

Henryk Spustek

**WYBRANE
ZAGADNIENIA
BADAŃ OPERACYJNYCH
I MODELOWANIA
LINIOWEGO**

$$f_r = \frac{4}{ab}$$

$$n+1 \left(\frac{x+y}{a-b} \right) C_1 + C_2 + t$$

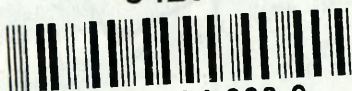
$$L = A_1 \frac{\partial^2}{\partial x^2}$$

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

$$(I + A_3) \frac{\partial^2}{\partial y \partial z}$$

Biblioteka Główna
Akademii Sztuki Wojennej

54294



09-054294-000-0

54294

AKADEMIA OBRONY NARODOWEJ

**AKADEMIA OBRONY NARODOWEJ
CENTRUM INFORMATYKI**

Henryk SPUSTEK

**WYBRANE ZAGADNIENIA BADAŃ OPERACYJNYCH
I MODELOWANIA LINIOWEGO**



Warszawa 2002

Recenzent
prof. dr hab. inż. Piotr Sienkiewicz

Redaktor
Jerzy Wajs

Redaktor techniczny
Beata Klarowska

Korekta
Henryk Spustek

Projekt okładki
Urszula Mruk

ISBN 83-88062-92-1

Sygn. AON 5374/02

Skład, druk i oprawa
Akademia Obrony Narodowej – Wydział Wydawniczy
00-910 Warszawa, al. gen. A. Chruściela 103, tel./faks 681-37-52
zam. nr 1532/01

Spis treści

1. GENEZA BADAŃ OPERACYJNYCH.....	5
2. MODELE MATEMATYCZNE.....	8
2.1. Modele deterministyczne.....	12
2.2. Modele stochastyczne i probabilistyczne.....	18
2.3. Model liniowy.....	21
2.4. Wielorównaniowy liniowy model opisowy.....	39
2.5. Model Lanchestera.....	41
3. METODY OPTIMALIZACJI LINIOWEJ.....	44
3.1. Programowanie całkowitoliczbowe.....	45
3.2. Zastosowanie metod optymalizacji liniowej. Problem produkcyjny.....	46
ZAŁĄCZNIKI	
Załącznik A – Ważne wiadomości z zakresu analizy matematycznej.....	61
Załącznik B – Klasyczna metoda najmniejszych kwadratów (KMNK)....	79
LITERATURA.....	83

1. GENEZA BADAŃ OPERACYJNYCH

Badania operacyjne są dyscypliną stosunkowo młodą, ich powstanie przypada na lata drugiej wojny światowej. Badania operacyjne (ang. *operation research* – analiza operacji) obejmowały początkowo problemy wyznaczania optymalnych rozwiązań różnorodnych zagadnień wojskowych za pomocą zespołu metod matematyczno-statystycznych. W późniejszym okresie metody badań operacyjnych przeniesiono na inne dziedziny nauki, takie jak technika czy ekonomia. Szczególnego znaczenia nabrało zastosowanie metod badań operacyjnych na najniższym szczeblu zarządzania gospodarką, w tzw. mikroskali. Głównym celem stosowania badań operacyjnych jest konieczność podejmowania optymalnych decyzji.

Ważne miejsce w badaniach operacyjnych zajmują zagadnienia programowania liniowego. Program liniowy jest rodzajem modelu, w którym zarówno funkcja celu, jak i wszystkie warunki ograniczające są funkcjami liniowymi. Metodą rozwiązującą problemy liniowe (bardzo uniwersalna) jest metoda simpleks. Jest to metoda iteracyjna, niezwykle pracochłonna w przypadku braku wspomagania informatycznego. Jednakże obecnie, w dobie powszechnej komputeryzacji stanowisk pracy, możliwe się stało szybkie rozwiązywanie zagadnień programowania liniowego, przy użyciu tej właśnie metody. Między innymi algorytmu metody simpleks użyto przy budowie narzędzia Solver, dostępnego w arkuszu kalkulacyjnym Excel, będącym komponentem popularnego pakietu biurowego Office firmy Microsoft. Nie zawsze jednak istnieje konieczność stosowania algorytmu simpleks do rozwiązywania zagadnień optymalizacyjnych, dysponujemy bowiem prostą metodą geometryczną stosowaną wtedy, gdy w zadaniu występują dwie zmienne. Wówczas problem można zilustrować na płaszczyźnie XOY. Modyfikacja metody geometrycznej – metoda dualna – pozwala na rozwiązanie zadania programowania liniowego, w przypadku gdy liczba występujących zmiennych jest większa od dwóch, lecz istnieją jedynie dwa ograniczenia. W pozostałych przypadkach pozostaje nam jedynie metoda simpleks.

Wśród metod programowania liniowego występuje również pojęcie programowania ilorazowego. Z programowaniem ilorazowym mamy do czynienia wtedy, gdy układ warunków ograniczających ma postać liniową, zaś funkcja celu jest ilorazem funkcji liniowych.

Szczególnym przypadkiem zagadnień liniowych są kwestie transportowe. Po raz pierwszy ten problem został sformułowany w 1941 roku i dotyczył

planu przewozu jednorodnego produktu z kilku różnych źródeł zaopatrzenia do kilku punktów zgłaszających zapotrzebowanie na dany produkt. Do rozwiązywania zagadnień dotyczących transportu, można stosować metodę simpleks, jednak istnieją inne, bardziej efektywne metody rozwiązania tego typu problemów. Optymalizacja sprowadza się w tym przypadku zwykle do minimalizacji łącznych kosztów transportu. Rzadziej jest optymalizowana droga, po której odbywa się transport bądź minimalizowany jest czas transportu.

Z transportem wiąże się kwestia przydziału szeroko pojętych zasobów. Tak oto zagadnienie liniowe, wydawałoby się niezmiernie proste, wymaga zastosowania kilku wcale niebanalnych metod. Można zatem przypuszczać, że wraz z komplikowaniem się sytuacji decyzyjnej, będą używane coraz bardziej skomplikowane metody analityczne. Stwierdzenie, że coś jest lub nie jest skomplikowane, jest z gruntu stwierdzeniem względnym, zatem z pewnością możemy powiedzieć, że używany (stosowany) aparat matematyczny staje się o wiele bardziej rozwinięty i mamy wówczas do czynienia z elementami rachunku prawdopodobieństwa i statystyki.

Typowe zagadnienia wymagające użycia metod statystycznych, to wszelkiego rodzaju sytuacje konfliktowe. Mamy wtedy do czynienia z zagadnieniem gier. Zależnie od warunków początkowych, mówimy przykładowo o grach dwuosobowych o sumie zero, o grach z naturą.

Innym bardzo ważnym zagadnieniem jest teoria kolejek (*queueing theory*). Problem ten, podobnie jak inne elementy badań operacyjnych, ma swoje korzenie w czasach drugiej wojny światowej. Rozważano go wtedy, gdy duża ilość samolotów bombowych po wykonaniu zadania bojowego musiała wylądować w krótkim czasie na zwykle mocno ograniczonej powierzchni lądowisk. Tak jak w przypadku innych elementów badań operacyjnych, tak i w tym przypadku zastosowania wojenne ustępują obecnie próbom wykorzystania teorii kolejek w praktyce gospodarczej¹.

W latach pięćdziesiątych wieku XX opracowano i wprowadzono do badań operacyjnych metody programowania sieciowego, które sklasyfikowano pod względem struktury logicznej i stąd się wziął podział na metody sieciowe o strukturze logicznej zdeterminowanej – sieci typu *DAN* (*Determinic Analysis Network*) oraz sieci o strukturze logicznej stochastycznej – sieci typu *GAN* (*Generalized Analysis Network*).

¹ Z. Jędrzejczyk, K. Kukuła, J. Skrzypek, A. Walkosz, *Badania operacyjne w przykładach i zadaniach*, PWN, Warszawa 1996, s. 143.

Zgodnie z tak przeprowadzonym podziałem, rozważa się modele sieciowe przedsięwzięć rozumianych jako zorganizowane działanie ludzkie zmierzające do osiągnięcia określonego celu. Określa się strukturę przedsięwzięcia, definiuje jego podstawowe elementy składowe, jakimi są zdarzenia i czynności. Zależności pomiędzy zdarzeniami i czynnościami określają strukturę logiczną modelu sieciowego. Do znanych metod analizy sieciowej należy CPM (*Critical Path Method*) i jej rozszerzenie o analizę czasowo kosztową CPM-COST, PERT (*Program Evaluation and Review Technique*) oraz PERT-COST.

Oprócz modeli programowania liniowego, często niewystarczających w modelowaniu rzeczywistości, stosuje się modele nieliniowe. Zagadnienie modelowania nieliniowego zwane jest programowaniem nieliniowym. W programowaniu nieliniowym nie ma uniwersalnej metody rozwiązywania, tak jak miało to miejsce w przypadku programowania liniowego i metody simpleks.

Nie sposób w tym krótkim przeglądzie technik obliczeniowych, stosowanych w badaniach operacyjnych, nie wspomnieć o programowaniu dynamicznym². Programowanie dynamiczne jest zbiorem technik matematycznych stosowanych do rozwiązywania zagadnień finansowania inwestycji, optymalizacji zapasów, alokacji zasobów, wymiany majątku trwałego.

² H.M. Wagner, *Badania operacyjne*, PWE, Warszawa 1980.

2. MODELE MATEMATYCZNE

Złożoność rzeczywistości, w której istniejemy, spowodowała konieczność budowy modeli matematycznych. Model, czyli przybliżenie rzeczywistości, możliwie jak najlepsze, spotykany na każdym niemal kroku, we wszystkich dyscyplinach naukowych, zrobił zawrotną karierę w wieku XX. Podjęto próby matematycznego modelowania bardzo wielu zjawisk zachodzących zarówno w przyrodzie, jak i życiu społecznym i ekonomicznym. Na porządku dziennym stało się zastosowanie metod symulacji komputerowych do złożonych zagadnień życia codziennego. Z pomocą przyszła technika komputerowa. Zbudowano szybkie maszyny liczące i rozwój w tej dziedzinie nadal nieprzerwanie trwa. Można obecnie zaryzykować stwierdzenie, że rozwój ten będzie nadal następował, jako że obecnie trwają prace nad innymi niż cyfrowa technologiami informatycznymi. Jako przykład może posłużyć pomysł Richarda Feynmana, dotyczący procesora kwantowego³.

Tak oto o modelu matematycznym pisze J. Gutenbaum: *„Model jest pojęciem bardzo ogólnym, używanym często w różnych dziedzinach, lecz w sposób daleko niejednoznaczny. Pojęcie modelu używane w nauce ma inne znaczenie, niż w języku potocznym, gdzie na ogół oznacza pewien wzorec do naśladowania, czy też w plastyce, gdzie nazywamy tak na przykład osobę, której portret jest malowany przez artystę – mistrza. Aby uniknąć niejednoznaczności przyjmujemy, że model oznacza reprezentację badanego obiektu w postaci innej niż ta, w której występuje w rzeczywistości.*

W nauce, w zdecydowanej większości przypadków, model jest rozumiany jako uproszczona reprezentacja rzeczywistości. Stanowi on pewien substrat rzeczywistości. Ujmuje tylko jej część. Ludzkość od zarania swych dziejów operowała modelami jako środkiem uogólnień i tworzenia pojęć abstrakcyjnych. Na przykład kamienne megality w Stonehenge tworzą model systemu słonecznego. Umożliwiał on dawnym mieszkańcom doliny Salisbury obserwację zjawisk astronomicznych, wyznaczanie pór roku, programowanie obrzędów. Celem tworzenia wszelkich modeli jest dążenie do zrozumienia otaczającej nas rzeczywistości. Stosując modele obserwujemy i sprawdzamy, jakie prawa rządzą zjawiskami. Kiedy prawa te zrozumiemy, to możemy przewidzieć jak dane zjawiska będą przebiegać w przyszłości i w innych warunkach. Do

³ G.J. Milburn, *Procesor Feynmana*, Wyd. Cis, Warszawa 2000, s. 203. Richards P. Feynman – fizyk amerykański, laureat nagrody Nobla z 1965 r. (wraz z J.S. Schwingerem i Sh. Tomonaga) za stworzenie relatywistycznej elektrodynamiki kwantowej.

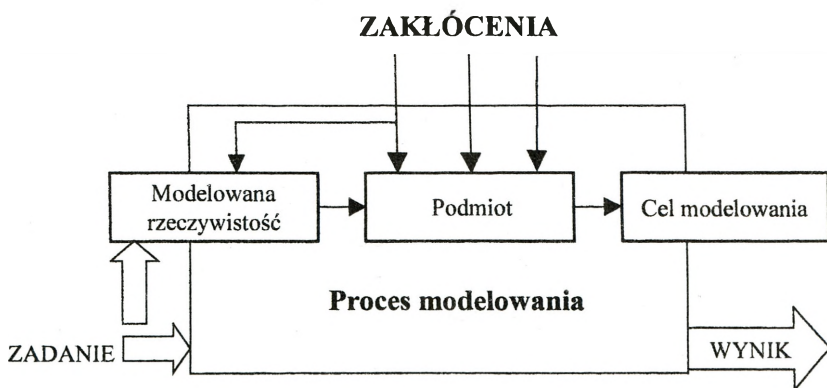
najstarszych sposobów odwzorowania rzeczywistości należą modele w 'skali', w których występuje podobieństwo wyłącznie geometryczne. Należą do nich modele ikonograficzne (obrazy, mapy, plany) oraz modele trójwymiarowe (makiety, miniatury). Wyższy stopień abstrakcji osiągają modele oparte nie na podobieństwie, lecz na analogii, a więc na odpowiedniej zgodności wartości wielkości fizycznie różnych. Są to na przykład modele elektryczne systemów mechanicznych (lub odwrotnie). Charakterystyczną cechą tych modeli jest fakt, że wielkości modelowane i modelujące podlegają prawom opisanym przez identyczne zależności matematyczne. Jeszcze pod koniec XIX wieku czynione były próby modelowania zjawisk elektromagnetycznych za pomocą układów mechanicznych. W połowie naszego wieku analogia była stosowana w kierunku odwrotnym – budowano układy elektryczne do badania układów mechanicznych, hydraulicznych, termicznych itp. Modele analogowe rozwinęły się do postaci uniwersalnych maszyn analogowych. Były to układy elektryczne składające się głównie z rezystorów i kondensatorów, oraz wzmacniaczy operacyjnych, budowane w postaci modułowej. Poszczególne moduły realizowały elementarne operacje matematyczne, typu sumowania, mnożenia, różniczkowania, całkowania. Łącząc odpowiednio moduły, można było realizować modele bardziej złożonych procesów fizycznych, opisywanych za pomocą równań różniczkowych"⁴.

W ciągu ostatnich dziesięcioleci komputery oparte na technice cyfrowej wyparły prawie całkowicie maszyny analogowe, które okazały się mniej dokładne i mniej elastyczne. Zarówno uniwersalne maszyny analogowe, jak i komputery wymagają sformułowania zadania modelowania w postaci relacji matematyczno-logicznych, a więc tego, co nazywamy modelem matematycznym. Model taki charakteryzuje się najwyższym stopniem abstrakcji – umożliwia operowanie symbolami i wyciąganie wniosków jakościowych. Termin „model matematyczny”, jako określenie sformalizowanej reprezentacji rzeczywistości, jest rozpowszechniony różnorodnie w poszczególnych dziedzinach wiedzy. W fizyce stosuje się matematykę do opisu praw przyrody, słowo „model” ma bardzo wąski zasięg i jest odnoszone do pewnych rozwiązań szczegółowych, np. model atomu Bohra-Rutherforda. W dziedzinach, w których stosowanie metod matematycznych datuje się od niedawna, takie pojęcia, jak „model matematyczny”, „modelowanie matematyczne” są szeroko stosowane. Dotyczy to takich nauk, jak: ekonomia, ekologia, biologia, medycyna.

⁴ J. Gutenbaum, *Modelowanie matematyczne systemów*, Wyd. Omnitech Press, Warszawa 1992, s. 7.

Modelowanie matematyczne jest dziedziną, której zadaniem jest opis rzeczywistości w języku matematyki i logiki formalnej. Uniwersalizm języka, którym się posługuje matematyka, powoduje, że taki sam model może opisywać systemy różniące się w sposób zasadniczy między sobą, dotyczące zupełnie odmiennych dziedzin. Metody matematyczne są powszechnie stosowane w dziedzinach, w których zjawiska mają charakter ilościowy (np. fizyka, chemia). Jednakże nawet tam, gdzie informacja ilościowa jest trudno dostępna, matematyka może dostarczyć narzędzi pozwalających na badanie związków między zjawiskami (np. nauki przyrodnicze).

Modelowanie jest w chwili obecnej jednym z podstawowych narzędzi poznania otaczającej nas rzeczywistości, jej zrozumienia, a później jej kreowania. Proces tworzenia modelu matematycznego rozpoczyna się od pewnych koncepcji, mniej lub bardziej sprecyzowanych, odnoszących się do badanego wycinka rzeczywistości. Następnie definiuje się zasady przyporządkowania cech zjawiska rzeczywistego obiektom matematycznym i formułuje relacje między tymi obiektami. W wyniku otrzymuje się zbiór aksjomatów, czy też zbiór hipotez teoretycznych. Dalej, na podstawie dedukcji logicznych, wyciąga się wnioski. Ogólnie proces modelowania rzeczywistości można przedstawić jak na rys. 1.



Rys. 1. Proces modelowania rzeczywistości

W procesie modelowania występują zawsze trzy elementy: przedmiot, podmiot i cel modelowania. Duże znaczenie przypisuje się zakłóceniom mającym wpływ na uzyskany wynik końcowy (np. subiektywizm oceniających).

Podziału modeli dokonuje się według rozmaitych kryteriów. Przykładowo kryteriami takimi mogą być:

- 1) forma związku między zmiennymi,
- 2) charakter powiązań między zmiennymi,
- 3) ilość rozpatrywanych zależności,
- 4) zakres badania,
- 5) występowanie lub brak zmiennej losowej między zmiennymi,
- 6) statyczność zależności.

Stąd klasyfikacja modeli na dwie główne kategorie:

- 1) modele opisowe,
- 2) modele optymalizacyjne.

Modele opisowe to takie, które służą opisowi, a następnie przewidywaniu przyszłego kształtowania się zależności.

Modele optymalizacyjne, to takie, które pozwalają na wybór optymalnej decyzji spośród zbioru rozwiązań dopuszczalnych.

Szczególne znaczenie ma podział modeli na te, które posiadają lub nie posiadają zmiennej losowej. Z tego punktu widzenia modele dzielimy na deterministyczne i stochastyczne. W przypadku gdy w modelu występują jedynie dokładne związki funkcjonalne i żadna ze zmiennych nie jest zmienną losową, model jest nazywany deterministycznym. Typowym modelem deterministycznym jest zadanie programowania liniowego. Gdy w modelu występuje zmienna losowa, model nazywamy stochastycznym. Szczególnym rodzajem modelu stochastycznego jest model probabilistyczny, tj. taki, w którym jest znany rozkład funkcji gęstości parametrów modelu. Innym szczególnym przypadkiem modelu stochastycznego jest model statystyczny. W modelu statystycznym nie są znane rozkłady funkcji gęstości prawdopodobieństwa parametrów stochastycznego modelu optymalizacyjnego. Podstawowe charakterystyki tego modelu wyznacza się na podstawie próby statystycznej. Z kolei, gdy nie są znane rozkłady funkcji gęstości prawdopodobieństwa parametrów stochastycznego modelu optymalizacyjnego ani też nie posiadamy dodatkowych informacji statystycznych, zaś znany jest zbiór wartości, jakie mogą przyjmować poszczególne parametry, model taki nazywamy strategicznym.

Z innego punktu widzenia modele dzieli się na liniowe i nieliniowe. Podział ten jest dokonywany na podstawie postaci analitycznej funkcji zależności modelu. Liniowość modelu może polegać na liniowej zależności zmiennych występujących w modelu lub na liniowości parametrów modelu, lub też na obu tych własnościach jednocześnie.

Modele opisane za pomocą jednego związku między zmiennymi, nazywamy modelami jednorównaniowymi. W przypadku gdy tych związków jest więcej, mówimy o modelach wielorównaniowych.

Istnieje jeszcze wiele innych podziałów modeli, jednakże nie będą one tutaj omawiane⁵.

2.1. Modele deterministyczne

Niepewność i losowość są pojęciami, z którymi ludzkość nie mogła sobie poradzić przez bardzo długi czas. Również współcześnie znosimy objawy niepewności i cierpimy z powodu katastrof. Wszystko byłoby znacznie prostsze, gdyby bieg rzeczy był deterministyczny, tak jak chciał tego Goethe czy też Laplace – wyznawca „demonia matematycznego”. Z drugiej strony filozofowie już od czasów Arystotelesa uznawali rolę przypadku w życiu, uważając go za coś, co burzy porządek i pozostaje poza zasięgiem pojmowania⁶.

