{2}, \quad \text{zatem } x_1 = \frac{3}{2} \quad x_2 = \frac{27}{2}$$

Mamy dwa punkty stacjonarne

$$P_1\left(\frac{3}{2}, 1\right) \quad P_2\left(\frac{27}{2}, 5\right)$$

Obliczamy

$$f''_{xx} = 2$$

$$f''_{yy} = 6y$$

$$f''_{xy} = -6$$

dla punktu $P_1\left(\frac{3}{2}, 1\right)$ mamy

$$f''_{xx}\left(\frac{3}{2}, 1\right) = 2, \quad f''_{yy}\left(\frac{3}{2}, 1\right) = 6, \quad f''_{xy}\left(\frac{3}{2}, 1\right) = -6$$

$$W\left(\frac{3}{2}, 1\right) = 2 \cdot 6 - (-6)^2 = 12 - 36 < 0 \quad \text{brak ekstremum}$$

dla punktu $P_2\left(\frac{27}{2}, 5\right)$ mamy

$$f''_{xx}\left(\frac{27}{2}, 5\right) = 2, \quad f''_{yy}\left(\frac{27}{2}, 5\right) = 30, \quad f''_{xy}\left(\frac{27}{2}, 5\right) = -6$$

$$W\left(\frac{27}{2}, 5\right) = 2 \cdot 30 - (-6)^2 = 60 - 36 > 0$$

Ponieważ $f''_{xx}\left(\frac{27}{2}, 5\right) > 0$ jest to minimum.

Funkcja $f(x, y)$ ma w punkcie $P_2\left(\frac{27}{2}, 5\right)$ minimum

$$f_{\min} = f\left(\frac{27}{2}, 5\right) = \left(\frac{27}{2}\right)^2 - 6 \cdot \frac{27}{2} \cdot 5 + 5^3 + 3 \cdot \frac{27}{2} + 6 \cdot 5 = -24\frac{3}{4}$$

9.6.

WARTOŚĆ NAJWIĘKSZA I NAJMNIEJSZA FUNKCJI

Pochodne cząstkowe wykorzystujemy również do wyznaczania największej i najmniejszej wartości funkcji określonej na pewnej figurze (bryle).

Sposób postępowania jest następujący:

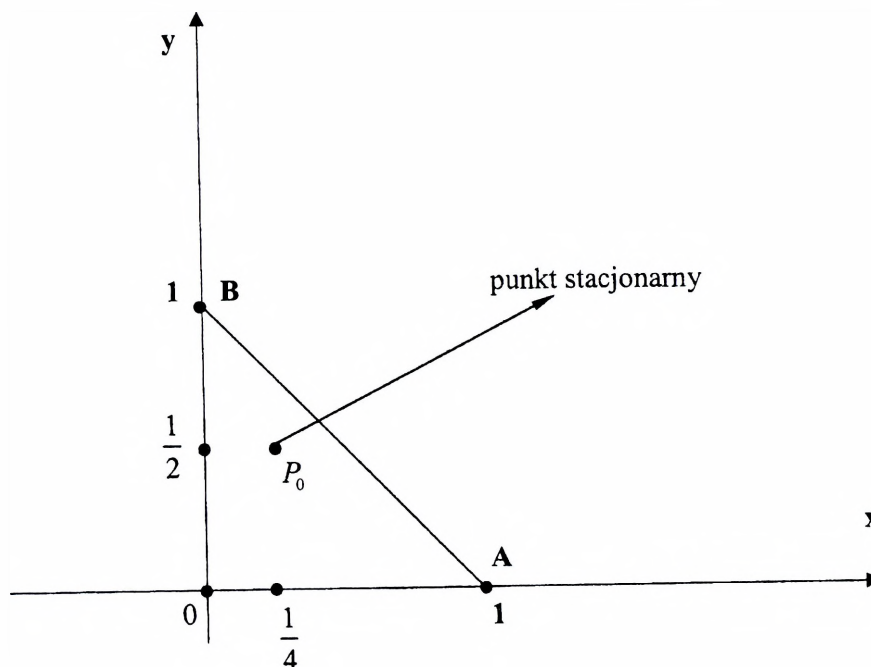
- 1°. Wyznaczamy ekstrema lokalne funkcji dwóch zmiennych jak w powyższych przykładach.
- 2°. Wyznaczamy funkcję na brzegu figury i liczymy wartość największą (lub najmniejszą) funkcji na brzegu.
- 3°. Spośród wartości wyznaczonych w p. 2 i p. 3 wybieramy największą (lub najmniejszą).

Przykład 15.

Znaleźć najmniejszą i największą wartość funkcji

$$f(x, y) = 2x^2 + y^2 - x - y$$

w trójkącie o wierzchołkach $(0, 0)$, $(1, 0)$ i $(0, 1)$



ad. 1°.

$$f'_x = 4x - 1$$

$$f'_y = 2y - 1$$

$$\begin{cases} 4x-1=0 & x=\frac{1}{4} & P_0\left(\frac{1}{4}, \frac{1}{2}\right) \\ 2y-1=0 & y=\frac{1}{2} \end{cases}$$

$$f''_{xx} = 4 \quad f''_{yy} = 2 \quad f''_{xy} = 0$$

$$f''_{xx}\left(\frac{1}{4}, \frac{1}{2}\right) = 4 \quad f''_{yy}\left(\frac{1}{4}, \frac{1}{2}\right) = 2 \quad f''_{xy}\left(\frac{1}{4}, \frac{1}{2}\right) = 0$$

$W\left(\frac{1}{4}, \frac{1}{2}\right) = 4 \cdot 2 - 0^2 > 0$, czyli istnieje w punkcie $P_0\left(\frac{1}{4}, \frac{1}{2}\right)$ minimum, ponieważ

$$f''_{xx}\left(\frac{1}{4}, \frac{1}{2}\right) > 0$$

$$f_{\min} = f\left(\frac{1}{4}, \frac{1}{2}\right) = 2 \cdot \left(\frac{1}{4}\right)^2 + \left(\frac{1}{2}\right)^2 - \frac{1}{4} - \frac{1}{2} = -\frac{3}{8}$$

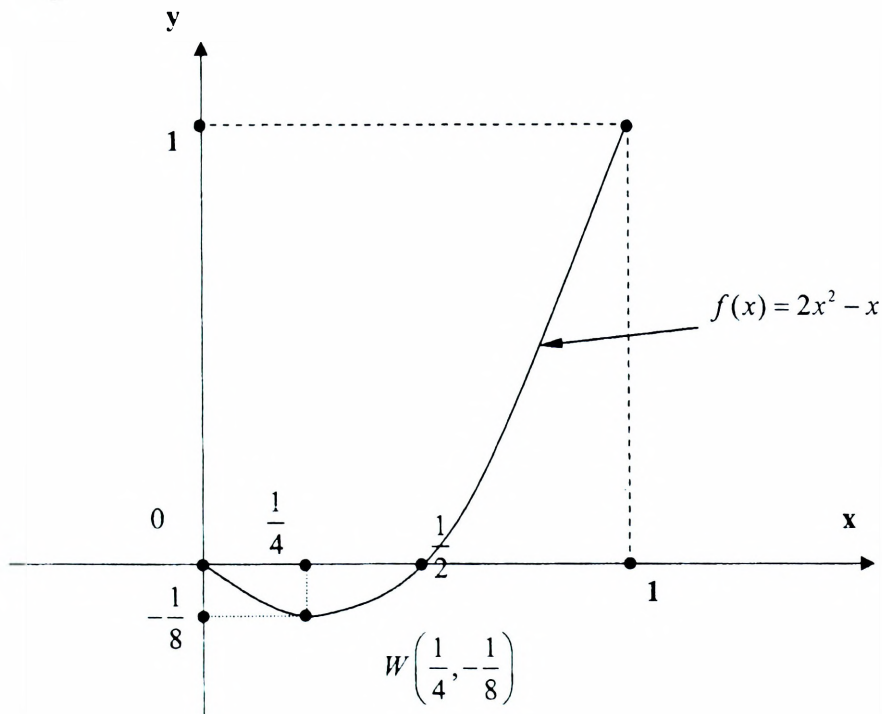
ad. 2°.