Przykład: Modele deterministyczne w kalkulacjach operacyjno-taktycznych

W naukach wojskowych, tak jak w każdej innej dyscyplinie naukowej, mamy do czynienia z gromadzeniem i przetwarzaniem danych empirycznych. Zakres oraz ilość możliwych do zgromadzenia danych stanowi znikomy procent w stosunku do ilości danych empirycznych dostępnych w innych dyscyplinach naukowych, chociażby w fizyce czy chemii. Na taki stan rzeczy wpływa kilka przyczyn. Między innymi jest to podyktowane ograniczoną możliwością prowadzenia badań empirycznych – chodzi tu o wymierny opis współczesnych działań zbrojnych. Zupełnie inny problem stanowi wiarygodność zgromadzonych danych. Niczym nieograniczone możliwości tkwią w rozwijanych wciąż technikach badań symulacyjnych, tj. w komputerowym modelowaniu rzeczywistych zjawisk zachodzących na polu walki.

Sensowny opis wszelkich zjawisk, społecznych zaś w szczególności, pociąga za sobą konieczność konstruowania poprawnych modeli. Językiem opisu są oczywiście metody matematyczne, statystyczne i systemowe. Te ostatnie są niejako naturalnym połączeniem metod matematycznych i statystycznych. Wiąże się to z usytuowaniem systemów w naszej rzeczywistości⁷.

⁵ *Opisowe modele ekonometryczne*, red. N. Łopińska-Sobczak, Wyd. Uniwersytetu Łódzkiego, Łódź 1998, s. 10.

⁶ C. Radhakrishna Rao, *Statystyka i prawda*, PWN, Warszawa 1994, s. 21.

⁷ R. Kulikowski, *Analiza systemowa i jej zastosowania*, PWN, Warszawa 1977.

Wiele zjawisk zachodzących na współczesnym polu walki daje się modelować przy użyciu prostych zależności matematycznych lub metod analizy matematycznej. Są to dobrze określone problemy, zwykle wyrażone w sposób całkowicie liczbowy. Wymierne wartości danych wejściowych, przetworzone zwykle za pomocą modelu jednorównaniowego, generują jednoznacznie określony wynik. Jako przykłady takich obliczeń można podać jednostkowe problemy związane z przegrupowaniem wojsk, np. ogólny czas marszu, głębokość ugrupowania marszowego, czas przekroczenia czołem kolumny marszowej pierwszej i kolejnych linii (punktów) wyrównania w stosunku do godziny „G”. Możliwość jednoznacznego kreślenia takiego typu wielkości, dobrze opisanych, stanowiących podstawowe zależności zawarte w kalkulacjach operacyjno-taktycznych, nie oznacza wcale, że są one wartościami dokładnymi. Wynika to z tego, że wszystkie wielkości użyte do obliczeń są obciążone pewnym błędem, o czym nie zawsze pamiętamy.

Rozróżnia się trzy podstawowe rodzaje kalkulacji operacyjno-taktycznych, do których należą: kalkulacje proste, kalkulacje odwrotne oraz kalkulacje optymalizacyjne. Te ostatnie – jako najtrudniejsze – wykonuje się po wcześniejszym wykonaniu kalkulacji prostych i odwrotnych. Istnieją cztery sposoby wykonania powyższych kalkulacji (zależnie od możliwości jakimi dysponujemy), i są to kalkulacje wykonywane za pomocą: wzorów matematycznych, nomogramów, formularzy obliczeniowych oraz techniki komputerowej⁸.

Kalkulacje za pomocą formularzy obliczeniowych opierają się na formułach matematycznych (przeważnie na modelach jednorównaniowych) i są wykonywane na specjalnie przygotowanych blankietach. Wymagania stawiane przed kalkulacjami są wysokie, a najważniejsze z nich – terminowość i dokładność – stanowią o swoistej zasadzie nieoznaczoności. Zasadę tę można sformułować następująco: Nie jest możliwe takie dokonanie kalkulacji operacyjno-taktycznych, które można przeprowadzić z zadaną dokładnością w dowolnie krótkim czasie i na odwrót.

Aby wykonać analizę rozwoju walki, konstruuje się odpowiednie modele celem odzwierciedlenia wszystkich współzależności na nim zachodzących. Przedstawienie walki w postaci modelu ściśle deterministycznego, jest zadaniem niewykonalnym. Powodów takiego stanu rzeczy jest wiele. Główna przyczyna leży w tym, że nie wszystkie czynniki mające wpływ na przebieg walki są wielkościami znanymi. Ponadto, nie wszystkie w ogóle można jednoznacznie określić, a inne dają się określić jedynie w przybliżeniu. Dlatego

⁸ *Podstawowe kalkulacje operacyjno-taktyczne*, MON, SG WP, Warszawa 1988, passim.

zatem buduje się modele deterministyczne? Odpowiedź jest prosta: modele te buduje się dlatego, że ich budowa nie nastrocza z reguły dużych trudności. Jeśli dodatkowo uzyskane za ich pomocą wyniki są wiarygodne, pozwala to wydatnie wspomóc proces podejmowania decyzji.

W modelu deterministycznym każdemu elementowi x zbioru wejściowego X jest w sposób jednoznaczny przyporządkowany element y zbioru wielkości wyjściowych Y . Nie sposób też zapomnieć o błędzie wielkości y , generowanym przez niedokładności zmiennych x .

Obliczanie błędów jest oparte na rachunku różniczkowym. Niemniej jednak błędy podstawowych działań arytmetycznych można obliczyć, nie korzystając z rachunku różniczkowego, co skrótnie niżej przedstawiamy.

• Dodawanie i odejmowanie: $X = a \pm b$, wielkości a i b są obarczone błędami Δa i Δb , zaś błąd bezwzględny wielkości X wynosi:

$$\Delta X = \frac{X_{\max} - X_{\min}}{2}$$

Dla dodawania mamy:

$$X_{\min} = a_{\min} + b_{\min} = a - \Delta a + b - \Delta b$$

$$X_{\max} = a_{\max} + b_{\max} = a + \Delta a + b + \Delta b$$

Stąd dla dodawania: $\Delta X = \Delta a + \Delta b$

Można to oczywiście zapisać następująco:

$$dX = \frac{\partial X}{\partial a} |da| + \frac{\partial X}{\partial b} |db| = |da| + |db|$$

Podobny wynik otrzymamy w przypadku działania odejmowania.

• Mnożenie (dzielenie): $X = a \cdot b$ ($X = \frac{a}{b}$)

Działania analogiczne do powyższych rozważań dają następujący wynik:

$$\Delta x = a \cdot \Delta b + b \cdot \Delta a \quad (\text{dla mnożenia})$$

$$\text{oraz: } \Delta x = \frac{a\Delta b + b\Delta a}{b^2 - (\Delta b)^2} \approx \frac{a\Delta b + b\Delta a}{b^2} \quad (\text{dla dzielenia})$$

Powyższe rozważania pozwalają sformułować następujące reguły, obowiązujące w rachunku błędów:

(1) graniczny błąd bezwzględny sumy (różnicy) jest równy sumie granicznych błędów bezwzględnych składników (odjemnej i odjemnika);

(2) graniczny błąd względny iloczynu (ilorazu) równy jest sumie granicznych błędów względnych czynników (dzielnej i dzielnika).

(3) na podstawie pierwszej reguły można powiedzieć, że należy unikać sytuacji, gdy we wzorach matematycznych pojawia się różnica wielkości, o niewiele różniących się między sobą wartościach. Sytuacja taka, może bowiem doprowadzić do dużych wartości błędów względnych.

BŁĘDY EKSPERTÓW

Bardzo często prosimy ekspertów – specjalistów z danych dziedzin – o wyrażenie opinii w ważnych kwestiach. Z reguły ich ocena dotyczy zagadnień jakościowych, co jest związane ze zrozumiałymi trudnościami wymiernego ich przedstawienia.

Założmy, że ekspert podaje swoją ocenę w punktach w skali od zera do dziesięciu i jest możliwa ocena połówkowa. Wówczas pozornie mało się różniące oceny (np. o 0,5 pkt.), powodują znaczny procentowy błąd względny. Przykładowo dla oceny 4,5 pkt. otrzymujemy: $\delta_{\%} \approx 11\%$.

O błędach tego typu należy szczególnie pamiętać. Stąd też wszelkiego rodzaju współczynniki obliczone (szacowane), zależne od wielu czynników, wśród których są oceny ekspertów, są obarczone znacznym błędem względnym. Typowym przykładem mogą być współczynniki jakości obliczone dla poszczególnych rodzajów uzbrojenia.

BŁĘDY OBLICZEŃ NUMERYCZNYCH

Kalkulacje wykonywane za pomocą techniki komputerowej są dodatkowo obarczone błędem numerycznym. Błędy numeryczne ujawniają się niespodziewanie, a ciekawym przykładem może być rozwiązanie trójmianu kwa-dratowego: $ax^2 + bx + c = 0$, według następujących wzorów:

$$x_1 = \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a}; \quad x_2 = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a}$$

oraz według zależności będących równoważnymi w sensie matematycznym:

$$x'_1 = \frac{2c}{-b + \sqrt{\Delta}}, \quad x'_2 = \frac{2c}{-b - \sqrt{\Delta}}$$

Rozwiązując powyższy trójmian dla: $a = 1$, $b = -11,2729$, $c = 0,128097$, otrzymujemy:

$$x_1 = 0,011374745 \text{ oraz } x'_1 = 0,011374746$$

Pozornie niewiele różniące się wyniki, po podstawieniu do trójmianu, dają znacznie różniące się między sobą wartości: $2,191 \cdot 10^{-8}$ oraz $1,066 \cdot 10^{-8}$. Widać zatem, że pierwiastek x_1 jest znacznie mniej dokładny niż pierwiastek x_1' . Podobna sytuacja ma miejsce w przypadku drugiego pierwiastka. Przyczynę tego typu kłopotów wyjaśnia trzecia reguła, podana uprzednio, a dotycząca sytuacji, gdy w wyrażeniach matematycznych pojawia się różnica dwóch wielkości o zbliżonych wartościach⁹.

Przykład: Stosunek sił

Obliczyć stosunek sił między przeciwnymi stronami w rodzaju uzbrojenia xxx, jeżeli po stronie własnej jest 30 szt. xxx, w tym 10 sztuk rodzaju pierwszego i 20 sztuk rodzaju drugiego, zaś po stronie przeciwnej 15 szt. xxx, w tym 5 sztuk rodzaju trzeciego i 10 sztuk rodzaju czwartego. Poniższa tabela podaje hipotetyczne wartości współczynników jakości taktyczno-technicznej dla poszczególnych rodzajów uzbrojenia xxx.

Rodzaj	Współczynnik
pierwszy	0,49
drugi	1,00
trzeci	1,00
czwarty	1,50

Obliczenia

Strona własna: $10 \cdot 0,49 + 20 \cdot 1,00 = 24,9$

$$\Delta = 10 \cdot 0,005 + 20 \cdot 0,005 = 0,15$$

$$\delta_{\%} = 0,6\%$$

Strona przeciwna: $5 \cdot 1,00 + 10 \cdot 1,5 = 20$

$$\Delta = 5 \cdot 0,005 + 10 \cdot 0,005 = 0,075$$

$$\delta_{\%} = 0,4\%$$

Stosunek sił: $24,9 : 20 \pm 1\%$, co w sensie matematycznym oznacza: $\approx 1,25 \pm 1\%$.

Uzyskany wynik jest całkowicie zadowalający i świadczy między innymi o tym, że użyte do obliczeń stosunku sił wartości współczynników jakości, powinny być określone do dwóch miejsc po przecinku.

⁹ I. Czocharlska, *Wykłady z metod numerycznych dla ekonomistów*, SGH, Warszawa 1994, s. 24.

Przykład: Czas pracy

Czas pracy dowódcy i sztabu przy organizacji obezwładnienia przegrupowującego się przeciwnika wynosi:

$$T = \frac{(D - D_{mz}) \cdot 60}{V_p} - T_r$$

gdzie: T – czas potrzebny dowódcy i sztabowi na organizację porażenia ognio-
wego przegrupowującego się przeciwnika (min),

D – odległość do przegrupowującego się przeciwnika (km),

D_{mz} – maksymalny zasięg ognia skutecznego własnych środków ognio-
wych (km),

V_p – prędkość marszu przeciwnika (km/h),

T_r – czas potrzebny na przygotowanie pododdziałów do otwarcia ognia
(min).

Przeprowadzając obliczenia dla:

$$D = 25 \text{ km}, D_{mz} = 12 \text{ km}, V_p = 15 \text{ km/h i } T_r = 30 \text{ min}$$

oraz przyjmując następujące wartości błędów bezwzględnych:

$$\Delta D = \Delta D_{mz} = 0,1 \text{ km}, \Delta V_p = 0,1 \text{ km/h}, \Delta T_r = 0,1 \text{ h otrzymujemy:}$$

$$T = 22 \pm 9 \text{ min, co oznacza, że: } \delta_{\%} \approx 40\%$$

WNIOSEK

Tak duży błąd względny świadczy o błędach konstrukcyjnych modelu.

Dla formuł zawierających różnicę dwóch wielkości, co do których istnieje możliwość, że występujące wielkości mogą przyjmować zbliżone wartości, należy wyraźnie określić warunki brzegowe, tj. ograniczenia dla ich stosowania.

Przykład: Pościg

Czas trwania pościgu:

$$T_d = \frac{D_s}{V_s - V_p}$$

gdzie: V_s – prędkość marszu wojsk własnych (km/h),

V_p – prędkość marszu wojsk przeciwnika (km/h),

D_s – odległość od wojsk własnych do przeciwnika (km).

Przeprowadzając obliczenia dla: $D_s = 20$ km, $V_s = 25$ km/h i $V_p = 15$ km/h oraz przyjmując następujące wartości błędów bezwzględnych: $\Delta D_s = 0,1$ km, $\Delta V_s = \Delta V_p = 1$ km/h, otrzymujemy:

$$T_d = 2 \pm 0,42 \text{ h, co oznacza, że: } \delta\% \approx 21\%$$

WNIOSEK

Sytuacja podobna jak w poprzednim przykładzie.

Należy (jeśli to możliwe) unikać stosowania powyższych zależności do obliczeń czasu.

2.2. Modele stochastyczne i probabilistyczne

W modelu stochastycznym i probabilistycznym, każdemu elementowi x zbioru wejściowego X jest przyporządkowany nie jeden (jak to miało miejsce w modelach deterministycznych), lecz wiele elementów y zbioru wielkości wyjściowych Y . Przykładowo wzrost dziecka zależy od jego wieku. Jednakże dzieci w tym samym wieku mogą być różnego wzrostu. Na wzrost dziecka wpływa wiele czynników, między innymi uwarunkowania genetyczne, odżywianie, stan zdrowia itp. Wpływ poszczególnych czynników nie jest dokładnie znany. Wówczas tę niewiedzę się uogólnia, mówiąc, że zależność wzrostu dziecka od jego wieku ma charakter losowy, jest zależnością stochastyczną⁸.

Modele systemów, w które wbudowano mechanizm generowania wielkości losowych, nazywamy modelami stochastycznymi. Mają one charakter modeli symulacyjnych.

Przykład: Liniowy model stochastyczny⁹

Ogólna postać liniowego modelu stochastycznego w zapisie macierzowym:

$$Y = X\alpha + \varepsilon$$

gdzie: X – macierz obserwacji zmiennych objaśniających,

Y – wektor zmiennej objaśnianej.

α – wektor parametrów,

ε – wektor składnika losowego.

⁸ J. Gutenbaum, *Modelowanie matematyczne systemów...* wyd. cyt., s. 60.

⁹ *Opisowe modele ekonometryczne...* wyd. cyt., s. 15.

Przykład: Stochastyczny model opisowy

Dobrym przykładem stochastycznego modelu opisowego jest funkcja (C-D) o postaci:

$$P_t = A_0 K_t^\alpha L_t^\beta \xi_t$$

gdzie: A_0 – stała,

α, β – parametry strukturalne,

K_t – kapitał,

L_t – zatrudnienie w okresie t ,

ξ_t – składnik losowy.

Przykład: Model systemu działającego w warunkach losowych

Zamodelowano system rzeczywisty działający w warunkach losowych za pomocą poniższego równania różniczkowego:

$$\frac{dx(t)}{dt} = f[x(t), m(t), z(t)]$$

gdzie: $z(t)$ jest nieznanym wpływem otoczenia na system.

Doprowadzając do modelu przebieg losowy o identycznych cechach probabilistycznych, jakie ma przebieg działający na system rzeczywisty, możemy stać się badaniem cech systemu rzeczywistego.

Zmienne losowe występujące w modelach stochastycznych posiadają rozkłady normalne. Generując zmienne losowe należy korzystać z opracowanych tablic liczb przypadkowych o zadanych rozkładach. Liczby te są z reguły podawane w formie standardowej, dla wartości średniej równej zeru oraz wariancji równej jedności. Procedura przejścia do liczb losowych o rozkładzie normalnym odbywa się zgodnie z zależnością:

$$z = (M, S) = M + z(0,1) S$$

gdzie: $z(0, 1)$ jest liczbą losową o rozkładzie normalnym z przedziału $(0, 1)$,

M – wartość średnia,

S – odchylenie standardowe.

Przykład: Model zbiornika retencyjnego¹².

Zakłada się, że zbiornik retencyjny opisany jest równaniem:

$$x(k+1) = x(k) + a[z(k) - m(k)]$$

gdzie: $x(k)$ – stan zbiornika,

$z(k)$ – średni dopływ,

$m(k)$ – średni odpływ (w przedziale k -tym),

a – współczynnik.

Zakłada się dalej, że dopływy są zmienną losową, którą kształtuje następująca zależność:

$$z(k+1) = \alpha[z(k)] + \beta\varpi(k)$$

gdzie: $\varpi(k)$ – zmienna losowa o znanym rozkładzie, która fizycznie reprezentuje wpływ opadów atmosferycznych, intensywność parowania i inne czynniki losowe,

α, β – współczynniki.

Dla zadanych typowych rozkładów $\omega(k)$ można stosunkowo łatwo określić analitycznie rozkłady dopływów $z(k)$. Trudniejszą sprawą jest określenie właściwości probabilistycznych $x(k)$. Wynika to z faktu, iż zależą one również od $m(k)$, które może być zmienną decyzyjną, a więc zależeć od przyjętej reguły gromadzenia wody w zbiorniku. Zadanie, które polega na sprawdzeniu różnych reguł decyzyjnych, najwygodniej rozwiązywać za pomocą modelu stochastycznego i symulacji komputerowej.

Jeżeli w tym samym zadaniu, odnoszącym się do badania zachowania się systemu w warunkach losowych, uda nam się wyrazić w modelu cechy probabilistyczne wyjścia $y(t)$, bez konieczności symulacji $z[t_0, t_f]$, to jest wyrazić analitycznie wartość średnią, wariancję, funkcję autokorelacji itd. przebiegu $y(t)$ – w zależności od odpowiednich cech stanu $x(t_0)$ i wejścia $z[t_0, t_f]$, to otrzymujemy model probabilistyczny. Udziela on potrzebnych odpowiedzi bez konieczności poddawania go eksperymentom, polegającym na doprowadzeniu do modelu przebiegów losowych.

¹² J. Gutenbaum, *Modelowanie matematyczne systemów...* wyd. cyt., s. 64.

Modele probabilistyczne są jednak trudne do uzyskania, a symulacja stochastyczna jest pracochłonna i nie zawsze możliwa. Nader często jesteśmy zmuszeni analizować przypadek opisany liniowym równaniem różniczkowym postaci:

$$\frac{dx(t)}{dt} = f[x(t), m(t), z(t)]$$

w ten sposób, że zaniedbując losowy charakter $z_{[t_0, t_f]}$, przyjmujemy jego wartość oczekiwaną lub wartość najbardziej prawdopodobną (prognozę) za zdeterminowaną, niezależną wielkość wejściową systemu, czyli zastępujemy model stochastyczny modelem deterministycznym.

2.3. Model liniowy¹³

Najprostsza postać jednorównaniowego modelu liniowego, zwanego modelem regresji prostej, to:

$$Y = b_0 + b_1 X + u$$

gdzie: Y – to zmienna zależna lub inaczej zmienna objaśniana. Jest to zmienna, której zachowanie jest wyjaśniane przez równanie modelu.

X – jest zmienną niezależną lub inaczej zmienną objaśniającą w równaniu modelu. Reprezentuje kategorię (np. cenę), którą uznajemy za przyczynę zmian zmiennej Y (zależnej).

b_0 i b_1 – to parametry strukturalne modelu. Parametr strukturalny oznacza nieznaną współczynnik (nielosowy), którego wartość należy oszacować na podstawie wartości liczbowych zmiennej objaśnianej i zmiennej objaśniającej. Wartość parametru daje możliwość interpretacji zależności pomiędzy X i Y .

Przykładowo: b_1 to pochodna Y względem X , czyli miara (oczekiwanego) przyrostu Y względem jednostkowego przyrostu X .

u – jest składnikiem losowym. Składnik losowy to zmienna losowa o określonych własnościach, która reprezentuje tzw. błąd w równaniu.