Brzeg trójkąta składa się z trzech odcinków 0A, AB i 0B.

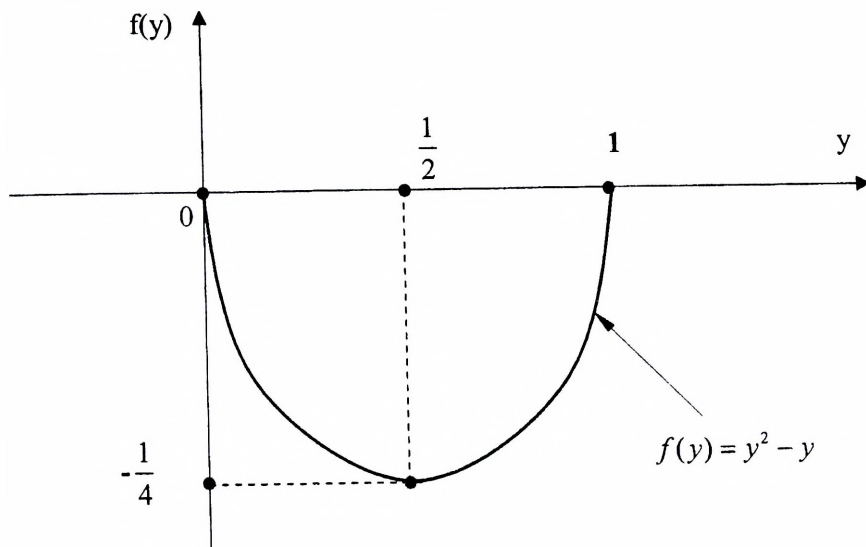
a) na odcinku 0A mamy $y=0$ $0 \leq x \leq 1$

Na tym odcinku funkcja jest funkcją jednej zmiennej $f(x) = 2x^2 - x$ ($0 \leq x \leq 1$).

Wartość największej funkcji w analizowanym przedziale równa się 1, a wartość najmniejsza $-\frac{1}{8}$



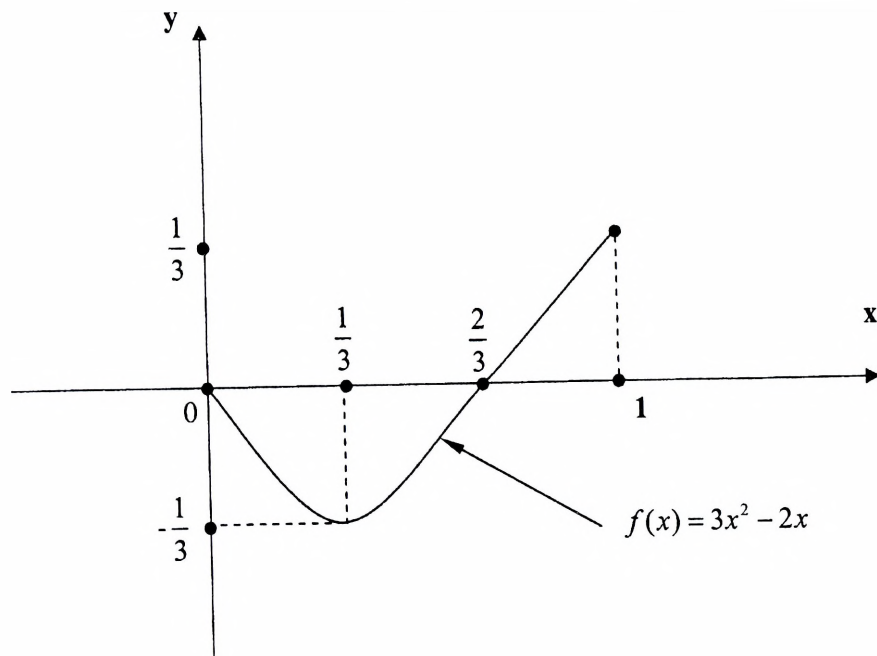
- b) Na odcinku OB mamy $x=0$ $0 \leq y \leq 1$, a funkcja jest funkcją jednej zmiennej y o postaci $f(y) = y^2 - y$ $0 \leq y \leq 1$. Wartość najmniejszą funkcji w przedziale $\langle 0,1 \rangle$ wynosi $-\frac{1}{4}$, a wartość największa 0.



- c) Na odcinku AB mamy $y = -x + 1$ podstawiając do analizowanej funkcji mamy

$$f(x) = 2x^2 + (-x+1)^2 - x - (-x+1) = 3x^2 - 2x = 3x \left(x - \frac{2}{3} \right) \quad 0 \leq y \leq 1$$

Najmniejsza wartość tej funkcji wynosi $-\frac{1}{3}$, największa zaś $\frac{1}{3}$



Porównujemy wszystkie obliczone wartości i dochodzimy do wniosku, że najmniejszą wartość, jaką przyjmuje funkcja jest $-\frac{3}{8}$, którą funkcja przyjmuje w punkcie $\left(\frac{1}{4}, \frac{1}{2}\right)$, zaś wartość największa to 1 przyjmowana w punkcie $(1, 0)$.

Przykład 16

Znaleźć najmniejszą wartość funkcji

$$f(x) = 2x^2 + 3y^2 - x - 4y$$

$$\text{w kwadracie } 0 \leq x \leq 1, \quad 0 \leq y \leq 1$$

Obliczamy pochodne cząstkowe i znajdujemy punkty stacjonarne.

Mamy zatem

$$\begin{cases} f'_x = 4x - 1 \\ f'_y = 6y - 4 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 4x - 1 = 0 & \Rightarrow & x = \frac{1}{4} \\ 6y - 4 = 0 & \Rightarrow & y = \frac{2}{3} \end{cases}$$

Istnieje jeden punkt stacjonarny $P_1\left(\frac{1}{4}, \frac{2}{3}\right)$.