¹³ M. Gruszczyński, P. Mierzejewski, *Wstęp do ekonometrii w 100 oknach*, SGH, Warszawa 1998, s. 49–66.

Błąd w równaniu to te wszystkie czynniki wpływające na Y (zmienną objaśnianą), których za wyjątkiem X nie uwzględniono w modelu.

POSTAĆ OGÓLNA MODELU

Postać ogólną jednorównaniowego modelu liniowego formułujemy dla większej liczby zmiennych objaśniających: $X_1, X_2, \dots, X_k$. Jest to model tzw. regresji wielorakiej. Model jednorównaniowy z k zmiennymi objaśniającymi zapisujemy jako:

$$Y = b_0 + b_1 X_1 + b_2 X_2 + \dots + b_k X_k + u$$

Model posiada $k + 1$ parametrów strukturalnych.

LINIOWOŚĆ I NIELINIOWOŚĆ

Rozróżnia się następujące, podstawowe typy modeli:

- ściśle liniowe – oznacza to, że model jest liniowy względem zmiennych objaśniających, jak i parametrów strukturalnych:

$$Y = b_0 + b_1 X_1 + b_2 X_2 + \dots + b_k X_k + u$$

- liniowe względem parametrów:

$$Y = a + bX + cX^2 + u_1$$

- liniowy względem zmiennych:

$$Y = f + gX + g^2 Z + u_2$$

- ściśle nieliniowy – nie ma możliwości przekształcenia na model liniowy:

$$Y = h(X^i + Z^j) u_3$$

Celem uściślenia definicji modelu liniowego trzeba wyjaśnić, że kiedy jest mowa o modelu liniowym, to chodzi przede wszystkim o model liniowy względem parametrów. Jest to motywowane tym, że zwykle zajmujemy się estymacją parametrów, a nieliniowość parametrów w modelu powoduje komplikację metod estymacji. Dlatego uznaje się podział na modele liniowe i nieliniowe względem parametrów za ważniejszy od takiego samego podziału modeli względem zmiennych.

Klasyfikację modeli można przeprowadzić poprzez analizę pochodnej cząstkowej zmiennej objaśnianej względem parametrów. Model liniowy cha-

rakteryzuje się niezależnością wszystkich pochodnych zmiennej objaśnianej od wszystkich parametrów. Cechą charakterystyczną modelu ściśle liniowego jest niezależność pochodnych cząstkowych względem parametrów od każdego parametru oraz niezależność pochodnych cząstkowych względem zmiennych od każdej zmiennej. W modelu ściśle nieliniowym pochodne cząstkowe względem parametrów oraz względem zmiennych są funkcjami parametrów i zmiennych modelu.

Na przykład ściśle nieliniowy jest model:

$$Y = \frac{a}{1 + be^{-cX}} + u$$

w którym a , b , c są parametrami, natomiast e podstawą logarytmu naturalnego.

Punktem wyjścia budowy modelu jest istniejąca teoria i sformułowany na jej podstawie model matematyczny. Możliwe jest też inne podejścia metodologiczne, których punktem wyjścia jest specyfikacja modelu bezpośrednio na podstawie danych.

Rozpatrzmy teraz liniowy model korelacyjny. Modele korelacyjne tworzy się na podstawie zaobserwowanych lub hipotetycznych korelacji między opisywanymi zjawiskami. Należy zauważyć, że model korelacyjny nie musi być jednocześnie modelem przyczynowym. Przyczynowość jest cechą wszystkich modeli deterministycznych. Każde zdarzenie w modelu deterministycznym jest zdeterminowane przez inne zjawisko, zaś w modelu korelacyjnym niekoniecznie.

DOBÓR ZMIENNYCH OBJAŚNIAJĄCYCH DO KORELACYJNYCH MODELI LINIOWYCH

Zmienne objaśniające w modelach liniowych powinny charakteryzować się następującymi własnościami:

- posiadać odpowiednio wysoką zmienność,
- być silnie skorelowane ze zmienną objaśnianą,
- skorelowanie między zmiennymi objaśniającymi powinno być słabe,
- być silnie skorelowane z innymi zmiennymi, które nie pełnią roli zmiennych objaśniających, ale je reprezentują.

Doboru zmiennych objaśniających dokonujemy za pomocą metod statystycznych. Procedura wyboru zmiennych składa się z czterech etapów.

Pierwszym etapem w procedurze wyboru zmiennych jest sporządzenie zestawu tzw. potencjalnych zmiennych objaśniających. Zmienne objaśniające oznaczmy jako $X_1, X_2, \dots, X_k$.

Drugi etap tej procedury to zebranie danych statystycznych, które są realizacjami zmiennej objaśnianej oraz wyżej wymienionych potencjalnych zmiennych objaśniających. Wynikiem jest wektor y obserwacji zmiennej Y i macierz X obserwacji zmiennych $X_1, X_2 \dots X_k$, która przyjmuje postać:

$$y = \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_n \end{bmatrix}, \quad X = \begin{bmatrix} x_{11} & x_{12} & \dots & x_{1k} \\ x_{21} & x_{22} & \dots & x_{2k} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ x_{n1} & x_{n2} & \dots & x_{nk} \end{bmatrix}$$

Etap trzeci to eliminacja potencjalnych zmiennych objaśniających, charakteryzujących się zbyt niskim poziomem zmienności.

Czwarty etap polega na obliczeniu współczynników korelacji między wszystkimi rozpatrywanymi zmiennymi.

Ostatnim krokiem jest redukcja zbioru potencjalnych zmiennych objaśniających za pomocą wybranej procedury statystycznej.

ELIMINACJA ZMIENNYCH QUASI-STALYCH

Pierwszy etap modelowania polega na stwierdzeniu, czy zmienność rozważanych wielkości jest wystarczająco duża. Aby określić wielkość zmienności, należy obliczyć tzw. współczynnik zmienności. Ten współczynnik klasyfikuje zmienne na przydatne i na takie, które nie wnoszą istotnych informacji, a jego postać jest następująca:

$$v_i = \frac{S_i}{\bar{x}} \quad (i = 1, 2, \dots, m)$$

$\bar{x}$ – średnia arytmetyczna zmiennej X_i ;

$$\bar{x} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_{ti}$$

S_i – odchylenie standardowe zmiennej X_i ;

$$S_i = \left[\frac{1}{n} \sum_{t=1}^n (x_{ti} - \bar{x}_i)^2 \right]^{\frac{1}{2}}$$

Odrzucenie zmiennych quasi-stałych (nieistotnych), odbywa się poprzez rozwiązanie nierówności:

$$v_i \leq v^*$$

v^* – wartość krytyczna współczynnika zmienności.

WEKTOR I MACIERZ WSPÓŁCZYNNIKÓW KORELACJI

Siłę liniowej zależności między zmienną objaśnianą a zmiennymi objaśniającymi określa się przez wyliczenie współczynnika korelacji:

$$r_i = \frac{\sum_{t=1}^n (y_t - \bar{y})(x_{ti} - \bar{x}_i)}{\sqrt{\sum_{t=1}^n (y_t - \bar{y})^2 \sum_{t=1}^n (x_{ti} - \bar{x}_i)^2}} \quad (i = 1, 2, \dots, m)$$

Współczynniki te tworzą wektor korelacji.

$$R_0 = \begin{bmatrix} r_1 \\ r_2 \\ \vdots \\ r_n \end{bmatrix}$$

Do obliczenia współczynnika korelacji między zmiennymi objaśniającymi, posługujemy się wzorem:

$$r_{ij} = \frac{\sum_{t=1}^n (x_{ti} - \bar{x}_i)(x_{tj} - \bar{x}_j)}{\sqrt{\sum_{t=1}^n (x_{ti} - \bar{x}_i)^2 \sum_{t=1}^n (x_{tj} - \bar{x}_j)^2}} \quad (i, j = 1, 2, \dots, m)$$

Współczynniki te przybierają postać symetrycznej macierzy korelacji:

$$\mathbf{R} = \begin{bmatrix} 1 & r_{12} & \cdots & r_{1m} \\ r_{21} & 1 & \cdots & r_{2m} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ r_{m1} & r_{m2} & \cdots & 1 \end{bmatrix} \quad (r_{ij} = r_{ji})$$

METODA ANALIZY WSPÓŁCZYNNIKÓW KORELACJI LINIOWEJ PEARSONA

Metoda ta ma na celu wybór takich zmiennych objaśniających, które są silnie skorelowane ze zmienną objaśnianą i słabo skorelowane ze sobą. Obliczenia wstępne zostały już wykonane poprzez zbudowanie wektora R_0 i macierzy $\mathbf{R}$.

Kolejny krok to wyznaczenie krytycznej wartości współczynnika korelacji o zadanym poziomie istotności γ i $n - 2$ stopniach swobody, który może być wyznaczony z góry lub obliczony według wzoru:

$$r^* = \left[\frac{(I^*)^2}{(I^*) + n - 2} \right]^{\frac{1}{2}}$$

I^* – jest to wartość odczytywana z tablic statystycznych (rozkładu t -Studenta dla danej wartości γ oraz $n - 2$ stopni swobody).

Dobór zmiennych objaśniających odbywa się w następujący sposób:

- najpierw ze zbioru potencjalnych zmiennych eliminujemy wszystkie te, które są w mało istotny sposób powiązane ze zmienną objaśnianą, a wykrywamy to przez sprawdzenie nierówności:

$$|r_i| \leq r^*$$

i odrzucenie zmiennych, dla których ona zachodzi.

- z pozostałych zmiennych objaśniających wybiera się taką X_h , która jest najsilniej skorelowana ze zmienną objaśnianą. Siłę korelacji określa zależność:

$$|r_h| = \max_i \{ |r_i| \}$$

• kolejny krok to wyeliminowanie zmiennych objaśniających silnie skorelowanych ze sobą, co ponownie ogranicza ilość zmiennych objaśniających. Uzyskujemy to przez sprawdzenie nierówności:

$$|r_{hi}| > r^*$$

Przykład:

Poniższa tabela zawiera przykładowe dane określające zmienną objaśnianą y i zmienne objaśniające x_1 do x_5 . Naszym zadaniem jest eliminacja zmiennych objaśniających w taki sposób, aby w modelu pozostawić jedynie zmienne, które wykazują mocną zależność (korelację) ze zmienną objaśnianą y oraz jednocześnie słabą zależność korelacyjną między sobą (tj. zmiennymi objaśnianymi).

Tabela 1. Dane do przykładu

y	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5
49	21	30	40	25	20
38	17	37	31	21	19
35	14	35	28	40	17
30	12	50	17	41	45
26	10	24	12	43	6
21	7	40	24	12	1

Źródło: Opracowanie własne.

Posługując się zależnościami podanymi niżej, obliczamy niezbędne współczynniki korelacji liniowej Pearsona r_{xy} , $r_{x_i x_j}$

$$r_{xy} = r_{yx} = \frac{\text{cov}(x, y)}{S(x) \cdot S(y)}$$

gdzie: $\text{cov}(x, y) = \text{cov}(y, x) = \overline{xy} - \bar{x} \cdot \bar{y}$

$$S(x) = \sqrt{\frac{1}{N} \sum_{i=1}^N (x_i - \bar{x})^2}$$

$$S(y) = \sqrt{\frac{1}{N} \sum_{i=1}^N (y_i - \bar{y})^2}$$

Wartość krytyczną współczynnika korelacji przyjęto równą $r^* = 0,32$. Obliczone wartości współczynników korelacji liniowej zawiera tabela 2.

Tabela 2. Wyniki obliczeń

0,827	-0,188	0,677	-0,018	0,267
1	-0,176	0,659	-0,023	0,283
-0,176	1	-0,088	-0,09	0,545
0,659	-0,088	1	-0,439	-0,011
-0,023	-0,09	-0,439	1	0,356
0,283	0,545	-0,011	0,356	1

Źródło: Opracowanie własne.

Eliminując zmienne, w modelu pozostawiamy zmienną 1.

METODA HELLWIGA

Podobnie jak w przypadku metody analizy współczynników korelacji celem tej metody jest takie dobranie zmiennych objaśniających, aby były one słabo skorelowane między sobą, ale mocno skorelowane ze zmienną objaśnianą. Punktem wyjścia w przypadku tej metody jest także wektor R_0 i macierz R . Rozpatruje się wszystkie niepuste kombinacje potencjalnych zmiennych ze zbioru X , których ogólna liczba wynosi:

$$L = 2^m - 1$$

gdzie: m – oznacza liczbę wszystkich zmiennych.

Następnie oblicza się indywidualne wskaźniki pojemności informacyjnej ze wzoru:

$$h_{ij} = \frac{r_j^2}{\sum_{\substack{i=1 \\ i \neq j}}^{m_l} |r_{ij}|} \quad (l = 1, 2, \dots, L, \quad j = 1, 2, \dots, m_l)$$

l – numer kombinacji,

j – numer zmiennej w kombinacji,

m_l – liczba zmiennych w rozpatrywanej kombinacji.

Kolejnym krokiem jest obliczenie integralnych wskaźników pojemności informacyjnej, wykorzystując wzór:

$$H_l = \sum_{j=1}^{m_l} h_{ij} \quad (l = 1, 2, \dots, L)$$

Wyżej wymienione wskaźniki pojemności, tj. indywidualne oraz integralne, są wartościami unormowanymi, kształtującymi się w przedziale (0, 1).

Przyjmują one tym większe wartości, im korelacja między zmiennymi objaśniającymi jest mniejsza oraz skorelowanie ze zmienną objaśnianą jest większe. Za optymalną kombinację zmiennych uznajemy tę grupę zmiennych, której odpowiada maksymalna wartość wskaźnika integralnej pojemności informacyjnej.

Przykład:

Na podstawie danych zamieszczonych w poprzednim przykładzie, obliczyć poszczególne integralne wskaźniki pojemności informacyjnej Hellwiga, według algorytmu zamieszczonego wyżej.

Na początku musimy policzyć wszystkie współczynniki korelacyjne, tak jak w powyższym przykładzie.

Następnie obliczamy wskaźniki pojemności informacyjnej:

$h_{11} = 0,684$	$h_{12} = 0,612$	$h_{123} = 0,663$	$h_{1234} = 0,604$
$h_{22} = 0,035$	$h_{13} = \mathbf{0,689}$	$h_{124} = 0,599$	$h_{1235} = 0,642$
$h_{33} = 0,458$	$h_{14} = 0,669$	$h_{125} = 0,546$	$h_{1245} = 0,514$
$h_{44} = 0$	$h_{15} = 0,589$	$h_{234} = 0,33$	$h_{2345} = 0,356$

$h_{55} = 0,071$	$h_{23} = 0,454$	$h_{235} = 0,485$	$h_{1345} = 0,609$
	$h_{24} = 0,033$	$h_{345} = 0,368$	$h_{12345} = 0,579$
	$h_{25} = 0,069$	$h_{134} = 0,625$	
	$h_{34} = 0,319$	$h_{135} = 0,682$	
	$h_{35} = 0,524$	$h_{145} = 0,567$	
	$h_{45} = 0,053$	$h_{245} = 0,059$	

WNIOSEK

Największą pojemność informacyjną mają zmienne 1. i 3. (wynik zaznaczony grubą czcionką)

ESTYMACJA

Etap estymacji polega na zastosowaniu odpowiednich metod statystycznych w celu otrzymania ocen parametrów modelu na podstawie danych liczbowych o zmiennych. W wyniku tego etapu następuje kwantyfikacja, czyli nadanie wartości liczbowej parametrom występującym w modelu liniowym.

Estymacja polega na szacowaniu parametrów strukturalnych α , występujących przy zmiennej objaśniającej X . Polega to na sprawdzeniu przeciętnego wzrostu ($\alpha > 0$) lub spadku ($\alpha < 0$) wartości zmiennej objaśnianej Y , jeżeli wartość zmiennej objaśniającej X zostanie zwiększona o 1, a pozostałe zmienne objaśniające nie ulegną zmianie.

Jedną z metod estymacji parametrów wykorzystuje algorytm macierzowy. Rozpatrywana jest liniowa zależność zmiennej objaśnianej od zmiennych objaśniających i -tego składnika losowego.

$$Y = \alpha_0 + \alpha_1 X_1 + \alpha_2 X_2 + \dots + \alpha_k X_k + \varepsilon$$

gdzie: Y – zmienna objaśniana,

X_j – zmienne objaśniające, $j = 1, 2, \dots, k$,

α_j – nieznane parametry strukturalne modelu, $j = 0, 1, \dots, k$,

ε – składnik losowy.

Ten etap modelowania ma za zadanie ocenę parametrów modelu na podstawie posiadanych informacji statystycznych, dotyczących wartości, jakie przyjmują zmienne występujące w danym modelu. Przyjmujemy, że dysponujemy n -elementowymi szeregami czasowymi obserwacji na wszystkich zmien-

nym modelu. W przypadku danych przekrojowych n oznacza liczbę obiektów które są obserwowane.

Oznaczamy:

y_t – wartość zmiennej objaśnianej w okresie $t = 1, 2, \dots, n$,

x_{jt} – wartość j -tej zmiennej objaśniającej w okresie $t = 1, 2, \dots, n$.

Posiadane informacje zapisujemy w ujęciu macierzowym w następujący sposób:

– wektor obserwacji zmiennej objaśnianej:

$$\mathbf{y} = \begin{bmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{bmatrix}_{n \times 1}$$

– macierz zaobserwowanych wartości zmiennych objaśniających:

$$\mathbf{X} = \begin{bmatrix} 1 & x_{11} & \cdots & x_{k1} \\ 1 & x_{12} & \cdots & x_{k2} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & x_{1n} & \cdots & x_{kn} \end{bmatrix}_{n \times (k+1)}$$

Po uwzględnieniu wartości poszczególnych zmiennych, które są znane, rozpatrywana liniowa zależność ma postać układu n równań liniowych

$$y_t = \alpha_0 + \alpha_1 x_{1t} + \alpha_2 x_{2t} + \dots + \alpha_k x_{kt} + \varepsilon_t$$

Wektor składników losowych ma postać:

$$\boldsymbol{\varepsilon} = \begin{bmatrix} \varepsilon_1 \\ \vdots \\ \varepsilon_n \end{bmatrix}_{n \times 1}$$

Wektor nieznanych parametrów modelu ma postać:

$$\alpha = \begin{bmatrix} \alpha_0 \\ \alpha_1 \\ \vdots \\ \alpha_k \end{bmatrix}_{(k+1) \times 1}$$

a jednorównaniowy liniowy model korelacyjny przyjmuje postać:

$$y = X\alpha + \varepsilon$$

Równanie macierzowe zawiera nieznane parametry strukturalne modelu α oraz składniki losowe ε , których własności nie znamy.

Założenia:

- model jest liniowy względem parametrów

$$Y_t = b_0 + b_1x_{1t} + b_2x_{2t} + \dots + b_kx_{kt} + u_t$$

- Zmienne objaśniające x są nielosowe.
- Liczba obserwacji n jest większa od liczby parametrów do oszacowania.
- Żadna ze zmiennych x nie jest kombinacją liniową innych zmiennych objaśniających.

• Składnik losowy ma **wartość oczekiwaną** równą zeru (dla wszystkich $t = 1, \dots, n$): $E(u_t) = 0$. Oznacza to, że czynniki nie uwzględnione w modelu nie oddziałują w systematyczny sposób na średnią wartość zmiennej Y : wpływy „dodatnie” oraz „ujemne” „znoszą się” i średni efekt jest zerowy.

- Wariancja zmiennej losowej u_t jest taka sama dla wszystkich obserwacji

$$Var(u_t) = \sigma^2 \quad \text{dla } t = 1, \dots, n$$

- Zmienne losowe u_t są nieskorelowane, czyli nie ma tzw. autokorelacji składników losowych.

W celu oszacowania modelu, korzysta się z narzędzi statystyki matematycznej. Do oszacowania parametrów modelu, często używa się metody najmniejszych kwadratów MNK (zob. zał. A).

Po wyznaczeniu parametrów strukturalnych metodą MNK, należy zwerfikować model ekonometryczny pod względem merytorycznym i statystycznym.

Weryfikacja modelu polega na stwierdzeniu:

- czy otrzymane oszacowanie modelu wytrzymuje konfrontację z oczekiwaniami i teorią (weryfikacja merytoryczna);
- czy oszacowanie to jest statystycznie „mocne”, tzn. czy dane potwierdzają poprawność postulowanego modelu (weryfikacja statystyczna).

W przypadku gdy weryfikacja modelu nie pozwala uznać go za poprawny, wówczas wracamy do etapów wcześniejszych. Ponownie się zastanawiamy, jak sformułować model – zmienić zbiór zmiennych, zebrać obfitsze dane, zmienić postać funkcyjną, skorzystać z innej teorii, postulować odmienną hipotezę itd.

Klasyczne podejście do weryfikacji uwzględnia następujące narzędzia:

- a) konfrontację z teorią i oczekiwaniami (jest to weryfikacja merytoryczna),
- b) mierniki dopasowania, tzn. MNK-reszty, R -kwadrat (i jego odmiany) oraz S -kwadrat,
- c) szereg testów statystycznych do weryfikacji założeń modelu.