Obliczamy kolejno

$$f''_{xx} = 4 \quad f''_{yy} = 6 \quad f''_{xy} = 0 \quad \text{zatem}$$

$$f''_{xx}(P_1) = f''_{xx}\left(\frac{1}{4}, \frac{2}{3}\right) = 4, \quad f''_{yy}(P_1) = f''_{yy}\left(\frac{1}{4}, \frac{2}{3}\right) = 6, 0)$$

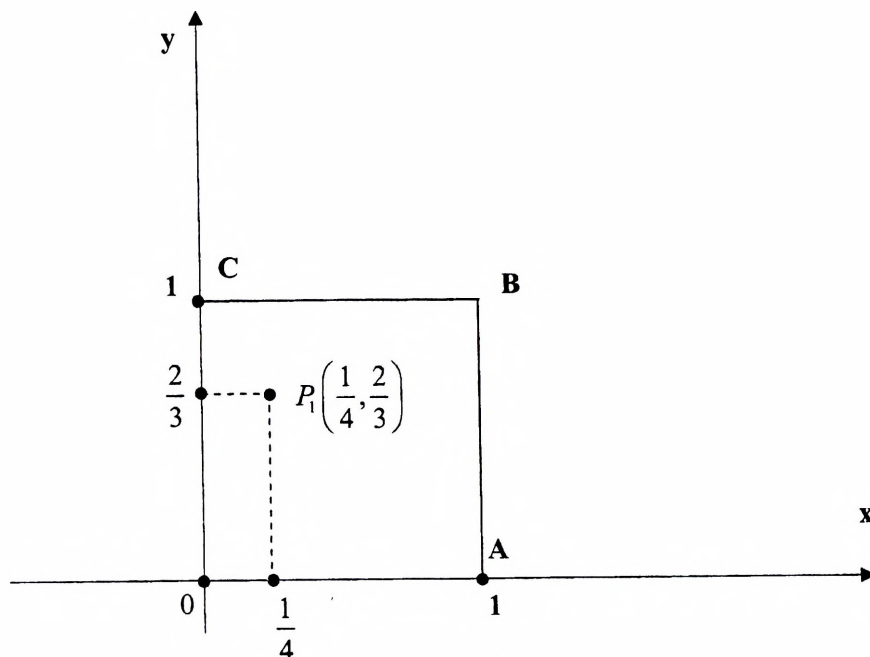
$$\text{oraz } f''_{xy}(P_1) = f''_{xy}\left(\frac{1}{4}, \frac{2}{3}\right) = 0 \quad \text{oraz}$$

$W\left(\frac{1}{4}, \frac{2}{3}\right) = 4 \cdot 6 - 0^2 = 24 > 0$, a ponieważ $f''_{xx}\left(\frac{1}{4}, \frac{2}{3}\right) = 4 > 0$, zatem w punkcie

$\left(\frac{1}{4}, \frac{2}{3}\right)$ występuje minimum

$$f_{\min} = f\left(\frac{1}{4}, \frac{2}{3}\right) = 2 \cdot \left(\frac{1}{4}\right)^2 + 3 \cdot \left(\frac{2}{3}\right)^2 - \frac{1}{4} - 4 \cdot \frac{2}{3} = -\frac{35}{24} = -1\frac{11}{24}$$

Poszukujemy teraz wartości najmniejszej funkcji na brzegu kwadratu



Ten kwadrat składa się z czterech odcinków wpisanych zależnościami

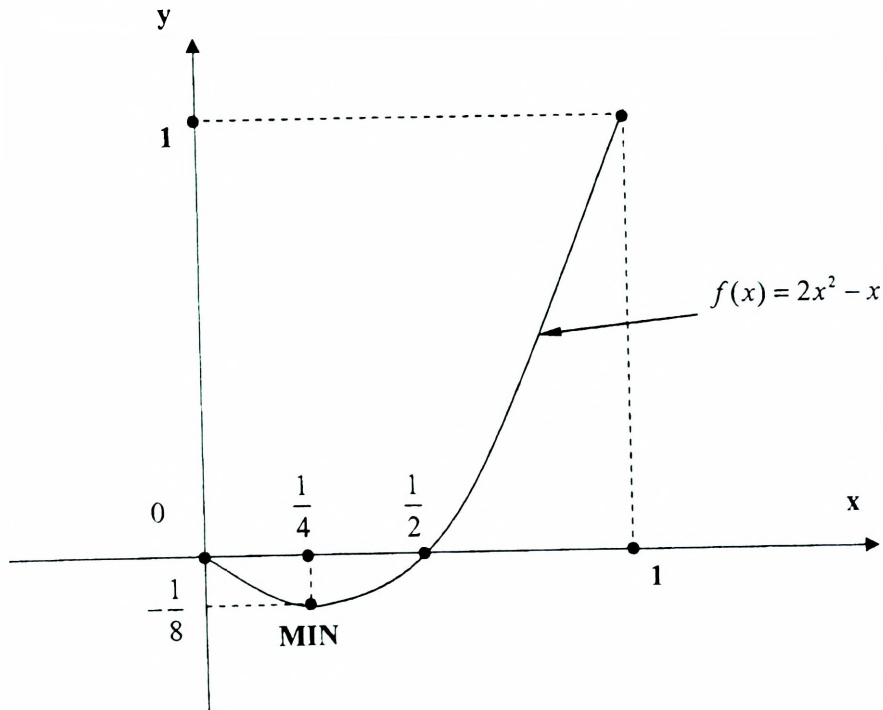
- a) OA : $y = 0$ $0 \leq x \leq 1$
- b) AB : $x = 1$ $0 \leq y \leq 1$
- c) BC : $y = 1$ $0 \leq x \leq 1$ oraz
- d) OC : $x = 0$ $0 \leq y \leq 1$

a) Na pierwszym odcinku (OA) funkcja jest funkcją jednej zmiennej x o postaci:

$$f(x) = 2x^2 - x.$$

Jest to funkcja kwadratowa o wykresie jak na rysunku; posiada minimum w wierzchołku paraboli czyli dla