WERYFIKACJA MERYTORYCZNA

W trakcie merytorycznej weryfikacji oszacowanego modelu, określamy czy spełnia on nasze oczekiwania. Chodzi głównie o zgodność z założeniami teorii, jaka posłużyła do sformułowania modelu.

Na ogół w modelu liniowym interesują nas znaki ocen parametrów i ich zgodności z oczekiwaniami.

Jeśli teoria mówi, lub też spodziewamy się, że wzrost jednego z X -ów wiąże się ze wzrostem Y , wówczas ujemny znak oceny odpowiedniego parametru świadczy o braku takiej właśnie zgodności.

Jeżeli po oszacowaniu parametrów strukturalnych modelu stwierdzimy, że znak przy ocenie parametru jest inny niż wynika to z rzeczywistych powiązań, takiego modelu nie można wykorzystać do dalszego wnioskowania. Model taki trzeba przekonstruować i powtórnie oszacować. Przyczyną tego stanu rzeczy może być pominięcie istotnej zmiennej objaśniającej bądź błędne określenie opóźnień czasowych wybranych zmiennych.

Wartość oszacowania parametru również podlega weryfikacji merytorycznej, zgodnie z interpretacją parametru regresji.

Dokonując oceny merytorycznej modelu na podstawie wyników MNK-estymacji, pamiętajmy, że:

1) ocena merytoryczna ma sens łącznie z oceną statystyczną; jeśli ta druga wypada źle, to wówczas przy ocenie merytorycznej należy postawić duży znak zapytania;

2) wyniki estymacji często są zdeformowane z powodu wysokiego wzajemnego skorelowania zmiennych objaśniających (zjawisko współliniowości oraz problem katalizy).

KOINCYDENCJA

Parametr regresji przy danej zmiennej X oraz współczynnik korelacji liniowej tej zmiennej ze zmienną Y , mają podobną interpretację:

a) jeśli oba są ujemne, to znaczy, że wzrostowi zmiennej X towarzyszy spadek Y ,

b) jeśli oba są dodatnie, to znaczy, że wzrostowi X , towarzyszy wzrost Y .

W związku z tym jedna ze szkół polskiej ekonometrii stoi na stanowisku, że dobry model powinien posiadać własność koincydencji, tzn. powinna wystąpić zgodność znaków obu wymienionych współczynników dla każdej zmiennej X .

DEFINICJA

Formalnie chodzi o to, by: $\hat{b}_j = \text{sgn } r_j$ dla $j = 1, \dots, k$

gdzie: $\hat{b}_j$ oraz r_j są odpowiednio: oceną parametru przy j -tej zmiennej X oraz współczynnikiem korelacji tej zmiennej ze zmienną Y . W modelu regresji prostej (tylko jedna zmienna X) postulat koincydencji jest zawsze spełniony.

WSPÓLLINIOWOŚĆ

Współliniowość dokładna zmiennych objaśniających ma miejsce wtedy, gdy kolumny macierzy X są liniowo zależne. Wówczas nie można stosować metody najmniejszych kwadratów.

W modelu ekonometrycznym może mieć miejsce współliniowość statystyczna, co oznacza duże skorelowanie zmiennych X pomiędzy sobą.

KATALIZA

W celu wyjaśnienia zjawiska katalizy musimy wprowadzić pojęcie współczynnika korelacji wielorakiej. Współczynnik korelacji wielorakiej jest miarą siły związku liniowego zmiennej objaśnianej Y ze zmiennymi objaśniającymi $X_1, X_2, \dots, X_k$. Zdefiniowany jest następująco:

$$R = \sqrt{1 - \frac{\det(\mathbf{W})}{\det(\mathbf{R})}}$$

$\mathbf{R}$ – macierz współczynników korelacji zmiennych objaśnianych $X_1, X_2, \dots, X_k$ łączonych parami.

Macierz $\mathbf{W}$ ma postać:

$$\mathbf{W} = \begin{bmatrix} 1 & \mathbf{R}_0 \\ \mathbf{R}_0 & \mathbf{R} \end{bmatrix}$$

$\mathbf{R}_0$ – wektor współczynników korelacji pomiędzy zmienną Y i zmiennymi $X_1, X_2, \dots, X_k$.

W rozwiniętej postaci macierz $\mathbf{W}$ można zapisać:

$$\mathbf{W} = \begin{bmatrix} 1 & r_1 & r_2 & \dots & r_k \\ r_1 & 1 & r_{12} & \dots & r_{1k} \\ r_2 & & 1 & \dots & r_{2k} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ r_k & r_{k1} & r_{k2} & \dots & 1 \end{bmatrix}$$

Współczynnik korelacji wielorakiej jest unormowany w przedziale $(0, 1)$. Przyjmuje on tym większe wartości, im związek zmiennej objaśnianej ze zmiennymi objaśniającymi jest silniejszy. Współczynnik korelacji wielorakiej może stanowić również kryterium wyboru najlepszej kombinacji zmiennych objaśniających jednakowo licznych kombinacji.

Effekt katalizy w liniowym modelu korelacyjnym oznacza silne skorelowanie zmiennej objaśnianej ze zmiennymi objaśniającymi w sensie: wysoka wartość współczynnika korelacji wielorakiej spowodowana silnym skorelowaniem zmiennych objaśniających między sobą. Zmienne objaśniające, które wywołały efekt katalizy należy wyeliminować z modelu.

$(\mathbf{R}, \mathbf{R}_0)$ – nazywa się parą korelacyjną. Jeżeli współczynniki r_i w wektorze $\mathbf{R}_0$ są dodatnie oraz uporządkowane malejąco, to para $(\mathbf{R}, \mathbf{R}_0)$ nazywa się regularną parą korelacyjną.

Dla regularnej pary korelacyjnej buduje się macierz $\mathbf{Q}$ o postaci:

$$\mathbf{Q} = \begin{bmatrix} 1 & q_{12} & q_{13} & \dots & q_{1k} \\ q_{21} & 1 & q_{23} & \dots & q_{2k} \\ q_{31} & q_{32} & 1 & \dots & q_{3k} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ q_{k1} & q_{k2} & q_{k3} & \dots & 1 \end{bmatrix}$$

Macierz $\mathbf{Q}$ jest nazywana macierzą neutralną. Jej elementy:

$$q_{ij} = q_{ji} = \frac{r_i}{r_j}, \quad (i < j)$$

nazywa się wartościami neutralnymi współczynników korelacji:

$$r_{ij} = r(X_i, X_j)$$

W przypadku gdy: $r_{ij} > \frac{r_i}{r_j}$ mówimy, że wystąpił efekt katalizy, a o zmiennej X_i mówimy, że jest katalizatorem. Zmienną będącą katalizatorem należy wykluczyć z modelu. Do wykrywania efektu katalizy w modelu można się posłużyć wskaźnikiem:

$$U_l = R_l^2 - H_l$$

gdzie: l – oznacza numer kombinacji zmiennych objaśniających modelu,

H_l – jest wskaźnikiem integralnej pojemności informacyjnej l -tej kombinacji zmiennych objaśniających,

R_l – jest współczynnikiem korelacji wielorakiej.

WSPÓŁCZYNNIKI BETA

Parametry stojące przy różnych zmiennych X , nie mogą być porównywane ze sobą w sposób bezpośredni, ze względu na różne jednostki miary. Można temu zaradzić, posługując się **współczynnikami beta**.

Współczynniki beta są parametrami regresji w modelu, w którym wszystkie zmienne, tj. Y oraz X -y, znormalizowano następująco:

$$\frac{Y_i - \bar{Y}}{S_Y} = \beta_1 \frac{X_{1i} - \bar{X}_1}{S_{X_1}} + \dots + \frac{X_{ki} - \bar{X}_k}{S_{X_k}} + \varepsilon_i$$

gdzie: symbole β oznaczają współczynniki beta, S – to odchylenia standardowe odpowiednich zmiennych, ε zaś jest składnikiem losowym.

Istnieje bezpośredni związek pomiędzy współczynnikami β oraz ocenami parametrów b w oryginalnym modelu. Związek ten ma postać:

$$\hat{\beta}_j = \hat{b}_j \frac{S_{X_j}}{S_Y} \quad \text{dla } j = 1, 2, \dots, k$$

Współczynnik beta koryguje parametr modelu o iloraz odchyleń standardowych danej zmiennej objaśniającej oraz zmiennej objaśnianej.

INTERPRETACJA PARAMETRU BETA

Współczynnik beta o wartości np. 0,6 interpretujemy następująco: zmiana wartości zmiennej objaśniającej o jedno odchylenie standardowe, wiąże się ze zmianą wartości zmiennej Y o 0,6 jej odchylenia standardowego. Ta interpretacja jest niezależna od jednostek miary zmiennych X . W modelu z jedną zmienną objaśniającą ($k = 1$), współczynnik beta równa się współczynnikowi korelacji pomiędzy zmienną objaśniającą i objaśnianą.

ELASTYCZNOŚĆ

Do weryfikacji merytorycznej warto wykorzystać jeszcze inną możliwość interpretacji modelu, tzn. informację o elastyczności zmiennej Y względem jednej ze zmiennych X .

Elastyczność pokazuje, o ile procent zmienia się wartość Y na skutek wzrostu zmiennej X o 1 procent. Definiuje się ją jako iloraz względnego przyrostu Y oraz względnego przyrostu danej zmiennej X .

W modelu liniowym elastyczność Y względem X_j jest funkcją Y oraz X_j i jest równa: $\hat{b}_j \frac{X_j}{Y}$. Z tego względu odpowiednia interpretacja może dotyczyć konkretnego punktu (X_j, Y) . Zwykle przyjmuje się, że jest to punkt o współrzędnych równych wartościom średnich arytmetycznych, tzn. $\hat{b}_j \frac{\bar{X}_j}{\bar{Y}}$.

W takim punkcie wartość elastyczności równa np. 0,7, ma następującą interpretację: w otoczeniu wartości średnich zmiennych X i Y , 1-procentowy przyrost X wiąże się z 0,7-procentowym spadkiem wartości Y .

WERYFIKACJA STATYSTYCZNA

Klasyczny zestaw testów służących weryfikacji statystycznej modelu, zawiera następujące testy:

- a) istotności parametrów,
- b) istotności całego modelu,
- c) normalności rozkładu składnika losowego,
- d) autokorelacji składników losowych,
- e) jednorodności wariancji składników losowych.

Stosuje się również testy na liniowość modelu, nieobciążoność modelu, współliniowość zmiennych objaśniających i inne.

Miernikami zgodności (dopasowania) modelu do danych empirycznych są: MNK-reszty, R -kwadrat (i jego odmiany) oraz S -kwadrat.

Miarą dopasowania modelu do danych empirycznych albo inaczej miarą określającą, jaka część zmienności zmiennej objaśnianej jest wyjaśniana przez model (postać modelu i zestaw zmiennych objaśniających), jest współczynnik determinacji (R -kwadrat).

2.4. Wielorównaniowy liniowy model opisowy

Rozpatrujemy model wielorównaniowy o liczbie G równań. Model ten zawiera zatem G zmiennych endogenicznych. Występują w nim również zmienne endogeniczne opóźnione oraz zmienne egzogeniczne, które łącznie jako zmienne z góry ustalone oznaczamy symbolami $X_1, X_2, \dots, X_K$, gdzie K – liczba zmiennych z góry ustalonych, występujących w modelu.

Zakładając, że postacie analityczne poszczególnych funkcji są liniowe, model ten zapiszemy następująco:

$$\begin{aligned} Y_{1l} &= \sum_{j \neq 1}^G \beta_{1j} Y_{jl} + \sum_{k=1}^K \alpha_{1k} X_{kl} + \varepsilon_{1l} \\ Y_{2l} &= \sum_{j \neq 2}^G \beta_{2j} Y_{jl} + \sum_{k=1}^K \alpha_{2k} X_{kl} + \varepsilon_{2l} \\ &\dots\dots\dots \\ Y_{Gl} &= \sum_{j \neq 1}^{G-1} \beta_{Gj} Y_{jl} + \sum_{k=1}^K \alpha_{Gk} X_{kl} + \varepsilon_{Gl} \end{aligned}$$

gdzie: Y_{jt} – zmienne endogeniczne, $j = 1, \dots, G$, $t = 1, \dots, n$,

X_{kt} – zmienna egzogeniczna, $k = 1, \dots, K, t = 1, \dots, n$,

α, β – parametry strukturalne modelu,

ε – składnik losowy.

Przenosząc zmienne endogeniczne na lewą stronę równań, ten układ równań można zapisać w postaci¹⁴:

$$\mathbf{B}\mathbf{Y}_t = \mathbf{A}\mathbf{X}_t + \boldsymbol{\varepsilon}_t \quad t = 1, \dots, n$$

Tak zapisana forma modelu nazywa się postacią strukturalną modelu. Postać strukturalna modelu jest najczęściej spotykaną formą zapisu modelu, jako że wyraża pewną treść ekonomiczną (strukturę badanego zjawiska).

Do celów estymacji konieczne jest wprowadzenie tzw. zredukowanej formy modelu. Jest to postać, w której jako zmienne objaśniające modelu nie występują zmienne endogeniczne nieopóźnione. Rozróżnienie postaci strukturalnej

¹⁴ *Opisowe modele ekonometryczne...* wyd. cyt., s. 25.

i zredukowanej jest potrzebne tylko dla modeli rekurencyjnych i łącznie współzależnych. Dla modeli prostych obie te postacie są jednakowe.

Formę zapisu modelu, w którym zmienne łącznie współzależne (nie-opóźnione zmienne endogeniczne) są funkcją zmiennych z góry ustalonych i składników losowych, nazywamy postacią zredukowaną modelu.

W procesie estymacji zwykle oceniamy parametry postaci zredukowanej modelu. W przypadku modeli o równaniach współzależnych przejście od ocen parametrów postaci zredukowanej modelu do ocen parametrów postaci strukturalnej nie zawsze jest możliwe. Z ekonomicznego punktu widzenia jest interesująca przede wszystkim interpretacja ocen parametrów postaci strukturalnej modelu. Zagadnienie przejścia od ocen parametrów jednej postaci modelu do ocen parametrów drugiej postaci modelu, jest rozstrzygane przez identyfikację modelu i wiąże się z jego określoną strukturą. W drodze identyfikacji modelu określamy, czy jest możliwe przejście od ocen parametrów postaci zredukowanej do strukturalnej i czy to przejście jest jednoznaczne, czy niejednoznaczne lub też stwierdzamy, że to przejście jest niemożliwe.

Parametry strukturalne modelu są identyfikowalne wtedy i tylko wtedy, gdy da się je wyznaczyć z parametrów postaci zredukowanej. Jeżeli jest to możliwe dla wszystkich parametrów modelu, wówczas model taki nazywamy identyfikowalnym.

Jeśli niemożliwe jest wyznaczenie parametrów postaci strukturalnej modelu na podstawie znajomości parametrów postaci zredukowanej, to takie parametry nazywamy nieidentyfikowalnymi, a model, w którym te parametry występują – modelem nieidentyfikowalnym.

Model wielorównaniowy jest nieidentyfikowalny, gdy liczba nieznanymi parametrów w macierzach A i B jest większa niż liczba równań otrzymana z równania macierzowego:

W niniejszej pracy kwestia identyfikacji zostanie ograniczona do podania podstawowych twierdzeń o identyfikacji, bez przeprowadzania ich dowodów.

Warunkiem koniecznym i dostatecznym, by model złożony tylko z jednego równania był identyfikowalny, gdy nie ma żadnych wiadomości a priori o wartościach parametrów tego równania jest, aby między zmiennymi objaśniającymi równanie nie zachodziło zjawisko współliniowości, tj. by nie zachodziły związki liniowe pomiędzy wartościami przynajmniej dwóch zmiennych objaśniających tego równania i by liczba obserwacji w próbie była większa od liczby szacowanych parametrów strukturalnych.

Warunkiem koniecznym i dostatecznym, by pewne równanie należące do modelu rekurencyjnego było identyfikowalne jest, aby to równanie spełniało warunki twierdzenia, o którym jest mowa wyżej.

Dalsze rozważania o identyfikacji będą się odnosić jedynie do modeli łącznie współzależnych. Najczęściej badając identyfikowalność modelu, korzystamy z warunku koniecznego identyfikowalności poszczególnych równań modelu, natomiast warunek dostateczny, określony przez rząd odpowiedniej macierzy, jest trudny do sprawdzenia. Formalnie bowiem wymaga on znajomości wartości jej współczynników, a tych właśnie nie znamy.

Rozważamy dowolne i -te równanie modelu. Załóżmy, że liczba zmiennych endogenicznych nieopóźnionych występująca w tym równaniu wynosi G_i (liczba parametrów β_{ij} dla $j = 1, 2, \dots, G$ różnych od zera), zaś niech K_2 będzie równe liczbie parametrów dla $k = 1, 2, \dots, K$ o wartości zero (liczba zmiennych z góry ustalonych nie występujących w i -tym równaniu).

Warunkiem koniecznym identyfikowalności modelu o równaniach łącznie współzależnych jest spełnienie warunku $G_i - 1 \leq K_2$ dla każdego jego równania.

Gdy $G_i - 1 = K_2$, równanie może być jednoznacznie identyfikowalne, natomiast gdy $G_i - 1 < K_2$ – nadmiernie identyfikowalne.

Sprawdzenie identyfikowalności parametrów modelu przed przejściem do etapu estymacji parametrów jest bardzo ważne. Jeżeli bowiem się okaże, że parametry danego modelu są nieidentyfikowalne, musimy zmienić tak konstrukcję niektórych równań, aby cały model był identyfikowalny jednoznacznie. Model taki należy zatem poddać powtórnej analizie sensowności, uwzględnionych w kolejnych równaniach, zmiennych i powiązań. W szczególności, w przypadku wystąpienia równania nieidentyfikowalnego, należy sprawdzić, czy w którymś z równań identyfikowalnych nie zabrakło w objaśnieniu dodatkowej zmiennej, nie uwzględnianej w zbiorze zmiennych objaśniających, lecz posiadającej istotny wpływ na zmienną endogeniczną tego równania.

2.5. Model Lanchestera

Matematyk angielski F.W. Lanchester sformułował kilka prostych i niezmiernie ciekawych modeli walki. Równania występujące w modelu Lanchestera, w sposób analityczny określają przebieg walki. Na ich podstawie można oszacować w każdej chwili liczbę żołnierzy i wielkość poniesionych strat. Równania te sprawdziły się przy analizach bitew wojen antycznych i okresu broni palnej. Rozszerzone i uogólnione, zostały też zastosowane do złożonych operacji. Niestety, każde rozszerzenie – modyfikacja równań wiązała się ze wzrostem liczby zmiennych i kolejnych, dodawanych do modelu współczyn-

ników. Klasyczny model Lanchestera w żaden sposób się nie nadaje do bezpośredniego zastosowania do problemów współczesnego pola działań zbrojnych. Należy zatem dążyć do znalezienia rozwiązania pośredniego – modelu zawierającego pewne zagregowane współczynniki, jednocześnie prostego w sensie analitycznym.

Przypomnijmy, że postać równań Lanchestera jest następująca:

$$\begin{cases} \frac{dR(t)}{dt} = -bB(t)^{c_1} R(t)^{c_2} \\ \frac{dB(t)}{dt} = -rR(t)^{c_3} B(t)^{c_4} \end{cases}$$

gdzie: r i b – są liczbami rzeczywistymi z przedziału $(0,1)$, tzw. współczynniki efektywności Lanchestera. Współczynniki te są niekiedy interpretowane jako prawdopodobieństwo strat każdej z walczących stron w ciągu jednego dnia walki (dziennie prawdopodobieństwo strat),

$c_1, \dots, c_4$ – są wykładnikami potęg przy $B(t)$ i $R(t)$ i mogą przyjmować wartości liczbowe 0 lub 1.

Pochodne $\frac{dR(t)}{dt}$ oraz $\frac{dB(t)}{dt}$ oznaczają tzw. śmiertelność (straty) stron.

Po stosownych przekształceniach matematycznych otrzymujemy cztery rodzaje rozwiązań, zależnie od wartości współczynników $c_1, \dots, c_4$ (zob. tabela niżej).

Tabela 3. Możliwe warianty rozwiązania układu równań Lanchestera¹⁵

Rodzaj rozwiązania	c_1	c_2	c_3	c_4	rozwiązanie
kwadratowe	1	0	1	0	$b[B(0)^2 - B(t)^2] = r[R(0)^2 - R(t)^2]$
liniowe	1	1	1	1	$b[B(0) - B(t)] = r[R(0) - R(t)]$
logarytmiczne	0	1	0	1	$b \ln[B(0)/B(t)] = r \ln[R(0)/R(t)]$
Zasadzka (ang. <i>ambush</i>)	1	1	1	0	$b/2[B(0)^2 - B(t)^2] = r[R(0) - R(t)]$

¹⁵ Dokładną analizę przedstawionych tu rozważań można znaleźć w pracy J.M. Epstaina, *The Calculus of Conventional War Dynamic Analysis without Lanchester Theory*, Studies in Defense Policy, The Brookings Institution, Washington 1985.