$$x = \frac{1}{4}, f_{\min} = f\left(\frac{1}{4}\right) = -\frac{1}{8}$$

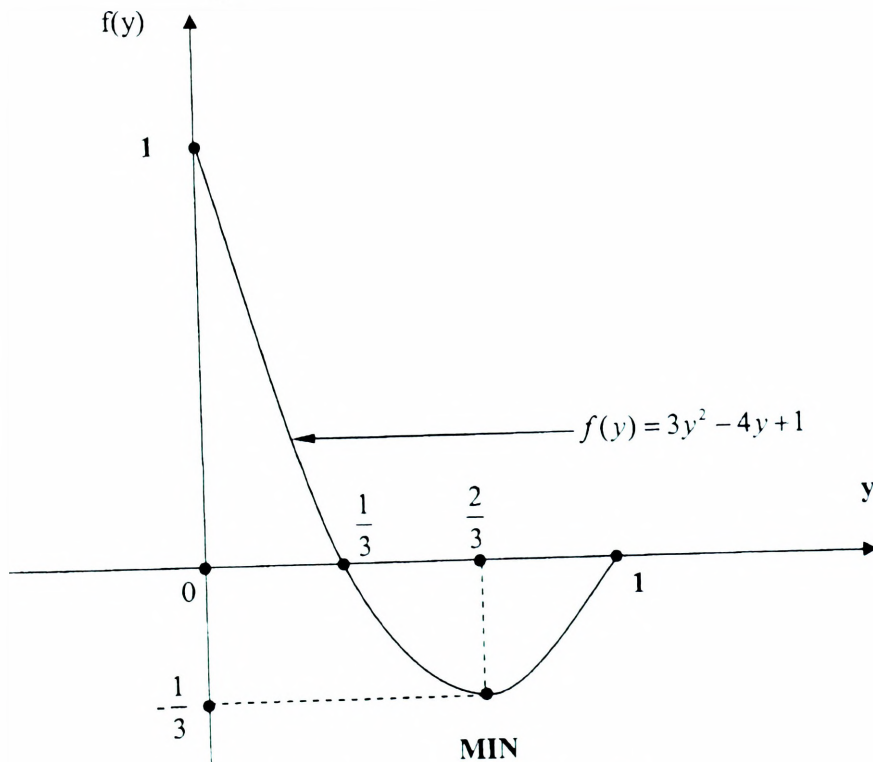


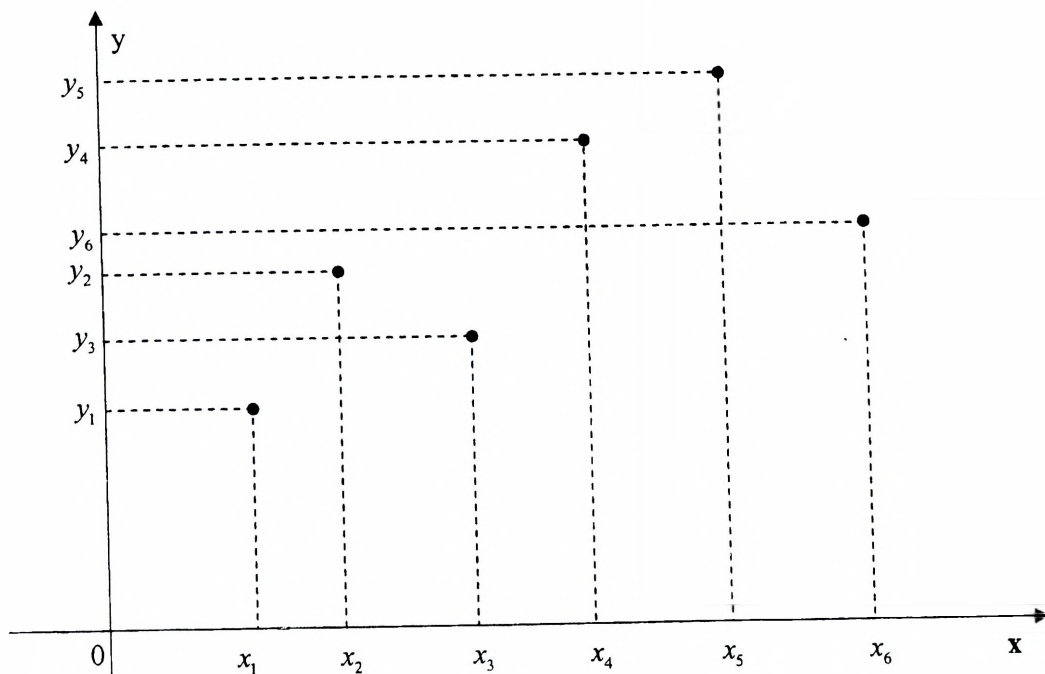
b) Na odcinku AB funkcja jest funkcją zmiennej y o równaniu

$$f(y) = 2 + 3y^2 - 1 - 4y = 3y^2 - 4y + 1$$

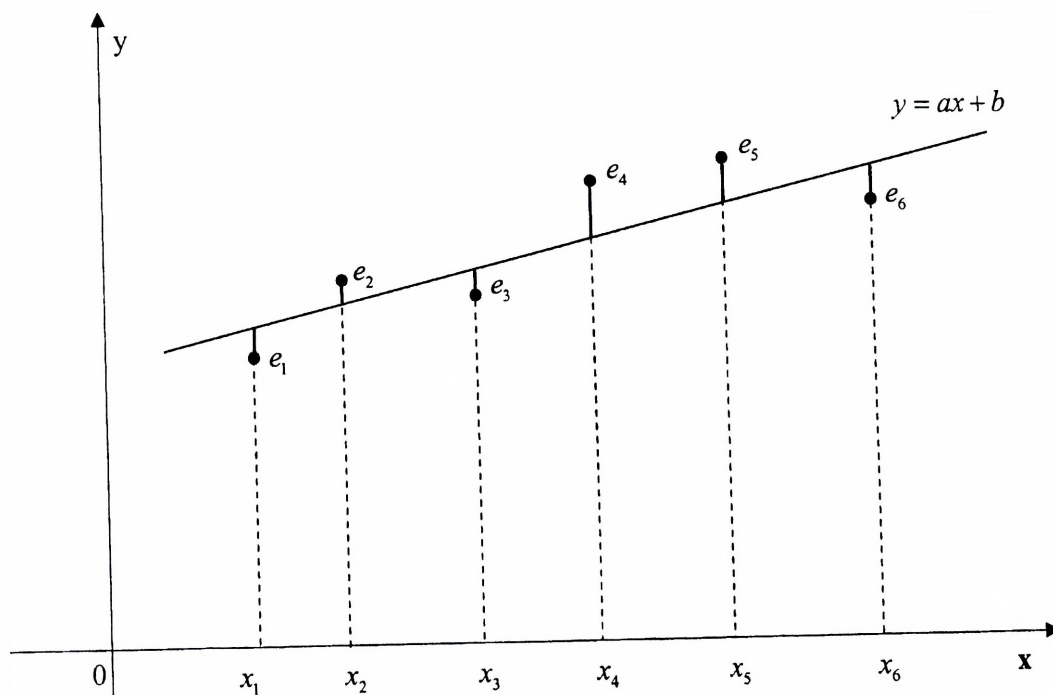
$$\Delta = 16 - 12 = 4 \quad y_1 = \frac{1}{3}, \quad y_2 = 1,$$

która posiada minimum dla $y = \frac{2}{3}$, $f_{\min} = -\frac{\Delta}{4a} = -\frac{1}{3}$





Po narysowaniu zbioru tych punktów w układzie współrzędnych Oxy zastanawiamy się, jaka prosta najtrafniej przybliżałaby zebrane dane. Rysujemy prostą, która nie musi przechodzić przez żaden z określonych punktów i widzimy, że dla konkretnych wartości zmiennej x punkt położony na prostej nie pokrywa się z punktem zdobytym w wyniku zbierania danych empirycznych.



Występują różnice (zwane odchyleniami e_1, e_2, \dots, e_n) pomiędzy danymi empirycznymi, a wartościami teoretycznymi (wynikającymi z położenia punktów na przyjętej prostej).

Spośród wielu możliwych do przeprowadzenia prostych za najlepszą uważa się taką, dla której suma kwadratów odchyleń jest najmniejsza.

Stąd pochodzi nazwa metody – metoda najmniejszych kwadratów (oznaczana jako MNK).

Parametry a i b prostej wyznaczamy na podstawie wzorów:

$$a = \frac{\sum_{i=1}^n x_i y_i - n \bar{x} \bar{y}}{\sum_{i=1}^n x_i^2 - n (\bar{x})^2}$$

$$b = \bar{y} - a \bar{x}$$

gdzie

$$\bar{x} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_i$$

$$\bar{y} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n y_i$$

(średnie arytmetyczne zmiennych x i y).

Przykład 17

Poniższa tabela zawiera dane dotyczące ilości sklepów spożywczych (zmienna Y) i liczby mieszkańców pięciu losowo wybranych miast województwa małopolskiego (zmienna X – w tysiącach osób)

y	8	12	10	15	15
x	1	4	5	10	20

Stosując metodę najmniejszych kwadratów napisać równanie liniowej funkcji regresji

$$y = f(x)$$

Wykorzystujemy pomocniczą tabelę

Lp	Y_i	X_i	$X_i Y_i$	X_i^2
1	8	1	8	1
2	12	4	48	16
3	10	5	50	25
4	15	10	150	100
5	15	20	300	400
Σ	60	40	556	542

Obliczamy $\bar{y} = \frac{60}{5} = 12$ $\bar{x} = \frac{40}{5} = 8$

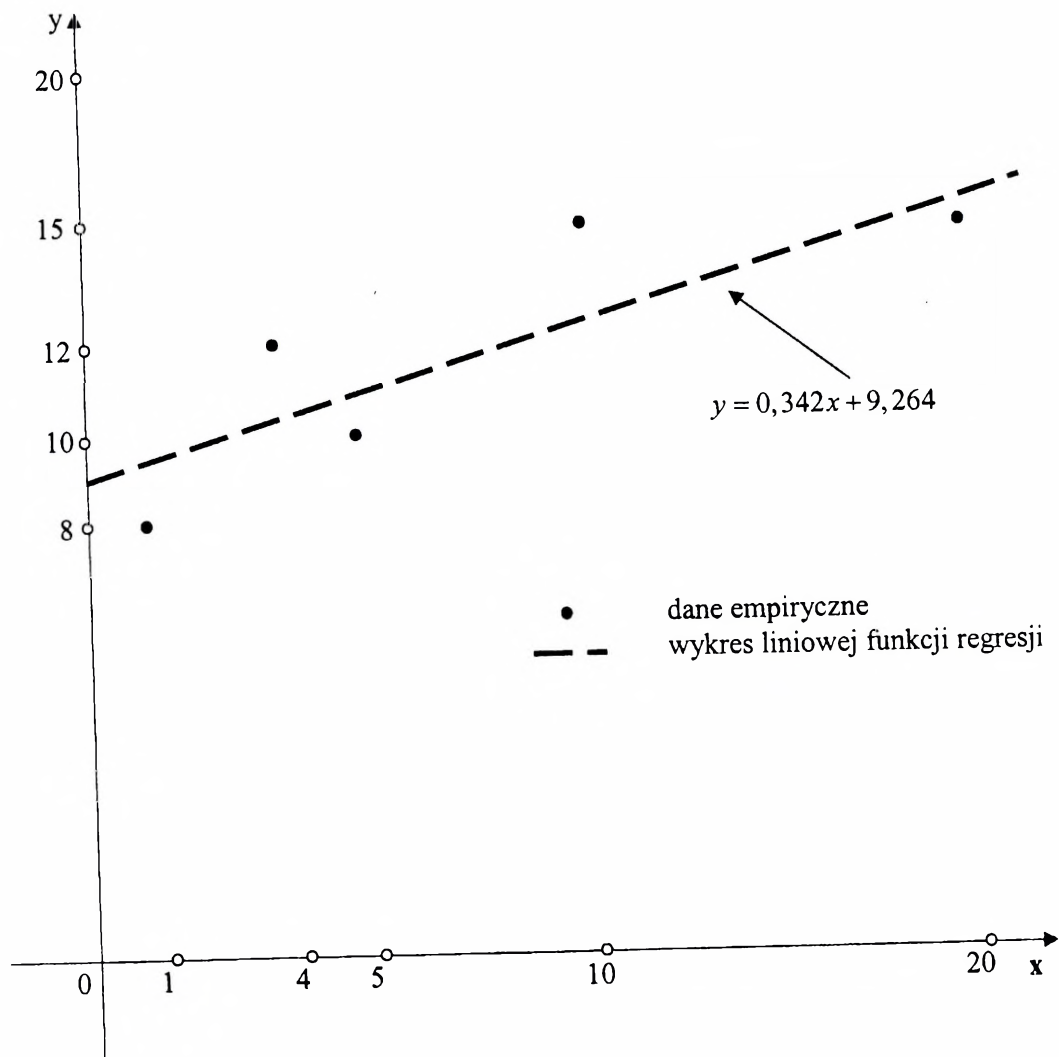
$$a = \frac{556 - 5 \cdot 8 \cdot 12}{542 - 5 \cdot 64} \approx 0,342$$

$$b = 12 - 0,342 \cdot 8 \approx 9,264$$

Stąd równanie liniowej funkcji regresji

$$y = 0,342x + 9,264$$

Analizowaną sytuację przedstawić można poglądowo na poniższym rysunku



Przykład 18

Popyt na pewien wyrób kształtował się w dwunastu miesiącach 2002 r. następująco (w tys. ton)

3.0 3.2 3.6 3.5 3.6 3.8 3.7 4.0 3.9 4.1 4.2 4.5

Korzystając z metody najmniejszych kwadratów napisać równanie liniowej funkcji, która najlepiej obrazuje tę sytuację

Wprowadzamy następujące oznaczenia

zmienna Y - popyt na pewien wyrób

zmienna X - czas (kolejne miesiące 2002 roku)

Potrzebne obliczenia prowadzimy wykorzystując tabelę pomocniczą

Lp	Y_i	X_i	$X_i Y_i$	X_i^2
1	3,0	1	3,0	1
2	3,2	2	6,4	4
3	3,6	3	10,8	9
4	3,5	4	14,0	16
5	3,6	5	18,0	25
6	3,8	6	22,8	36
7	3,7	7	25,9	49
8	4,0	8	32,0	64
9	3,9	9	35,1	81
10	4,1	10	41	100
11	4,2	11	46,2	121
12	4,5	12	54,0	144
Σ	45,1	78	650	650

$$\bar{Y}_i = \frac{45 \cdot 1}{12} \approx 3,76 \quad \bar{X}_i = \frac{78}{12} = 6,5$$

$$a = \frac{309,2 - 12 \cdot 6,5 \cdot 3,76}{650 - 12 \cdot (6,5)^2} \approx 0,11$$

$$b = 3,76 - 0,11 \cdot 6,5 \approx 3,05$$

Stąd równanie liniowej funkcji

$$y = 0,11x + 3,05$$

Ponieważ w omawianym przypadku zmienną x jest czas stąd powyższe równanie nosi nazwę równania liniowej funkcji trendu i wówczas $y = 0,11t + 3,05$.

Wartość parametru b mówi o tym jaki jest poziom zmiennej Y jeśli zmienna X przyjmuje wartość zero.

Parametr a informuje o tym o ile wzrośnie wartość zmiennej Y jeśli zmienną X zwiększymy o jednostkę.