Rozpatrzmy wariant równania kwadratowego. W tym przypadku równania Lanchestera przyjmują postać:

$$\begin{cases} \frac{dR(t)}{dt} = -bB(t) \\ \frac{dB(t)}{dt} = -rR(t) \end{cases}$$

Postulując rozwiązanie w postaci:

$$B(t) = Ae^{\alpha t} + Be^{-\alpha t}$$

i korzystając z tabeli 1 celem określenia postaci rozwiązania $R(t)$, otrzymujemy:

$$B(t) = \frac{1}{2} \left\{ \left[B(0) - \sqrt{r/b} R(0) \right] e^{\sqrt{rb}t} + \left[B(0) + \sqrt{r/b} R(0) \right] e^{-\sqrt{rb}t} \right\}$$

oraz:

$$R(t) = \frac{1}{2} \left\{ \left[B(0) - \sqrt{b/r} R(0) \right] e^{\sqrt{rb}t} + \left[R(0) + \sqrt{b/r} B(0) \right] e^{-\sqrt{rb}t} \right\}$$

Powyższe rozwiązanie uzyskano przy założeniu stałych w czasie współczynników efektywności działań r i b . Miejsce stałych współczynników r i b zastąpiły zmienne w czasie współczynniki α i β . Obliczymy jeszcze czas, jaki upłynie od momentu rozpoczęcia walki do całkowitego unicestwienia jednej ze stron – powiedzmy, że będzie to strona B . W tym celu należy jedynie przyrównać do zera jedno z powyższych równań i obliczyć czas t_k .

Wykonując stosowne przekształcenia otrzymujemy:

$$t_k = \left(\frac{1}{rb} \ln \frac{R(0) + \sqrt{b/r} B(0)}{\sqrt{b/r} B(0) - B(0)} \right)^{1/2}$$

Na podstawie powyższej zależności widać, że czas trwania walki zależy jedynie od stałych współczynników r i b , i początkowej liczebności stron.

3. METODY OPTIMALIZACJI LINIOWEJ

W każdej dziedzinie życia spotykamy się z problemami optymalizacyjnymi. Sprowadzają się one do określenia, który z możliwych wariantów działania jest najlepszy. W szczególności, między innymi, w przypadku zagadnień liniowych, bierzemy pod uwagę pewne ograniczenia, które zawężają obszar poszukiwań rozwiązania optymalnego. W celu rozwiązania tego typu zagadnień, posługujemy się metodami programowania liniowego. Dodatkowo, jeżeli rozwiązania liniowego problemu optymalizacyjnego są liczbami całkowitymi, mówi się o programowaniu całkowitoliczbowym.

Programowanie liniowe stosuje się do rozwiązywania różnorodnych zadań. Jednakże, aby zadanie mogło być rozwiązane metodą programowania liniowego, musi spełniać następujące warunki:

- 1) zmienne decyzyjne (niewiadome) muszą być powiązane ze sobą zależnościami o charakterze liniowym,
- 2) wszystkie lub niektóre zależności muszą być nierównościami,
- 3) występujący w zadaniu układ nierówności nie może być sprzeczny,
- 4) musi być jasno sprecyzowany cel rozwiązania, jako poszukiwanie najlepszego rozwiązania ze ściśle określonego punktu widzenia.

Powyższe warunki spotyka się w szerokiej klasie zadań, stąd też wynika szerokie zastosowanie programowania liniowego. Zadania tego typu występują najczęściej w dziedzinie logistyki.

Cel rozwiązania, sprecyzowany matematycznie, zwany jest funkcją celu lub funkcją kryterium¹⁶.

Tworzymy zatem funkcję celu w postaci:

$$f(X) = p_1 x_1 + p_2 x_2 + \dots + p_j x_j + \dots + p_n x_n$$

gdzie: $X = [x_1, x_2, \dots, x_n]$ jest poszukiwanym wektorem stanowiącym rozwiązanie optymalne, zaś $p_1, p_2, \dots, p_n$ są wielkościami stałymi.

Zapisujemy także ograniczenia (zawężamy w ten sposób obszar poszukiwań optymalnego rozwiązania). Ograniczenia mogą występować w postaci równań lub nierówności, jak również w postaci ich układów.

¹⁶ M. Ciechanowicz i in., *Wybrane metody optymalizacji decyzji*, Wyd. MON, Warszawa 1969, s. 419.

Przykładowo ograniczenia można zapisać w postaci następującego układu równań liniowych:

$$\sum_{j=1}^n a_{ij} x_j = b_i \quad \text{przy } i = 1, 2 \dots m$$

Rozwiązaniem powyższego układu jest każdy taki zbiór zmiennych x_j , który spełnia wszystkie ograniczenia. Jest oczywiste, że dodatkowo rozwiązanie zawiera nieujemne wartości zmiennych x_j .

Rozwiązanie o nieujemnych wartościach zmiennych x_j nazywa się rozwiązaniem dopuszczalnym. Zatem rozwiązaniem dopuszczalnym zadania programowania liniowego jest wektor $X = [x_1, x_2, \dots, x_n]$, przy spełnionych warunkach:

$$\begin{aligned} \sum_{j=1}^n a_{ij} x_j &= b_i \quad i = 1, 2 \dots m \\ x_j &\geq 0, \quad j = 1, 2 \dots n \end{aligned}$$

3.1. Programowanie całkowitoliczbowe

W dalszej części rozdziału zostanie pokazany przykład rozwiązania optymalizacyjnego zagadnienia produkcyjnego za pomocą metody graficznej oraz metody simpleks. Metoda graficzna polega na znalezieniu wielokąta rozwiązań dopuszczalnych i opiera się na następującym twierdzeniu:

Zbiór rozwiązań nieujemnych układu m równań (nierówności) liniowych o n niewiadomych jest albo zbiorem pustym, albo zbiorem wypukłym o skończonej liczbie wierzchołków.

W przypadku gdy zbiór rozwiązań układu jest pusty, układ równań jest sprzeczny.

Szczególnym przypadkiem programowania liniowego jest programowanie całkowitoliczbowe (w literaturze można także spotkać nazwę: programowanie całoliczbowe).

Tak jak w ogólnym przypadku programowania liniowego zakłada się liniową postać funkcji celu i warunków ograniczających, dodatkowo musi być spełniony warunek całkowitoliczbowych wartości rozwiązania. Wymaga się,

aby wszystkie, lub niektóre, zmienne występujące w zadaniu były liczbami całkowitymi¹⁷.

W przypadku gdy wszystkie zmienne spełniają powyższy warunek, mówimy o czystym zadaniu programowania całkowitoliczbowego, natomiast w przypadku gdy tylko niektóre ze zmiennych są liczbami całkowitymi, mamy do czynienia z zadaniem mieszanym. W szczególnym przypadku, gdy zmienne przyjmują jedynie wartości 0 lub 1, mówi się o zadaniu binarnym. Z zagadnieniami programowania binarnego mamy często do czynienia w ekonometrii, przy budowie modeli liniowych celem objaśnienia zachodzących zjawisk ekonomicznych.

Ważnym zagadnieniem jest konieczność umiejętnego zaokrąglenia uzyskanych rozwiązań, w wyniku stosowania np. metody geometrycznej.

3.2. Zastosowanie metod optymalizacji liniowej.

Problem produkcyjny

Zakład produkcyjny wytwarza dwa produkty P_1 i P_2 . Produkty te wytwarzane są przy pomocy trzech środków S_1 , S_2 , S_3 , których tygodniowe zasoby wynoszą odpowiednio 20, 8, 12 jednostek. Nakłady poszczególnych środków na wytworzenie produktów P_1 i P_2 , oraz zysk ze sprzedaży każdej sztuki tych produktów zawiera tabela niżej. Należy tak zaplanować tygodniową produkcję zakładu by uzyskać maksymalny zysk.

Produkt	Nakłady środka S_1	Nakłady środka S_2	Nakłady środka S_3	Zysk na sztuce
P_1	2	1	4	5
P_2	1	1	0	3

Poszukujemy takiej ilości x i y produktów P_1 i P_2 , aby zysk uzyskany z ich sprzedaży był maksymalny. Budujemy funkcję celu w postaci:

$$f(x, y) = 5x + 3y$$

¹⁷ T. Trzaskalik, *Modelowanie optymalizacyjne*, Wyd. Absolwent, Łódź 1998, s. 43.

Biorąc pod uwagę limity poszczególnych środków S_1 , S_2 , S_3 , otrzymujemy następujące ograniczenia:

$$2x + 1y \leq 20$$

$$1x + 1y \leq 8$$

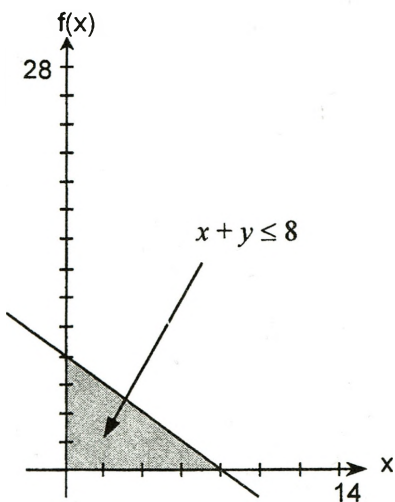
$$4x + 0y \leq 12$$

Dodatkowo poszukiwane wartości x i y muszą być nieujemne:

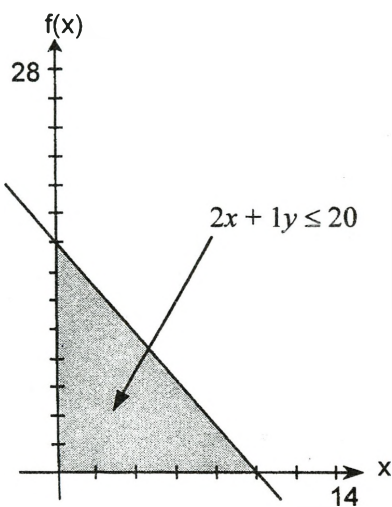
$$x \geq 0, \quad y \geq 0$$

Zadanie rozwiążemy metodą geometryczną. Jest to możliwe, ponieważ w zadaniu występują jedynie dwie zmienne. Na kolejnych wykresach (1, 2, 3) zamieszczonych poniżej, zilustrowano poszczególne ograniczenia występujące w zadaniu.

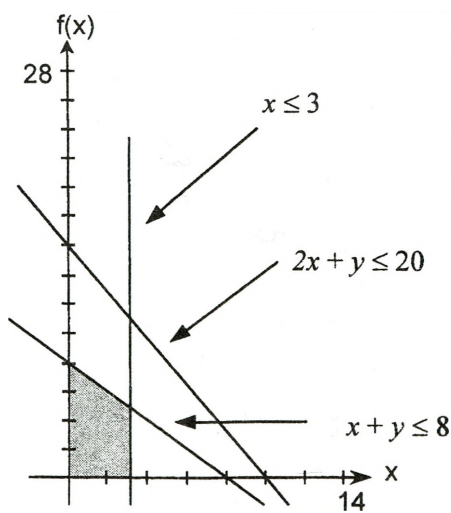
Wykres 1



Wykres 2



Wykres 3



Zaznaczono obszar będący częścią wspólną obszarów odpowiadających poszczególnym ograniczeniom.

Ograniczenie $2x + y = 20$ jest nieaktywne, nie bierze udziału w zadaniu optymalizacyjnym. Stąd ograniczenie to jest spełnione jako nierówność silna. Przecinając zaznaczony wyżej obszar prostymi: $5x + 3y = \text{const.}$, będącymi warstwicami funkcji celu, otrzymujemy rozwiązanie optymalne. W sensie graficznym tym rozwiązaniem jest najbardziej wysunięty na prawo wierzchołek obszaru wspólnego. Współrzędne tego wierzchołka wynoszą (3, 5). Należy zatem wytworzyć trzy produkty typu P_1 oraz pięć produktów typu P_2 . Otrzymujemy wówczas maksymalny zysk równy 30 jednostek.

Rozwiązany wyżej przykład zadania optymalnej produkcji jest najprostszym z możliwych przypadków. Zastosowana metoda geometryczna nie może być jednak użyta, gdy liczba poszukiwanych niewiadomych jest większa od dwóch. Wówczas stosujemy metodę simpleks.

Wracamy ponownie do naszego przykładu produkcyjnego. Przekształcimy układ nierówności (ograniczeń) na układ równań przez wprowadzenie tzw. zmiennych bilansujących u, v, w .

$$2x + 1y + u = 20 \Rightarrow u = 20 - 2x - y$$

$$1x + 1y + v = 8 \Rightarrow v = 8 - x - y$$

$$4x + 0y + w = 12 \Rightarrow w = 12 - 4x$$

Interpretacja zmiennych bilansujących jest następująca: u, v, w określają, jaka ilość poszczególnych środków S_1, S_2, S_3 pozostanie niewykorzystana w przypadku wyboru planu (x, y) . Wszystkie zmienne bilansujące przyjmują wyłącznie wartości nieujemne. Zadanie w postaci przekształconej zapisujemy:

$$f(x, y, u, v, w) = 5x + 3y$$

$$2x + y + u = 20$$

$$x + y + v = 8$$

$$4x + w = 12$$

$$x, y, u, v, w \geq 0$$

Zadanie można zapisać w postaci macierzowej:

$$[5 \quad 3 \quad 0 \quad 0 \quad 0] \cdot \begin{bmatrix} x \\ y \\ u \\ v \\ w \end{bmatrix} \rightarrow \max$$

oraz warunki ograniczające:

$$\begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 4 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x \\ y \\ u \\ v \\ w \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 20 \\ 8 \\ 12 \end{bmatrix}$$

$$\text{Oznaczając: } A = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 4 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad x = \begin{bmatrix} x \\ y \\ u \\ v \\ w \end{bmatrix}, \quad b = \begin{bmatrix} 20 \\ 8 \\ 12 \end{bmatrix}$$

$$c = [5 \quad 3 \quad 0 \quad 0 \quad 0]$$

możemy zapisać:

$$\begin{aligned} c \cdot x &\rightarrow \max \\ A \cdot x &= b \\ x &\geq 0 \end{aligned}$$

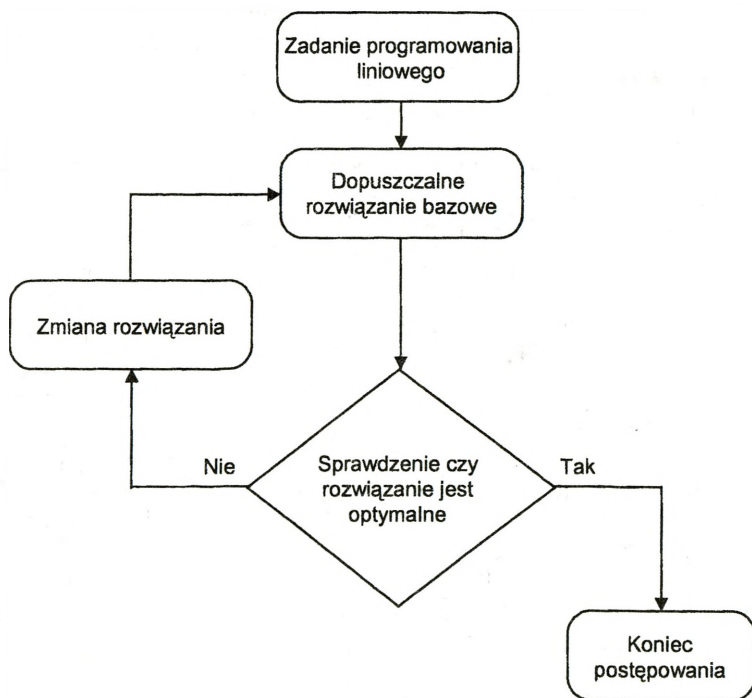
Powyższy zapis zadania jest nazywany postacią bazową zadania. Jest to uzasadnione tym, że w macierzy **A** można znaleźć podmacierz jednostkową. Przyjmując dla zmiennych niebazowych wartość zero, otrzymujemy rozwiązanie bazowe odpowiadające bazie *u*, *v*, *w*.

Rozwiązanie bazowe: *x* = 0, *y* = 0, *u* = 20, *v* = 8, *w* = 12.

SENS ROZWIĄZANIA BAZOWEGO

Funkcja celu w rozwiązaniu bazowym przyjmuje wartość zero. Wartości zmiennych *x* i *y* również równe zero wskazują na fakt, że nie zdecydowaliśmy się na produkcję. Stąd zmienne bilansujące, które określają niewykorzystane zasoby środków produkcji, są równe ich wartościom początkowym.

METODA SIMPLEKS



Źródło: *Ekonometria i badania operacyjne*, red. B. Guzik, Akademia Ekonomiczna w Poznaniu, Poznań 1999.

Rys. 2. Algorytm metody simpleks

Tworzymy tablicę simpleksową. Korzystamy z zapisu macierzowego naszego zadania.

$c \cdot x \rightarrow \max$		x	y	u	v	w	b
Baza	c	5	3	0	0	0	
u	0	2	1	1	0	0	20
v	0	1	1	0	1	0	8
w	0	4	0	0	0	1	12

W metodzie simpleks rozpatruje się ciąg sąsiednich rozwiązań bazowych. Sąsiednie rozwiązania bazowe różnią się między sobą jedną zmienną. Dobór sąsiedniej bazy odbywa się w ten sposób, by wartości funkcji celu były coraz lepsze. Przejście z jednej bazy do drugiej, odbywa się przy wykorzystaniu przekształceń elementarnych wykonywanych na układzie równań liniowych.

Zakładamy zatem, wartość zmiennej $x = 1$, przy niezmienionej wartości $y = 0$. Otrzymujemy:

$$2 + u = 20 \Rightarrow u = 18$$

$$1 + v = 8 \Rightarrow v = 7$$

$$4 + w = 12 \Rightarrow w = 8$$

Z powyższych równań wynika, że przyjęcie $x = 1$ spowoduje:

- obniżenie wartości zmiennej u o 2 jednostki,
- obniżenie wartości zmiennej v o 1 jednostkę,
- obniżenie wartości zmiennej w o 4 jednostki.

Następnie się sprawdza, czy w wyniku przeprowadzonych przekształceń uzyskano pozytywną zmianę wartości funkcji celu wywołaną zmianą wartości zmiennej x . Innymi słowy, należy stwierdzić, czy uzyskane rozwiązanie bazowe jest rozwiązaniem optymalnym. Jeżeli rozwiązanie nie jest optymalne, należy wyznaczyć nową bazę, ponownie dokonać przekształceń elementarnych tak, by uzyskać nowe rozwiązanie bazowe.

Kolejne kroki postępowania optymalizacyjnego zostaną omówione na przykładzie, którego analizę rozpoczęliśmy wyżej.

Metoda simpleks stanowi procedurę iteracyjną. Poszukuje się kolejnych rozwiązań lepszych od poprzednich. Każdy krok iteracyjny jest zapisywany w postaci tzw. tablicy simpleksowej. Procedura kończy się wówczas, gdy otrzymane rozwiązanie jest optymalne. Iteracyjny charakter procedury simpleks sprawia, że nadaje się ona do implementacji komputerowych.

Zadanie programowania liniowego zapisujemy w postaci kanonicznej, tzn. w takiej, gdzie wszystkie warunki ograniczające mają postać równań (nie nierówności). Uzyskuje się to przez wprowadzenie zmiennych bilansujących. Badaniu podlegają rozwiązania bazowe.

Postać wyjściowa tablicy simpleksowej jest taka, jak niżej.

		c		
c_b	x_b	A	I	b
	z_j	0		
	$c_j - z_j$	c		

Poszczególne oznaczenia oznaczają:

A – macierz współczynników ograniczających,

I – macierz jednostkowa,

b – wektor wyrazów wolnych warunków ograniczających,

c – wektor współczynników funkcji celu,

x_b – wektor zmiennych bazowych,

c_b – wektor współczynników funkcji celu przy zmiennych bazowych,

z_j – wektor, którego składowe mają wartości obliczone jako suma iloczynów współczynników odpowiadających poszczególnym zmiennym przez współczynniki z funkcji celu dla zmiennych bazowych, tzn.

$$z_j = \sum_{i=1}^n a_{ij} c_{bi}$$

gdzie: $c_j - z_j$ – wiersz zerowy zwany kryterium simpleks (dopóki w tym wierszu będą się znajdować wartości niedodatnie, rozwiązanie nie jest optymalne).

Kolejne tablice simpleksowe mają postać:

		c	
c_b	x_b	$B^{-1} A$	$B^{-1} b$
	z_j	$c_b^T B^{-1} A$	$c_b^T B^{-1} b$
	$c_j - z_j$	$C - c_b^T B^{-1} A$	$-c_b^T B^{-1} b$

gdzie: B^{-1} jest odwrotnością macierzy współczynników ograniczających, stojących aktualnie przy zmiennych bazowych.

Wracamy do naszego przykładu. Pierwszy krok iteracji i stosowna tablica iteracyjna ma postać, jak niżej.

c_b	$c_j \rightarrow$		5 3 0 0 0					
			$x \ y \ u \ v \ w$					
	0	u	2	1	1	0	0	20
	0	v	1	1	0	1	0	8
	0	w	4	0	0	0	1	12
	$Z_j \rightarrow$		0 0 0 0 0					
	$c_j - z_j \rightarrow$		5 3 0 0 0					

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \\ 4 & 0 \end{bmatrix} \quad I = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad b = \begin{bmatrix} 20 \\ 8 \\ 12 \end{bmatrix} \quad C = [5 \quad 3 \quad 0 \quad 0 \quad 0]$$

$$x_b = \begin{bmatrix} u \\ v \\ w \end{bmatrix} \quad c_b = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

W kolejnym kroku iteracji do bazy wchodzi ta zmienna, dla której wartość zerowego kryterium simpleks jest największa (tak jest w przypadku maksymalizacji funkcji celu). Wobec tego, w naszym przykładzie, do bazy wchodzi zmienna x_1 , dla której $c_j - z_j = \max = 5$. Konsekwencją tego jest wyrzucenie z bazy jednej zmiennej. Wyrzucimy tę zmienną, dla której iloraz jej wartości przez współczynniki stojące przy zmiennej wchodzącej do bazy jest najmniejszy.

W naszym przykładzie: $20:2 = 10$, $20:1 = 20$, $20:4 = 5$.

Stąd wnosimy, że zmienna x zajmuje miejsce zmiennej w , dla której wspomniany iloraz jest najmniejszy. Bazę stanowią zmienne u, v, x .

Budujemy macierz: $B = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 4 \end{bmatrix}$

i znajdujemy macierz do niej odwrotną: $B^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -\frac{1}{2} \\ 0 & 1 & -\frac{1}{4} \\ 0 & 0 & \frac{1}{4} \end{bmatrix}$

wektor wartości zmiennych bazowych:

$$\mathbf{B}^{-1}\mathbf{b} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -\frac{1}{2} \\ 0 & 1 & -\frac{1}{4} \\ 0 & 0 & \frac{1}{4} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 20 \\ 8 \\ 12 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 14 \\ 5 \\ 3 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{B}^{-1}\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -\frac{1}{2} \\ 0 & 1 & -\frac{1}{4} \\ 0 & 0 & \frac{1}{4} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \\ 4 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{c}_b^T \cdot \mathbf{B}^{-1} = [0 \quad 0 \quad 5] \cdot \begin{bmatrix} 1 & 0 & -\frac{1}{2} \\ 0 & 1 & -\frac{1}{4} \\ 0 & 0 & \frac{1}{4} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & \frac{5}{4} \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{c}_b^T \cdot \mathbf{B}^{-1} \cdot \mathbf{A} = [0 \quad 0 \quad 5] \cdot \begin{bmatrix} 1 & 0 & -\frac{1}{2} \\ 0 & 1 & -\frac{1}{4} \\ 0 & 0 & \frac{1}{4} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \\ 4 & 0 \end{bmatrix} =$$

$$= \begin{bmatrix} 0 & 0 & \frac{5}{4} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \\ 4 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5 & 0 \end{bmatrix}$$

$$c_b^T \cdot B^{-1} \cdot b = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 5 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 0 & -\frac{1}{2} \\ 0 & 1 & -\frac{1}{4} \\ 0 & 0 & \frac{1}{4} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 20 \\ 8 \\ 12 \end{bmatrix} =$$

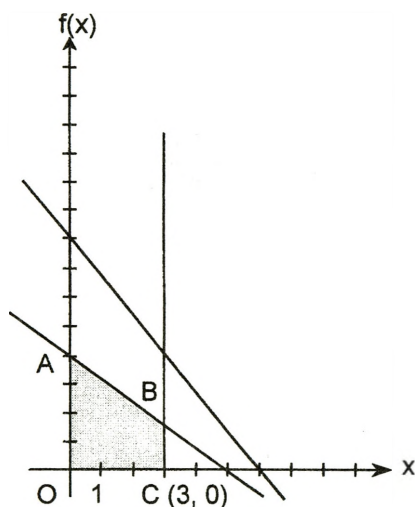
$$= \begin{bmatrix} 0 & 0 & \frac{5}{4} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 20 \\ 8 \\ 12 \end{bmatrix} = 15, \text{ wartość funkcji celu.}$$

Zatem tablica simpleksowa przyjmuje postać, jak niżej. Jako proponowane rozwiązanie otrzymaliśmy punkt o współrzędnych (3, 0), jeden z wierzchołków zakreskowanego wieloboku OABC (zobacz wykres 4. zamieszczony niżej).

		5 3 0 0 0					
c_b		x	y	u	v	w	
0	u	0	1	1	0	-1/2	14
0	v	0	1	0	1	-1/4	5
0	x	1	0	0	0	1/4	3
$Z_j \rightarrow$		5	0	0	0	5/4	15
$c_j - z_j \rightarrow$		0	3	0	0	-5/4	

wartości zmiennych bazowych

wartość funkcji celu



Proponowane rozwiązanie po pierwszym kroku iteracyjnym

Otrzymane rozwiązanie nie jest optymalne, ponieważ w wierszu zerowym występuje jeszcze wartość dodatnia. Należy zatem powtórzyć procedurę iteracyjną. Maksymalną wartość kryterium zerowego posiada zmienna y i to ona wchodzi do bazy w kolejnym kroku. Sprawdzamy ilorazy: $5 : 1 = 5$ (dla zmiennej u) i $5 : 1 = 5$ (dla zmiennej v). Wobec tego, że oba ilorazy są równe, nie ma znaczenia, którą zmienną wymienimy – u czy v . Zatem wyrzucamy zmienną u , a na jej miejsce wprowadzamy zmienną y .

Nowa baza: y, v, x . Ponownie budujemy macierz $\mathbf{B}$.

$$\mathbf{B} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -\frac{1}{2} \\ 1 & 1 & -\frac{1}{4} \\ 0 & 0 & \frac{1}{4} \end{bmatrix}$$

i znajdujemy macierz do niej odwrotną: $\mathbf{B}^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 \\ -1 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 4 \end{bmatrix}$

wektor wartości zmiennych bazowych:

$$\mathbf{B}^{-1}\mathbf{b} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 \\ -1 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 4 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 14 \\ 5 \\ 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 20 \\ -12 \\ 12 \end{bmatrix}$$

Ujemna wartość
sprawia, że nie musi-
my wykonywać dal-
szych obliczeń

Zmieniamy bazę na: u, y, x .

Wówczas:

$$\mathbf{B} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad \mathbf{B}^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{B}^{-1}\mathbf{b} = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 14 \\ 5 \\ 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 9 \\ 5 \\ 3 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{B}^{-1}\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{c}_b^T = [0 \quad 3 \quad 5]$$

$$\mathbf{c}_b^T \cdot \mathbf{B}^{-1} = [0 \quad 3 \quad 5] \cdot \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = [0 \quad 3 \quad 5]$$

$$\mathbf{c}_b^T \cdot \mathbf{B}^{-1} \cdot \mathbf{A} = [0 \quad 3 \quad 5] \cdot \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} = [5 \quad 3]$$

$$\mathbf{c}_b^T \cdot \mathbf{B}^{-1} \cdot \mathbf{b} = [0 \quad 3 \quad 5] \cdot \begin{bmatrix} 14 \\ 5 \\ 3 \end{bmatrix} = 30, \text{ wartość funkcji celu.}$$

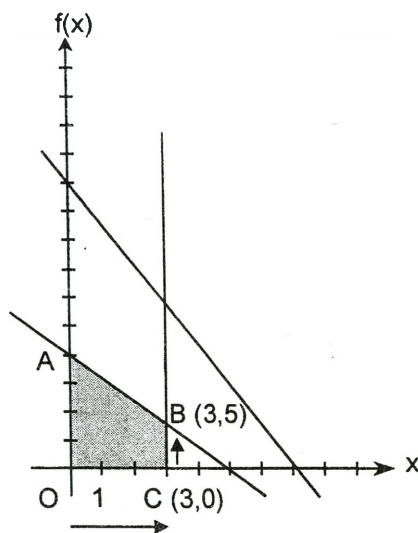
Tablica simpleksowa

		5 3 0 0 0					
c_b		x	y	u	v	w	
0	u	0	0	1	-1	0	9
3	y	0	1	0	1	0	5
5	x	1	0	0	0	1	3
$Z_j \rightarrow$		5	3	0	0	0	30
$c_j - z_j \rightarrow$		0	0	0	0	0	

wartości zmiennych bazowych

wartość funkcji celu

Uzyskane rozwiązanie jest optymalne, wiersz zerowy nie zawiera wartości dodatniej. Optymalne rozwiązanie stanowi para (3, 5). Jest to najbardziej „wysunięty na prawo” wierzchołek wieloboku OABC (wykres 5). Na wykresie zaznaczono „trasę” poszukiwań rozwiązania bazowego.



Rozwiązanie zadania produkcyjnego – postać geometryczna

WAŻNE WIADOMOŚCI Z ZAKRESU ANALIZY MATEMATYCZNEJ

Funkcje dwóch zmiennych

Niech Z oznacza zbiór punktów $P(x, y)$ płaszczyzny, na której wprowadzono prostokątny układ współrzędnych OXY .

Definicja

Funkcja dwóch zmiennych x i y określona w zbiorze Z jest to przyporządkowanie każdemu punktowi $P(x, y) \in Z$ dokładnie jednej liczby z .

Piszemy przy tym $z = f(x, y)$, dla $(x, y) \in Z$.

Litery x, y nazywamy zmiennymi niezależnymi, zaś z nazywamy zmienną zależną; f jest symbolem funkcji, czyli przyporządkowania.

Interpretacja geometryczna

Równanie $z = f(x, y)$ geometrycznie opisuje pewną powierzchnię. Para wartości x, y opisuje na płaszczyźnie xOy punkt $P(x, y)$, zaś $z = f(x, y)$ współrzędną z punktu $M(x, y, z)$ na powierzchni odpowiadającą punktowi P . Dlatego mówimy, że z jest funkcją punktu $P(x, y)$ i piszemy $z = f(P)$.

Pochodne cząstkowe I rzędu

Pochodną funkcji $z = f(x, y)$ względem x , wyznaczoną przy założeniu, że y jest stałe, nazywamy pochodną cząstkową funkcji z względem x i oznaczamy $\frac{\partial z}{\partial x}$ lub $f'_x(x, y)$. Analogicznie definiujemy i oznaczamy pochodną

cząstkową zmiennej z względem y : $\frac{\partial z}{\partial y}$ lub $f'_y(x, y)$.

Twierdzenie Eulera

Jeżeli $z = f(x, y)$ jest jednorodną funkcją stopnia n , to $x \frac{\partial z}{\partial x} + y \frac{\partial z}{\partial y} = nz$.

Funkcję $z = f(x, y)$ nazywamy funkcją jednorodną stopnia n względem obu zmiennych niezależnych, jeżeli $f(tx, ty) = t^n \cdot f(x, y)$.

Przykłady:

Wyznaczyć pochodne cząstkowe funkcji:

a) $z = x^3 + 3x^2y - y^3$

$$\frac{\partial z}{\partial x} = 3x^2 + 6xy \quad \frac{\partial z}{\partial y} = 3x^2 - 3y^2$$

b) $z = \ln(x^2 + y^2)$

$$\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{1}{x^2 + y^2} \cdot 2x = \frac{2x}{x^2 + y^2} \quad \frac{\partial z}{\partial y} = \frac{1}{x^2 + y^2} \cdot 2y = \frac{2y}{x^2 + y^2}$$

c) $z = \frac{y}{x}$

$$\frac{\partial z}{\partial x} = -\frac{y}{x^2} \quad \frac{\partial z}{\partial y} = \frac{1}{x}$$

d) $u = x \cdot e^{-yx}$

$$\frac{\partial u}{\partial x} = e^{-yx} + x \cdot (-y) \cdot e^{-yx} = e^{-yx} \cdot (1 - xy)$$

$$\frac{\partial u}{\partial y} = x \cdot (-x) \cdot e^{-yx} = -x^2 \cdot e^{-yx}$$

e) $z = \sqrt{x} \sin \frac{y}{x}$

$$\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{1}{2\sqrt{x}} \sin \frac{y}{x} + \sqrt{x} \left(-\frac{y}{x^2} \right) \cos \frac{y}{x}$$

$$\frac{\partial z}{\partial y} = \frac{1}{x} \sqrt{x} \cos \frac{y}{x}$$

Różniczka zupełna I rzędu

Jeżeli funkcja $z = f(x, y)$ ma w punkcie (x, y) ciągle pochodne cząstkowe, to jej przyrost może być przedstawiony w postaci:

$$\Delta z = \frac{\partial z}{\partial x} \Delta x + \frac{\partial z}{\partial y} \Delta y + \varepsilon \rho$$

gdzie: $\varepsilon \rightarrow 0$ przy $\rho = \sqrt{|\Delta x|^2 + |\Delta y|^2} \rightarrow 0$.

Wyrażenie $\frac{\partial z}{\partial x} \Delta x + \frac{\partial z}{\partial y} \Delta y$, będące główną częścią przyrostu Δz liniową względem przyrostu zmiennych niezależnych Δx i Δy , jest zwane różniczką zupełną i oznaczane przez dz .

$$dz = \frac{\partial z}{\partial x} \Delta x + \frac{\partial z}{\partial y} \Delta y$$

Podstawiając w powyższym wzorze $z = x$ lub $z = y$, otrzymamy odpowiednio: $dx = \Delta x$, $dy = \Delta y$. Wobec tego

$$dz = \frac{\partial z}{\partial x} dx + \frac{\partial z}{\partial y} dy$$

Ze względu na to, że $\varepsilon \rho$ jest nieskończenie małą rzędu wyższego niż 1 (gdy przyjmujemy, że Δx i Δy są nieskończenie małe rzędu 1), $\Delta z \approx dz$, tzn. przy dostatecznie małych Δx i Δy , całkowity przyrost funkcji jest w przybliżeniu równy jej różniczce zupełnej.

Funkcję $f(x, y)$ nazywamy funkcją różniczkowalną w punkcie (x, y) , jeżeli ma ona w tym punkcie różniczkę zupełną.

Przykłady:

Wyznaczyć różniczkę zupełną funkcji:

a) $z = x^2 y$

$$dz = \frac{\partial(x^2 y)}{\partial x} dx + \frac{\partial(x^2 y)}{\partial y} dy = 2xy dx + x^2 dy$$

b) $z = \frac{xy}{x-y}$

$$\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{y(x-y) - 1 \cdot xy}{(x-y)^2} \quad \frac{\partial z}{\partial y} = \frac{x(x-y) + 1 \cdot xy}{(x-y)^2}$$

$$\begin{aligned} dz &= \frac{\partial z}{\partial x} dx + \frac{\partial z}{\partial y} dy = \frac{y(x-y) - xy}{(x-y)^2} dx + \frac{x(x-y) + xy}{(x-y)^2} dy = \\ &= \frac{-y^2}{(x-y)^2} dx + \frac{x^2}{(x-y)^2} dy = \frac{-y^2 dx + x^2 dy}{(x-y)^2} \end{aligned}$$

$$c) z = \sqrt{x^2 + y^2}$$

$$\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{1}{2\sqrt{x^2 + y^2}} \cdot 2x \quad \frac{\partial z}{\partial y} = \frac{1}{2\sqrt{x^2 + y^2}} \cdot 2y$$

$$dz = \frac{\partial z}{\partial x} dx + \frac{\partial z}{\partial y} dy = \frac{2x}{2\sqrt{x^2 + y^2}} dx + \frac{2y}{2\sqrt{x^2 + y^2}} dy = \frac{xdx + ydy}{\sqrt{x^2 + y^2}}$$

Pochodne cząstkowe i różniczki zupełne wyższych rzędów

Niech funkcja $z = f(x, y)$ ma pochodne cząstkowe $\frac{\partial f}{\partial x}$ i $\frac{\partial f}{\partial y}$. Pochodne cząstkowe tych pochodnych nazywamy pochodnymi cząstkowymi drugiego rzędu funkcji $f(x, y)$. Oznacza się je następująco:

$$\frac{\partial \left(\frac{\partial f}{\partial x} \right)}{\partial x} = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}; \quad \frac{\partial \left(\frac{\partial f}{\partial x} \right)}{\partial y} = \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}$$

$$\frac{\partial \left(\frac{\partial f}{\partial y} \right)}{\partial x} = \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}; \quad \frac{\partial \left(\frac{\partial f}{\partial y} \right)}{\partial y} = \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}$$

Analogicznie definiuje się pochodne cząstkowe trzeciego rzędu i innych, wyższych rzędów. Pochodne mieszane, różniące się tylko kolejnością różniczkowania, są sobie równe, jeżeli są ciągłe:

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}; \quad \frac{\partial^3 f}{\partial x^2 \partial y} = \frac{\partial^3 f}{\partial x \partial y \partial x} = \frac{\partial^3 f}{\partial y \partial x^2} \text{ itd.}$$

Różniczkę zupełną drugiego rzędu definiuje się następująco:

$$d^2 z = \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} dx^2 + 2 \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} dx dy + \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} dy^2$$

Przykład:

$z = x^3 + x^2 y + y^3$. Wyznaczyć pochodne cząstkowe trzeciego rzędu.

$$\frac{\partial^3 z}{\partial x^3} = 6; \quad \frac{\partial^3 z}{\partial y^3} = 6; \quad \frac{\partial^3 z}{\partial y^2 \partial x} = 0; \quad \frac{\partial^3 z}{\partial x^2 \partial y} = 2$$

Całkowanie różniczki zupełnej

Aby wyrażenie $Pdx + Qdy$, gdzie P i Q są różniczkowalnymi funkcjami zmiennych x i y , było różniczką zupełną du , trzeba i wystarczy, aby był spełniony warunek:

$$\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial x}$$

Poszukując u (z warunków $\frac{\partial u}{\partial x} = P$ i $\frac{\partial u}{\partial y} = Q$) otrzymujemy:

$$u_1 = \int Pdx + \varphi_1(y), \quad u_2 = \int Qdy + \varphi_2(x), \quad u = u_1 = u_2$$

Aby wyrażenie $Pdx + Qdy + Rdz$, gdzie P, Q, R są funkcjami różniczkowalnymi zmiennych x, y, z , było różniczką zupełną, trzeba i wystarczy, aby spełnione były warunki:

$$\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial x}; \quad \frac{\partial P}{\partial z} = \frac{\partial R}{\partial x}; \quad \frac{\partial Q}{\partial z} = \frac{\partial R}{\partial y}$$

Poszukując u z warunków $\frac{\partial u}{\partial x} = P$, $\frac{\partial u}{\partial y} = Q$, $\frac{\partial u}{\partial z} = R$ otrzymujemy:

$$u_1 = \int Pdx + \varphi_1(y, z), \quad u_2 = \int Qdy + \varphi_2(x, z)$$

$$u_3 = \int Rdz + \varphi_3(x, y) \quad u = u_1 = u_2 = u_3$$

Wyznaczanie funkcji za pomocą jej różniczki zupełnej, nosi nazwę całkowania różniczki zupełnej.

Ekstrema funkcji dwóch zmiennych

Warunki konieczne

Różniczkowalna funkcja $z = f(x, y)$ może mieć ekstrema tylko w tych punktach, w których $\frac{\partial f}{\partial x} = 0$ i $\frac{\partial f}{\partial y} = 0$. Punkty te nazywamy punktami krytycznymi.

Warunki wystarczające

Oznaczmy przez A, B, C wartości pochodnych $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}, \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}$ i $\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}$

w punkcie krytycznym (x_0, y_0) . Wtedy, jeżeli:

$$1) \begin{vmatrix} A & B \\ B & C \end{vmatrix} > 0, \text{ to } \begin{cases} f(x_0, y_0) = z_{\max}, \text{ gdy } A < 0 \\ f(x_0, y_0) = z_{\min}, \text{ gdy } A > 0 \end{cases}$$

$$2) \begin{vmatrix} A & B \\ B & C \end{vmatrix} < 0, \text{ to nie ma ekstremum,}$$

$$3) \begin{vmatrix} A & B \\ B & C \end{vmatrix} = 0, \text{ to kryterium nie rozstrzyga tego czy kryterium jest, czy}$$

go nie ma (przypadek wątpliwy).

Ekstremum warunkowe

Aby znaleźć ekstremum funkcji $z = f(x, y)$ przy warunku, że x i y są związane równaniem $\varphi(x, y) = 0$, tworzymy funkcję pomocniczą (Lagrange'a) $u = f(x, y) + \lambda \varphi(x, y)$. Współrzędne punktu ekstremalnego (x, y) powinny spełniać trzy równania $\frac{\partial u}{\partial x} = y + 2\lambda x$, z których znajduje się λ, x i y .