Zadania:

1. Wyznaczyć dziedzinę funkcji dwóch zmiennych

a) $f(x, y) = \frac{\sqrt{4-y^2}}{\ln(9-x^2)}$

b) $f(x, y) = \sqrt{1-x^2} + \sqrt{y^2-1}$

c) $f(x, y) = \sqrt{(x^2+y^2-4)(9-x^2-y^2)}$

d) $f(x, y) = x + \sqrt{y}$

2. Wykonać plan warstwiczny funkcji

a) $f(x, y) = x^2 + y^2$ dla $c_1 = -1, c_2 = 0, c_3 = 1, c_4 = 4$

b) $f(x, y) = \sin(x^2 + y^2)$ dla $c_1 = 0, c_2 = -1, c_3 = 1, c_4 = \frac{1}{2}$

c) $f(x, y) = 2x - y$ dla $c_1 = -2, c_2 = 0, c_3 = 2, c_4 = 4$

d) $f(x, y) = |x| - |y|$ dla $c_1 = 0, c_2 = 1, c_3 = -1, c_4 = 2$

e) $f(x, y) = \frac{x}{y^2}$ dla $c_1 = -1, c_2 = 0, c_3 = 1, c_4 = \frac{1}{2}$

3. Obliczyć pochodne cząstkowe pierwszego i drugiego rzędu funkcji

a) $f(x, y) = \frac{xy}{x-y}$

b) $f(x, y) = y^x$

c) $f(x, y) = xe^{-2y}$

d) $f(x, y) = 3x^2y^2$ oraz ich wartości w $P_0(2, 3)$

e) $f(x, y) = 3^{xy}$

f) $f(x, y) = \sqrt[3]{2xy}$

g) $f(x, y) = y^2 \cos(2x - y)$

h) $f(x, y) = \ln\left(x + \frac{x}{2y}\right)$

4. Wykazać, że funkcja

$$f(x, y) = \ln(x^2 + y^2)$$

Spełnia w każdym punkcie płaszczyzny z wyjątkiem punktu $(0, 0)$ równanie

$$f''_{xx} + f''_{yy} = 0$$

5. Korzystając z różniczki zupełnej obliczyć przybliżoną wartość wyrażenia

a) $(2, 02)^{2,03}$

b) $\sqrt{3,97} \log_{10} 10,04$

c) $\sin 31^\circ \cdot \operatorname{tg} 44^\circ$

d) $\sqrt{(3,03)^2 + (3,98)^2}$

6. Wyznaczyć gradient funkcji

a) $f(x, y) = xy(x^2 + y^3)$ w punkcie $P_0(3, 1)$

b) $f(x, y) = x^3 - y^2 + 3x - y$ w punkcie $P_0(-2, 1)$

c) $f(x, y) = x^2y$ w punkcie $P_0(1, 1)$

7. Wyznaczyć pochodną kierunkową funkcji

$f(x, y) = 2x^2 - 3y^2$ w punkcie $P_0(1, 0)$ w kierunku półosi P_0s

o kątach kierunkowych $\alpha = 30^\circ$ i $\beta = 60^\circ$

8. Obliczyć pochodną kierunkową funkcji

$$f(x_1, x_2) = x_1 \cos x_2 \text{ w punkcie } P_0(1, 0) \text{ w kierunku wektora } S = [2, 1]$$

9. Obliczyć pochodną kierunkową funkcji

$$f(x, y) = x^2 - xy - 2y^2 \text{ w punkcie } P_0(1, 0) \text{ w kierunku tworzącym}$$

$$\text{z osią } O_x \text{ kąt } \frac{\pi}{4}$$

10. Obliczyć pochodną kierunkową funkcji

$$u(x, y, z) = xy^2 + z^3 - xyz \text{ w punkcie } P_0(1, 1, 2) \text{ w kierunku wektora } [1, 2, 1]$$

11. Wyznaczyć elastyczności cząstkowe funkcji

$$f(x, y) = \frac{x^2 y}{x + y} \text{ względem zmiennych } x \text{ i } y \text{ w punkcie } P_0(-1, -1)$$

12. Wyznaczyć elastyczności cząstkowe niżej podanych funkcji względem zmiennych x i y oraz podać interpretacje otrzymanych rezultatów

a) $f(x, y) = \frac{3x + 2y}{y - x}$ w punkcie $P_0(2, 1)$

b) $f(x, y) = 0,3x^4 y^{0,5}$ w punkcie $P_0(3, 2)$

c) $f(x, y) = x^2 \ln y$ w punkcie $P_0(2, \sqrt{e})$

d) $f(x, y) = 5x^3 e^{-y}$ w punkcie $P_0(2, 1)$

13. Wyznaczyć ekstrema lokalne funkcji dwóch zmiennych

a) $f(x, y) = x^3 + y^2 - 6xy - 39x + 18y + 20$

b) $f(x, y) = x^3 - y^3 + 6xy + 12$

c) $f(x, y) = (x - 1)^2 + y^2$

d) $f(x, y) = 2x^3 + y^3 + 2x^2 - 3y - 12x$

e) $f(x, y) = x^4 + y^4 - x^2 - 2xy - y^2$

f) $f(x, y) = e^{\frac{x}{2}}(x + y^2)$

g) $f(x, y) = (x + y)^2 + xy - x$

h) $f(x, y) = y\sqrt{x} - y^2 - x + 6y$

i) $f(x, y) = x^3 + 3xy^2 - 6xy$

14. Wyznaczyć wartość najmniejszą i największą funkcji

$$f(x, y) = 2xy - 5x + 6y + 2$$

w kwadracie o wierzchołkach (1,1), (1,2), (2,1), i (2,2)

15. Znaleźć najmniejszą i największą wartość funkcji

$$f(x, y) = x^2 - 2xy + y$$

w prostokącie o wierzchołkach (0,0), (0,1), (2,1) i (2,0)

16. Znaleźć najmniejszą wartość funkcji

$$f(x, y) = x - 2y + \frac{1}{xy}$$

w kwadracie o wierzchołkach (0,1;0,1) (10;0,1) (0,1;10) i (10;10)

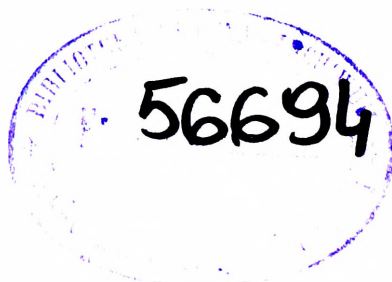
17. Poniższa tabela zawiera dane dotyczące ilości samodzielnych pracowników naukowych (zmienna x) oraz ilość obronionych doktoratów (zmienna y) w roku 2002 dla 10-ciu wybranych uczelni w Polsce

x	17	20	24	25	28	30	35	40	42	47
y	20	19	23	28	30	30	40	50	48	53

Stosując metodę najmniejszych kwadratów oszacować parametry liniowej zależności y od x .

BIBLIOGRAFIA

1. Dorosiewicz S., Kłopotowski J., Kołatkowski S., Matematyka, Bizant, Warszawa 1996.
2. Kłopotowski J., Marcinkowska – Lewandowska W., Nykowska M., Nykowski I., Matematyka, AGH, Warszawa 1999.
3. Krywicki W., Włodarski I., Analiza matematyczna w zadaniach cz. I i cz II, PWN, Warszawa 1968.
4. Łaszuk J., Matematyka – studium podstawowe, SGH, Warszawa 1996.
5. Leksiński W., Nabiałek I., Żakowski W., Matematyka. Definicje, twierdzenia, przykłady, zadania, WNT, Warszawa 1992.
6. Matematyka, praca zbiorowa po redakcją J. Kłopotowski, W. Marcinkowska – Lewandowska, M. Nykowska, Z. Nykowski, SGH, Warszawa 1999.
7. Maźbic – Kulma B., Pelc M., Spustek H., Matematyka w zadaniach i przykładach dla studentów zaocznych, WZISiZ, Warszawa 2002.
8. Pelc M., Spustek H., Materiały pomocnicze do ćwiczeń, AON, Warszawa 1997.
9. Piszczala J., Matematyka i jej zastosowanie w naukach ekonomicznych, AE w Poznaniu, Poznań 1998.
10. Żakowski W., Matematyka cz. I, WNT, Warszawa 1970.
11. Żakowski W., Matematyka cz. II, WNT, Warszawa 1977.



Publikacje

Akademii Obrony Narodowej

do nabycia w Wydziale Wydawniczym AON
al. gen. A. Chruściela 103, bl. 2
00-910 Warszawa,
tel. 681 40 55, tel./faks 681 37 52

- S. Bartosiewicz, M. Mróz – **Zaopatrywanie jednostek wojsk lotniczych i obrony powietrznej w techniczne środki materiałowe techniki naziemnej**
- **Bezpieczne niebo.** Materiały z konferencji naukowej
- J. Bieńkowski, R. Stępień (red.) – **Edukacja pedagogiczna w wyższej uczelni wojskowej**
- H. Binkowski (red.) – **OBWE w procesie umacniania bezpieczeństwa europejskiego**
- A. Bujak – **Praca w terenie na szczeblach taktycznych według standardów NATO**
- W. Chojnacki – **Socjologiczne aspekty tendencji instytucjonalno-organizacyjnego rozwoju wojska**
- M. Cieślarczyk, P. Krawczyk, Z. Korulczyk – **Poradnik metodyczny autorów prac kwalifikacyjnych**
- M. Cieślarczyk, M. Chojnacki, A. Radomyski – **Współpraca cywilno-wojskowa (CIMIC) w siłach zbrojnych (SP) RP**
- M. Cieślarczyk (red.) – **Metody, techniki i narzędzia badawcze oraz elementy statystyki**
- A. Ciupiński (red.) – **Dyplomacja wielostronna**
- A. Ciupiński – **Podstawowe elementy polityki bezpieczeństwa i obrony RP**
- A. Ciupiński, R. Białoskórski – **Wczesne ostrzeżenie i zapobieganie współczesnym konfliktom zbrojnym w strategii Sojuszu Północnoatlantyckiego**
- A. Ciupiński, H. Binkowski, A. Legucka – **Bezpieczeństwo w stosunkach międzynarodowych**
- A. Ciupiński, M. Zając (red.) – **Wybrane problemy walki z terroryzmem międzynarodowym**
- T. Compa – **Zarządzanie przestrzenią powietrzną**
- J. Czaja – **Stolica apostolska wobec integracji europejskiej**
- K. Czajka – **Użycie artylerii w obronie oddziału**
- P. Daniluk – **Radiostacje pola walki**
- A. Dawidczyk – **Nowe wyzwania, zagrożenia i szanse dla bezpieczeństwa Polski u progu XXI w.**
- **Dowodzenie lotnictwem sił powietrznych w działaniach wojsk lądowych** (praca zbiorowa)
- W. Drążczyk – **Logistyka sił powietrznych w działaniach wielonarodowych**
- A. Fellner – **Zautomatyzowane systemy kontroli ruchu lotniczego i przestrzeni powietrznej**
- M. Flemming – **Międzynarodowe prawo humanitarne konfliktów zbrojnych**
- P. Gawliczek, J. Pawłowski – **Zagrożenia asymetryczne**
- M. Gąska, A. Ciupiński – **Międzynarodowe prawo humanitarne**
- A. Glen, W. Marud – **Kontrola przestrzeni powietrznej w czasie kryzysu i wojny**
- J. Gotowała – **Lotnictwo XXI wieku**
- J. Groskrejc – **Antropologiczne i aksjologiczne aspekty edukacji oficerów**
- J. Halik – **Metodyka opracowania pracy magisterskiej i studyjnej**
- J. Halik, J. Wolejszo – **Ćwiczenia wojskowe sił zbrojnych RP w aspekcie interoperacyjności w ramach NATO**
- M. Huzarski (red.) – **Taktyka ogólna wojsk lądowych**
- K. Jałoszyński – **Terroryzm antyizraelski**
- K. Jałoszyński – **Terroryzm czy terror kryminalny w Polsce?**
- K. Jałoszyński – **Zagrożenie terroryzmem w wybranych krajach Europy Zachodniej oraz w Stanach Zjednoczonych**
- J. Janczak – **Zakłócanie informacyjne**
- Cz. Jarecki – **Użycie wojsk raketowych i artylerii w operacji**
- T. Jemiolo – **Globalizacja. Szanse i zagrożenia**
- T. Jemiolo, K. Malak (red.) – **Bezpieczeństwo zewnętrzne Rzeczypospolitej Polskiej**
- A. Józwiak, Cz. Marcinkowski – **Wybrane problemy współczesnych operacji pokojowych**
- L. Kanarski, P. Gawliczek – **Przywództwo w armiach NATO**
- L. Kanarski, B. Rokicki (red.) – **Teoria i praktyka przywództwa wobec wyzwań edukacyjnych**