Przykłady:

Wyznaczyć ekstremum funkcji:

$$a) z = x^2 - xy + y^2 + 9x - 6y + 20$$

Obliczamy pochodne cząstkowe:

$$\frac{\partial z}{\partial x} = 2x - y + 9, \quad \frac{\partial z}{\partial y} = -x + 2y - 6$$

Znajdujemy punkt krytyczny:

$$\begin{cases} 2x_0 - y_0 + 9 = 0 \\ -x_0 + 2y_0 - 6 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_0 = -4 \\ y_0 = 1 \end{cases}$$

Znajdujemy wartości pochodnych drugiego rzędu w punkcie krytycznym:

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = 2, \quad \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = -1, \quad \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = 2$$

Obliczamy wyznacznik:

$$\begin{vmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 2 \end{vmatrix} = 4 + 1 = 5 > 0$$

Wobec tego, że powyższy wyznacznik jest dodatni oraz

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = 2 > 0 \text{ stwierdzamy, że}$$

$$z(-4, 1) = (-4)^2 - (-4) \cdot 1 + 1^2 + 9 \cdot (-4) - 6 \cdot 1 + 20 = 1$$

$$z_{\min} = 1$$

b) $z = 2xy - 4x - 2y$

Obliczamy pochodne cząstkowe:

$$\frac{\partial z}{\partial x} = 2y - 4, \quad \frac{\partial z}{\partial y} = 2x - 2$$

Znajdujemy punkt krytyczny:

$$\begin{cases} 2y_0 - 4 = 0 \\ 2x_0 - 2 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_0 = -4 \\ y_0 = 1 \end{cases}$$

Znajdujemy wartości pochodnych drugiego rzędu w punkcie krytycznym:

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = 0, \quad \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = 2, \quad \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = 0$$

Obliczamy wyznacznik: $\begin{vmatrix} 0 & 2 \\ 2 & 0 \end{vmatrix} = -4 < 0$

Wobec powyższego faktu stwierdzamy, że funkcja nie posiada ekstremum.

c) $z = e^{x/2} (x + y^2)$

Obliczamy pochodne cząstkowe:

$$\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{1}{2} e^{x/2} (x + y^2) + e^{x/2}, \quad \frac{\partial z}{\partial y} = 2ye^{x/2}$$

Znajdujemy punkt krytyczny:

$$\begin{cases} \frac{1}{2} e^{x_0/2} (x_0 + y_0^2) + e^{x_0/2} = 0 \\ 2y_0 e^{x_0/2} = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_0 = -2 \\ y_0 = 0 \end{cases}$$

Znajdujemy wartości pochodnych drugiego rzędu w punkcie krytycznym:

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{1}{2} e^{x/2} (x + y^2) + e^{x/2} \right) = \frac{1}{4} e^{x/2} (x + y^2) + \frac{1}{2} e^{x/2} + \frac{1}{4} e^{x/2}$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = \frac{\partial}{\partial x} (2ye^{x/2}) = \frac{1}{2} \cdot 2ye^{x/2} = ye^{x/2}$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = \frac{\partial}{\partial y} (2ye^{x/2}) = 2e^{x/2}$$

Obliczamy wyznacznik:

$$\begin{vmatrix} \frac{1}{4}e^{-1} & 0 \\ 0 & 2 \cdot e^{-1} \end{vmatrix} = \frac{1}{2}e^{-2} > 0$$

Wobec tego, że powyższy wyznacznik jest dodatni oraz

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = \frac{1}{4}e^{-1} > 0 \text{ stwierdzamy, że:}$$

$$z(-2, 0) = e^{-\frac{2}{2}} (-2 + 0^2) = \frac{-2}{e}$$

$$z_{\min} = \frac{-2}{e}$$

Macierze i wyznaczniki

Określenie macierzy

Przyporządkujemy każdej parze uporządkowanej liczb naturalnych j, k , gdzie $1 \leq j \leq m$, $1 \leq k \leq n$, liczbę a_{jk} . Otrzymujemy funkcję dwóch zmiennych, zwaną macierzą prostokątną o m wierszach i n kolumnach.

Nazwa ta pochodzi stąd, że zwykle macierze zapisuje się w m wierszach i n kolumnach. W j -tym wierszu wypisuje się po kolei elementy mające pierwszy wskaźnik j , w k -tej kolumnie – liczby mające drugi wskaźnik k .

Przykłady macierzy: $[5]$, $\begin{bmatrix} 2 & 7 \end{bmatrix}$, $\begin{bmatrix} 3 \\ 2 \end{bmatrix}$, $\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 5 & 6 & 7 & 8 \end{bmatrix}$

Pierwsza z nich ma jeden wiersz i jedną kolumnę, druga – jeden wiersz i dwie kolumny, trzecia – dwa wiersze i cztery kolumny.

Ogólnie macierz zapisujemy w postaci tablicy:

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{bmatrix}$$

lub krócej $[a_{jk}]$, dodając w razie potrzeby zakres zmienności $j = 1, 2, 3, \dots, m$; $k = 1, 2, 3, \dots, n$.

Macierz oznaczamy dużymi literami **A**, **B**, ..., **M**, ...

Macierz nazywa się *kwadratową*, gdy $m = n$. Wówczas n nazywa się *stopniem macierzy*.

Oto przykłady macierzy pierwszego, drugiego i trzeciego stopnia:

$$[-2], \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 2 & -1 & 5 \\ -3 & 7 & 2 \end{bmatrix}$$

W drugiej z nich $a_{21} = 0$, w trzeciej $a_{13} = 1$, $a_{22} = -1$.

Macierz, dla której $a_{ij} = 0$, $i \neq j$, nazywa się macierzą jednostkową i oznacza się ją symbolem **I**.

Z pojęciem macierzy kwadratowej ściśle się wiąże pojęcie wyznacznika. Wyznacznik jest liczbą. Liczbę tę wylicza się w odpowiedni sposób na podstawie elementów macierzy kwadratowej. Teorię wyznaczników zapoczątkował problem znalezienia ogólnego wzoru na rozwiązanie układu n równań liniowych o n niewiadomych. Wzory te zostały podane w XVIII wieku przez Cramera. Teoria wyznaczników została rozwinięta w wieku XIX, zwłaszcza w pracach Laplace'a, Cauchy'ego i Jacobiego.

Pokażemy, w jaki sposób oblicza się wyznacznik dla macierzy niskich stopni. W przypadku macierzy stopnia pierwszego wyznacznik jest równy jednemu elementowi, jaki wchodzi w skład tej macierzy, czyli a_{11} .

Wyznacznik oznaczamy symbolami:

$$\det A \text{ lub } \det [a_{jk}], \text{ lub } \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{vmatrix}$$

Wyznacznik stopnia drugiego obliczamy według następującego wzoru:

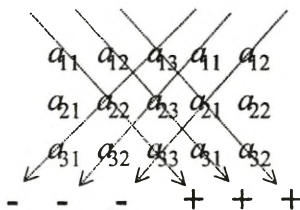
$$\det \mathbf{A} \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11} \cdot a_{22} - a_{12} \cdot a_{21}$$

Natomiast wyznacznik stopnia trzeciego według wzoru:

$$\det \mathbf{A} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{11} \cdot a_{22} \cdot a_{33} + a_{12} \cdot a_{23} \cdot a_{31} + a_{13} \cdot a_{21} \cdot a_{32} - \\ - a_{13} \cdot a_{22} \cdot a_{31} - a_{11} \cdot a_{23} \cdot a_{32} - a_{12} \cdot a_{21} \cdot a_{33}$$

Istnieje prosty sposób zapamiętania budowy wyznaczników stopnia trzeciego, zwany schematem Sarrusa. Dopisujemy z prawej strony wyznacznika jeszcze raz pierwszą i drugą kolumnę, a następnie tworzymy iloczyny ze znakiem według poniższego schematu.

Dla wyznaczników stopnia czwartego i wyższych, praktyczne sposoby obliczania wyznaczników nie są tak proste.



Korzystać będziemy z następujących zapisów:

- suma dwóch wierszy oznacza, że dodajemy odpowiednie elementy tych wierszy;
- iloczyn wiersza przez liczbę oznacza, że mnożymy przez tę liczbę wszystkie elementy wiersza,
- wiersze są proporcjonalne, jeżeli jeden z nich powstaje z przemnożenia drugiego przez pewną liczbę.

Wyznaczniki posiadają następujące podstawowe właściwości:

1. Jeżeli $\mathbf{A}$ jest macierzą kwadratową, to $\det \mathbf{A} = \det \mathbf{A}^T$.
2. Jeżeli wszystkie elementy pewnego wiersza lub kolumny macierzy $\mathbf{A}$ są zerowe, to $\det \mathbf{A} = 0$.

* $\mathbf{A}^T$ oznacza macierz transponowaną, która powstaje z macierzy $\mathbf{A}$ przez zamianę wierszy i kolumn (np. pierwszy wiersz staje się pierwszą kolumną itd.).

3. Jeżeli w wyznaczniku zamienimy miejscami dwa wiersze (lub dwie kolumny), to wyznacznik zmienia znak.

4. Wyznacznik o dwu identycznych wierszach (kolumnach) jest równy zero.

5. Jeżeli elementy pewnego wiersza (kolumny) pomnożymy przez k , to wartość wyznacznika wzrośnie k razy.

6. Wyznacznik zawierający dwa wiersze (kolumny) proporcjonalne jest równy zero.

7. Jeżeli i -ty wiersz (kolumna) wyznacznika jest sumą innych wierszy (kolumn), to wyznacznik jest równy zero.

8. Wyznacznik nie zmienia się, jeżeli do dowolnego wiersza (kolumny) dodamy wiersz (kolumnę) pomnożony(a) przez dowolną stałą.

Minory

Skreślmy w macierzy prostokątnej pewną ilość wierszy i kolumn tak, aby nieskreślone elementy utworzyły macierz kwadratową M . Wyznacznik $\det M$ nazywamy minorem macierzy.

Przykładami minorów macierzy prostokątnej

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 1 & 4 \\ 3 & 2 & 1 & 2 \end{bmatrix}$$

są:

$$\det [1] = 1, \quad \begin{vmatrix} 0 & 3 \\ 2 & 2 \end{vmatrix} = -6, \quad \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 4 \\ 3 & 1 & 2 \end{vmatrix} = 11$$

Są to minory odpowiednio *pierwszego*, *drugiego* i *trzeciego* stopnia. Pierwszy z nich powstał przez skreślenie drugiego i trzeciego wiersza oraz drugiej, trzeciej i czwartej kolumny. Drugi powstał przez skreślenie drugiego wiersza oraz pierwszej i trzeciej kolumny. Trzeci zaś przez skreślenie drugiej kolumny.

Niech A będzie macierzą kwadratową stopnia n . Skreślając j -ty wiersz i k -tą kolumnę, otrzymujemy minor stopnia $n-1$, który oznaczamy przez n_{jk} .

Na przykład dla macierzy trzeciego stopnia jest

$$M_{13} = \begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix}, \quad M_{32} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{13} \\ a_{21} & a_{23} \end{vmatrix}, \quad M_{33} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}$$

Zatem minorem A_{ij} odpowiadającym elementowi a_{ij} nazywamy wyznacznik powstały przez skreślenie i -tego wiersza i j -tej kolumny w wyznaczniku.

Dopełnieniem algebraicznym elementu a_{ij} nazywamy wyrażenie:

$$A_{ij} = (-1)^{i+j} M_{ij}.$$

Twierdzenie Laplace'a

$$(\wedge j = 1, \dots, n) \quad \det A = a_{1j} A_{1j} + \dots + a_{nj} A_{nj}$$

$$(\wedge k = 1, \dots, n) \quad \det A = a_{k1} A_{k1} + \dots + a_{kn} A_{kn}$$

pozwala rozwinąć wyznacznik względem elementów j -tej kolumny lub k -tego wiersza i ułatwić (dzięki mniejszej ilości kolumn i wierszy w dopełnieniach algebraicznych) obliczanie wyznacznika.

Dla macierzy kwadratowych stopnia n mamy:

$$\text{a) } \det(k \cdot A) = k^n \cdot \det A$$

$$\text{b) } \det(AB) = \det A \cdot \det B \quad (\text{twierdzenie Cauchy'ego}).$$

Macierz A nazywamy *osobliwą*, jeżeli $\det A = 0$, zaś *nieosobliwą*, jeżeli $\det A \neq 0$.

Macierzą *dopełnień algebraicznych* macierzy A nazywamy macierz $[A_{ij}]$, gdzie A_{ij} jest dopełnieniem algebraicznym elementu a_{ij} .

Jeżeli A jest macierzą kwadratową nieosobliwą, to istnieje macierz A^{-1} (*macierz odwrotna*):

$$A^{-1} = \frac{1}{\det A} [A_{ij}]^T$$

Jeżeli dla macierzy A istnieje taka macierz B , że $AB = BA = I$, to $B = A^{-1}$ (oczywiście wtedy zachodzi również $A = B^{-1}$).

Przykład

Znaleźć macierz odwrotną względem macierzy:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -2 & 1 \\ 3 & 1 & -1 \\ 1 & -3 & 2 \end{bmatrix}$$

Rozpoczynamy od obliczenia wyznacznika macierzy A .

$$\det \mathbf{A} = \begin{vmatrix} 1 & -2 & 1 \\ 3 & 1 & -1 \\ 1 & -3 & 2 \end{vmatrix} = 2 + 2 - 9 - 1 - 3 + 12 = 3$$

Stwierdzamy, że macierz $\mathbf{A}$ jest nieosobliwa, istnieje zatem macierz do niej odwrotna. Minory M_{ij} są następujące:

$$M_{11} = \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ -3 & 2 \end{vmatrix} = -1, \quad M_{12} = \begin{vmatrix} 3 & -1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = 7, \quad M_{13} = \begin{vmatrix} 3 & 1 \\ 1 & -3 \end{vmatrix} = -10$$

$$M_{21} = \begin{vmatrix} -2 & 1 \\ -3 & 2 \end{vmatrix} = -1, \quad M_{22} = \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = 1, \quad M_{23} = \begin{vmatrix} 1 & -2 \\ 1 & -3 \end{vmatrix} = -1$$

$$M_{31} = \begin{vmatrix} -2 & 1 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} = 1, \quad M_{32} = \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 3 & -1 \end{vmatrix} = -4, \quad M_{33} = \begin{vmatrix} 1 & -2 \\ 3 & 1 \end{vmatrix} = 7$$

Dopełnienia algebraiczne są więc następujące:

$$A_{11} = -1, \quad A_{12} = -7, \quad A_{13} = -10$$

$$A_{21} = 1, \quad A_{22} = 1, \quad A_{23} = 1$$

$$A_{31} = 1, \quad A_{32} = 4, \quad A_{33} = 7$$

Macierz dopełnień algebraicznych ma postać:

$$[\mathbf{A}_{ij}] = \begin{bmatrix} -1 & -7 & -10 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 4 & 7 \end{bmatrix}$$

Macierz dopełnień transponowana:

$$[\mathbf{A}_{ij}]^T = \begin{bmatrix} -1 & 1 & 1 \\ -7 & 1 & 4 \\ -10 & 1 & 7 \end{bmatrix}$$

zaś macierz odwrotna:

$$\mathbf{A}^{-1} = \begin{bmatrix} -\frac{1}{3} & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} \\ -\frac{7}{3} & \frac{1}{3} & \frac{4}{3} \\ -\frac{10}{3} & \frac{1}{3} & \frac{7}{3} \end{bmatrix}$$

Aby sprawdzić czy wynik jest poprawny, należy wykonać mnożenie $A \cdot A^{-1}$ i się przekonać, czy otrzymamy macierz jednostkową (macierz I).

$$\text{Mamy: } A \cdot A^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & -2 & 1 \\ 3 & 1 & -1 \\ 1 & -3 & 2 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} -\frac{1}{3} & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} \\ -\frac{7}{3} & \frac{1}{3} & \frac{4}{3} \\ -\frac{10}{3} & \frac{1}{3} & \frac{7}{3} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Przykład:

Znaleźć macierz odwrotną względem macierzy

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 1 \\ 2 & 5 & 2 \\ 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

Obliczamy wyznacznik macierzy A:

$$\det A = 1$$

Obliczamy $1/\det A$:

$$1/\det A = 1$$

Znajdujemy macierz dopełnień D:

$$D = \begin{bmatrix} (-1)^{1+1} \begin{vmatrix} 5 & 2 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} & (-1)^{1+2} \begin{vmatrix} 2 & 2 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} & (-1)^{1+3} \begin{vmatrix} 2 & 5 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} \\ (-1)^{2+1} \begin{vmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} & (-1)^{2+2} \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} & (-1)^{2+3} \begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} \\ (-1)^{3+1} \begin{vmatrix} 3 & 1 \\ 5 & 2 \end{vmatrix} & (-1)^{3+2} \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 2 \end{vmatrix} & (-1)^{3+3} \begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 5 \end{vmatrix} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2 & 2 & -3 \\ 1 & -1 & 2 \\ 1 & 0 & -1 \end{bmatrix}$$

Znajdujemy transponowaną macierz dopełnień D^T :

$$\mathbf{D}^T = \begin{bmatrix} -2 & 1 & 1 \\ 2 & -1 & 0 \\ -3 & 2 & -1 \end{bmatrix} \quad (\text{zamiana wierszy na kolumny})$$

Macierz odwrotna: $\mathbf{A}^{-1} = 1/\det(\mathbf{A}) \mathbf{D}^T$

$$\mathbf{A}^{-1} = \frac{1}{\det \mathbf{A}} \mathbf{D}^T = \begin{bmatrix} -2 & 1 & 1 \\ 2 & -1 & 0 \\ -3 & 2 & -1 \end{bmatrix}$$

Zakładając, że w poniższych punktach wymiary macierzy są tak dobrane, iż wszystkie działania są wykonalne, prawdziwe są następujące równości:

- a) $\mathbf{A} + \mathbf{B} = \mathbf{B} + \mathbf{A}$
- b) $(\mathbf{A} + \mathbf{B}) + \mathbf{C} = \mathbf{A} + (\mathbf{B} + \mathbf{C})$
- c) $\mathbf{A}(\mathbf{B} + \mathbf{C}) = \mathbf{AB} + \mathbf{AC}$
- d) $(\mathbf{AB})\mathbf{C} = \mathbf{A}(\mathbf{BC})$
- e) $(\mathbf{A}^T)^T = \mathbf{A}$
- f) $(\mathbf{A} + \mathbf{B})^T = \mathbf{A}^T + \mathbf{B}^T$
- g) $(\alpha\mathbf{A})^T = \alpha\mathbf{A}^T$
- h) $(\mathbf{AB})^T = \mathbf{B}^T\mathbf{A}^T$

Jeżeli $\mathbf{A}^T = \mathbf{A}$, to macierz $\mathbf{A}$ nazywamy macierzą symetryczną.

Niech macierze $\mathbf{A}$, $\mathbf{B}$, $\mathbf{C}$ będą postaci:

$$\mathbf{A} = [a_{ij}]_{(m,n)}, \quad \mathbf{B} = [b_{ij}]_{(m,n)}, \quad \mathbf{C} = [c_{ij}]_{(m,n)}$$

Dodawanie macierzy określone jest następująco:

$$\mathbf{A} + \mathbf{B} = \mathbf{C}, \text{ jeżeli } c_{ij} = a_{ij} + b_{ij}$$

Mnożenie macierzy przez liczbę

$$k \cdot \mathbf{A} = \mathbf{C}, \text{ jeżeli } c_{ij} = k \cdot a_{ij}$$

Jeżeli macierz $\mathbf{A}$ ma m wierszy i n kolumn, zaś macierz $\mathbf{B}$ n wierszy i k kolumn, czyli są postaci:

$$\mathbf{A} = [a_{ij}]_{(m,n)}, \quad \mathbf{B} = [b_{ij}]_{(n,k)}, \text{ to}$$

iloczyn $\mathbf{AB}$ takich macierzy definiujemy następująco:

$$\mathbf{AB} = \mathbf{C} = [c_{ij}]_{m,k}, \text{ gdzie: } c_{ij} = \sum_{k=1}^n a_{ik} b_{kj}$$

Macierz $\mathbf{C}$ ma więc m wierszy i k kolumn, a jej elementy tworzy się mnożąc odpowiednie elementy kolumn macierzy $\mathbf{B}$ i je sumując. Mówimy wówczas, że mnożymy wiersz przez kolumnę.

Jeżeli $\mathbf{A} = [a_{ij}]_{m,n}$, to macierz: $\mathbf{A}^T = [a_{ji}]_{n,m}$ nazywamy macierzą transponowaną względem macierzy $\mathbf{A}$.