- J. Kardas, K. Loranty – **Wybrane problemy bezpieczeństwa i obronności państwa w opiniach pracowników administracji publicznej**
- J. Kardas, K. Loranty – **Instytucjonalizacja przygotowania obronnego kadr administracji**
- J. Karpowicz, Z. Chojnacki – **Bezpieczeństwo lotów**
- J. Karpowicz – **Współczesne konstrukcje lotnicze**
- Cz. Kački – **Sily wielonarodowe do misji pokojowych**
- Cz. Kački – **Izrael. Jego wpływ na rozwój sytuacji w regionie Bliskiego Wschodu**
- **Kierowanie mobilnymi systemami łączności wojsk lądowych – część I-III (praca zbiorowa)**
- W. Kitler (red.) – **Obrona cywilna (niemilitarna) w obronie narodowej III RP**
- W. Kitler – **Obrona narodowa III RP. Pojęcie. Organizacja. System (rozprawa habilitacyjna)**
- W. Kitler – **Obrona narodowa w wybranych państwach demokratycznych**
- Z. Klawitter – **Rola i zadania zespołu wsparcia personalnego na stanowisku dowodzenia BZ/BPanc**
- T. Kochański – **Logistyka międzynarodowa**
- T. Kochański – **Logistyka jako koncepcja zintegrowanego zarządzania**
- M. Kosiński – **Umowa offsetowa i inne formy udziału państwa w międzynarodowym obrocie gospodarczym**
- M. Kozub – **Lotnictwo w operacjach połączonych**
- M. Kozub – **Lotnictwo wojsk lądowych w operacjach połączonych**
- M. Kozub – **Lotnictwo w bojowym poszukiwaniu i ratownictwie**
- J. Kręcikij – **Współczesne kierowanie wojskami. proces dowodzenia**
- J. Kręcikij – **Metodyka pracy sekcji dowodzenia oddziału i związku taktycznego**
- R. Kwečka, M. Gryga – **Sily specjalne w kontekście współczesnych zagrożeń**
- K. Kubiak – **Transport wojsk i ładunków wojskowych drogą morską przy użyciu statków handlowych**
- L. Łukaszuk – **Międzynarodowe prawo pokoju i bezpieczeństwa**
- L. Łukaszuk – **Europejskie prawo pokoju i bezpieczeństwa**
- L. Łukaszuk – **Dyplomacja współczesna a problemy prawa i bezpieczeństwa międzynarodowego**
- T. Majewski – **Ankieta i wywiad w badaniach wojskowych**
- T. Majewski – **Kierownik – dowódca w organizacji**
- K. Malak – **Polityka zagraniczna i bezpieczeństwa Białorusi**
- J. Marczak (red.) – **Samoorganizacja społeczeństwa na rzecz bezpieczeństwa powszechnego. Samoobrona powszechna III RP**
- M. Marszałek, A. Radomyski – **Metodyka pracy zespołów funkcjonalnych na stanowisku dowodzenia brygady raketowej sił powietrznych**
- Z. Maślak – **Podstawy teorii informacji obrony powietrznej**
- Z. Maślak (oprac.) – **Informacje w obronie powietrznej – potrzeby, wymagania, zagrożenia. Materiały z sympozjum naukowego**
- M. Michalec (oprac.) – **Kierunki rozwoju rosyjskiej myśli teoretycznej i praktyki w zakresie użycia lotnictwa w walce**
- J. Michniak (red.) – **Projektowanie struktury organizacyjnej dowództwa brygady zmechanizowanej (pancernej)**
- G. Nowacki – **Informacja w walce zbrojnej. Materiały z sympozjum naukowego**
- G. Nowacki – **Strategiczne sily jądrowe wybranych państw**
- G. Nowacki – **Rozpoznanie satelitarne USA i Federacji Rosyjskiej**
- G. Nowacki (red.) – **Militaryzacja kosmosu**
- A. Nowak – **Działalność rozpoznawcza na szczeblach taktycznych**
- E. Nowak – **Gospodarowanie zasobami majątkowymi**
- M. Obrusiewicz – **Wielonarodowe połączone sily zadaniowe CJTF**
- J. Pawłowski, A. Ciupiński (red.) – **Umieędzynarodowiony konflikt wewnętrzny**
- J. Płaczek – **Ewolucja polskiej myśli obronno-ekonomicznej w latach 1976–2000**
- J. Płaczek (red.) – **Gospodarka obronna Polski w końcu lat dziewięćdziesiątych. Szanse i zagrożenia**
- **Podróż studyjna w systemie edukacji oficerów w AON. Materiały z sympozjum naukowego**
- A. Polak – **Wybrane zagadnienia obrony wybrzeża w Polsce (1920–2002)**
- A. Polak – **Teoria grup operacyjnych w polskiej sztuce wojennej okresu międzywojennego**
- **Prawo w stosunkach międzynarodowych. Wybór dokumentów (praca zbiorowa)**
- K. Przeworski – **Ewakuacja jako sposób ochrony ludności**
- **Pułk przeciwlotniczy w działaniach operacyjnych (praca zbiorowa)**
- A. Radomyski – **Metody i treść pracy zespołu OPL na stanowisku dowodzenia dywizji zmechanizowanej**
- A. Skrabacz – **Kobiety w obronie narodowej Polski u progu XXI w.**
- J. Skrzyp (red.) – **Informator geograficzny o państwach kandydujących do Sojuszu Północnoatlantyckiego**
- J. Skrzyp, Z. Lach – **Informator geograficzny. Państwa członkowskie NATO**

- Z. Skwarek – **Powietrzne systemy wczesnego wykrywania i powiadamiania**
- K. Staboń – **Sytuacja jeńców wojennych w konflikcie iracko-irańskim (1980-1988)**
- **Słownik terminów z zakresu bezpieczeństwa narodowego** (praca zbiorowa)
- **Słownik terminów z zakresu psychologii** (praca zbiorowa)
- **Słownik pojęć sojuszniczej obrony powietrznej** – (praca zbiorowa)
- H. Spustek – **Wybrane zagadnienia badań operacyjnych i modelowania liniowego**
- Z. Stachowiak – **Metodyka i metodologia pisania prac kwalifikacyjnych (licencjackich, magisterskich i podyplomowych)**
- Z. Stachowiak, J. Płaczek (red.) – **Wybrane problemy ekonomiki bezpieczeństwa**
- R. Stępień (red.) – **Edukacja w wyższych szkołach wojskowych**
- M. Strzoda (red.) – **Wybrane terminy z zakresu dowodzenia i zarządzania**
- J. Suwart – **Zarys obrony cywilnej w Polsce w latach 1920–1996**
- R. Szpyra – **Powietrzna sztuka operacyjna wybranych państw**
- E.A. Wesółowska, A. Szerauc (red.) – **Patriotyzm – Obronność – Bezpieczeństwo**
- J. Wołeszo – **Wybrane problemy procesu planowania i rozliczania działalności szkoleniowej na szczeblach taktycznych w SZ RP**
- J. Wołeszo – **Trening sztabowy dowództw szczebla taktycznego SZ RP**
- J. Wołeszo – **Wybrane aspekty projektowania struktury organizacyjnej zespołu dowodzenia stanowiska dowodzenia brygady zmechanizowanej**
- J. Wołeszo, Z. Fiołna – **Dowodzenie brygadą zmechanizowaną (pancerną) w obronie**
- J. Wołeszo, Z. Fiołna – **Dowodzenie brygadą zmechanizowaną (pancerną) w marszu**
- **Wojskowe wsparcie władz cywilnych i społeczeństwa**. Materiały z seminarium
- **Wojsko wobec polskiego października '56. Rezolucje, uchwały, listy**
(wybór, wstęp i opracowanie: E. J. Nalepa)
- J. Wojtasik (red.) – **Studia z dziejów polskiej techniki wojskowej od XVI do XX wieku**
- J. Wojtasik (red.) – **Od Żółkiewskiego i Kosińskiego do Piłsudskiego i Petlury. z dziejów stosunków polsko-ukraińskich od XVI do XX wieku**
- E. Zabłocki – **Współczesne siły powietrzne**
- S. Zalewski – **Służby specjalne w państwie demokratycznym**
- **Założenia operacyjne do doktryny zasadniczej sił powietrznych** (praca zbiorowa)
- L. Zapła – **W rembertowskiej Alma Mater**
- B. Zdrodowski, M. Marszałek – **Operacje pozawojenne sił powietrznych**
- J. Zieliński (red.) – **Podstawowe założenia dydaktyki sztuki operacyjnej**
- J. Zuziak – **Dzieje Instytutu Józefa Piłsudskiego w Londynie 1947–1997**

Zamówienia przyjmujemy telefonicznie lub pisemnie

ISBN 83-89423-25-1

AON Wydział
Wydawniczy