Przykład:

Znaleźć macierz $\mathbf{A} - 2\mathbf{B}$, jeżeli:

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{B} = \begin{bmatrix} -1 & -\frac{1}{2} \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$$

Przy mnożeniu macierzy $\mathbf{B}$ przez liczbę -2 , należy pomnożyć przez -2 wszystkie jej elementy, a więc:

$$-2 \cdot \mathbf{B} = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ -2 & 0 \end{bmatrix}$$

Aby do macierzy $\mathbf{A}$ dodać macierz $-2 \cdot \mathbf{B}$, należy odpowiednie elementy zsumować, a więc:

$$\mathbf{A} - 2 \cdot \mathbf{B} = \begin{bmatrix} 3 & 2 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Przykład:

Znaleźć iloczyn macierzy $\mathbf{A}$ przez macierz $\mathbf{B}$, jeżeli:

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 2 & 0 & 0 \\ -3 & -1 & 0 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{B} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & -3 & 0 \\ -1 & -2 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

W celu wyznaczenia iloczynu $\mathbf{AB}$ trzeba znaleźć wszystkie elementy tej macierzy, którymi są sumy iloczynów odpowiednich wierszy macierzy $\mathbf{A}$ i kolumn macierzy $\mathbf{B}$.

Mamy więc:

$$\begin{aligned} \mathbf{A} \cdot \mathbf{B} &= \begin{bmatrix} 0-1+0 & 0-2+0 & 0+3+0 & 0+1+1 \\ 2+0+0 & 4+0+0 & -6+0+0 & 0+0+0 \\ -3+1+0 & -6+2+0 & 9-3+0 & 0-1+0 \end{bmatrix} = \\ &= \begin{bmatrix} -1 & -2 & 3 & 2 \\ 2 & 4 & -6 & 0 \\ -2 & -4 & 6 & -1 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

Łatwo zauważyć, że w tym przypadku iloczyn $\mathbf{BA}$ nie istnieje, gdyż macierz $\mathbf{B}$ ma w każdym wierszu cztery elementy, natomiast macierz $\mathbf{A}$ ma w każdej kolumnie trzy elementy.

Operacje elementarne na macierzach

Operacjami elementarnymi na macierzach nazywa się następujące operacje:

- 1) zamiana miejscami dwóch wierszy macierzy,
- 2) pomnożenie jednego z wierszy macierzy przez liczbę różną od zera,
- 3) dodanie do jednego z wierszy innego wiersza, pomnożonego przez liczbę różną od zera.

Jeżeli np. chcemy zmienić drugi wiersz macierzy $\mathbf{A}$, zaś operacja elementarna polega na dodaniu do drugiego wiersza macierzy $\mathbf{A}$ jej czwartego wiersza pomnożonego przez liczbę -2 , to wówczas zapis tej operacji będzie następujący: $w_2 - 2 \cdot w_4$.

Zawsze na pierwszym miejscu piszemy wiersz, który ma ulec zmianie.

Przykład:

Wyznaczyć macierz odwrotną do macierzy

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 2 & 6 & 4 \end{bmatrix}$$

W celu wyznaczenia macierzy odwrotnej, wykorzystamy metodę przekształceń elementarnych.

$$\left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 3 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & 6 & 4 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right]$$

$$w_3 - 2w_1 \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 3 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & -2 & 0 & 1 \end{array} \right]$$

$$w_1 - 3w_2 \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 1 & 1 & -3 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & -2 & 0 & 1 \end{array} \right]$$

$$\frac{1}{2}w_3 \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 1 & 1 & -3 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 0 & \frac{1}{2} \end{array} \right]$$

$$w_1 - w_3 \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 2 & -3 & -\frac{1}{2} \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 0 & \frac{1}{2} \end{array} \right]$$

A zatem A^{-1} ma postać:

$$\left[\begin{array}{ccc} 2 & -3 & -\frac{1}{2} \\ 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & \frac{1}{2} \end{array} \right]$$

Sprawdzamy otrzymany wynik wykonując mnożenie:

$$\left[\begin{array}{ccc} 1 & 3 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 2 & 6 & 4 \end{array} \right] \cdot \left[\begin{array}{ccc} 2 & -3 & -\frac{1}{2} \\ 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & \frac{1}{2} \end{array} \right] = \left[\begin{array}{ccc} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{array} \right]$$

KLASYCZNA METODA NAJMNIEJSZYCH KWADRATÓW (KMNK)

Metoda najmniejszych kwadratów (MNK) została opracowana przez C.F. Gaussa na początku XIX wieku. Podstawą do uzyskiwania estymatorów metodą MNK jest twierdzenie Gaussa-Markowa, które głosi, że jeżeli wektory błędów ε_i mają taką samą wariancję i są nieskorelowane, to estymator otrzymany metodą MNK jest najlepszy, tzn. ma najmniejszą wariancję. W klasycznym modelu regresji liniowej najlepszymi nieobciążonymi estymatorami liniowymi współczynników funkcji regresji są estymatory uzyskane metodą MNK. Oznacza to, że estymatory współczynników pozwalają oceniać parametry klasycznego modelu regresji liniowej bez błędu systematycznego i z najmniejszym przeciętnym błędem losowym. Estymatory MNK są nieobciążone, zgodne i efektywne.

- Estymator parametru jest nieobciążony, jeżeli wartość oczekiwana tego estymatora równa się szacowanemu parametrowi. Przy jednej próbie ocena różni się od szacowanego parametru, ale stosując estymator nieobciążony wiemy, że odchylenia wartości estymatora od wartości parametru nie mają tendencyjnego charakteru, są wśród nich zarówno odchylenia „na plus”, jak i „na minus” o różnych wartościach (ujemnych i dodatnich). Przy wyliczaniu średniej wartości niwelują się wszystkie różnice, a więc nieobciążony estymator gwarantuje, że oszacowany na jego podstawie parametr nie jest obciążony systematycznym błędem.

- Estymator jest zgodny, jeżeli jest stochastycznie zbieżny do szacowanego parametru, im większa liczebność próby, to prawdopodobieństwo zgodności wartości estymatora z szacowanym parametrem zmierza do 1, a więc przy dużej próbie prawdopodobieństwo popełnienia dużego błędu przy szacowaniu parametru populacji jest niewielkie.

- Najefektywniejszy spośród wszystkich nieobciążonych estymatorów danego parametru jest taki estymator, który ma najmniejszą wariancję.

Wartości zmiennej objaśnianej nazwiemy wartościami teoretycznymi zmiennej objaśnianej i oznaczymy je przez $\hat{y}_t$:

$$\hat{y}_t = a_0 + a_1 x_{1t} + a_2 x_{2t} + \dots + a_k x_{kt}$$

gdzie: $t = 1, 2, \dots, n$

Różnicę między wartością empiryczną a teoretyczną zmiennej objaśnianej dla okresu t można nazwać resztą – e_t

$$e_t = y_t - \hat{y}_t$$

Wektorowy zapis wartości teoretycznej zmiennej objaśnianej oraz resztywyglądają następująco:

$$\hat{\mathbf{y}} = \begin{bmatrix} \hat{y}_1 \\ \vdots \\ \hat{y}_n \end{bmatrix}, \quad \mathbf{e} = \begin{bmatrix} e_1 \\ \vdots \\ e_n \end{bmatrix}$$

W ten oto sposób otrzymujemy macierzowy zapis równań

$$\begin{aligned} \hat{\mathbf{y}} &= \mathbf{X}\mathbf{a} \\ \mathbf{e} &= \mathbf{y} - \hat{\mathbf{y}} = \mathbf{y} - \mathbf{X}\mathbf{a} \end{aligned}$$

Ideą metody najmniejszych kwadratów jest wyznaczenie takiego wektora oceny $\mathbf{a}$ wektora parametrów $\mathbf{a}$, dla którego funkcja $S(\mathbf{a}) = \mathbf{e}^T \mathbf{e}$, przyjmuje wartości najmniejsze. Funkcja $S(\mathbf{a})$ przedstawia sumę kwadratów odchyłeń teoretycznych wartości zmiennej objaśnianej od empirycznych wartości tej zmiennej i można ją zapisać w następującej postaci:

$$S(\mathbf{a}) = \mathbf{e}^T \mathbf{e} = (\mathbf{y} - \mathbf{X}\mathbf{a})^T (\mathbf{y} - \mathbf{X}\mathbf{a}) = \mathbf{y}^T \mathbf{y} - 2\mathbf{a}^T \mathbf{X}^T + \mathbf{a}^T \mathbf{X}^T \mathbf{X}\mathbf{a}$$

Poszukiwanie punktu stacjonarnego funkcji S , z warunku koniecznego istnienia ekstremum funkcji:

$$\partial S(\mathbf{a}) / \partial \mathbf{a} = 0$$

prowadzi do równania macierzowego:

$$-2\mathbf{X}^T \mathbf{y} + 2\mathbf{X}^T \mathbf{X}\mathbf{a} = 0$$

i do układu równań normalnych względem $\mathbf{a}$ o postaci

$$\mathbf{X}^T \mathbf{X}\mathbf{a} = \mathbf{X}^T \mathbf{y}$$

Macierz $\mathbf{X}^T \mathbf{X}$ jest macierzą kwadratową symetryczną stopnia $k+1$, która jest warunkiem otrzymania jedynego rozwiązania układu przyjmującego postać:

$$\mathbf{a} = (\mathbf{X}^T \mathbf{X})^{-1} \mathbf{X}^T \mathbf{y}$$

Poszukiwanie punktu stacjonarnego dla przedstawionego wyżej problemu, pokażemy wykonując proste przekształcenia algebraiczne. Dla uproszczenia zapisu pominiemy wskaźnik t przy zmiennej x oraz teoretyczne wartości zmiennej objaśnianej oznaczmy przez y . Uprościmy też model liniowy do postaci: $y_i = ax_i + b$. Poszukiwać będziemy wartości współczynników a i b , danych następującą zależnością funkcyjną:

$$f(a, b) = \sum_{i=1}^n (y_i - ax_i - b)^2$$

co możemy zapisać:

$$f(a, b) = \sum_{i=1}^n (y_i^2 + a^2 x_i^2 + b^2 + 2abx_i - 2ax_i y_i - 2by_i)$$

Budujemy układ równań:

$$\begin{cases} \frac{\partial f(a, b)}{\partial a} = 0 \\ \frac{\partial f(a, b)}{\partial b} = 0 \end{cases}$$

Przekształcając dalej, otrzymujemy:

$$\begin{cases} \frac{\partial f}{\partial a} = \sum_{i=1}^n 2ax_i^2 + \sum_{i=1}^n 2bx_i - \sum_{i=1}^n 2x_i y_i = 0 \\ \frac{\partial f}{\partial b} = \sum_{i=1}^n 2b + \sum_{i=1}^n 2ax_i - \sum_{i=1}^n 2y_i = 0 \\ a \sum_{i=1}^n x_i^2 + b \sum_{i=1}^n x_i - \sum_{i=1}^n x_i y_i = 0 \\ \sum_{i=1}^n b + a \sum_{i=1}^n x_i - \sum_{i=1}^n y_i = 0 \end{cases}$$

Obliczając b z drugiego z powyższych równań, otrzymujemy:

$$b = \frac{\sum_{i=1}^n y_i - a \sum_{i=1}^n x_i}{n}$$

Wstawiając do równania pierwszego w miejsce b , mamy:

$$a \sum_{i=1}^n x_i^2 + \frac{\sum_{i=1}^n x_i \sum_{i=1}^n y_i - a \left(\sum_{i=1}^n x_i \right)^2}{n} - \sum_{i=1}^n x_i y_i = 0$$

$$\begin{aligned}
 & a n \sum_{i=1}^n x_i^2 + \sum_{i=1}^n x_i \sum_{i=1}^n y_i - a \left(\sum_{i=1}^n x_i \right)^2 - n \sum_{i=1}^n x_i y_i = 0 \\
 & a \left[n \sum_{i=1}^n x_i^2 - \left(\sum_{i=1}^n x_i \right)^2 \right] = n \sum_{i=1}^n x_i y_i - \sum_{i=1}^n x_i \sum_{i=1}^n y_i \\
 & a = \frac{n \sum_{i=1}^n x_i y_i - \sum_{i=1}^n x_i \sum_{i=1}^n y_i}{n \sum_{i=1}^n x_i^2 - \left(\sum_{i=1}^n x_i \right)^2}
 \end{aligned}$$

Teraz możemy obliczyć współczynnik b :

$$b = \frac{\sum_{i=1}^n y_i - a \sum_{i=1}^n x_i}{n} = \bar{y} - a \bar{x}$$

Stąd otrzymujemy:

$$b = \frac{n \sum_{i=1}^n x_i y_i - \sum_{i=1}^n x_i \sum_{i=1}^n y_i}{n \sum_{i=1}^n x_i^2 - \left(\sum_{i=1}^n x_i \right)^2}$$

Procedura obliczenia wektora ocen, kończy etap estymacji parametrów strukturalnych modelu. Analogiczne wyniki do powyższych, otrzymamy, posługując się metodą macierzową. Po wyznaczeniu parametrów strukturalnych metodą MNK, należy zweryfikować model pod względem merytorycznym i statystycznym.

LITERATURA

- Brandt S.: *Metody statystyczne i obliczeniowe analizy danych*, PWN, Warszawa 1976.
- Chow G.C.: *Ekonometria*, PWN, Warszawa 1995.
- Czochralska J.I.: *Wykłady z metod numerycznych dla ekonomistów*, SGH, Warszawa 1994.
- Gatnar E.: *Symboliczne metody klasyfikacji danych*, PWN, Warszawa 1998.
- Grabowski T.: *Metody taksonomii numerycznej w modelowaniu zjawisk społeczno-gospodarczych*, PWN, Warszawa 1996.
- Gruszczyński M., Mierzejewski P.: *Wstęp do ekonometrii w 100 oknach*, SGH, Warszawa 1998.
- Gutenbaum J.: *Modelowanie matematyczne systemów*, Omnitech Press, Warszawa 1992.
- Jaskulski P.: *Taksonomia numeryczna – wprowadzenie do problematyki klasyfikacji*, „Biuletyn Antropologiczny” t. 1, 1997.
- Jędrzejczyk Z., Kukuła K., Skrzypek J., Walkosz A.: *Badania operacyjne w przykładach i zadaniach*, PWN, Warszawa 1996.
- Kulikowski R.: *Analiza systemowa i jej zastosowania*, PWN, Warszawa 1977.
- Łopińska-Sobczak N.: *Opisowe modele ekonometryczne*, Wyd. Uniwersytetu Łódzkiego, Łódź 1998.
- Nahorski Z.: *Metoda najmniejszych kwadratów, budowa i dobór modelu*, cz. 1 i 2, WSISiZ, Warszawa 1999.
- Ostasiewicz W.: *Statystyczne metody analizy danych*, Wyd. Akademii Ekonomicznej we Wrocławiu, Wrocław 1998.
- Radhakrishna Rao C.: *Statystyka i prawda*, PWN, Warszawa 1994.
- Sobczyk M.: *Statystyka*, PWN, Warszawa 1997.
- Trzaskalik T.: *Modelowanie optymalizacyjne*, Łódź 1998.
- Wagner H.M.: *Badania operacyjne*, PWE, Warszawa 1980.
- Welfe A.: *Ekonometria*, PWE, Warszawa 1997.
- Welfe A.: *Ekonometria, zbiór zadań*, PWE, Warszawa 1997.

NAJNOWSZE PUBLIKACJE AKADEMII OBRONY NARODOWEJ

do nabycia w Wydziale Wydawniczym AON
al. gen. A. Chruściela 103, bl. 2
00-910 Warszawa, tel./faks 681 37 52

- Robert Bojarski – **Operacja obronna**
- Robert Bojarski – **Główne problemy działań operacyjnych**
- Jan Czaja – **Stolica apostolska wobec integracji europejskiej**
- Wojciech Drażczyk – **Logistyka sił powietrznych w działaniach wielonarodowych**
- **Działania (operacje) połączone**. Materiały z konferencji naukowej
- Marek Gąska, Andrzej Ciupiński – **Międzynarodowe prawo humanitarne**
- Marek Gąska – **Obronność w aktach prawnych Rzeczypospolitej Polskiej**
- Jerzy Groskrejc – **Antropologiczne i aksjologiczne aspekty edukacji oficerów**
- Jerzy Groskrejc – **Nauczyciel w edukacji. Funkcje – kompetencje – koncepcje kształcenia**
- Henryk Herman – **Działania specjalne w wojnach i konfliktach zbrojnych po II wojnie światowej**
- Michał Huzarski (red.) – **Taktyka ogólna wojsk lądowych**
- Kuba Jałoszyński – **Terroryzm antyizraelski**
- Kuba Jałoszyński – **Terroryzm czy terror kryminalny w Polsce?**
- Kuba Jałoszyński – **Zagrożenie terroryzmem w wybranych krajach Europy Zachodniej oraz w Stanach Zjednoczonych**
- Tadeusz Jemioło – **Globalizacja. Szanse i zagrożenia**
- Jarosław Kardas, Krzysztof Loranły – **Wybrane problemy bezpieczeństwa i obronności państwa w opiniach pracowników administracji publicznej**
- Waldemar Kitler (red.) – **Obrona cywilna (niemilitarna) w obronie narodowej III RP**
- Waldemar Kitler – **Obrona narodowa w wybranych państwach demokratycznych**
- Stanisław Korzeniowski – **Żandarmeria wojskowa**
- Mirosław Kosiński – **Umowa offsetowa i inne formy udziału państwa w międzynarodowym obrocie gospodarczym**
- Marian Kozub – **Lotnictwo w operacjach połączonych**
- Roman Kwecka – **Informacja w walce zbrojnej**
- Zbigniew Lach, Julian Skrzyp, Andrzej Laszczuk – **Wojskowo-geograficzna charakterystyka Niemiec**
- Leonard Łukaszuk – **Europejskie prawo pokoju i bezpieczeństwa**
- Józef Marczak (red.) – **Samooorganizacja społeczeństwa na rzecz bezpieczeństwa powszechnego. Samoobrona powszechna III RP**
- Zdzisław Maślak, Krzysztof Kozłowski, Piotr Krawczyk – **Podstawy użycia lotnictwa myśliwskiego**
- Wojciech Michalak – **Dominacja z powietrza**
- Ireneusz Nowak – **Wybrane problemy historii polskiej techniki wojskowej XX wieku. Sprzęt i środki wojsk chemicznych**
- Marek Obrusiewicz – **Wielonarodowe połączone siły zadaniowe CJTF**
- Janusz Płaczek – **Ewolucja polskiej myśli obronno-ekonomicznej w latach 1976–2000**
- Janusz Płaczek (red.) – **Gospodarka obronna Polski w końcu lat dziewięćdziesiątych. Szanse i zagrożenia**
- Adam Radomyski – **Zagrożenie śmigłowcowe dywizji zmechanizowanej**
- Adam Rejmak – **Ratownictwo lotnicze**
- Piotr Sienkiewicz – **5 wykładów**

- Aleksandra Skrabacz – **Kobiety w obronie narodowej Polski u progu XXI wieku**
- Katarzyna Słaboń – **Sytuacja jeńców wojennych w konflikcie iracko-irańskim (1980–1988)**
- Jerzy Słowik – **Dowodzenie brygadą zmechanizowaną (pancerną) w natarciu**
- **Słownik terminów z zakresu psychologii** (praca zbiorowa)
- Marek Sołoducha, Piotr Malinowski – **Użycie artylerii w szczególnych rodzajach działań bojowych**
- Henryk Spustek – **Wybrane zagadnienia badań operacyjnych i modelowania liniowego**
- Zenon Stachowiak – **Metodyka i metodologia pisania prac kwalifikacyjnych (licencjackich, magisterskich i podyplomowych)**
- Ryszard Szyra – **Powietrzna sztuka operacyjna wybranych państw**
- Jarosław Wolejszo, Zbigniew Fiołna – **Dowodzenie brygadą zmechanizowaną (pancerną) w obronie**
- Janusz Wojtasik (red.) – **Studia z dziejów polskiej techniki wojskowej od XVI do XX wieku**
- Jerzy Zieliński (red.) – **Podstawowe założenia dydaktyki sztuki operacyjnej**
- Janusz Zuziak – **Dzieje Instytutu Józefa Piłsudskiego w Londynie 1947–1997**

w przygotowaniu:

- Andrzej Ciupiński, Robert Białoskórski – **Wczesne ostrzeżenie i zapobieganie współczesnym konfliktom zbrojnym w strategii Sojuszu Północnoatlantyckiego**
- Jerzy Gotowała – **Lotnictwo XXI wieku**
- Józef Halik – **Metodyka opracowania pracy magisterskiej i studyjnej**
- Tadeusz Jemiolo, Kazimierz Malak (red.) – **Bezpieczeństwo zewnętrzne Rzeczypospolitej Polskiej**
- Edward Jan Nalepa – **Wojsko wobec polskiego października '56**
- Krzysztof Przeworski – **Evakuacja jako sposób ochrony ludności**
- Sylwester Sadowski – **Podstawowe zagadnienia teorii walki zbrojnej**
- Zbigniew Skwarek – **Powietrzne systemy wczesnego wykrywania i powiadamiania**
- Ryszard Stępień (red.) – **Edukacja w wyższych szkołach wojskowych**
- Wojciech Zawadzki, Tomasz Majewski, Norbert Prusiński – **Informacyjne uwarunkowania procesu decyzyjnego**



Zamówienia przyjmujemy telefonicznie lub pisemnie
